

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

YVES BAMBERGER

Surfaces minima avec obstacles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 13, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A4_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES MINIMA AVEC OBSTACLES

par Yves BAMBERGER

Introduction. - Nous nous proposons d'étudier le problème de Plateau dans $\mathbb{R}^n$ avec des conditions unilatérales :

PROBLÈME. - Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, une fonction ψ définie sur Ω à valeurs réelles, une fonction f définie sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω à valeurs réelles, trouver des conditions suffisantes pour qu'il existe une fonction u unique de classe C^1 définie sur Ω à valeurs réelles, telle que :

$$(1) \quad u = f \quad \text{sur} \quad \partial\Omega ;$$

$$(2) \quad u \geq \psi \quad \text{sur} \quad \Omega ;$$

u rend minimum l'intégrale d'aire

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, d\lambda ,$$

sous les conditions (1) et (2).

Les théorèmes 1, 2, 3 et 4 ont été énoncés par MIRANDA. Leurs démonstrations, mise à part celle du théorème 2 qui se trouve dans un texte non publié de MIRANDA, ne se trouvent pas, à notre connaissance, dans la littérature.

L'idée de la résolution du problème est de considérer les surfaces minima comme des frontières d'ensemble. Cette idée est due à De GIORGI, et se trouve dans le théorème suivant relatif au cas sans obstacle :

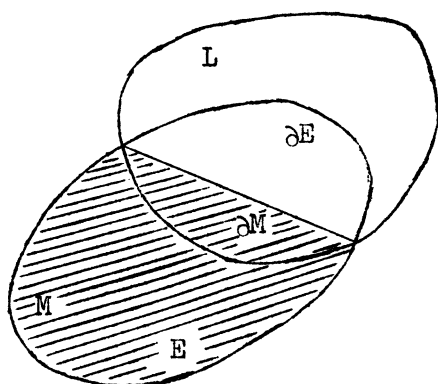


fig. 1 (M est bistré)

THÉORÈME 0 (De GIORGI). - Soient un ensemble localement de périmètre fini (*) $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), et un ensemble borné L . On note $\mathcal{M} = \{M \subset \mathbb{R}^n ; M \text{ localement de périmètre fini ; } M - L = E - L\}$.

Il existe $M \in \mathcal{M}$ dont la frontière est d'aire minimum sur L .

(*) Voir, au § 1, la définition des ensembles localement de périmètre fini.

On dit que M est minimal sur L (fig. 1). Dans le cas avec obstacle, nous imposons

$$M \supset A ,$$

A désignant l'obstacle (fig. 2).

Dans le cas sans obstacle, De GIORGI a aussi établi un résultat de régularité :

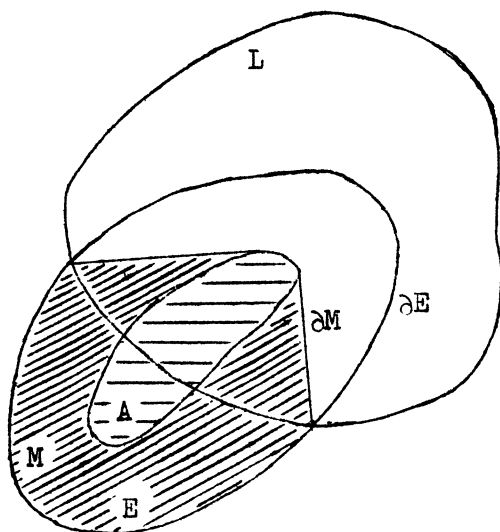


fig. 2

THÉOREME 0' (De GIORGI). - Sous les hypothèses du théorème 0, et si L est ouvert, il existe un ouvert $L' \subset L$ tel que $\partial M \cap L'$ soit une variété analytique de dimension $(n - 1)$, et

$$H_{n-1}[\partial M \cap (L - L')] = 0$$

(H_{n-1} est la $(n - 1)$ -mesure de Hausdorff sur $\mathbb{R}^n$).

On a établi (voir [15], [4], [1], [14]) que $L = L'$ pour $n \leq 7$, mais ce résultat est faux pour $n \geq 8$ ([2]).

Signalons que NITSCHKE [12] a résolu un problème analogue au problème posé, pour $n = 2$, et lorsque ψ est définie, non sur Ω , mais sur un segment fermé de Ω :

THÉOREME (NITSCHKE). - Soit Ω un ouvert borné convexe du plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormé xOy), symétrique par rapport à Ox , et contenant le segment $\sigma_0 = \{(x, y) ; |x| \leq a, y = 0\}$. On note

$$\Omega_0 = \Omega - \sigma_0, \quad [c_1, c_2] = \bar{\Omega} \cap \{y = 0\}.$$

Soit $x \rightarrow f(x)$ une fonction concave positive définie sur σ_0 , et nulle en ses extrémités.

Il existe une fonction $z = u(x, y)$ continue sur $\bar{\Omega}$, positive sur Ω , analytique réelle sur Ω , qui minimise l'intégrale d'aire

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx \, dy ,$$

sous les conditions

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega , \\ u(x, 0) \geq f(x) , & \forall x \in \sigma_0 . \end{cases}$$

Cette fonction vérifie en outre :

- (a) $u(x, 0) = f(x)$ sur un segment fermé strictement inclus dans σ_0 ;
 (b) $u(x, 0) > f(x)$ ailleurs.

Le premier paragraphe rappelle certains résultats, et fixe les notations. Le second paragraphe étudie la généralisation du théorème 0 au cas "avec obstacle" ; le paragraphe 3 celle du théorème 0'. Le cas non paramétrique est l'objet du paragraphe 4. Enfin le paragraphe 5 donne une réponse au problème posé initialement.

1. Notations. Rappels.

1° La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est notée $|\cdot|$, la distance euclidienne $d(\cdot, \cdot)$. On note $B_r(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ est notée λ_n ou λ .

2° On note $C^{1,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 holdériennes d'ordre α ($\alpha \leq 1$), i. e. les fonctions f de $C^1(\Omega)$ telles que

$$\exists k > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(y) \right| \leq k d^\alpha(x, y).$$

3° Un ensemble mesurable M de $\mathbb{R}^n$ est dit localement de périmètre fini (l. p. f.), si les dérivées partielles du 1er ordre au sens des distributions, de sa fonction caractéristique χ_M , sont des mesures (pour plus de détails, cf. [8] et [3]).

On note $D_i \chi_M$ la i -ième dérivée partielle, $D\chi_M$ la mesure vectorielle de composantes $(D_i \chi_M)_{i=1,\dots,n}$.

Le périmètre de M sur un compact K (qui est égal à l'aire de Lebesgue de l'intersection avec K de la frontière de M , notée ∂M) est la variation totale de $D\chi_M$ sur K . On le note

$$\int_K |D\chi_M|.$$

On note $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des parties l. p. f.

4° L'espace des mesures vectorielles de dimension n étant muni de la topologie vague, l'application qui, à une mesure μ associe sa variation totale sur un compact fixe quelconque, est s. c. i.

5° On dit qu'un ensemble l. p. f. M admet une normale notée $\nu(x)$ en un point $x \in \partial M$, si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B_r(x)} D\chi_M \right) / \left(\int_{B_r(x)} |D\chi_M| \right)$$

existe. On note

$$v(x) = \frac{D\varphi_M}{|D\varphi_M|}(x) \quad .$$

6° Énonçons une propriété des ensembles l. p. f. :

PROPOSITION 1. - Soient M et $N \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Si $M \cap \partial B_{r,x} = N \cap \partial B_{r,x}$,

$$\int_{\overline{B_{r,x}}} D\varphi_M = \int_{\overline{B_{r,x}}} D\varphi_N \quad .$$

2. Théorème d'existence.

THÉOREME 1. - $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $\forall E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $E \supset A$, $\forall L \subset \mathbb{R}^n$, L borné, il existe un ensemble M l. p. f. qui, sous les conditions :

- (1) $M \supset A$,
- (2) $M - L = E - L$,

minimise sur L le périmètre

$$\int_L |D\varphi_M| \quad .$$

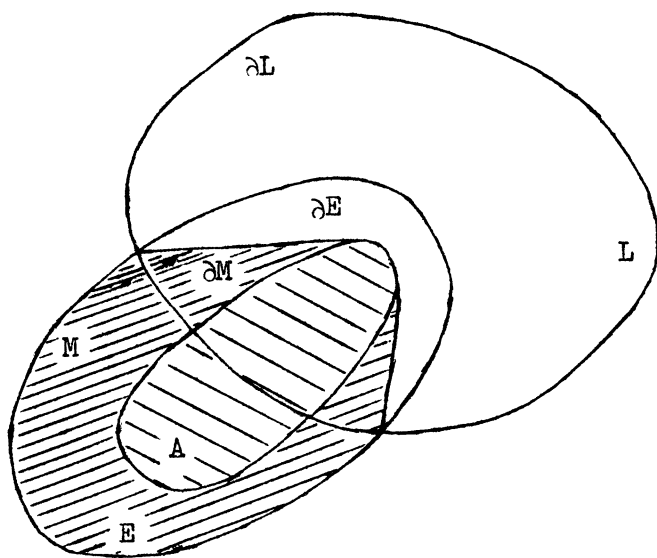


fig. 3

Autrement dit, $\forall P \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, avec $P \supset A$, $P - L = E - L$,

$$\int_L |D\varphi_M| \leq \int_L |D\varphi_P| \quad .$$

Démonstration (par compacité). - Munissons $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie L^1_{loc} définie sur l'écart :

$$(P, Q) \rightarrow \Delta(P, Q)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_P - \varphi_Q| \, d\lambda \quad .$$

Posons

$$\mathcal{P} = \left[P \in BV(\mathbb{R}^n) \right], \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad P \supset A, \\ (2) \quad P - L = E - L, \\ (3) \quad \int_L |D\varphi_P| \leq \int_L |D\varphi_E| \end{array} \right. .$$

$\mathcal{P}$ n'est pas vide, car il contient E . L'ensemble des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathcal{P}$ est, d'après la condition (3), un ensemble borné de fonctions dans L^1_{loc} , ainsi que leurs dérivées partielles premières au sens des distributions : c'est donc ([6], chapitre VI, remarque suivant le théorème XVII) un ensemble relativement compact de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. C'est aussi un fermé. $\mathcal{P}$ est donc compact.

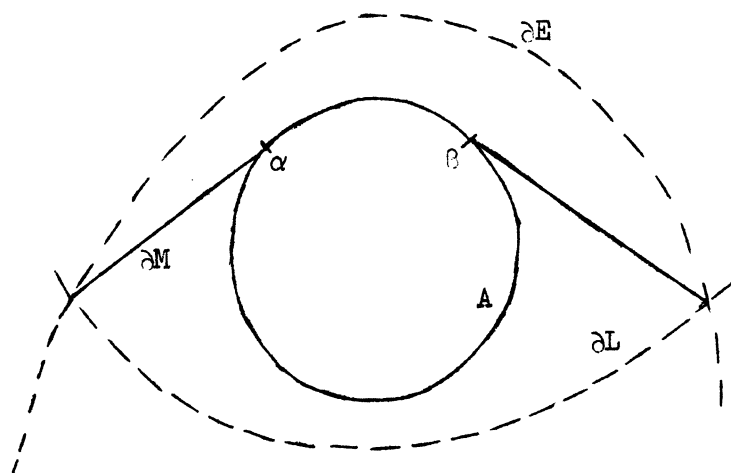
Comme l'application $P \rightarrow \int_L |D\varphi_P|$ est s. c. i. (cf. § 1), elle atteint son minimum sur $\mathcal{P}$.

3. Propriétés de régularité.

Les difficultés découlent du fait que ∂M peut toucher ∂A . Nous sommes donc conduits à imposer à ∂A des conditions de régularité. Dans le cas général, on ne peut cependant pas espérer atteindre la classe C^2 (cf. figure ci-contre).

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (MIRANDA). - Soient L un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 7$), $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\partial A \cap L$ soit une variété de dimension $n - 1$ de classe $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \leq 1$).



$A =$ disque du plan $\mathbb{R}^2$

∂A est de classe C^∞

∂M est représenté en trait continu et n'est pas de classe C^2 en α et β

Si $M \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, contient A , et vérifie la propriété (π) :

(π) Pour tout compact $K \subset L$, et tout ensemble l. p. f. E qui contient A et vérifie $E - K = M - K$, on a $\int_L |D\varphi_M| \leq \int_L |D\varphi_E|$;
alors $\partial M \cap L$ est une variété de dimension $n - 1$ de classe $C^{1,\alpha}$.

La propriété de minimalité est énoncée autrement que ci-dessus en raison des applications ultérieures. La démonstration repose sur le théorème du vecteur normal (cf. par exemple [8], théorème 5.8) :

Soit M un ensemble l. p. f. sur un ouvert L de $\mathbb{R}^n$. Si le champ des vecteurs normaux

$$x \rightarrow \frac{D\varphi_M}{|D\varphi_M|}(x)$$

est défini et continu sur $\partial M \cap L$, alors $\partial M \cap L$ est une variété de dimension $(n-1)$ et de classe C^1 .

Pour appliquer ce théorème, il faut établir deux lemmes, et utiliser les résultats connus dans le cas des surfaces minima sans obstacle ($A = \emptyset$).

DÉFINITION. - Un ensemble est dit A-minimal sur L, s'il appartient à $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, s'il contient A, et vérifie la propriété (π) du théorème 2.

PROPOSITION 2. - Soient $L \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ($n \leq 7$), $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $\partial A \cap L$ variété de classe $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \leq 1$).

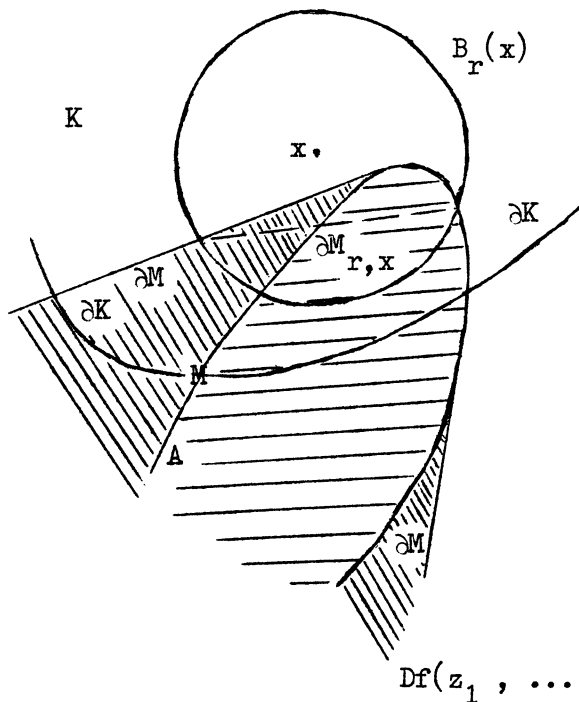
Si M est A-minimal sur L, alors, pour tout compact $K \subset L$, il existe $c(A, K)$ et $r_0 > 0$ tels que

$$\forall x \in K, \forall r < r_0, \left(\int_{B_r(x)} |D\alpha_M| - \int_{B_r(x)} |D\alpha_{M_{x,r}}| \right) \leq c(A, K) r^{n-1+2\alpha},$$

où $M_{x,r}$ désigne une solution du problème :

$$M_{x,r} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad M_{x,r} - B_r(x) = M - B_r(x),$$

$$\int_{B_r(x)} |D\alpha_{M_{x,r}}| \text{ minimum.}$$



Démonstration. - K étant compact, il existe r_0 (dépendant uniquement de A et de K) tel que, pour tout x de K et $r < r_0$, $B_r(x) \cap \partial A$ soit le graphe d'une fonction f de classe $C^{1,\alpha}$:

$$B_r(x) \cap \partial A = \{y; y_i = f(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n), (y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \in \Omega\},$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, et $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Nous pouvons supposer qu'il existe un point z de Ω tel que

$$Df(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n) = 0,$$

et, par suite, $\exists c_x > 0$ telle que

$$\forall (y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \in \Omega, \quad |Df(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)| \leq c_x r^\alpha,$$

et, par compacité,

$$(1) \quad |Df(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)| \leq c(A, K) r^\alpha.$$

Par définition de M ,

$$\int_{B_r(x)} |D\varphi_M| \leq \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x} \cup A}|.$$

Donc, pour établir le lemme, il suffit de majorer

$$\psi(r) = \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x} \cup A}| - \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}}|.$$

Comme $(M_{r,x} \cup A) \cap \partial B_r(x) \subset M_{r,x} \cap \partial B_r(x)$, il vient

$$\psi(r) \leq \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x} \cup A}| - \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}}|,$$

soit

$$\psi(r) \leq \int_{B_r(x)} |D\varphi_A| - \int_{B_r(x) \cap A} |D\varphi_{M_{r,x}}|.$$

D'après le théorème 0', et comme $n \leq 7$, $\partial M_{r,x} \cap B_r(x)$ est une variété analytique ; il vient

$$\psi(r) \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Df(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)|^2} - 1 \, dy_1 \dots d\hat{y}_i \dots dy_n,$$

qui donne le résultat annoncé en utilisant l'inégalité (1).

Nous admettrons la proposition suivante, relative au cas sans obstacle (cf. [10], théorème 5.7) :

PROPOSITION 3. - Si $n \leq 7$, si N est minimal dans L , et si $B_r(x) \subset L$, alors

$$\int_{B_r(x)} |D\varphi_N| - \left| \int_{B_r(x)} D\varphi_N \right| \leq c(n) r^{n+1}.$$

Nous pouvons établir que :

LEMME 1. - Si $n \leq 7$, si $L \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, si $A \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $\partial A \cap L$ soit une variété de classe $C^{1,\alpha}$, et si M est A -minimal dans L , alors, pour tout compact $K \subset L$, il existe deux constantes $r_0 > 0$ et $c_1(A, K) > 0$ telles que

$$\forall x \in K, \quad \forall r < r_0, \quad \left| \int_{B_r(x)} |D\varphi_M| - \int_{B_r(x)} D\varphi_M \right| \leq c_1(A, K) r^{n-1+2\alpha}.$$

Démonstration. - Par définition de $M_{r,x}$ (même notation que pour la proposition 2),

$$M_{r,x} \cap \partial B_r(x) = M \cap \partial B_r(x).$$

D'après la proposition 1 (§ 1),

$$\int_{B_r(x)} D\varphi_M = \int_{B_r(x)} D\varphi_{M_{r,x}}.$$

Par suite,

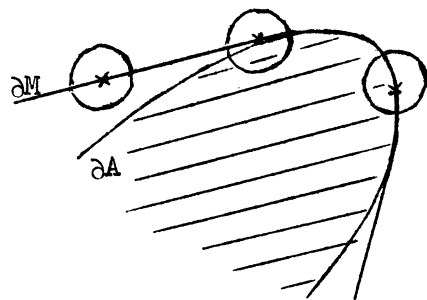
$$\begin{aligned} \left| \int_{B_r(x)} |D\varphi_M| - \int_{B_r(x)} D\varphi_M \right| \\ = \left\{ \int_{B_r(x)} |D\varphi_M| - \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}}| \right\} + \left\{ \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}}| - \int_{B_r(x)} D\varphi_{M_{r,x}} \right\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat en appliquant les propositions 2 et 3.

Nous admettrons le second lemme, qui est une extension d'une propriété analogue relative au cas sans obstacle (la démonstration utilise l'inégalité isopérimétrique; cf. [8], théorème 4.3).

LEMME 2. - n est quelconque; L et $A \subset \mathbb{R}^n$; $\partial A \cap L$ est une variété de classe $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \leq 1$). Si M est A -minimal sur L , pour tout compact $K \subset L$, il existe une constante $c_2(A, K) > 0$ telle que

$$\forall x \in \partial M \cap K, \quad \forall r \in d(x, \partial L), \quad \int_{B_r(x)} |D\varphi_M| \geq c_2(A, K) r^{n-1}.$$



Idée directrice.

1° Dans le cas où $A = \emptyset$, on peut prendre $c_2(A, K) = \text{volume de la sphère unité de } \mathbb{R}^{n-1}$, c'est-à-dire que l'aire d'une surface minima comprise dans une boule centrée sur elle est supérieure ou égale à l'aire du grand cercle (ce qui se comprend bien).

2° Dans le cas où $A \neq \emptyset$:

- Si $B_r(x) \cap A = \emptyset$, on est ramené au cas précédent;
- Si $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$, la régularité de A intervient.

Démonstration du théorème 2. - Soient $x \in \partial M \cap L$, $r > 0$. Posons

$$v_r(x) = \left(\int_{B_r(x)} Dq_M \right) / \left(\int_{B_r(x)} |Dq_M| \right).$$

Il est clair que $|v_r(x)| \leq 1$. D'où

$$(2) \quad \forall x, y \in \partial M \cap L, \quad s, t > 0, \quad |v_s(x) - v_t(y)|^2 \leq 2[1 - \langle v_s(x), v_t(y) \rangle].$$

Prenons $B_s(x) \supset B_t(y)$. Il vient

$$a = [1 - \langle v_s(x), v_t(y) \rangle] \int_{B_t(y)} |Dq_M| = \int_{B_t(y)} |Dq_M| - \int_{B_t(y)} \langle v_s(x), Dq_M \rangle.$$

D'où successivement

$$a \leq \left(\int_{B_s(x)} |Dq_M| \right) - \left(\int_{B_s(x)} \langle v_s(x), Dq_M \rangle \right) = \left(\int_{B_s(x)} |Dq_M| \right) - \left(|v_s(x)| \int_{B_s(x)} |Dq_M| \right),$$

soit, puisque $\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \leq 2(\alpha - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$(3) \quad a \leq 2 \left\{ \int_{B_s(x)} |Dq_M| - \left| \int_{B_s(x)} Dq_M \right| \right\}.$$

De (2) et (3), et par application des lemmes 1 et 2, on déduit

$$|v_s(x) - v_t(y)|^2 \leq 4 \frac{c_1(A, K)}{c_2(A, K)} \frac{s^{n-1+2\alpha}}{t^{n-1}},$$

soit finalement

$$|v_s(x) - v_t(y)| \leq c(A, K) \left(\frac{s}{t} \right)^{(n-1)/2} s^\alpha,$$

avec, $\forall x, y \in \partial M \cap L$,

$$(4) \quad B_t(y) \subset B_s(x).$$

Cette relation a deux conséquences :

(a) Le champ des vecteurs normaux $v(x) = \lim_{s \rightarrow 0} v_s(x)$ est défini en tout point $x \in \partial M \cap L$.

Appliquant (4), pour $x = y$, et pour $\frac{s}{2^{p+1}} \leq t \leq \frac{s}{2^p}$, il vient en effet

$$\begin{aligned}
|v_s(x) - v_t(x)| &\leq |v_s(x) - v_{2^p t}(x)| + \dots + |v_{2^p t}(x) - v_t(x)| \\
&\leq c(A, K) 2^{(n-1)/2} [s^\alpha + \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{s}{2^p}\right)^\alpha] \\
&\leq c(A, K) (1 - 2^{-\alpha})^{-1} 2^{(n-1)/2} s^\alpha.
\end{aligned}$$

Donc $v(x) = \lim_{s \rightarrow 0} v_s(x)$ existe, $\forall x \in \partial M \cap L$,

$$(5) \quad |v_s(x) - v(x)| \leq c'(A, K) s^\alpha.$$

(b) Ce champ est continu.

Posons $t = |x - y|$, $s = 2|x - y|$. Appliquons (4) et (5). Il vient

$$(6) \quad |v(x) - v(y)| \leq c''(A, K) |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \partial M \cap K.$$

Ces deux résultats permettent d'appliquer le théorème du vecteur normal. La relation (6) donne la propriété höldérienne. Le théorème 2 est établi.

4. Cas non paramétrique.

THÉOREME 3 (MIRANDA). - Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 6$). Si $\partial\Omega$ est une variété lipschitzienne de dimension $(n - 1)$, et si $g \in L^1(\partial\Omega)$, et $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ ($\alpha \leq 1$) est bornée, alors il existe une fonction u dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$, solution du problème :

- (1) $u \geq \psi$ sur Ω ;
- (2) $I(u)$ minimum avec

$$I(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} d\lambda + \int_{\partial\Omega} |u - g| dH_{n-1}.$$

La trace de u sur $\partial\Omega$ est bien définie d'après le lemme suivant (que nous admettrons) :

LEMME 1 (GAGLIARDO [5]). - Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\partial\Omega$ est une variété lipschitzienne de dimension $n - 1$. On note $W_1(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^1(\Omega)$, dont les dérivées partielles au sens élémentaire sont dans $L^1(\Omega)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction g , définie sur $\partial\Omega$, soit la trace d'une fonction u de $W_1(\Omega)$, est que $g \in L^1(\partial\Omega)$.

La démonstration du théorème 3 utilise la propriété suivante des ensembles l. p. f. :

LEMME 2 (cf. [9]). - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ (n quelconque),

$$E \subset \Omega \times \mathbb{R}.$$

On note $(x, y) \rightarrow \varphi_E(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de E . Si, pour tout compact $K \subset \Omega$,

$$\int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_E| < +\infty,$$

et si, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_E(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi_E(x, y) = 1,$$

alors il existe $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que l'ensemble

$$N = \{(x, y) ; x \in \Omega, y < u(x)\}$$

vérifie :

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} |\varphi_E(x, y) - \varphi_N(x, y)| dy \in L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

et, sur tout compact $K \subset \Omega$:

$$(2) \quad \int_K dx \int_{\mathbb{R}} |\varphi_E(x, y) - \varphi_N(x, y)| dy = 0,$$

$$(3) \quad \int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_N| \leq \int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_E|,$$

$$(4) \quad \lambda[\text{pr}(E \Delta N) \cap K] \leq \frac{1}{2} \left[\int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_E| \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_E| - \int_{K \times \mathbb{R}} |D\varphi_N| \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ où}$$

$$\text{pr}(E \Delta N) = \{x ; \int \varphi_{E \Delta N}(x, y) dy > 0\}.$$

Démonstration du théorème 3. - Par un lemme de Gagliardo analogue au lemme 1, on peut étendre f à $\mathbb{R}^n$ tout entier, de telle sorte que $f \in W^1(\mathbb{R}^n)$, donc, en particulier, $\int_{\mathbb{R}^n} |Df| d\lambda < +\infty$.

Posons

$$\mathcal{E} = \{E ; E \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\},$$

avec

$$\begin{cases} E - \Omega \times \mathbb{R} = \{(x, y) ; x \in \mathbb{R}^n - \Omega, y \leq f(x)\}, \\ E \cap A = \{(x, y) ; x \in \Omega, y \leq \psi(x)\}. \end{cases}$$

Par un raisonnement de compacité analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 1, on montre qu'il existe un élément E de $\mathcal{E}$ minimisant $\int_{\Omega \times \mathbb{R}} |D\varphi_E|$. Cet ensemble E est A -minimal sur $\Omega \times \mathbb{R}$, donc vérifie les conditions d'applica-

tion du théorème de régularité (théorème 2). Par suite, $\partial E \cap \Omega$ est une variété de classe $C^{1,\alpha}$, de dimension $(n-1)$.

D'après le lemme 2 énoncé ci-dessus et la propriété de minimalité, il est clair que

$$E \cap (\Omega \times \mathbb{R}) = \{(x, y) ; x \in \Omega, y \leq u(x)\},$$

où $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. De plus,

$$\int_{(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \cap CA} |Dq_M| = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} d\lambda + \int_{\partial\Omega} |u - f| dH_{n-1}.$$

5. Résolution du problème : Un cas d'unicité.

Nous allons donner une condition suffisante pour que la fonction u , trouvée au théorème 3, soit unique et égale à f sur $\partial\Omega$.

DÉFINITION. - Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit strictement convexe, si, $\forall x \in \partial\Omega$, il existe un demi-espace S_x de $\mathbb{R}^n$ tel que :

- (1) $\forall x, x \in S_x, S_x \supset \Omega$;
- (2) $\sup_{x \in \partial\Omega} \sup_{y \in \Omega} |x - y|^2 / d(y, S_x) < +\infty$.

THÉORÈME 4 (MIRANDA). - On se donne un ouvert borné strictement convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(\partial\Omega)$ ($n \leq 6$), $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ($\alpha \leq 1$), avec $\psi \leq f$ sur $\partial\Omega$.

Alors il existe une fonction u unique dans $C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, telle que :

- (1) $u = f$ sur $\partial\Omega$,
- (2) $u \geq \psi$ sur Ω ,

et minimisant l'intégrale d'aire

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} d\lambda.$$

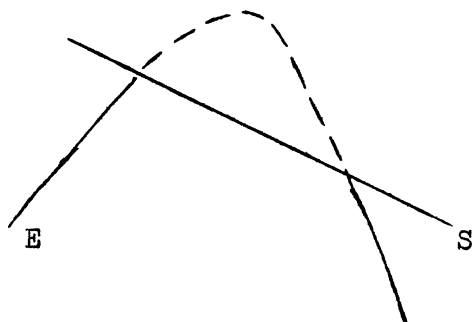
La démonstration utilise les trois lemmes suivants :

LEMME 1. - Sous les hypothèses du théorème 3, et si π est une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\pi \geq f$ sur $\partial\Omega$, alors, pour toute fonction bornée u de Ω de classe C^1 , telle que $\int_{\Omega} |Du| < +\infty$,

$$I[\inf(u, \pi)] \leq I(u),$$

et l'égalité équivaut à

$$u \leq \pi \text{ sur } \Omega.$$



Démonstration. - Ce résultat découle immédiatement de la propriété suivante des ensembles l. p. f. (intuitive, mais non triviale) :

Si $E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, si S est un demi-espace de $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E| \geq \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_{E \cap S}| ,$$

et l'égalité est vérifiée si, et seulement si,

$$E \cap S = S .$$

Nous admettrons un second lemme, dont la démonstration ne présente pas de difficulté ([11], proposition 6.2) :

LEMME 2. - Soient Ω un ouvert strictement convexe et borné de $\mathbb{R}^n$, et $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout x appartenant à $\partial\Omega$, il existe deux fonctions affines π_x^- et π_x^+ définies sur $\mathbb{R}^n$, telles que :

- (1) $\pi_x^+(y) \geq g(y) \geq \pi_x^-(y)$, $\forall y \in \Omega$;
- (2) $\pi_x^+(x) = g(x) = \pi_x^-(x)$;
- (3) $\sup_{x \in \partial\Omega} \{ |D\pi_x^+| + |D\pi_x^-| \} < +\infty$.

LEMME 3. - Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, ψ une fonction bornée définie sur Ω , k un entier > 0 . Si u (resp. v) est une fonction lipschitzienne de rapport k , admettant des dérivées partielles qui sont dans $L_1(\Omega)$, et est solution du problème

$$\begin{cases} w \geq \psi & \text{sur } \Omega , \\ w = u \text{ (resp. } v \text{)} & \text{sur } \partial\Omega , \\ \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dw|^2} \, d\lambda & \text{minimum} , \end{cases}$$

alors

$$u < v \text{ sur } \partial\Omega \implies u < v \text{ sur } \Omega .$$

Démonstration (par l'absurde, utilise la convexité stricte de $x \rightarrow \sqrt{1 + x^2}$). - Notons $F(Dw) = \sqrt{1 + |Dw|^2}$. Soit $A = \{x ; x \in \Omega, u(x) > v(x)\}$. Posons

$$w^+ = \sup(u, v) ,$$

$$w^- = \inf(u, v) ,$$

$$\begin{aligned} w^+ &= v \quad \text{sur } \partial\Omega, & w^+ &= u \quad \text{sur } A, \\ w^- &= u \quad \text{sur } \partial\Omega, & w^- &= v \quad \text{sur } A. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_A F(Dw^+) \, d\lambda + \int_{\Omega-A} F(Dw^+) \, d\lambda &= \int_{\Omega} F(Dw^+) \, d\lambda \geq \int_{\Omega} F(Dv) \, d\lambda, \\ \int_A F(Dw^-) \, d\lambda + \int_{\Omega-A} F(Dw^-) \, d\lambda &= \int_{\Omega} F(Dw^-) \, d\lambda \geq \int_{\Omega} F(Du) \, d\lambda, \end{aligned}$$

par suite

$$\int_A F(Du) \, d\lambda = \int_A F(Dv) \, d\lambda.$$

De plus, $u = v$ sur ∂A . Donc u et v sont solutions du problème

$$\begin{cases} z \text{ lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } A, \\ z = u = v \text{ sur } \partial A, \\ z \geq \psi \text{ sur } A, \\ \int_A F(Dz) \, d\lambda \text{ minimum.} \end{cases}$$

Par suite :

$$(1) \quad u = v \text{ sur } A.$$

En effet, dans le cas contraire, $Du \neq Dv$ sur un ensemble de mesure strictement positive, et par suite $\int_A F\left(D \frac{u+v}{2}\right) d\lambda < \text{minimum}$, ce qui est absurde. L'égalité (1) est en contradiction avec la définition de A . Donc A est vide.

Démonstration du théorème 4.

1° Supposons d'abord qu'il existe une extension de f à $\mathbb{R}^n$ tout entier, de classe C^2 .

$$(a) \quad u = f \text{ sur } \partial\Omega.$$

En effet, si u est une solution trouvée par le théorème 3, il résulte des lemmes 1 et 2 que

$$\inf(u, \pi_x^+) = u \quad \text{sur } \Omega,$$

d'où

$$u \leq \pi_x^+ \quad \text{sur } \Omega.$$

De même

$$u \geq \pi_x^- \quad \text{sur } \Omega.$$

D'après le lemme 2, u est donc continue sur $\bar{\Omega}$, et $f = u$ sur $\partial\Omega$.

(b) D'après le lemme 3, u est unique.

2° Si l'extension de f à $\mathbb{R}^n$ tout entier est seulement continue, on considère une suite décroissante de fonctions (f_p) de classe $\mathcal{C}^2$, qui converge uniformément vers f . D'après le lemme 3, si (u_p) est la solution du problème pour f_p , la suite (u_p) est décroissante, et converge uniformément vers une fonction continue u telle que $u = f$ sur $\partial\Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALMGREN (F. J., Jr). - Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Annals of Math.*, Series 2, t. 84, 1966, p. 277-292.
- [2] BOMBIERI (Enrico). - Régularité des hypersurfaces minimales, *Séminaire Bourbaki*, 21e année, 1968/69, n° 353, 11 p.
- [3] FLEMING (Wendell H.). - Functions whose partial derivatives are measures, *Illinois J. of Math.*, t. 4, 1960, p. 452-478.
- [4] FLEMING (Wendell H.). - On the oriented Plateau problem, *Rend. Circ. mat. Palermo*, Serie 2, t. 11, 1962, p. 69-90.
- [5] GAGLIARDO (Emilio). - Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, *Rend. Semin. mat. Univ. Padova*, t. 27, 1957, p. 284-305.
- [6] De GIORGI (Ennio). - Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad r -dimensioni, *Annali di Mat. pura ed appl.*, Serie 4, t. 36, 1954, p. 191-213.
- [7] De GIORGI (Ennio). - Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$ -dimensionali in uno spazio ad r -dimensioni, *Ric. di Mat.*, t. 4, 1955, p. 95-113.
- [8] MIRANDA (Mario). - Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Serie 3, t. 18, 1964, p. 27-56.
- [9] MIRANDA (Mario). - Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Serie 3, t. 18, 1964, p. 515-542.
- [10] MIRANDA (Mario). - Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Serie 3, t. 19, 1965, p. 627-665.
- [11] MIRANDA (Mario). - Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Serie 3, t. 19, 1965, p. 233-249.
- [12] NITSCHÉ (Johannes C. C.). - A variational problem with inequalities as boundary conditions, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 450-452.
- [13] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions. - Paris, Hermann, 1966 (Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, IX-X).

- [14] SIMONS (James). - Minimal varieties in riemannian manifolds, *Annals of Math.*, Series 2, t. 88, 1968, p. 62-105.
- [15] TRISCARI (Dionisio). - Sulla singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni, *Matematiche, Catania*, t. 18, 1963, p. 139-163.

(Texte reçu en décembre 1970)

Yves BAMBERGER
1 rue du Maréchal de Lattre de Tassigny
92 - NEUILLY
