Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Yves Dermenjian
Jean Saint-Raymond

Produit tensoriel de deux cônes convexes saillants

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 20, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 20, 6 p.
28 mai 1970

PRODUIT TENSORIEL DE DEUX CONES CONVEXES SAILLANTS

par Yves DERMENJIAN et Jean SAINT-RAYMOND

1. Position du problème. - Soient E_i $(i = 1 , 2)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et K_i $(i = 1 , 2)$ un cône convexe saillant de E_i . On pose

$$K_1 \otimes K_2 = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \mid x_i \in K_1 , \; y_i \in K_2\} \subset E_1 \otimes E_2 .$$

Il est clair que $K_1 \otimes K_2$ est un cône convexe de $E_1 \otimes E_2$. A notre connaissance, $K_1 \otimes K_2$ n'était pas réputé saillant, ou du moins cela n'était prouvé que sous des conditions restrictives (voir [3], p. 183). Le but de cette petite étude est de montrer que $K_1 \otimes K_2$ est saillant, et ceci sans condition supplémentaire. Nous donnons trois méthodes ; la deuxième est la plus élémentaire, mais la première a l'avantage de rappeler une caractérisation des espaces vectoriels totalement ordonnés, de dimension inférieure ou égale à $\aleph_0$, dont nous donnons une nouvelle démonstration en dimension finie.

2. THÉORÈME. - Si K_i $(i = 1 , 2)$ est un cône convexe saillant de E_i $(i = 1 , 2)$, alors $K_1 \otimes K_2$ est un cône convexe saillant de $E_1 \otimes E_2$.

3. Réduction du problème au cas de la dimension finie. - Si $K_1 \otimes K_2$ n'était pas saillant, il existerait un $x \neq 0$ tel que $x \in K_1 \otimes K_2 \cap -(K_1 \otimes K_2)$, donc

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = - \sum_{i=k+1}^{n} x_i \otimes y_i , \qquad \text{avec } x_i \in K_1 , \; y_i \in K_2 ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0 .$$

Nous supposons, bien sûr, que $x_i \neq 0$ et $y_i \neq 0$ $(i = 1 , \ldots , n)$. Soit F_1 (resp. F_2) le sous-espace vectoriel de E_1 (resp. E_2) engendré par les x_i (resp. les y_i), $i = 1 , \ldots , n$. Comme $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$ appartient à

$$(K_1 \cap F_1) \otimes (K_2 \cap F_2) ,$$

cela entraîne que le cône convexe $(K_1 \cap F_1) \otimes (K_2 \cap F_2)$ n'est pas saillant.

Finalement, il suffit de démontrer le théorème 2 lorsque E_1 et E_2 sont de dimension finie, et pour cela nous montrerons que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ entraîne une contradiction.

(A) Première méthode.

Les démonstrations des propositions 4 et 5 sont laissées au lecteur.

4. PROPOSITION. - *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La classe $\mathcal{C}$ des cônes convexes saillants de E est inductive pour l'ordre défini par l'inclusion.*

D'après le théorème de Zorn, il existe donc des cônes convexes saillants pointés maximaux. Nous les appellerons des semi-espaces (voir [2], pour une étude plus poussée).

5. PROPOSITION. - *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si E est muni d'un ordre total compatible avec sa structure d'espace vectoriel, alors cet ordre est défini par un semi-espace. Réciproquement, un semi-espace définit un ordre total.*

De cela, on déduit que si L est un sous-espace vectoriel de E, $L \cap K$ (où K est un semi-espace de E) est un semi-espace de L.

6. LEMME. - *Si K est un semi-espace dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, il existe une base $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que, si $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ désigne la base duale, et si on pose*

$$\begin{cases} i(x) = \inf\{j \mid a_j^*(x) \neq 0\}, & \text{si } x \in E - \{0\}, \\ i(0) = 1, & \end{cases}$$

on ait

$$K = \{0\} \cup \{x \mid x \in E, \ a_{i(x)}^*(x) > 0\} .$$

Démonstration. - Pour démontrer l'énoncé lorsque $n = 1$, il suffit de prendre a_1 dans $K - \{0\}$.

Supposons l'énoncé vrai pour tout semi-espace d'un espace vectoriel de dimension n, et soient E un espace vectoriel de dimension $n + 1$, et K un semi-espace de E. Comme K engendre E, il a un point intérieur ([1], chap. 2, § 2, exerc. 11 (a)). Il résulte alors du théorème de Hahn-Banach qu'il existe un hyperplan H de E passant par 0, et un demi-espace ouvert Q limité par H, tels que $K \subset Q \cup H$.

Alors

$$- K \supset \complement K \supset \complement(Q \cup H) = - Q \ ,$$

d'où

$$K \supset Q \qquad \text{et} \qquad K = Q \cup (H \cap K) \ .$$

$H \cap K$ est alors un semi-espace de H, ce dernier étant de dimension n. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base $(b_1, \dots, b_n)$ de H, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. En prenant a_1 dans Q, et $a_{m+1} = b_m$, on définit une base $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de E qui satisfait aux conditions du lemme. En effet :

- Soit $a_1^*(x) > 0$, et alors $x \in Q \subset K$;
- Soit $a_1^*(x) = 0$ et $x \in H$, alors $x \in K$ si, et seulement si, $a_{i(x)}^*(x) > 0$ ou si $x = 0$;
- Soit $a_1^*(x) < 0$, et alors $x \in - Q \subset \complement K$.

7. Démonstration du théorème 2 par la première méthode. - D'après le § 3, nous avons l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$, et nous supposons que E_1 est engendré par les x_i, et E_2 par les y_i $(i = 1, \dots, n)$.

Soit P_i $(i = 1, 2)$ un semi-espace de E_i contenant K_i. On a

$$K_1 \otimes K_2 \subset P_1 \otimes P_2 \subset E_1 \otimes E_2 \ .$$

Si on démontre que $P_1 \otimes P_2$ est saillant, il en sera de même de $K_1 \otimes K_2$.

P_1 et P_2 étant des semi-espaces de E_1 et E_2, il existe des bases $(a_1, \dots, a_r)$ et $(b_1, \dots, b_s)$ de E_1 et E_2, vérifiant la propriété du lemme 6. Posons

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_{i,\alpha}\, a_\alpha \ , \qquad y_i = \sum_{\beta=1}^{s} \mu_{i,\beta}\, b_\beta \ .$$

Soit $p = \inf\{\beta \mid \exists\, i \text{ tel que } \lambda_{i,1} \cdot \mu_{i,\beta} \neq 0\}$; p existe bien, puisque l'on peut trouver un indice i tel que $\lambda_{i,1} \neq 0$ et que $y_i \neq 0$.

On peut écrire alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = \sum_{\alpha,\beta} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,\alpha}\, \mu_{i,\beta}\Big) a_\alpha \otimes b_\beta \ ,$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,1}\, \mu_{i,p} = 0$. Comme, pour tout i, $\lambda_{i,1} \geqslant 0$ puisque $x_i \in P_1$, et $\mu_{i,p} \geqslant 0$ puisque $y_i \in P_2$, et comme il existe un indice i tel que $\mu_{i,p}\, \lambda_{i,1} \neq 0$, il y a une contradiction.

Ainsi les $x_i \otimes y_i$ sont tous nuls, ce qui prouve que

$$P_1 \otimes P_2 \cap -(P_1 \otimes P_2) = \{0\} \quad .$$

$P_1 \otimes P_2$, et par suite $K_1 \otimes K_2$ sont saillants.

C. Q. F. D.

(B) Deuxième méthode.

8. PROPOSITION. - Soit K un cône convexe saillant de l'espace vectoriel E sur $\underline{R}$, tel que $\dim(K - K) = n < +\infty$. Alors il existe une base de $(K - K)$, soit $(t_1 , \ldots , t_n)$, telle que tout élément de K ait sa première coordonnée positive ou nulle.

Démonstration. - Dans $(K - K)$, muni de la topologie habituelle, K a un point intérieur ([1], chap. 2, § 2, exerc. 11 (a)), et, d'après le théorème de Hahn-Banach, K est inclus dans un demi-espace fermé H' limité par un hyperplan H passant par 0 . $\overline{K} \subset H' = f^{-1}(\underline{R}^+)$, où f est une forme linéaire non nulle sur $K - K$.

On prend un élément t_1 non nul de K et n'appartenant pas à $H = f^{-1}(0)$ et, dans H , on choisit des éléments $t_2 , \ldots , t_n$ formant une base de H .

Si $y = \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n$ et $y \in K$, alors $f(y) \geqslant 0$ et, comme

$$f(y) = \alpha_1 f(t_1) \quad ,$$

on a $\alpha_1 \geqslant 0$.

9. Démonstration du théorème 2 par la deuxième méthode. - D'après le § 3, nous avons $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$, et nous supposons que E_1 est engendré par les x_i . On choisit alors une base dans E_1 , $a_1 , \ldots , a_\ell$, telle que tout élément de K_1 ait sa première coordonnée positive ou nulle :

$$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik} a_k , \qquad \alpha_{i1} \geqslant 0 , \quad i = 1 , \ldots , n ,$$

d'où

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik} a_k\Big) \otimes y_i = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \otimes \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} y_i\Big) ,$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} y_i = 0$ pour tout k , et en particulier $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} y_i = 0$; or $\alpha_{i1} \geqslant 0$, et comme K_2 est saillant, cela entraîne que $\alpha_{i1} = 0$ pour $i = 1 , \ldots , n$. Ainsi $x_i = \sum_{k=2}^{\ell} \alpha_{ik} a_k$ et $\dim E_1 \leq \ell - 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

C. Q. F. D.

(C) Troisième méthode (suggérée par G. CHOQUET).

10. PROPOSITION. - *Si* C *est un cône convexe saillant dans* $\underset{\sim}{R}^n$, *les cônes convexes fermés contenus dans* C *forment une famille filtrante croissante.*

Démonstration. - Il suffit de démontrer que l'enveloppe convexe, c'est-à-dire la somme de deux tels cônes convexes fermés C_1 et C_2 est fermée. Montrons que l'application $\varphi : C_1 \times C_2 \to \underset{\sim}{R}^n$, qui à (x , y) fait correspondre $x + y$, est propre. Soit K un compact de $\underset{\sim}{R}^n$, il faut montrer que $\varphi^{-1}(K)$ est compact.

On sait déjà que $\varphi^{-1}(K)$ est fermé, d'autre part

$$\varphi^{-1}(K) = \{(x , y) \mid x \in C_1 , \ y \in C_2 , \ x + y \in K\} \subset [C_1 \times (K - C_1)] \cap [(K - C_2) \times C_2] \ .$$

On peut supposer que K est convexe (sinon on prend son enveloppe convexe), alors $[C_1 \times (K - C_1)] \cap [(K - C_2) \times C_2]$ est un convexe qui ne contient aucune demi-droite, et si on montre qu'il est fermé, alors c'est un compact, et $\varphi^{-1}(K)$ sera compact.

Pour cela, considérons l'application $\psi : \begin{array}{l} K \times C_2 \to \underset{\sim}{R}^n \\ (x , y) \to x - y \end{array}$, et montrons qu'elle est propre. Soit H un compact, on a

$$\psi^{-1}(H) = \{(x , y) \mid x - y \in H , \ x \in K , \ y \in C_2\} \subset K \times (C_2 \cap (K - H)) \ .$$

Comme $\psi^{-1}(H)$ est fermé, et $K \times (C_2 \cap (K - H))$ est compact, on obtient que $\psi^{-1}(H)$ est compact. Ainsi $K - C_2$ et $K - C_1$ sont des ensembles fermés de $\underset{\sim}{R}^n$.

11. PROPOSITION. - *Si* C_i $(i = 1 , 2)$ *est un cône convexe saillant fermé dans* $\underset{\sim}{R}^n$, $C_1 \otimes C_2$ *est saillant dans* $\underset{\sim}{R}^n \otimes \underset{\sim}{R}^n$.

Démonstration. - C_i est complet, il existe donc ([1], chap. 2, § 6, prop. 11) une base de $\underset{\sim}{R}^n$ telle que C_i soit dans $\underset{\sim}{R}^n_+$. Il est clair alors que, pour tout x de $C_1 \otimes C_2$, x a toutes ses coordonnées positives dans la base canonique de $\underset{\sim}{R}^n \otimes \underset{\sim}{R}^n$, donc que $C_1 \otimes C_2$ est saillant.

12. Démonstration du théorème 2 par la troisième méthode. - On conclut facilement en rajoutant au besoin 0 à K_i $(i = 1, 2)$, et en remarquant que si $(\Gamma_j)_{j\in J}$ est une famille filtrante croissante de cônes convexes saillants dans E, $\bigcup_{j\in J} \Gamma_i = \Gamma$ est saillant dans E.

C. Q. F. D.

13. Remarque. - On va montrer que le produit tensoriel de deux semi-espaces n'est pas en général un semi-espace.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension supérieure ou égale à 2, et K un cône convexe pointé saillant maximal dans E (c'est-à-dire : K est un semi-espace). K possède au moins deux vecteurs, x_1 et x_2, non nuls et non colinéaires. $K \otimes K$ définit un ordre dans $E \otimes E$. Si cet ordre était total, on aurait :

- Soit $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \geqslant 0$,
- Soit $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \leqslant 0$.

D'autre part, il existe un automorphisme positif et involutif de $E \otimes E$ sur lui-même, à savoir

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \to \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i .$$

Par suite, si $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \geqslant 0$, on a $x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2 \geqslant 0$, or $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 = -(x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2)$, donc $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 = 0$.

Ceci n'est pas possible, puisque x_1 et x_2 sont linéairement indépendants. On agit de même en supposant $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \leqslant 0$.

Nous venons de démontrer que $K \otimes K$ ne définit pas un ordre total, donc ce n'est pas un semi-espace, d'après la proposition 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] KLEE (V. L., Jr). - The structure of semispaces, Math. Scand., t. 4, 1956, p. 54-64.

[3] PERESSINI (A. L.) and SHERBERT (D. R.). - Ordered topological tensor products, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 19, 1969, p. 177-190.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Yves DERMENJIAN
4 rue Coysevox
75 - PARIS 18

Jean SAINT-RAYMOND
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08