Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Marc Rogalski

Topologies faciales dans les convexes compacts ; calcul fonctionnel et décomposition spectrale dans le centre d'un espace $A(x)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 1 (1969-1970), exp. nº 3, p. 1-56
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 3, 56 p.

27 novembre 1969

TOPOLOGIES FACIALES DANS LES CONVEXES COMPACTS ; CALCUL FONCTIONNEL ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE DANS LE CENTRE D'UN ESPACE $A(X)$

par Marc ROGALSKI

1. Rappels et notations.

Nous noterons $A(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur un convexe compact X, et $A^+(X)$ le cône positif de cet espace.

Nous rappelons que si μ, ν appartiennent à $M_1^+(X)$ (mesures positives de masse 1 sur X), on note $\mu \prec \nu$ la relation définie par $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ pour toute f de S, cône des fonctions convexes continues sur X. Toute mesure est majorée par une mesure maximale pour cet ordre. Si x appartient à X, le barycentre de μ est x si, et seulement si, on a $\varepsilon_x \prec \mu$. On dit que X est un simplexe si, pour tout x de X, il existe une seule mesure maximale de barycentre x. Pour que X soit un simplexe, il faut et il suffit que $A(X)$, muni de son ordre naturel, vérifie le lemme de décomposition de Riesz. Si, de plus, l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X est fermé, on dit que X est un simplexe de Bauer. Pour qu'un convexe compact X soit un simplexe de Bauer, il faut et il suffit que l'espace $A(X)$ soit réticulé pour son ordre naturel. L'application-restriction de $A(X)$ dans $C[\mathcal{E}(X)]$ est alors une isométrie bijective transportant l'ordre. Inversement, si l'application-restriction de $A(X)$ dans $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ est surjective, X est un simplexe de Bauer.

Soit f une fonction majorée sur X. On pose

$$\hat{f}(x) = \inf_{\substack{h \geqslant f \\ h \in A(X)}} h(x) \quad .$$

Si f est minorée sur X, on pose $\check{f}(x) = -(\widehat{-f})(x)$.

La fonction $\hat{f}$ est concave semi-continue supérieurement (s. c. s.). On peut la définir de deux autres façons, si f est s. c. s.

LEMME 1. - *Soit f une fonction s. c. s. sur le convexe compact X.*

(a) *Pour tout x de X, on a*

$$\hat{f}(x) = \sup_{\mu \succ \varepsilon_x} \mu(f) \quad .$$

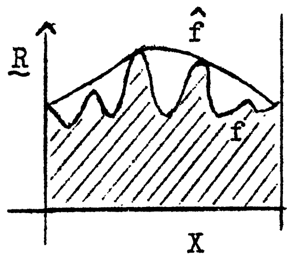
(b) Si $SSG(\hat{f})$ et $SSG(f)$ sont les sous-graphes de f et $\hat{f}$, on a la relation dans l'espace $X \times \underset{\sim}{R}$:

$$SSG(\hat{f}) = \overline{\mathrm{conv}}[SSG(f)] \ .$$

($\overline{\mathrm{conv}}(B)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de B ; $SSG(f)$ désigne le sous-ensemble de $X \times \underset{\sim}{R}$: $\{(x , \lambda) \mid \lambda \leqslant f(x)\}$.)

On déduit de ce résultat les trois propriétés suivantes.

LEMME 2.



(a) Soit f s. c. s. sur X . Alors f et $\hat{f}$ coïncident sur $\mathcal{E}(X)$.

(b) Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante décroissante de fonctions s. c. s. sur X , telle que $\inf_{i \in I} f_i$ soit finie en tout point. Alors on a

$$\widehat{\inf_{i\in I} f_i} = \inf_{i \in I} \hat{f}_i \ .$$

(c) X est un simplexe si, et seulement si, $\hat{f}$ est affine, $\forall f \in S$. Il en est alors de même pour toute f convexe s. c. s.

Le point (b) n'est autre que le "théorème du minimax" pour les fonctions f_i , considérées comme fonctions s. c. s. sur le compact $M_x = \{\mu \in M_1^+(X) \mid \mu \succ \varepsilon_x\}$ muni de la topologie vague.

Nous rappelons enfin deux résultats qui servent fréquemment.

LEMME 3. - Soit X un convexe compact, et soit $AS(X)$ le cône des fonctions affines s. c. s. sur X .

(a) Si $f \in AS(X)$, l'ensemble $\mathcal{F}_f = \{h \in A(X) \mid h > f\}$ est filtrant décroissant, et a pour enveloppe inférieure f . On a le même résultat en se bornant au sous-ensemble de $\mathcal{F}_f$, formé des traces sur X des fonctions affines continues sur l'espace vectoriel localement convexe séparé "ambiant".

(b) Soient f et g deux fonctions de l'espace vectoriel $AS(X) - AS(X)$. Si f et g coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, alors $f \equiv g$.

Pour tous ces résultats sur les convexes compacts et les simplexes, on se reportera à [3], [5], [11], [13], [14].

2. Faces complémentables et faces parallélisables.

Si F est une face de X, et si f est une fonction définie sur F, nous noterons f_F la fonction sur X obtenue en prolongeant f par 0 sur $X \setminus F$. Le symbole 1_F représentera donc la fonction caractéristique de F. Le lemme suivant est dû à ALFSEN et ANDERSEN (cf. [2]).

LEMME 4. - Soient $f_1, \dots, f_n \in A^+(X)$, $g_1, \dots, g_m \in A^+(F)$, où F est une face fermée de X.

Alors, $\forall x \in X$, $\exists x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_m \in F$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$, nombres $\geqslant 0$ vérifiant $\sum\limits_i \lambda_i + \sum\limits_j \mu_j = 1$, tels que

$$x = \sum_i \lambda_i x_i + \sum_j \mu_j y_j ,$$

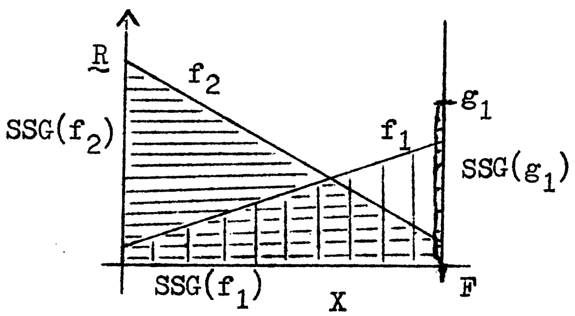
et

$$\widehat{\sup(f_1, \dots, f_n, g_{1_F}, \dots, g_{m_F})}(x) = \sum_i \lambda_i f_i(x_i) + \sum_j \mu_j g_j(y_j) .$$

Ce lemme résulte facilement du lemme 1 (b), si on remarque qu'on a la relation :

$$SSG[\sup(f_1, \dots, f_n, g_{1_F}, \dots, g_{m_F})] = [\bigcup_i SSG(f_i)] \cup [\bigcup_j SSG(g_j)] ,$$

et que, chacun de ces ensembles étant convexe compact, leur enveloppe convexe est fermée.



LEMME 5. - Soit X un convexe compact, et soit $x \in X$. Notons face(x) la plus petite face (non nécessairement fermée) contenant x. Alors on a l'égalité

$$\mathrm{face}(x) = [\bigcup_{x \in]y,z[} [y, z]] \cup \{x\}$$

(où $[y, z]$ et $]y, z[$ désignent les segments fermés et ouverts d'extrémités y et z).

Ce lemme se ramène à une simple vérification géométrique dans $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 6. - _Soit_ F _une face fermée d'un convexe compact_ X . _On appelle ensemble supplémentaire de_ F , _la réunion, notée_ F' , _de toutes les faces de_ X _disjointes de_ F ; _autrement dit,_ $x \in F'$ _signifie_ $\mathrm{face}(x) \cap F = \emptyset$.

F' _est une face si, et seulement si, c'est un ensemble convexe._

PROPOSITION 7. - _Soit_ F _une face fermée d'un convexe compact_ X . _On a les relations suivantes_ :

$$\hat{1}_F^{-1}(1) = F \ ; \qquad \hat{1}_F^{-1}(0) = F' \ ; \qquad X = \mathrm{conv}(F \cup F') \quad .$$

L'ensemble F' _est un_ G_δ .

Ce résultat se trouve dans [2], ainsi que la démonstration qui suit.

Démonstration.

(a) La fonction $\hat{1}_F$ vérifie $0 \leqslant 1_F \leqslant \hat{1}_F \leqslant 1$; donc $F \subset \hat{1}_F^{-1}(1)$. D'autre part, si on applique le lemme 4, avec $f_1 \equiv 0$ et $g_1 \equiv 1$, on voit qu'on peut écrire $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $z \in F$, de telle sorte que $\hat{1}_F(x) = \lambda$. Donc, si $\hat{1}_F(x) = 1$, $x \in F$. Donc $F = \hat{1}_F^{-1}(1)$.

(b) De plus, si $\hat{1}_F(x) = \lambda \neq 0$, alors $y \in \mathrm{face}(x) \cap F$ qui est donc non vide, et $x \notin F'$. Donc $F' \subset \hat{1}_F^{-1}(0)$.

Inversement, soit x tel que $\hat{1}_F(x) = 0$, et montrons que $\mathrm{face}(x) \cap F = \emptyset$. Soit $u \in \mathrm{face}(x)$. D'après le lemme 5, $\exists\, v \in \mathrm{face}(x)$ et $\mu \neq 0$ tels que $x = \mu u + (1 - \mu)v$. La fonction $\hat{1}_F$ étant concave, $\geqslant 0$, nulle en x , on en déduit que $\hat{1}_F(u) = 0$, donc $u \notin F$.

(c) Reprenons la décomposition $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, avec $z \in F$ et $\lambda = \hat{1}_F(x)$. Utilisant la concavité de $\hat{1}_F$, on obtient

$$\lambda \geqslant \lambda + (1 - \lambda)\ \hat{1}_F(z) \quad ,$$

d'où on déduit, si $x \notin F$, que $z \in F'$. Donc $X = \mathrm{conv}(F \cup F')$.

(d) Enfin, la relation $F' = \hat{1}_F^{-1}(0)$ montre, puisque $\hat{1}_F$ est s. c. s., que F' est un G_δ .

C. Q. F. D.

ALFSEN et ANDERSEN ont introduit dans [2] la notion suivante, qui généralise celle de [1], [14].

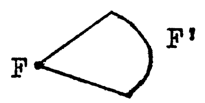
DÉFINITION 8. - _On dit qu'une face fermée_ F _d'un convexe compact_ X _est complémentable, si_ :

1° F' est une face ;

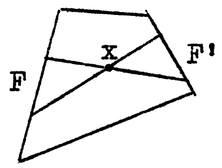
2° Pour tout x de $X \setminus (F \cup F')$, la décomposition barycentrique de x selon F et F' est unique.

F' s'appelle alors la face complémentaire de F .

REMARQUE 9. - Les exemples suivants montrent que ces deux conditions sont indépendantes :



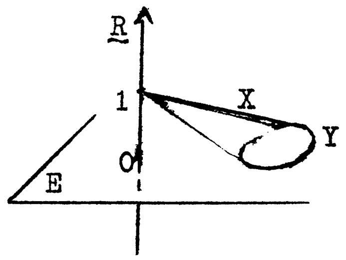
vérifie 2° et non 1°



vérifie 1° et non 2°

D'autre part, il est équivalent de dire que F' est une face, ou que F' est convexe.

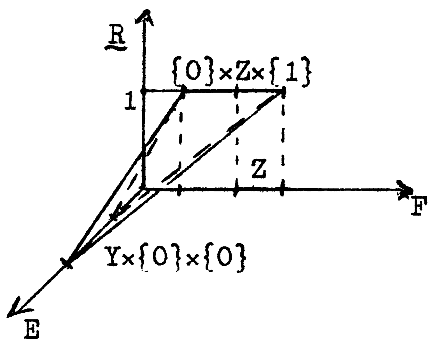
EXEMPLE 1. - Soit Y un convexe compact dans un espace E (e. l. c. s.) ; dans $E \times \mathbb{R}$, considérons $X = \operatorname{conv}[Y \times \{0\} \cup \{(0 , 1)\}]$. Alors $Y \times \{0\}$ et $\{(0 , 1)\}$ sont deux faces complémentables de X .



EXEMPLE 2. - Soit Y un convexe compact dans un espace E , et soit Z un autre convexe compact dans un espace F . Dans $E \times F \times \mathbb{R}$, soit

$$X = \operatorname{conv}[Y \times \{0\} \times \{0\} \cup \{0\} \times Z \times \{1\}] .$$

Alors $Y \times \{0\} \times \{0\}$ et $\{0\} \times Z \times \{1\}$ sont deux faces complémentables de X .



EXEMPLE 3. - Considérons $X = M_1^+([0\ ,\ 1])$, et $F = \{\mu \in X \mid \mu([0\ ,\ \frac{1}{2}[) = 0\}$. Alors F est une face complémentable, et F' est exactement l'ensemble des mesures portées par $[0\ ,\ \frac{1}{2}[$. On a l'égalité :

$$\hat{1}_F(\mu) = \mu([\tfrac{1}{2}\ ,\ 1]) \quad ,$$

et μ se décompose de la façon suivante, si $\mu \notin F \cup F'$:

$$\mu = \mu([\tfrac{1}{2}\ ,\ 1]) \times \mu.1_{[\frac{1}{2},1]} + \mu([0\ ,\ \tfrac{1}{2}[) \times \mu.1_{[0,\frac{1}{2}[} \ .$$

PROPOSITION 10. - Soient X un convexe compact, et F et G deux faces complémentables.

(a) $F \cap G$ est complémentable, et on a $(F \cap G)' = \operatorname{conv}(F' \cup G')$.

(b) $\operatorname{conv}(F \cup G)$ est complémentable.

La démonstration se fait au moyen de calculs barycentriques naturels ; on commence par montrer que tout x de X s'écrit :

$$x = \lambda_{11}\, x_{11} + \lambda_{12}\, x_{12} + \lambda_{21}\, x_{21} + \lambda_{22}\, x_{22} \quad ,$$

où

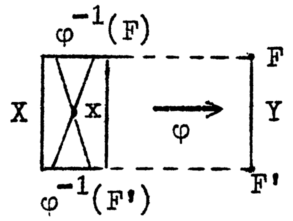
$$\lambda_{ij} \geqslant 0 \ , \qquad \sum \lambda_{ij} = 1 \quad ,$$

$$x_{11} \in F \cap G\ , \quad x_{12} \in F \cap G'\ , \quad x_{21} \in F' \cap G\ , \quad x_{22} \in F' \cap G' \quad ,$$

une telle décomposition étant unique (pour des coefficients non nuls) ; la proposition s'ensuit facilement (cf. [2]).

2 Par contre, les faces complémentables ne sont pas stables par "image réciproque directe", c'est-à-dire que si $\varphi : X \to Y$ est affine continue surjective, et "directe" au sens où $\varphi[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(Y)$, et si F est une face complémentable dans Y , $\varphi^{-1}(Y)$ n'est pas nécessairement une face complémentable dans X (c'est une face fermée de X , bien sûr).

EXEMPLE. - On prend pour X un rectangle, pour Y un segment, et pour φ une projection.



On voit qu'on obtient bien $\varphi^{-1}(F') = \varphi^{-1}(F)'$, qui est une face, mais il n'y a plus unicité dans la décomposition $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$: y et z peuvent varier. Par contre, il y a unicité de λ . D'où l'idée d'introduire une notion plus faible que celle de face complémentable, et restant stable par image réciproque directe.

DÉFINITION 11. - On dit qu'une face fermée F d'un convexe compact X est parallélisable, si :

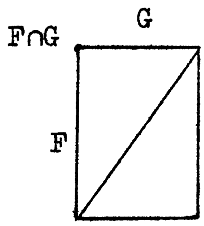
1° F' est une face ;

2° Pour tout x de $X \setminus (F \cup F')$, les décompositions barycentriques de x suivant F et F' ont mêmes coefficients barycentriques.

F' s'appelle alors la face parallèle à F.

Les conditions 1° et 2° sont manifestement indépendantes (cf. remarque 9). Remarquons que si $x \in \mathcal{E}(X)$, la face $\{x\}$ est complémentable dès qu'elle est parallélisable.

Cette fois, les faces parallélisables ne sont stables, ni par intersection finie, ni par enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre elles ; il suffit de considérer l'exemple du rectangle ci-contre : ni $F \cap G$, ni $\mathrm{conv}(F \cup G)$ ne sont parallélisables.



Mais nous allons voir qu'on a la stabilité par image réciproque directe.

Remarquons d'abord que, grâce au lemme 4 appliqué à $f_1 \equiv 0$ et $g_1 \equiv 1$, il revient au même de dire que la deuxième condition de parallélisabilité est vérifiée, ou que, pour toute décomposition barycentrique de x :

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z \qquad (y \in F\ ,\quad z \in F')\ ,$$

on a nécessairement $\lambda = \hat{1}_F(x)$.

Nous allons en déduire un critère pour qu'une face soit parallélisable.

THÉORÈME 12. - Soit F une face fermée de X. F est parallélisable si, et seulement si, la fonction $\hat{1}_F$ est affine.

Démonstration. - Si $\hat{1}_F$ est affine, soit $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ une décomposition barycentrique de x suivant F et F'. On a $\hat{1}_F(x) = \lambda.1 + (1 - \lambda).0 = \lambda$, donc λ est unique. De plus, $F' = \hat{1}_F^{-1}(0)$ est bien une face.

Réciproquement, supposons F parallélisable. Soit $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$. On peut écrire :

$$\begin{array}{llll} x = \lambda y + (1 - \lambda) z\ , & y \in F\ , & z \in F'\ , & \lambda = \hat{1}_F(x)\ , \\ x_1 = \mu y_1 + (1 - \mu) z_1\ , & y_1 \in F\ , & z_1 \in F'\ , & \mu = \hat{1}_F(x_1)\ , \\ x_2 = \nu y_2 + (1 - \nu) z_2\ , & y_2 \in F\ , & z_2 \in F'\ , & \nu = \hat{1}_F(x_2)\ . \end{array}$$

On a alors :

$$x = \left[\frac{\alpha\mu y_1 + (1-\alpha)\nu y_2}{\alpha\mu + (1-\alpha)\nu}\right](\alpha\mu + (1-\alpha)\nu)$$

$$+ \left[\frac{\alpha(1-\mu)z_1 + (1-\alpha)(1-\nu)z_2}{\alpha(1-\mu) + (1-\alpha)(1-\nu)}\right][\alpha(1-\mu) + (1-\alpha)(1-\nu)]$$

$$= a(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) + b[\alpha(1-\mu) + (1-\alpha)(1-\nu)] \ ,$$

où $a \in F$, et $b \in F'$ (car F' est alors convexe). Donc on a $\lambda = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, c'est-à-dire $\hat{1}_F(x) = \alpha\hat{1}_F(x_1) + (1-\alpha)\ \hat{1}_F(x_2)$, et la fonction $\hat{1}_F$ est affine.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 13. - *Soit* $\varphi : X \to Y$ *une application affine continue surjective* directe. *Si* F *est une face parallélisable de* Y , $\varphi^{-1}(F)$ *est une face parallélisable de* X , *et on a*

$$\varphi^{-1}(F)' = \varphi^{-1}(F') \qquad \underline{\text{et}} \qquad \widehat{1_{\varphi^{-1}(F)}} = \hat{1}_F \circ \varphi \ .$$

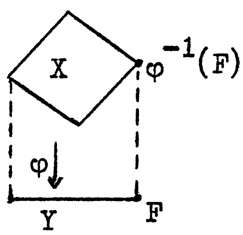
Démonstration. - On a les relations suivantes :

$$u = \widehat{1_{\varphi^{-1}(F)}} = \inf_{\substack{h \in A(X) \\ h \geq 1_{\varphi^{-1}(F)}}} h \leq \inf_{\substack{g \in A(Y) \\ g \geq 1_F}} g \circ \varphi = \hat{1}_F \circ \varphi = v \ .$$

La fonction u est concave s. c. s., v est affine s. c. s., et $u \leq v$. Or u et v coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, car, sur $\varphi^{-1}(F)$, elles valent 1 , et, sur $\mathcal{E}(X) \setminus \varphi^{-1}(F)$, elles valent 0 . On déduit alors facilement du lemme 3 (b) que $u \equiv v$. Donc u est affine, et $\varphi^{-1}(F)$ est parallélisable. De plus, comme $(\hat{1}_F \circ \varphi)^{-1}(0) = \varphi^{-1}[\hat{1}_F^{-1}(0)]$, on voit que $\varphi^{-1}(F)' = \varphi^{-1}(F')$.

C. Q. F. D.

Ce résultat est faux si φ n'est pas *directe* : la situation ci-contre fournit un contre-exemple.



LEMME 14. - *Soit* F *une face parallélisable du convexe compact* X . *Soient* $f_1 , \dots , f_n \in A^+(X)$, *et* $g \in A^+(F)$. *Alors, pour tout* x *de* X , *il existe une décomposition barycentrique de* x : $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, *avec* $y \in F$, $z \in F'$, *telle que, si* $f = \sup(g_F , f_1 , \dots , f_n)$, *on ait*

$$\hat{f}(x) = \lambda\hat{f}(y) + (1-\lambda)\ \hat{f}(z) \ .$$

Bien sûr, si F est complémentable, cette relation est vraie pour <u>la</u> décomposition barycentrique de x .

Pour démontrer ce lemme, on utilise une décomposition de x , fournie par le lemme 4,

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i , \qquad \text{où } x_0 \in F .$$

On décompose ensuite chaque x_i suivant F et F' , et un simple calcul barycentrique permet, compte tenu de la concavité de $\hat{f}$, de terminer la démonstration (cf. [2]).

Le théorème suivant est l'analogue, pour les faces complémentables, du théorème 12 ; il est dû à ALFSEN et ANDERSEN (cf. [2]).

THÉORÈME 15. - <u>Soit</u> F <u>une face fermée de</u> X . <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) F <u>est complémentable</u> ;

(b) $\forall f \in A^+(F)$, <u>l'ensemble</u> $\{g \in A(X) \mid g > f_F\}$ <u>est filtrant décroissant</u> ;

(c) $\forall f \in A^+(F)$, <u>la fonction</u> $\hat{f}_F$ <u>est affine</u>.

<u>Démonstration</u>. - Compte tenu du lemme 3 (a), (b) $\Longleftrightarrow$ (c) est immédiat.

(a) $\Longrightarrow$ (c) . D'après le lemme 14, si $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ est <u>la</u> décomposition barycentrique d'un point x , on a

$$\hat{f}_F(x) = \lambda \hat{f}_F(y) + (1 - \lambda)\, \hat{f}_F(z) \quad .$$

Or $\hat{f}_F = f_F$ sur F , donc $\hat{f}_F$ est affine sur F .

De plus, on a $0 \leqslant \hat{f}_F \leqslant \widehat{1_F \times \sup f} = (\sup f) \times \hat{1}_F$. Cette dernière fonction étant nulle sur F' , $\hat{f}_F$ est nulle sur F' , donc elle y est affine. Alors, les applications $x \longmapsto y$, $x \longmapsto z$ et $x \longmapsto \lambda$ étant affines (par unicité), il en résulte que $\hat{f}_F$ est affine.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . $\hat{1}_F$ étant affine, on sait déjà que F est parallélisable. Soient deux décompositions de x , de même coefficient barycentrique, nécessairement :

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z = \lambda y' + (1 - \lambda) z' \quad .$$

Soit f dans $A^+(F)$. On a $\hat{f}_F(x) = \lambda f(y) = \lambda f(y')$. Donc, $\forall f \in A^+(F)$, $f(y) = f(y')$. Comme $A^+(F)$ sépare les points de F , on en déduit que $y = y'$, et donc $z = z'$.

Donc F est complémentable.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 16 (ALFSEN). - <u>Toute face fermée d'un simplexe est complémentable.</u>

En effet, f_F est convexe s. c. s. si $f \in A_F^+$. D'après le lemme 2 (c), $\hat{f}_F$ est alors affine.

Il résulte du lemme 2 (b) et du lemme 3 (a) que, si F est une face complémentable d'un convexe compact X, alors $\forall f \in AS^+(F)$, $\hat{f}_F$ est affine s. c. s. sur X et prolonge f.

REMARQUE 17. - On trouvera, dans [2], le résultat suivant : si F est complémentable, toute fonction f de $A(F)$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de $A(X)$ (et même, $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir $\tilde{f}$ pour que $\|\tilde{f}\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$).

Ce résultat est faux pour les faces parallélisables. Voici un contre-exemple, dû à PHELPS (ce contre-exemple peut être généralisé ; cf. [17]).

Dans $\mathbb{R}^N$, on pose

$$F = \{(x_n)_{n\geqslant 0} \mid x_0 = 0 \text{ et } |x_n| \leqslant 2^{-n}, \forall n \geqslant 1\},$$

et

$$G = \{(x_n) \mid x_0 = 1 \text{ et } |x_n| \leqslant n, \forall n \geqslant 1\}.$$

Alors F est une face fermée parallélisable du convexe compact $X = \operatorname{conv}(F \cup G)$ (et $F' = G$). Si on définit f sur F par $f((x_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, f appartient à $A(F)$, mais ne possède aucun prolongement affine borné à X.

Nous donnons maintenant une propriété des faces parallélisables et des faces complémentables, essentielle pour la notion de topologie faciale. La démonstration qui figure ci-dessous est plus simple que celle de [2].

THÉORÈME 18.

(a) <u>Soit</u> (F_α) <u>une famille filtrante décroissante de faces parallélisables de</u> X. <u>Alors</u> $F = \bigcap F_\alpha$ <u>est parallélisable.</u>

(b) <u>Soit</u> (F_α) <u>une famille quelconque de faces complémentables. Alors</u> $F = \bigcap F_\alpha$ <u>est vide ou complémentable.</u>

<u>Démonstration.</u>

(a) D'après le lemme 2 (b), on a les relations

$$\hat{1}_F = \widehat{\inf 1_{F_\alpha}} = \inf \hat{1}_{F_\alpha} .$$

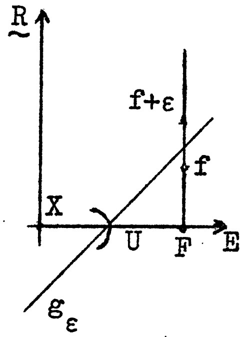
Les $\hat{1}_{F_\alpha}$ sont affines filtrantes décroissantes. Donc $\hat{1}_F$ est affine, et F est parallélisable.

(b) Si F est non vide, on peut, d'après la proposition 10, supposer (F_α) filtrante décroissante.

Soit f une fonction affine continue sur l'espace E "ambiant", $f \geqslant 0$ sur X, et soit f_{F_α} la fonction qui vaut f sur F_α, et 0 sur $X \setminus F_\alpha$; on définit de même f_F. On a alors, d'après le lemme 2 (b),

$$\hat{f}_F = \widehat{\inf f_{F_\alpha}} = \inf \hat{f}_{F_\alpha} \quad .$$

Les $\hat{f}_{F_\alpha}$ sont affines filtrantes décroissantes. Donc $\hat{f}_F$ est affine.



Puis, si $f \in A^+_F$, il existe g_ε affine continue sur E, telle que $f < g_\varepsilon < f + \varepsilon$ sur F (HAHN-BANACH dans $E \times \mathbb{R}$). Alors, on a encore $g_\varepsilon > 0$ sur un ouvert U contenant F. Il existe α_0 tel que $\forall\, \alpha \geqslant \alpha_0$, $F_\alpha \subset U$. Alors on voit, comme ci-dessus, que $\hat{g}_{\varepsilon_F}$ est affine. Comme l'application $\varphi \to \hat{\varphi}(x)$ est continue pour la norme uniforme, et que $g_{\varepsilon_F} \to f_F$ uniformément, $\hat{g}_{\varepsilon_F}(x) \to \hat{f}_F(x)$, et $\hat{f}_F$ est affine.

Donc F est complémentable.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 19 (ALFSEN et ANDERSEN). - Les ensembles $F \cap \mathcal{E}(X)$, où F est une face complémentable de X, sont les fermés d'une topologie sur $\mathcal{E}(X)$, qui est quasi-compacte.

Cette topologie, appelée la $\mathfrak{A}$-topologie, sera notée $\mathfrak{A}(X)$.

Les ensembles $F \cap \mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(F)$ forment une topologie, d'après la proposition 10 et le théorème 18 (b).

Cette topologie est quasi-compacte, car si (F_α) est une famille filtrante décroissante de faces complémentables, $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$ est complémentable, et

$$\bigcap\, [F_\alpha \cap \mathcal{E}(X)] = F \cap \mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(F) \neq \emptyset \quad .$$

COROLLAIRE 20 (EFFROS ; cf. [6]). - Si X est un simplexe, les ensembles $F \cap \mathcal{E}(X)$, où F est une face fermée, sont les fermés d'une topologie sur X, qui est quasi-compacte. Cette topologie est notée $\max(X)$ (elle coïncide avec $\mathfrak{A}(X)$). Si X est un simplexe de Bauer, $\max(X)$ n'est autre que la topologie induite par celle de X.

Si on utilise les faces parallélisables, leur non stabilité par intersection finie et l'opération d'enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre-elles exclut un résultat analogue au corollaire 19. Par contre, un tel résultat est possible pour des familles particulières de faces parallélisables (les faces complémentables en forment un exemple !). C'est ainsi que GOULLET de RUGY [10] et NAGEL [12] (sous des formes particulières et d'ailleurs différentes) ont introduit des "familles topologiques de faces parallélisables", que nous allons étudier maintenant.

Signalons, avant de poursuivre, que les notions de faces parallélisables et de faces complémentables ont été étendues par GOULLET de RUGY aux cônes convexes saillants faiblement complets (cf. [9], [10]).

D'autre part, pour l'étude détaillée des faces complémentables d'un convexe compact, on se reportera à [2].

3. Familles topologiques de faces parallélisables et topologies faciales.

LEMME 21. - *Soit $\mathfrak{F} = (F_\alpha)$ une famille de faces parallélisables, stable par intersection finie et l'opération d'enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre-elles. Alors la famille $\delta(\mathfrak{F})$, obtenue en rajoutant à $\mathfrak{F}$ les intersections filtrantes décroissantes d'éléments de $\mathfrak{F}$, est encore stable par les deux opérations précédentes, et pour l'intersection de familles filtrantes décroissantes.*

Démonstration.

Soient $F = \bigcap_I F_i$ et $G = \bigcap_J F_j$ deux éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Alors

$$F \cap G = \bigcap_{I\times J} (F_i \cap F_j) \quad \text{appartient à } \delta(\mathfrak{F})$$

(elle est vide éventuellement).

Soient $F = \bigcap_I F_i$ et $G = \bigcap_J F_j$ deux éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Posons $K = \mathrm{conv}(F \cup G)$. Alors

$$H = \bigcap_{I\times J} \mathrm{conv}(F_i \cup F_j) \in \delta(\mathfrak{F}) , \qquad \text{et} \qquad H \supset K .$$

Soit $x \in H$. Alors, $\forall\, i , j$, $\exists\, y_{i,j} \in F_i$, $z_{i,j} \in F_j$, $\lambda_{i,j} \in [0 , 1]$, tels que $x = \lambda_{i,j}\, y_{i,j} + (1 - \lambda_{i,j}) z_{i,j}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $I \times J$ plus fin que le filtre des sections. Alors

$$y_{i,j} \xrightarrow[\mathcal{U}]{} y \in F , \qquad z_{i,j} \xrightarrow[\mathcal{U}]{} z \in G , \qquad \lambda_{i,j} \xrightarrow[\mathcal{U}]{} \lambda \in [0 , 1] ,$$

et on a $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Donc $H \subset K$, et $H = K$.

Enfin, soit (F_α) une famille filtrante décroissante d'éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Pour tout α , soit $(F_\alpha^{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha}$ une famille filtrante décroissante d'éléments de $\mathfrak{F}$, d'intersection F_α . Alors la famille des faces de la forme $F_{\alpha_1}^{i_{\alpha_1}} \cap F_{\alpha_2}^{i_{\alpha_2}} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{i_{\alpha_n}}$ est contenue dans $\mathfrak{F}$, filtrante décroissante, et a $\bigcap_\alpha F_\alpha$ pour intersection. Donc, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ appartient à $\delta(\mathfrak{F})$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 22. - Une famille $\mathfrak{F} = (F_\alpha)$ de faces parallélisables est dite topologique, si elle est stable par intersection finie, enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre-elles, intersection filtrante décroissante, et si elle contient $\emptyset$ et X .

PROPOSITION 23. - Soit $\varphi : X \to Y$ une application affine continue surjective directe. Si $\mathfrak{F}$ est une famille topologique de faces parallélisables sur Y , les $\varphi^{-1}(F)$ pour $F \in \mathfrak{F}$ forment une famille topologique de faces parallélisables sur X.

Démonstration. - Il est clair que les $\varphi^{-1}(F)$ sont stables par intersection quelconque, et que ce sont des faces parallélisables (proposition 13). Il y a juste à montrer la stabilité par enveloppe convexe de deux telles faces.

Soient donc $F , G \in \mathfrak{F}$. L'ensemble $\operatorname{conv}(F \cup G)$ appartient à $\mathfrak{F}$. Montrons que, si $H = \varphi^{-1}[\operatorname{conv}(F \cup G)]$ et $K = \operatorname{conv}[\varphi^{-1}(F) \cup \varphi^{-1}(G)]$, on a $H = K$ (le résultat sera ainsi prouvé). L'inclusion $K \subset H$ est immédiate. Inversement, soit x dans $\mathcal{E}(H)$. Puisque H est une face, $x \in \mathcal{E}(X)$. Donc $\varphi(x) \in \mathcal{E}(Y) \cap \operatorname{conv}(F \cup G)$. Donc $\varphi(x) \in \mathcal{E}(F) \cup \mathcal{E}(G)$, donc $x \in \varphi^{-1}(F) \cup \varphi^{-1}(G)$, et $x \in K$.

C. Q. F. D.

La proposition 23 fournit ainsi un moyen commode pour construire des familles topologiques de faces parallélisables sur X . En particulier, si Y est un simplexe image directe de X , les $\varphi^{-1}(F)$, où F est une face fermée quelconque de Y , forment une famille topologique de faces parallélisables sur X .

PROPOSITION 24. - Soit $\mathfrak{F}$ une famille topologique de faces parallélisables. Alors les ensembles $F \cap \mathcal{E}(X)$, pour $F \in \mathfrak{F}$, sont les fermés d'une topologie quasi-compacte sur $\mathcal{E}(X)$.

C'est immédiat. Une telle topologie sur $\mathcal{E}(X)$ sera dite topologie faciale. Il résulte de la proposition 23 que l'image réciproque directe d'une topologie faciale est une topologie faciale.

Le résultat suivant, de GOULLET de RUGY, permet de retrouver de façon extrêmement simple les théorèmes de prolongement de EFFROS (cas des simplexes ; cf. [7]) et de ALFSEN et ANDERSEN (cas de la $\mathfrak{a}$-topologie du corollaire 19 ; cf. [2]).

Si $\mathcal{T}$ est une topologie quasi-compacte sur $\mathcal{E}(X)$, nous noterons $CS^+(\mathcal{T})$ le cône des fonctions positives sur $\mathcal{E}(X)$, s. c. s. pour $\mathcal{T}$, et $C(\mathcal{T})$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{E}(X)$, continues pour $\mathcal{T}$.

THÉORÈME 25 (GOULLET de RUGY). - Soit $\mathcal{T}$ une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$.

(a) Tout élément f de $CS^+(\mathcal{T})$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ unique de $AS^+(X)$. Nous écrirons en abrégé : $CS^+(\mathcal{T}) \subset AS^+(X)$.

(b) Toute fonction facialement continue f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ unique de $A(X)$: $C(\mathcal{T}) \subset A(X)$.

Démonstration.

(a) Soit $f \in CS^+(\mathcal{T})$, $0 \leqslant f \leqslant 1$. Soit n un entier $\geqslant 1$. L'ensemble

$$A_K = \{x \in \mathcal{E}(X) \mid f \geqslant \frac{K}{n}\}$$

est un fermé facial $(K = 1 , 2 , \ldots , n)$. Donc il existe une face parallélisable F_K , unique, telle que $A_K = \mathcal{E}(X) \cap F_K$. Sur $\mathcal{E}(X)$, on a $1_{A_K} = \hat{1}_{F_K}$. Soit

$$\varphi_n = \sum_1^n \frac{1}{n} \hat{1}_{F_K} \quad .$$

La fonction φ_n appartient à $AS^+(X)$, et on a $|\varphi_n|_{\mathcal{E}} - f| \leqslant \frac{1}{n}$. Donc on a $\|\varphi_n - \varphi_p\| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ (car l'inégalité a lieu sur $\mathcal{E}(X)$). Donc φ_n converge uniformément vers une fonction $\tilde{f}$ de $AS^+(X)$, et $\tilde{f}_{|\mathcal{E}} = f$.

L'unicité de $\tilde{f}$ résulte du lemme 3 (b).

(b) Il existe a et b , constantes, telles que $f + a \geqslant 0$ et $b - f \geqslant 0$. Soient $u = \widetilde{f + a} \in AS^+(X)$, et $v = \widetilde{b - f} \in AS^+(X)$. Alors $u - a$ et $b - v$ sont affines respectivement s. c. s. et s. c. i., et coïncident avec f sur $\mathcal{E}(X)$. Donc $\tilde{f} = u - a = b - v$ est affine continue, et prolonge f (lemme 3 (b)).

Enfin, $\tilde{f}$ est unique, grâce au lemme 3 (b).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 26 (EFFROS, ALFSEN et ANDERSEN).

(a) Si X est un convexe compact, toute fonction définie sur $\mathcal{E}(X)$, et continue pour la $\mathfrak{a}$-topologie, se prolonge en une fonction de $A(X)$.

(b) Si X est un simplexe, toute fonction sur $\mathcal{E}(X)$, continue pour $\max(X)$, se prolonge en une fonction de $A(X)$.

COROLLAIRE 27. - Pour toute topologie faciale $\mathcal{T}$, il existe un sous-espace fermé $H_{\mathcal{T}}$ de $A(X)$, contenant les constantes, et fortement réticulé pour son ordre propre (c'est-à-dire si $f, g \in H_{\mathcal{T}}$, la borne supérieure $f \vee g$ de f et g dans $A(X)$ existe, et appartient à $H_{\mathcal{T}}$), tel que $H_{\mathcal{T}|\mathcal{E}(X)} = C(\mathcal{T})$. L'application $\mathcal{T} \to H_{\mathcal{T}}$ est croissante.

Démonstration. - Il est clair que l'espace $H_{\mathcal{T}}$ des prolongements des fonctions de $C(\mathcal{T})$ est fermé, et contient les constantes.

Si f et $g \in H_{\mathcal{T}}$,

$$\inf_{\substack{h \in A(X)\\ h \geq f \text{ et } g}} h = \widehat{\sup(f, g)}$$

est affine continue si, et seulement si, $f \vee g$ existe dans $A(X)$, et on a alors $f \vee g = \widehat{\sup(f, g)}$.

Or, $\varphi = \sup(f_{|\mathcal{E}}, g_{|\mathcal{E}}) \in C(\mathcal{T})$. Son prolongement $\tilde{\varphi}$ appartient à $H_{\mathcal{T}}$, est affine continu, et coïncide avec $\widehat{\sup(f, g)}$ sur $\mathcal{E}(X)$. On a alors $\varphi \geq \widehat{\sup(f, g)}$, et cette dernière fonction est concave s. c. s. Il en résulte que

$$\hat{\varphi} = \widehat{\sup(f, g)} = f \vee g \ .$$

C. Q. F. D.

REMARQUE 28. - Deux topologies faciales différentes peuvent avoir le même espace de fonctions continues, c'est-à-dire le même sous-espace H de $A(X)$ associé. Nous préciserons ce point plus loin.

COROLLAIRE 29. - Pour toute topologie faciale $\mathcal{T}$, il existe un simplexe de Bauer $Y_{\mathcal{T}}$, et $\varphi : X \to Y_{\mathcal{T}}$ affine continue surjective directe, tels que

$$\varphi_{|\mathcal{E}(X)} : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})$$

soit continue pour $\mathcal{T}$ et la topologie induite par celle de $Y_{\mathcal{T}}$, et tels que l'on ait

$$C(\mathcal{T}) = C[\mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})] \circ \varphi \ ,$$

c'est-à-dire telle que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ de $C[\mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})]$ dans $C(\mathcal{T})$ soit un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

Démonstration. - Soit $H_{\mathcal{T}}$ le sous-espace de $A(X)$ associé à $\mathcal{T}$. Posons par définition $Y_{\mathcal{T}} = (H_{\mathcal{T}}^{!})_1^{+} = \{\ell \in H_{\mathcal{T}}^{!} \mid \ell \geq 0 \text{ et } \|\ell\| = 1\}$, et munissons $Y_{\mathcal{T}}$ de

$\sigma(H'_{\mathcal{T}}, H_{\mathcal{T}})$. Alors $Y_{\mathcal{T}}$ est un convexe compact, et l'application $\varphi : x \longmapsto \varepsilon_x$ de X dans $Y_{\mathcal{T}}$ permet d'identifier $H_{\mathcal{T}}$ à $A(Y_{\mathcal{T}})$ (cf. [14]). Le caractère réticulé de $H_{\mathcal{T}}$ montre que $Y_{\mathcal{T}}$ est un simplexe de Bauer. La surjectivité de φ se montre par le théorème de Hahn-Banach appliqué au convexe compact $\varphi(X)$ inclus dans $Y_{\mathcal{T}}$.

Montrons que $\varphi(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})$. Soit $x \in \mathcal{E}(X)$. Si on a $\varphi(x) = \varepsilon_x = \dfrac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2}$ sur $H_{\mathcal{T}}$, et si ε_y et ε_z sont distincts de ε_x sur $H_{\mathcal{T}}$, il existe $f \in H_{\mathcal{T}}$ telle que $f(x) = 0$, $f(y) > 0$, $f(z) < 0$. La fonction $g = f \vee 0$ appartient à $H_{\mathcal{T}}$, et coïncide sur $\mathcal{E}(X)$, donc au point x , avec $\sup(f , 0) = f^+$ (cf. démonstration du corollaire 27). Donc $0 = g(x) = \dfrac{g(y) + g(z)}{2} \geqslant \dfrac{f(y) + 0}{2} > 0$, ce qui est absurde. Donc $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x$ sur $H_{\mathcal{T}}$, et $\varphi(x) \in \mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})$.

On sait que la restriction $A(Y_{\mathcal{T}}) \to C[\mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})]$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés. Pour montrer que $\varphi_{|\mathcal{E}(X)} : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})$ est continue si on munit $\mathcal{E}(X)$ de la topologie $\mathcal{T}$, il suffit de montrer que, $\forall f \in A(Y_{\mathcal{T}})$, $f \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)}$ est continue. Or $f \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)}$ n'est autre que la trace sur $\mathcal{E}(X)$ de la fonction f considérée comme élément de $H_{\mathcal{T}}$, et cette trace est bien continue pour $\mathcal{T}$.

C. Q. F. D.

REMARQUE 30. - Il en résulte, la topologie $\sigma(H' , H)$ sur $\mathcal{E}(Y_{\mathcal{T}})$ coïncidant avec $\max(Y_{\mathcal{T}})$, que la topologie $\mathcal{T}^*$ sur $\mathcal{E}(X)$ définie par $\mathcal{T}^* = \varphi^{-1}{}_{|\mathcal{E}(X)}[\max(Y_{\mathcal{T}})]$ est une topologie faciale moins fine que $\mathcal{T}$, pour laquelle $C(\mathcal{T}^*) = C(\mathcal{T})$.

En général, $\mathcal{T}^*$ est strictement moins fine que $\mathcal{T}$. Nous allons préciser ces questions de comparaison de topologies faciales.

DÉFINITION 31.

(a) Soient deux topologies faciales $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{E}(X)$. On dit que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont équivalentes, et on écrit $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$, si on a

$$C(\mathcal{T}) = C(\mathcal{T}') \quad .$$

La relation $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$ est une relation d'équivalence entre topologies faciales.

(b) On dit qu'une topologie faciale $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}(X)$ est irréductible, si toute topologie faciale équivalente à $\mathcal{T}$, et moins fine que $\mathcal{T}$, coïncide avec $\mathcal{T}$.

Nous noterons Φ_X l'ensemble des topologies faciales sur $\mathcal{E}(X)$, et nous l'ordonnerons par la relation de finesse entre topologies.

PROPOSITION 32.

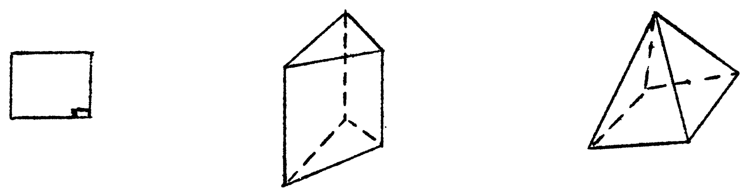
(a) La borne inférieure d'une famille de topologies faciales est encore une topologie faciale.

(b) Toute classe d'équivalence de topologies faciales possède une topologie minimum, qui est irréductible ; une topologie faciale est irréductible si, et seulement si, c'est le minimum de sa classe d'équivalence.

(c) La borne supérieure d'une famille filtrante croissante de topologies faciales est une topologie faciale.

(d) L'ensemble ordonné Φ_X est inductif vers le haut, et possède donc des topologies faciales maximales.

Exemples de topologies faciales maximales non maximum.



Démonstration.

(a) est évident.

(b) résulte de (a) trivialement.

(c) Soient $(\mathcal{T}_i)$ une famille filtrante croissante de topologies faciales, associées à une famille filtrante croissante $(\mathcal{F}_i)$ de familles topologiques de faces parallélisables. Soit $\mathcal{S} = \delta\left(\bigcup_i \mathcal{F}_i\right)$ définie comme au lemme 21.

Alors $\mathcal{S}$ définit une topologie faciale $\mathcal{T}_0$, plus fine que chaque $\mathcal{T}_i$, et moins fine que toute topologie $\mathcal{S}$ plus fine que chaque $\mathcal{T}_i$.

Donc $\mathcal{T}_0 = \sup \mathcal{T}_i$, et $\mathcal{T}_0 \in \Phi_X$.

(d) résulte trivialement de (c).

C. Q. F. D.

THÉORÈME 33. - Les propriétés suivantes, pour une topologie faciale $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}(X)$, définie par une famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ de faces parallélisables, sont équivalentes :

(a) $\mathcal{T}$ est irréductible ;

(b) Il existe un simplexe de Bauer $Y_{\mathcal{T}}$, et une application affine continue surjective directe $\varphi : X \to Y_{\mathcal{T}}$, telle que $\mathcal{T} = \varphi^{-1}|_{\mathcal{E}(X)}[\max(Y_{\mathcal{T}})]$;

(c) Pour toute F de $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$, $\hat{1}_F$ est enveloppe inférieure de fonctions de $H_{\mathcal{T}}$;

(d) Toute fonction s. c. s. ≥ 0 sur $\mathcal{E}(X)$, muni de $\mathcal{T}$, est enveloppe inférieure de fonctions continues pour $\mathcal{T}$;

(e) $\mathcal{T}$ est uniformisable.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) . On a vu, à la remarque 30, que si $Y_{\mathcal{T}}$ est le simplexe de Bauer associé à $\mathcal{T}$ par le corollaire 29, et φ l'application canonique de X sur $Y_{\mathcal{T}}$, alors on a $\mathcal{T}_0 = \varphi^{-1}|_{\mathcal{E}(X)}[\max(Y_{\mathcal{T}})] < \mathcal{T}$, et que $\mathcal{T}_0 \sim \mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ est irréductible, on a donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) . Si $\mathcal{T} = \varphi^{-1}|_{\mathcal{E}(X)}[\max(Y_{\mathcal{T}})]$, alors toute face F de $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ est de la forme $\varphi^{-1}(G)$, où G est une face fermée de $Y_{\mathcal{T}}$, et, d'après la proposition 16, on a $\hat{1}_F = \hat{1}_G \circ \varphi$. Or

$$\hat{1}_G = \inf_{\substack{h \in A(Y_{\mathcal{T}}) \\ h \geqslant 1_G}} h .$$

Donc on a les égalités :

$$\hat{1}_F = \inf_{\substack{h \in A(Y_{\mathcal{T}}) \\ h \geqslant 1_G}} h \circ \varphi = \inf_{\substack{g \in H_{\mathcal{T}} \\ g \geqslant 1_F}} g .$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) . Si G est un fermé de $\mathcal{T}$, alors $G = F \cap \mathcal{E}(X)$, pour une face F de $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$. On a donc

$$1_G = \hat{1}_F|\mathcal{E}(X) = \inf_{h_i \in H_{\mathcal{T}}} h_i|\mathcal{E}(X) = \inf_{g_i \in C(\mathcal{T})} g_i \qquad (g_i = h_i|\mathcal{E}(X)) .$$

Si, maintenant, f est s. c. s. pour $\mathcal{T}$, et $0 \leqslant f \leqslant 1$, on pose

$$A_K^n = \{x \mid f(x) \geqslant \tfrac{K}{n}\} \quad (K = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{et} \qquad \varphi_n = \sum_1^n \frac{1}{n} 1_{A_K^n} .$$

De plus, il est clair que $\inf(\varphi_n, \varphi_p) \geqslant \varphi_{np}$. Donc (φ_n) est une suite filtrante décroissante, d'enveloppe inférieure f. Comme chaque fonction étagée φ_n est enveloppe inférieure de fonctions de $C(\mathcal{T})$, il en est de même de f.

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Un fermé G de $\mathcal{T}$ est défini par

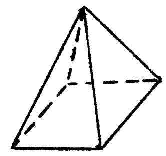
$$1_G = \inf_{\substack{h \in C(\mathcal{T}) \\ h \geqslant 1_G}} h .$$

Donc 1_G est s. c. s. pour toute $\mathcal{T}'$ telle que $C(\mathcal{T}) = C(\mathcal{T}')$, donc G est fermé pour une telle topologie, donc $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$, $\forall\, \mathcal{T}' \sim \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ est irréductible.

(d) $\Longleftrightarrow$ (e) . C'est là un résultat classique de topologie générale (cf. [4]).

C. Q. F. D.

PROPOSITION 34. - Si X est un simplexe, alors Φ_X possède un maximum : la topologie $\max(X)$.



Par contre, la $\mathfrak{A}$-topologie d'un convexe compact X peut n'être même pas maximale dans Φ_X . Le convexe compact ci-contre fournit un contre-exemple.

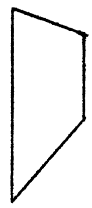
REMARQUE 35. - Considérons les trois propriétés suivantes :

(a) X est un simplexe ;

(b) Si des faces F , G sont parallélisables, $F \cap G$ et $\operatorname{conv}(F \cup G)$ sont des faces parallélisables ;

(c) Φ_X possède un maximum.

Alors (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) .



Mais la réciproque (b) $\Longrightarrow$ (a) est fausse, comme le montre l'exemple du trapèze dans $\underset{\sim}{R}^2$.

REMARQUE 36. - En général, ni $\max(X)$ si X est un simplexe, ni la $\mathfrak{A}$-topologie si X est un convexe compact quelconque, ne sont irréductibles. Un exemple de FAKHOURY, associé à un simplexe "primaire", montre que $H_{\max(X)}$ peut être réduit aux constantes, c'est-à-dire que Φ_X peut comporter une seule classe, et une seule topologie irréductible, la topologie grossière (cf. [8]). En effet, un simplexe primaire est un simplexe tel que $A(X)$ soit "anti-réticulé", c'est-à-dire que $f \vee g$ n'existe dans $A(X)$ que si $f \geqslant g$ ou $g \geqslant f$. Il en résulte que, pour un tel simplexe, $H_{\max(X)}$ est réduit aux constantes (corollaire 27). Un exemple simple de simplexe primaire est donné dans [8] : soit A le sous-espace de $C([0\ ,\ 1])$ formé des fonctions vérifiant $\int_0^1 f(t)\,dt = f(1)$. Alors $A_1'^{+}$ est un simplexe primaire, dont l'ensemble des points extrémaux est isomorphe à $[0\ ,\ 1[$.

Dans le cas d'un simplexe X , FAKHOURY a étudié $H_{\max(X)}$ directement, en utilisant la notion de relation d'équivalence simpliciale. Nous renvoyons le lecteur, pour cette étude, à [8], [14].

L'introduction des topologies faciales irréductibles permet de donner une réciproque satisfaisante au corollaire 27.

Notons Φ_X^* l'ensemble des topologies faciales irréductibles sur X , ordonné par la relation de finesse. Et notons $\mathcal{H}_X$ l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sous-espaces fermés de $A(X)$, contenant les constantes, fortement réticulés pour leur ordre propre.

THÉORÈME 37. - <u>L'application</u> $\mathcal{C} \longmapsto H_{\mathcal{C}}$ <u>de</u> Φ_X^* <u>dans</u> $\mathcal{H}_X$ <u>est en fait un isomorphisme d'ensembles ordonnés.</u>

<u>Démonstration.</u>

(a) Pour montrer que l'application $\mathcal{C} \longmapsto H_{\mathcal{C}}$ est bijective, il suffit de montrer que tout espace H de $\mathcal{H}_X$ est associé à une topologie faciale. Pour cela, si on reprend le simplexe de Bauer $Y = H_1^{\prime +}$ de la démonstration du corollaire 29, on voit immédiatement que H est associé à la topologie faciale $\varphi^{-1}{}_{|\mathcal{E}(X)}[\max(Y)]$, où $\varphi : X \to Y$ est l'application canonique $x \longmapsto \varepsilon_x$ de X dans $H_1^{\prime +}$ (cette topologie est d'ailleurs irréductible).

(b) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux éléments de Φ_X^*, et supposons que $H_{\mathcal{C}} \subset H_{\mathcal{C}'}$.

Soit G un fermé de $\mathcal{C}$. On a

$$1_G = \inf\{h \mid h \in C(\mathcal{C}) , h \geqslant 1_G\} .$$

Or $C(\mathcal{C}) \subset C(\mathcal{C}')$. Donc 1_G est s. c. s. pour $\mathcal{C}'$, et G est un fermé de $\mathcal{C}'$. Donc $\mathcal{C} < \mathcal{C}'$.

C. Q. F. D.

Une autre méthode consisterait à mettre en évidence un diagramme commutatif avec les convexes X, $Y_{\mathcal{C}}$ et $Y_{\mathcal{C}'}$.

COROLLAIRE 38. - <u>Considérons les trois propriétés suivantes</u> :

(a) Φ_X <u>a un maximum</u> ;
(b) Φ_X^* <u>a un maximum</u> ;
(c) $\mathcal{H}_X$ <u>a un maximum.</u>

<u>Alors on a les implications</u> :

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) .$$

COROLLAIRE 39 (FAKHOURY, NAGEL). - <u>Si</u> X <u>est un simplexe,</u> $H_{\max(X)}$ <u>est le maximum de</u> $\mathcal{H}_X$.

COROLLAIRE 40. - <u>L'ensemble ordonné</u> Φ_X^* <u>vérifie le théorème de la borne inférieure : toute partie non vide de</u> Φ_X^* <u>possède une borne inférieure.</u>

En effet, cela est clair pour $\mathcal{H}_X$.

COROLLAIRE 41. - <u>L'ensemble</u> $\mathcal{H}_X$ <u>est inductif vers le haut, et possède des éléments maximaux.</u>

En effet, on voit facilement, à partir du théorème 37 et de la proposition 32 (d), que Φ_X^* est inductif. Il en est donc de même de $\mathcal{H}_X$.

Le problème de la caractérisation "intrinsèque" des éléments maximaux de Φ_X^*, ou de $\mathcal{H}_X$, est actuellement ouvert.

Nous allons donner, dans la suite de ce paragraphe, quelques propriétés des topologies faciales.

Si $\mathcal{T}$ est une topologie faciale, nous noterons $\mathcal{T}^*$ la topologie faciale irréductible équivalente à $\mathcal{T}$.

LEMME 42. - Soit $\varphi : X \to Y$ une application directe, et soit $\mathcal{T}$ une topologie faciale sur Y. Alors on a

$$C[\varphi^{-1}(\mathcal{T})] = C(\mathcal{T}) \circ \varphi \ ,$$

c'est-à-dire que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ de $C(\mathcal{T})$ dans $C[\varphi^{-1}(\mathcal{T})]$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

Démonstration. - Le seul problème est de montrer que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ est surjective. Posons $\mathcal{S} = \varphi^{-1}(\mathcal{T})$, et soient $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ les simplexes de Bauer associés à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par le corollaire 29, et $\psi : Y \to \widetilde{Y}$ et $\theta : X \to \widetilde{X}$ les applications directes correspondantes.

$$\begin{tikzcd} \underset{(\mathcal{S})}{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & \underset{(\mathcal{T})}{Y} \arrow[r, "\psi"] & \widetilde{Y} \\ & \widetilde{X} \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

On sait que $\widetilde{X} = (H_{\mathcal{S}})_1^{\prime +}$, et que $\widetilde{Y} = (H_{\mathcal{T}})_1^{\prime +}$.

L'espace $H_{\mathcal{T}} \circ \varphi$ est un sous-espace fermé de $H_{\mathcal{S}}$. Soit γ la restriction à $\widetilde{X}$ de l'application transposée de l'injection de $H_{\mathcal{T}} \circ \varphi$ dans $H_{\mathcal{S}}$. Si $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, il est clair que $\gamma(\widetilde{x}) \in \widetilde{Y}$. Donc γ est une application affine continue de $\widetilde{X}$ dans $\widetilde{Y}$. Si $x \in X$, on a évidemment $\gamma[\theta(x)] = (\psi \circ \varphi)(x)$. Donc γ est surjective. De plus, le caractère direct de θ, φ et ψ montre que γ est directe.

Il en résulte alors que l'on a $A(\widetilde{X}) = A(\widetilde{Y}) \circ \gamma$ (cf. [14]). Soit alors f dans $H_{\mathcal{S}}$. On peut écrire $f = \widetilde{f} \circ \theta$, où $\widetilde{f} \in A(\widetilde{X})$. Mais alors $\widetilde{f} = \widetilde{g} \circ \gamma$, où $\widetilde{g} \in A(\widetilde{Y})$. Donc on a

$$f = \widetilde{g} \circ \gamma \circ \theta = \widetilde{g} \circ \psi \circ \varphi = (\widetilde{g} \circ \psi) \circ \varphi = h \circ \varphi \ ,$$

où $h \in H_{\mathcal{T}}$, et $H_{\mathcal{T}} \circ \varphi = H_{\mathcal{S}}$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 43. - Soit $\varphi : X \to Y$ une application directe.

(a) Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux topologies faciales sur Y, on a

$$\mathcal{T} \sim \mathcal{T}' \implies \varphi^{-1}(\mathcal{T}) \sim \varphi^{-1}(\mathcal{T}') \quad .$$

(b) Si $\mathcal{T}$ est une topologie faciale sur Y, on a

$$[\varphi^{-1}(\mathcal{T})]^* = \varphi^{-1}(\mathcal{T}^*) \quad .$$

(c) Si $\mathcal{T}$ est une topologie faciale sur Y, on a l'équivalence :

$$\mathcal{T} \text{ irréductible} \iff \varphi^{-1}(\mathcal{T}) \text{ irréductible} \quad .$$

(a) et (b) résultent du lemme 42. Le point (c) aussi, si on remarque l'équivalence

$$\{\mathcal{T} < \mathcal{T}' \text{ et } \mathcal{T} \neq \mathcal{T}'\} \iff \{\varphi^{-1}(\mathcal{T}) < \varphi^{-1}(\mathcal{T}') \text{ et } \varphi^{-1}(\mathcal{T}) \neq \varphi^{-1}(\mathcal{T}')\} \quad .$$

Donnons, pour terminer ce paragraphe, une propriété des topologies faciales irréductibles.

PROPOSITION 44. - Soit X un convexe compact.

(a) Toute topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$, irréductible, est tamisable, donc de Baire.

(b) Ce résultat est faux, en général, pour une topologie faciale non irréductible.

Démonstration.

(a) C'est une propriété générale des topologies quasi-compactes uniformisables.

(b) Reprenons l'exemple de la remarque 36 (cf. [8]). Le simplexe $X = A_1^{!+}$ a l'ensemble de ses points extrémaux isomorphe à $[0 , 1[$, et on voit facilement que les fermés de $\max(X)$ sont les compacts ordinaires de $[0 , 1[$ et $[0 , 1]$. Si on pose alors $U_n =]1 - \frac{1}{n} , 1[$, c'est une suite d'ouverts partout denses de $\max(X)$, dont l'intersection est vide. Donc $\max(X)$ n'est pas un espace de Baire.

C. Q. F. D.

REMARQUE 45. - On peut signaler un résultat qui généralise une proposition de [8] : Si $\mathcal{T}$ est une topologie faciale sur X, si $Y_{\mathcal{T}}$ est le simplexe de Bauer associé, et $\varphi : X \to Y_{\mathcal{T}}$ l'application directe correspondante, alors, en désignant par R la relation d'équivalence sur $\mathcal{E}(X)$ définie par

$$x \, R \, y \iff f(x) = f(y) \,, \qquad \forall f \in C(\mathcal{T}) \quad ,$$

on voit facilement que :

$x \, R \, y \iff \varphi(x) = \varphi(y)$;

$\mathcal{E}(X)/R$, muni de $\mathcal{T}/R$ ou de $\mathcal{T}^*/R$, est isomorphe à $\max(Y_{\mathcal{T}})$;

$\mathcal{T}^*$ a pour fermé les fermés de $\mathcal{T}$ saturés pour R.

4. Topologies faciales et simplexes.

Nous allons étudier ce qui se passe lorsqu'une topologie faciale sur X est séparée. Notre méthode sera celle de [2].

LEMME 46. - Soit X un convexe compact, dont l'ensemble des points extrémaux n'est pas fermé. Soit $\mathcal{T}$ une topologie faciale associée à une famille $\mathfrak{F}$ de faces parallélisables. Soit $x \in \overline{\mathcal{E}(X)} \setminus \mathcal{E}(X)$, et soit F_x la plus petite face de $\mathfrak{F}$ contenant x. Alors, si u et $v \in \mathcal{E}(F_x)$, et $u \neq v$, pour tout couple d'ouverts U et V de $\mathcal{T}$ contenant respectivement u et v, on a $U \cap V \neq \emptyset$.

Démonstration. - On raisonne par l'absurde. Si $U \cap V = \emptyset$ pour un certain couple U, V, il existerait deux faces G et H de $\mathfrak{F}$, telles que $\mathcal{E}(X) \setminus U = \mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(X) \setminus V = \mathcal{E}(H)$, et $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(G) \cup \mathcal{E}(H)$.

On aurait donc $\overline{\mathcal{E}(X)} = \overline{\mathcal{E}(G)} \cup \overline{\mathcal{E}(H)}$, et x appartiendrait à G ou H. Si, par exemple, $x \in G$, alors $F_x \subset G$. Donc $\mathcal{E}(F_x) \subset \mathcal{E}(G)$, et alors

$$u \in \mathcal{E}(F_x) \subset \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(X) \setminus U \quad ,$$

ce qui serait absurde, car $u \in U$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 47. - Les conditions suivantes sont équivalentes pour un convexe compact X :

(a) X est un simplexe de Bauer ;

(b) Il existe une topologie faciale séparée $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}(X)$.

Si ces conditions sont vérifiées, il n'y a qu'une seule topologie faciale séparée : $\max(X)$ (qui n'est autre, alors, que la topologie ordinaire de $\mathcal{E}(X)$).

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est trivial, car $\max(X)$ est séparée si (a) est vraie.

(b) $\Longrightarrow$ (a). D'après le lemme 46, $\mathcal{E}(X)$ est fermé, donc compact pour sa topologie ordinaire σ. Or $\mathcal{T}$ est compacte, et $\mathcal{T} \prec \sigma$. Donc $\mathcal{T} = \sigma$. Soit $f \in C(\sigma)$. Alors $f \in C(\mathcal{T})$, donc f se prolonge en $\tilde{f} \in A(X)$. Il en résulte (cf. [3]) que X est un simplexe de Bauer.

Et, de plus, on a $\mathcal{T} = \sigma = \max(X)$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 48. - Soit X un convexe compact. Alors :

ou bien X *est un simplexe de Bauer,*

ou bien il n'existe aucune topologie faciale irréductible sur X *pour laquelle les points extrémaux sont fermés.*

En effet, si $\{x\}$ est fermé, $\forall\, x \in \mathcal{E}(X)$, pour une $\mathcal{T}$ irréductible, donc uniformisable, $\mathcal{T}$ est alors séparée, et X est un simplexe de Bauer.

En particulier, si X est un convexe compact tel que sa $\mathcal{A}$-topologie soit *accessible* (exemples donnés dans [2] et [15]), et qui n'est pas un simplexe de Bauer, alors la $\mathcal{A}$-topologie n'est pas irréductible, c'est-à-dire n'est pas uniformisable.

COROLLAIRE 49. - *Soit* X *un simplexe.* X *est de Bauer si, et seulement si,* $\max(X)$ *est irréductible.*

DÉFINITION 50. - *Soit* X *un convexe compact. On note* $\mathcal{K}(X)$ *la topologie sur* $\mathcal{E}(X)$, *dont les fermés sont les compacts ordinaires de* $\mathcal{E}(X)$, *et* $\mathcal{E}(X)$. *Cette topologie est* quasi-compacte et accessible.

Il résulte de ce qui précède le corollaire suivant.

COROLLAIRE 51.

1° *Soit* X *un convexe compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) X *est un simplexe de Bauer* ;

(b) $\mathcal{K}(X)$ *est une topologie faciale irréductible.*

2° *Si* X *est un simplexe,* $\mathcal{K}(X)$ *est une topologie faciale.*

Le deuxième point résulte du corollaire 20, et de ce que, si K est compact $\subset \mathcal{E}(X)$, $\overline{\text{conv}}(K)$ est une face F_K , et que $F_K \cap \mathcal{E}(X) = K$.

Achevons cette partie en donnant une réciproque partielle au deuxième point du corollaire précédent.

DÉFINITION 52. - *Un convexe compact* X *est dit* standard, *si* $\mathcal{E}(X)$ *porte toute mesure maximale sur* X .

Par exemple, un convexe compact métrisable est standard. Il en est de même d'un convexe compact dont l'ensemble des points extrémaux est K-analytique (cf. [5]).

Le résultat suivant améliore un théorème de [15], [16].

THÉORÈME 53. - *Soit* X *un convexe compact* standard. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) X <u>est un simplexe</u> ;

(b) $\mathcal{K}(X)$ <u>est une topologie faciale (c'est-à-dire,</u> $\forall K$ <u>compact de</u> $\mathcal{E}(X)$, $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ <u>est une face parallélisable</u>).

<u>Démonstration.</u>

(a) $\Longrightarrow$ (b) . C'est le corollaire 51.

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Si $\overline{\mathrm{conv}}(K) = F_K$ est une face parallélisable, alors il résulte de l'affinité de $\hat{1}_{F_K}$ (cf. [15]) que l'on a

$$F_K = \{b(\mu) \mid \mu \in M_1^+(K)\} \ ; \qquad F'_K = \{b(\mu) \mid \mu \in M_1^+[\mathcal{E}(X) \setminus K]\}$$

(où $b(\mu)$ désigne le barycentre de μ).

Raisonnons alors par l'absurde : si X n'est pas un simplexe, il existe $x \in X$ et deux mesures μ et ν positives de masse 1 , portées par $\mathcal{E}(X)$, de barycentre x , et distinctes. Il existe donc un compact $K \subset \mathcal{E}(X)$ tel que $\mu(K) \neq \nu(K)$.

Si $\mu(K)$ et $\nu(K)$ sont tous deux distincts de 0 et 1 , on a alors deux décompositions de x à coefficients barycentriques distincts :

$$x = \mu(K)\ b[\frac{\mu|K}{\mu(K)}] + [1-\mu(K)]\ b[\frac{\mu|\mathcal{E}(X) \setminus K}{\mu[\mathcal{E}(X) \setminus K]}] \ ,$$

et

$$x = \nu(K)\ b[\frac{\nu|K}{\nu(K)}] + [1-\nu(K)]\ b[\frac{\nu|\mathcal{E}(X) \setminus K}{\nu[\mathcal{E}(X) \setminus K]}] \ ,$$

et $F_K = \overline{\mathrm{conv}}(K)$ ne serait pas parallélisable.

Les cas où l'un des nombres $\mu(K)$ ou $\nu(K)$ vaut 0 ou 1 sont encore plus faciles à étudier, et mènent aussi à une contradiction.

C. Q. F. D.

Un certain nombre de questions se posent en ce qui concerne les relations entre simplexes et topologies faciales :

1° Si X est un simplexe, on a $\mathcal{K}(X) < \max(X)$. A-t-on $\mathcal{K}(X) \sim \max(X)$? Peut-on caractériser la topologie faciale irréductible $\mathcal{K}^*(X)$ équivalente à $\mathcal{K}(X)$? On peut constater que, dans l'exemple de la remarque 36, on a $\mathcal{K}(X) = \max(X)$, et $\mathcal{K}^*(X)$ est grossière.

2° Si X est un convexe compact <u>quelconque</u>, le fait que $\mathcal{K}(X)$ soit faciale implique-t-il que X est un simplexe ?

3° Peut-on caractériser les topologies faciales, sur un convexe compact X , qui sont image réciproque <u>directe</u> d'une topologie $\max(Y)$, où Y est un simplexe <u>non</u>

de Bauer ? Le résultat suivant, qu'on déduit facilement du corollaire 43 (c) et du corollaire 49, montre en tout cas qu'une telle topologie n'est pas irréductible.

PROPOSITION 54. - *Soient* X *un convexe compact,* Y *un simplexe, et*

$$\varphi : X \to Y$$

affine continue surjective directe.

Alors Y *est un simplexe de Bauer si, et seulement si,* $\varphi^{-1}(\max(Y))$ *est irréductible.*

5. Topologies quasi-compactes prolongeables sur $\mathcal{E}(X)$.

DÉFINITION 55. - *Une topologie quasi-compacte* $\mathcal{C}$ *sur* $\mathcal{E}(X)$ *est dite* prolongeable, *si toute fonction continue pour* $\mathcal{C}$ *se prolonge en une fonction de* $A(X)$ *, c'est-à-dire si* $C(\mathcal{C}) \subset A(X)$.

Nous dirons toujours que $\mathcal{C}$ est équivalente à $\mathcal{C}'$, si $C(\mathcal{C}) = C(\mathcal{C}')$. L'ensemble des topologies équivalentes à une topologie donnée possède un minimum.

On doit à NAGEL l'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (c) dans le résultat suivant (cf. [12]). Nous suivrons sa démonstration.

THÉORÈME 56. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une topologie quasi-compacte sur* $\mathcal{E}(X)$ *, et soit* $\mathcal{C}_0$ *la topologie la moins fine équivalente à* $\mathcal{C}$ *(elle est quasi-compacte). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{C}$ *est prolongeable ;*

(b) $\mathcal{C}_0$ *est faciale ;*

(c) $\mathcal{C}_0$ *vérifie la propriété* (P. U.) *suivante (dite de "partition de l'unité") :*

Pour tout recouvrement fini de $\mathcal{E}(X)$ *par des ouverts* $U_1 , \dots , U_n$ *de* $\mathcal{C}_0$ *,* $\exists\, f_1 , \dots , f_n \in A^+(X)$ *, telles que*

$$\sum_{p=1}^{n} f_p = 1 , \quad \underline{\text{et}} \quad \mathcal{E}(X) \cap \{x \mid f_p(x) > 0\} \subset U_p , \quad \underline{\text{pour}} \quad p = 1 , \dots , n .$$

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) , car alors il est clair que $\mathcal{C}_0 = \varphi^{-1}(\max(Y))$ où $Y = H_1^{\prime +}$, et $\varphi : X \to Y$ est l'application $x \mapsto \varepsilon_x$ (H étant l'espace des prolongements à X des fonctions de $C(\mathcal{C})$).

(b) $\Longrightarrow$ (a) , d'après le théorème 25.

(a) $\Longrightarrow$ (c) . On a encore $\mathcal{C}_0 = \varphi^{-1}(\max(Y))$.

Si les $U_p = \varphi^{-1}(V_p)$, $p = 1 , \dots , n$, V_p ouvert de $\max(Y)$, sont des ouverts recouvrant $\mathcal{E}(X)$, les V_p recouvrent $\max(Y)$, qui est compacte. Il existe $g_1 , \dots , g_n \in A^+(Y)$, tels que

$$\{x \mid g_p(x) > 0\} \cap \mathcal{E}(Y) \subset V_p , \qquad \text{et} \qquad \sum_1^n g_p = 1 .$$

Alors les $f_p = g_p \circ \varphi$ sont telles que

$$\sum_1^n f_p = 1 , \quad f_p \in A^+(X) , \qquad \text{et} \qquad \{x \mid f_p(x) > 0\} \cap \mathcal{E}(X) \subset U_p .$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) . Soit $f \in C^+(\mathcal{T}_0) = C^+(\mathcal{T})$.

Soient $U_1 , \dots , U_n$ des ouverts de $\mathcal{T}_0$, sur lesquels f oscille de moins de ε , et tels que $\bigcup_{p=1}^n U_p = \mathcal{E}(X)$.

Soient $f_1 , \dots , f_n$, fournis par la condition (P. U.), et soit $x_p \in U_p$.

Alors, si $g_\varepsilon = \sum_{p=1}^n f_p(x_p) \times f_p$, g_ε appartient à $A(X)$, et $\|g_{\varepsilon}|_{\mathcal{E}(X)} - f\| \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que les g_ε convergent vers une fonction g de $A(X)$, et que $g|_{\mathcal{E}(X)} = f$.

C. Q. F. D.

Une question concernant les convexes compacts se pose : La topologie $\mathcal{K}(X)$ est-elle prolongeable, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{K}_0(X)$ la moins fine parmi les topologies équivalentes à $\mathcal{K}(X)$ est-elle faciale ?

6. Fonctions facialement continues, calcul fonctionnel sur le centre de $A(X)$; décomposition spectrale.

DÉFINITION 57. - Nous dirons qu'une fonction f de $A(X)$ est facialement continue, s'il existe une topologie faciale pour laquelle elle est continue. L'ensemble des fonctions facialement continues s'appelle le centre de $A(X)$, et se note Z_X . On a donc la relation

$$Z_X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_X} H .$$

En général, Z_X n'est pas un sous-espace vectoriel de $A(X)$.

Si X est un simplexe, Z_X coïncide avec $H_{\max(X)}$.

Si $\mathcal{H}_X$ a un maximum H_m , $Z_X = H_m$.

Pour un convexe compact X , nous appellerons centre strict de $A(X)$, l'espace $H_{\mathfrak{a}(X)}$ associé aux faces complémentables. En particulier, si toute face parallélisable de X est complémentable (et GOULLET de RUGY a montré que c'est le cas du convexe compact formé par les "états" d'une C^*-algèbre unitaire), $\mathcal{H}_X$ a un maximum qui est $H_{\alpha(X)}$, et le centre strict de X n'est autre, alors, que son centre.

Nous allons d'abord donner des critères "individuels" de continuité faciale.

PROPOSITION 58. - Soit X un simplexe, et soit $f \in A(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f appartient à Z_X ;
(b) Pour tout λ réel, $\widehat{f \vee \lambda}$ existe dans $A(X)$;
(c) Pour tout λ réel, $\widehat{\sup(f , \lambda)}$ est continue ;
(d) Pour tout λ réel, les ensembles

$$A_\lambda = \{x \mid f(x) \geqslant \lambda\} \qquad \text{et} \qquad B_\lambda = \{x \mid f(x) \leqslant \lambda\}$$

contiennent, chacun, une plus grande face fermée.

L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) est due à NAGEL (cf. [12]).

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est clair, puisque $Z_X = \max(X)$ est fortement réticulé.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est évident, car

$$\widehat{\sup(f , \lambda)} = \inf\{h \mid h \in A(X) , h \geqslant f \text{ et } h \geqslant \lambda\} .$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) . On a

$$A_\lambda = \{x \mid \sup(f , \lambda)(x) = f(x)\} \qquad \text{et} \qquad B_\lambda = \{x \mid \sup(f , \lambda)(x) = \lambda\} .$$

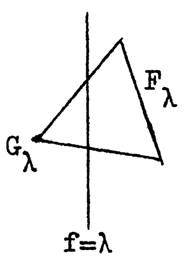
Appelons F_λ la face définie par

$$F_\lambda = \{x \mid \widehat{\sup(f , \lambda)}(x) = f(x)\} .$$

C'est une face, car $\widehat{\sup(f , \lambda)}$ est affine continue supérieure à f . Or (lemme 2 (a)) $\sup(f , \lambda) = \widehat{\sup(f , \lambda)}$ sur $\mathcal{E}(X)$. Donc $A_\lambda \cap \mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(F_\lambda)$. Soit alors G une face fermée incluse dans A_λ . On a nécessairement $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{E}(F_\lambda)$, donc $G \subset F_\lambda$.

On fait un raisonnement analogue pour B_λ .

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Soient F_λ et G_λ les plus grandes faces fermées incluses respectivement dans A_λ et B_λ . Alors il est clair que $A_\lambda \cap \mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(F_\lambda)$, donc $\{x \in \mathcal{E}(X) \mid f(x) \geqslant \lambda\}$ est un fermé de $\max(X)$. Donc $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. s. pour $\max(X)$. On voit de même que $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. i., et f appartient donc à Z_X .



C. Q. F. D.

Si X n'est pas un simplexe, l'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (d) subsiste pour les fonctions continues pour une topologie faciale donnée $\mathcal{C}$, à condition de modifier (d).

PROPOSITION 59. - Soient X un convexe compact, et $\mathcal{C}$ une topologie faciale associée à une famille $\mathfrak{F}$ de faces parallélisables. Les conditions suivantes sont équivalentes pour une fonction f de $A(X)$:

(a) $f_{|\mathcal{E}}$ est continue pour $\mathcal{C}$;

(b) Pour tout λ réel, les ensembles A_λ et B_λ contiennent, chacun, une plus grande face fermée, et ces faces appartiennent à $\mathfrak{F}$.

La démonstration est analogue à celle qui précède ; nous la laissons au lecteur.

Par contre, une caractérisation analogue de l'appartenance d'une fonction donnée f à Z_X semble plus difficile à prouver. L'idée naturelle est de dire que, $\forall\ \lambda$ réel, A_λ et B_λ contiennent, chacun, une plus grande face F_λ et G_λ, et que ces faces sont parallélisables.

On voit alors facilement que les familles $\mathfrak{F} = \{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et $\mathcal{G} = \{G_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ définissent deux topologies faciales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$, pour lesquelles f est respectivement s. c. s. et s. c. i. La difficulté, alors, est qu'il peut ne pas exister, a priori, de topologie faciale plus fine que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$. Une autre voie s'offre cependant, dans un cas très particulier : si $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{S}$) est irréductible, alors f est continue pour $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{S}$). Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 60. - Soit $\mathcal{C}$ une topologie faciale irréductible sur $\mathcal{E}(X)$. Si f est affine continue sur X, et telle que $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. s. (resp. s. c. i.) pour $\mathcal{C}$, alors $f_{|\mathcal{E}}$ est continue pour $\mathcal{C}$.

Démonstration. - En effet, si f, par exemple, est s. c. s., on a

$$f = \inf_{\substack{h\in H_{\mathcal{C}} \\ h\geq f}} h ,$$

puisque $\mathcal{C}$ est irréductible. L'ensemble $M_f = \{h \in H_{\mathcal{C}} \mid h \geq f\}$ est filtrant décroissant, converge simplement vers f, et f est continue. D'après le théorème de Dini, M_f converge uniformément vers f. Donc $M_{f|\mathcal{E}}$ converge uniformément vers $f_{|\mathcal{E}}$. Comme chaque $h_{|\mathcal{E}}$ de $M_{f|\mathcal{E}}$ est continue pour $\mathcal{C}$, il en est de même de $f_{|\mathcal{E}}$.

C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs poser le problème de savoir si cette propriété est caractéristique des topologies irréductibles.

L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) de la proposition 58 n'est pas vraie, en général, pour un convexe compact quelconque (bien que (a) $\Longrightarrow$ (b) soit vraie). Voici comment il faut modifier l'énoncé.

PROPOSITION 61. - *Soit* X *un convexe compact, soit* f *dans* $A(X)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) f *appartient à* Z_X ;

(b) *Pour toute famille finie de couples de réels* (a_p , b_p) , $\bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p)$ *existe dans* $A(X)$;

(c) *Pour toute famille finie de couples de réels* (a_p , b_p) , $\widehat{\sup_{p=1,\dots,n} \{a_p f + b_p\}}$ *est affine continue*.

Si on désigne alors par H_f *le plus petit espace de* $\mathcal{H}_X$ *contenant* f , H_f *n'est autre que le sous-espace vectoriel fermé engendré par les fonctions du type* $\bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p)$.

Démonstration.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) est évident, et on a

$$\bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p) = \widehat{\sup_{p=1,\dots,n} \{a_p f + b_p\}} .$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) est immédiat.

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Soit Γ l'ensemble des fonctions de la forme $\bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p)$.

Si $f \in \Gamma$, et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda f \in \Gamma$.

Si $f , g \in \Gamma$, $f \vee g$ existe dans $A(X)$, et $f \vee g \in \Gamma$.

Si $f , g \in \Gamma$, $f + g \in \Gamma$: en effet, si $f = \bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p)$ et $g = \bigvee_{q=1}^{m} (\alpha_q f + \beta_q)$, alors

$$\bigvee_{\substack{p=1,\dots,n \\ q=1,\dots,m}} [(a_p + \alpha_q) f + (b_p + \beta_q)] \quad \text{existe dans } A(X) ,$$

et c'est $f + g$.

Enfin, si $f , g , h \in \Gamma$, alors $(f + h) \vee (g + h)$ existe dans $A(X)$, appartient à Γ , et vaut $f \vee g + h$.

Il en résulte que $W = \Gamma - \Gamma$ est un sous-espace vectoriel *fortement réticulé* de $A(X)$, contenant les constantes ; et, bien sûr, $f \in W$.

Il est alors facile de voir que $H_f = \overline{W}$ appartient à $\mathcal{H}_X$, et contient f . Donc

f est continue pour la topologie faciale associée à H_f . De plus, H_f est bien le plus petit espace de $\mathcal{H}_X$ contenant f .

C. Q. F. D.

Nous allons retrouver l'espace H_f d'une autre façon, en introduisant le calcul fonctionnel sur Z_X .

DÉFINITION 62. - <u>Soit</u> f <u>un élément du centre</u> Z_X <u>de</u> X . <u>On appellera</u> spectre de f , <u>le sous-ensemble</u> $S_f = f[\mathcal{E}(X)]$ <u>de</u> $\underset{\sim}{R}$. <u>C'est un compact dont les bornes inférieures et supérieures sont</u> $\inf_X f$ <u>et</u> $\sup_X f$.

Nous noterons en abrégé λ , la fonction $\lambda \to \lambda$ définie sur S_f .

THÉORÈME 63. - <u>Il existe un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés</u> Φ_f , <u>unique, de</u> $C(S_f)$ <u>sur l'espace</u> H_f , <u>tel que</u> $\Phi_f(1) = 1$ <u>et</u> $\Phi_f(\lambda) = f$. <u>Si</u> $\psi \in C(S_f)$, <u>on notera</u> $\psi(f)$ <u>la fonction</u> $\Phi_f(\psi)$.

<u>Démonstration.</u> - Soit $\mathcal{T}$ une topologie faciale pour laquelle $f_{|\mathcal{E}}$ est continue. $\mathcal{E}(X)$ étant quasi-compact pour $\mathcal{T}$, il est clair que S_f est compact. Notons $\bar{g}$ le prolongement à X d'une fonction g de $C(\mathcal{T})$. Pour toute ψ de $C(S_f)$, la fonction $\psi \circ (f_{|\mathcal{E}})$ appartient à $C(\mathcal{T})$, donc on peut définir $\overline{\psi \circ (f_{|\mathcal{E}})}$, qui appartient à Z_X .

Soit Φ_f l'application $\psi \longmapsto \overline{\psi \circ (f_{|\mathcal{E}})}$. En tant qu'application de $C(S_f)$ dans $A(X)$, elle est linéaire et isométrique : on a en effet

$$\|\Phi_f(\psi)\| = \sup_X |\Phi_f(\psi)| = \sup_{\mathcal{E}(X)} |\Phi_f(\psi)| = \sup_{\mathcal{E}(X)} \psi \circ (f_{|\mathcal{E}}) = \sup_{S_f} |\psi| = \|\psi\| \quad .$$

Son image est donc un sous-espace fermé de $A(X)$ isométrique à $C(S_f)$. Comme il est clair que $\Phi_f(1) \equiv 1$ et $\Phi_f(\lambda) = f$, ce sous-espace contient f et la fonction 1 .

Si $\psi \geqslant 0$, on a évidemment $\Phi_f(\psi) \geqslant 0$, et la réciproque est immédiate. Soient $a_1 \lambda + b_1 , \dots , a_n \lambda + b_n$ n fonctions affines sur S_f . Alors on voit facilement que

$$\Phi_f[\sup_{p=1,\dots,n} \{a_p \lambda + b_p\}] = \bigvee_{p=1}^{n} (a_p f + b_p) \quad ,$$

car il est évident que l'on a

$$\Phi_f[\sup(\psi , \theta)] = \Phi_f(\psi) \vee \Phi_f(\theta) \quad .$$

Si on note Γ_0 le cône des fonctions sur S_f qui sont traces de fonctions convexes affines par morceaux (c'est-à-dire du type $\sup_{p=1,\dots,n} \{a_p \lambda + b_p\}$), et si on pose $W_0 = \Gamma_0 - \Gamma_0$, on a donc $\Phi_f(\Gamma_0) = \Gamma$, et $\Phi_f(W_0) = W$, en reprenant les notations de la démonstration de la proposition 61.

Remarquons que la donnée de $\Phi_f(1)$ et de $\Phi_f(\lambda)$ nous a imposé Φ_f sur W_0 .

Il n'y a plus qu'à remarquer que W_0 est dense dans $C(S_f)$ pour conclure que $\Phi_f[C(S_f)] = H_f = \overline{W}$, et Φ_f est uniquement défini sur $C(S_f)$.

C. Q. F. D.

La correspondance $\psi \longmapsto \psi(f) = \Phi_f(\psi)$ s'appelle le calcul fonctionnel sur f .

COROLLAIRE 64. - Soit f une fonction du centre de $A(X)$. Alors l'espace H_f est séparable, et la topologie faciale la moins fine rendant f facialement continue, qui est la topologie faciale irréductible $\mathcal{T}_f$ associée à H_f , est à base dénombrable.

Puisque H_f est isomorphe à $C(S_f)$, où S_f est un compact de $\mathbb{R}$, il est clair que H_f est séparable. D'autre part, il existe un simplexe de Bauer Y et une application directe $\varphi : X \to Y$, tels que $\mathcal{T}_f = \varphi^{-1}(\max(Y))$, et que H_f soit isomorphe à $C[\max(Y)]$. Il en résulte que $\max(Y)$ est homéomorphe à S_f , donc est à base dénombrable. Il en est donc de même de $\mathcal{T}_f$.

COROLLAIRE 65. - La topologie faciale $\mathcal{T}_f$ n'est autre que l'image réciproque par $f_{|\mathcal{E}(X)}$ de la topologie de S_f .

Démonstration. - Si Y est le simplexe de Bauer précédemment défini, et φ l'application directe de X sur Y , il existe $g \in A(Y)$ telle que

$$g \circ \varphi = f \quad .$$

On a donc $g[\mathcal{E}(Y)] = S_f$, et la relation

$$f_{|\mathcal{E}(X)} = g_{|\mathcal{E}(Y)} \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)} \quad .$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}(X) \arrow[dl, "\varphi_{|\mathcal{E}(X)}"'] \arrow[dr, "f_{|\mathcal{E}(X)}"] & \\ \mathcal{E}(Y) \arrow[rr, "g_{|\mathcal{E}(Y)}"'] & & S_f \end{tikzcd}$$

Donc, si $\psi \in C(S_f)$, on a

$$\psi \circ (f_{|\mathcal{E}(X)}) = [\psi \circ g_{|\mathcal{E}(Y)}] \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)} \quad .$$

Comme la correspondance $\psi \longmapsto \psi \circ f_{|\mathcal{E}(X)}$ est un isomorphisme, et qu'il en est de même de l'application $h \longmapsto h \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)}$ de $C[\mathcal{E}(Y)]$ dans $C(\mathcal{T}_f)$, il en résulte que l'application $\psi \longmapsto \psi \circ g_{|\mathcal{E}(Y)}$ est un isomorphisme de $C(S_f)$ sur $C[\mathcal{E}(Y)]$. Donc $g_{|\mathcal{E}(Y)}$ est un isomorphisme.

Donc l'image réciproque par $g_{|\mathcal{E}(Y)} \circ \varphi_{|\mathcal{E}(X)}$ de la topologie de S_f est $\mathcal{T}_f$. Or c'est aussi l'image réciproque de la topologie de S_f par $f_{|\mathcal{E}(X)}$.

C. Q. F. D.

On peut donc prendre comme simplexe de Bauer associé à H_f le simplexe $M_1^+(S_f)$. C'est ce que nous allons voir directement par la "décomposition spectrale" de f .

THÉORÈME 66. - Il existe une application affine continue surjective directe

$$de_\lambda : X \to M_1^+(S_f) = Y_f \quad ,$$

unique, telle que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on ait

$$\psi(f)(x) = \int_{S_f} \psi(\lambda)\, de_\lambda(x) \quad .$$

L'application de_λ prolonge à X l'application $f_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E}(X) \to S_f$. Elle s'appelle la décomposition spectrale de f . La mesure $de_\lambda(x)$ est la mesure spectrale de x associée à f .

On a, en particulier, la formule

$$f(x) = \int_{S_f} \lambda\, de_\lambda(x) \quad .$$

On écrira, en abrégé,

$$\psi(f) = \int_{S_f} \psi(\lambda)\, de_\lambda \ , \qquad f = \int_{S_f} \lambda\, de_\lambda \quad .$$

Démonstration. - Pour tout x de X , l'application

$$\psi \longmapsto \psi(f)(x) \quad \text{de } C(S_f) \text{ dans } \mathbb{R}$$

est linéaire, positive, et vaut 1 sur la fonction 1 . Il existe donc une mesure de Radon positive, de masse 1 , sur S_f , unique, notée $de_\lambda(x)$, telle que

$$\psi(f)(x) = \int_{S_f} \psi(\lambda)\, de_\lambda(x) \quad .$$

L'application $x \longmapsto de_\lambda(x)$ est évidemment affine ; elle est continue, car si on la compose avec une fonction affine continue sur Y_f , dont on note ψ la restriction à $\mathcal{E}(Y_f) = S_f$, on obtient précisément $\psi(f)(x)$, qui est continue en x .

Si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a $\int_{S_f} \psi(\lambda)\, de_\lambda(x) = \psi(f)(x) = \psi[f(x)]$. Donc la mesure $de_\lambda(x)$ est $\varepsilon_{f(x)}$, qu'on peut identifier à $f(x)$.

Donc $de_{\lambda|\mathcal{E}(X)} = f_{|\mathcal{E}(X)}$; il en résulte que de_λ est surjective et directe.

Le convexe $M_1^+(S_f)$ est alors tel que $A[M_1^+(S_f)] \circ de_\lambda = H_f$, c'est-à-dire que c'est le simplexe de Bauer associé à H_f ; et on a bien

$$\mathcal{T}_f = de_\lambda^{-1}|_{\mathcal{E}(X)}[\max\{M_1^+(S_f)\}] \quad .$$

C. Q. F. D.

Nous allons voir qu'on peut se ramener à la formulation traditionnelle de la décomposition spectrale, avec une "famille spectrale étalée sur un intervalle", comme dans la théorie des opérateurs sur les espaces de Hilbert. Mais les projecteurs E_λ sont ici remplacés par des fonctions affines s. c. s., dont les restrictions à $\mathcal{E}(X)$ sont des fonctions caractéristiques de fermés faciaux.

DÉFINITION 67. - Une fonction f du centre de $A(X)$ étant donnée, appelons famille spectrale étalée sur le segment $[m , M]$, subordonnée à $\mathcal{T}_f$, une famille de fonctions affines s. c. s. sur X , $\{e_\lambda\}$, dépendant du paramètre réel λ , chaque e_λ ayant pour restriction à $\mathcal{E}(X)$ la fonction caractéristique d'un fermé $\mathcal{T}_f$, et telle que :

(a) $\{e_\lambda\}_\lambda$ est croissante $(\lambda \leqslant \mu \implies e_\lambda \leqslant e_\mu)$;

(b) $\{e_\lambda\}$ est continue à droite $(\forall \lambda , \forall x , \lim\limits_{\varepsilon\to 0} e_{\lambda+\varepsilon}(x) = e_\lambda(x))$;

(c) $e_\lambda \equiv 0$ pour $\lambda < m$, $e_\lambda \equiv 1$ pour $\lambda \geqslant M$.

PROPOSITION 68. - Pour toute fonction f du centre de $A(X)$, de bornes m et M , il existe une famille spectrale étalée sur le segment $[m , M]$, subordonnée à $\mathcal{T}_f$, telle que, pour tout x de X , la mesure de Stieltjes $\delta e_\lambda(x)$ associée à la fonction $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ coïncide avec la mesure spectrale $de_\lambda(x)$ du point x , c'est-à-dire telle que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on ait

$$\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda)\ \delta e_\lambda(x) \quad .$$

De plus, une telle famille spectrale est unique, si on impose seulement que l'on ait

$$f(x) = \int \lambda\ \delta e_\lambda(x) \quad .$$

Démonstration. - Quite à paramétrer la droite réelle en écrivant un point $\lambda M + (1 - \lambda)m$, nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que $m = 0$ et $M = 1$.

1° Posons, pour tout λ réel,

$$e_\lambda(x) = \widehat{1_{\overline{\mathrm{conv}}[f^{-1}(]-\infty,\lambda[)\cap\mathcal{E}(X)]}}(x) \quad .$$

La fonction $e_\lambda(x)$ est donc le prolongement affine s. c. s. à X de la fonction caractéristique du fermé de $\mathcal{E}(X)$ pour $\mathcal{T}_f$ formé par l'ensemble des points où $f_{|\mathcal{E}(X)}$ est inférieure ou égale à λ.

Il est clair que $e_\lambda \leqslant e_\mu$ si $\lambda \leqslant \mu$, que $e_\lambda \equiv 0$ si $\lambda < 0$, et que $e_\lambda \equiv 1$ si $\lambda \geqslant 1$.

De plus, il est évident que, si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a

$$e_\lambda(x) = 1_{[f(x),+\infty[}(\lambda) \quad .$$

Sous cette forme, la fonction $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ est évidemment continue à droite pour tout x de $\mathcal{E}(X)$. Si on considère alors la fonction affine s. c. s. e_{λ^+} définie par

$$e_{\lambda^+} = \inf_{\mu>\lambda} e_\mu \quad ,$$

cette fonction coïncide avec e_λ sur $\mathcal{E}(X)$, donc sur X. Donc $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ est continue à droite pour tout x de X.

Soit $\delta e_\lambda(x)$ la mesure de Stieltjes associée à la fonction $e_\lambda(x)$. Il est clair que $\delta e_\lambda(x) \geqslant 0$, et que $\int 1.\delta e_\lambda(x) = 1$. De plus, si $]a\,,\,b[\subset \complement S_f$, $e_\lambda(x)$ est constante sur $]a\,,\,b[$. Donc $\delta e_\lambda(x)$ est portée par S_f. D'autre part, on peut écrire

$$\int \lambda\ \delta e_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=-1}^{n-1} \frac{K}{n} \left[e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)\right] = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad .$$

La fonction $\varphi_n(x)$ est différence de deux fonctions affines s. c. s. (nous verrons ci-dessous qu'elle est, en fait, s. c. i.). Or, si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a évidemment, <u>par définition des</u> e_λ,

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n} \quad .$$

Donc cette égalité a lieu partout sur X, et on a à la limite

$$f(x) = \int \lambda\ \delta e_\lambda(x) \quad .$$

2° Supposons que nous ayons montré qu'il résulte <u>formellement</u> des hypothèses (a), (b), (c), et de l'égalité $f(x) = \int \lambda\ \delta e_\lambda(x)$ que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on a

$$\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda)\ \delta e_\lambda(x) \quad .$$

Alors, puisque les prolongements de ψ au complémentaire de S_f sont, dans une grande mesure, arbitraires, on voit d'abord que $\delta e_\lambda(x)$ est portée par S_f. Donc, elle coïncide avec la mesure spectrale $de_\lambda(x)$. Alors, il y a une seule fonction

$e_\lambda(x)$ croissante continue à droite et vérifiant (c), dont la mesure de Stieltjes associée soit $de_\lambda(x)$.

On voit ainsi que la famille spectrale est unique.

3° Montrons maintenant ce que nous avons annoncé ci-dessus. Soit Γ_1 le cône des fonctions continues affines par morceaux croissantes et convexes sur $\underset{\sim}{R}$. Toute fonction ψ de Γ_1 s'écrit

$$\psi(\lambda) = \sup_{p=1,\dots,n} \{a_p \lambda + b_p\} \qquad (\text{où } a_p \geqslant 0) \ .$$

Comme il est clair que $\Gamma_1 - \Gamma_1$ est dense dans $C(S_f)$, il suffit de montrer l'égalité $\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda)\ \delta e_\lambda(x)$ pour ψ dans Γ_1 .

Or elle est vraie si $\psi(\lambda) = a\lambda + b$, avec $a \geqslant 0$ (car $\int \delta e_\lambda(x) \equiv 1$, d'après (c)). Il suffit donc de montrer que, si ψ , θ appartiennent à Γ_1 , et si la relation cherchée est vraie pour ψ et θ , elle l'est pour $\sup(\psi , \theta)$, c'est-à-dire qu'on a

$$[\psi(f) \vee \theta(f)](x) = \int [\sup(\psi , \theta)](\lambda)\ \delta e_\lambda(x) \ .$$

Remarquons d'abord que, si $x \in \mathcal{E}(X)$, $e_\lambda(x)$ vaut 0 ou 1 . Il en résulte que $\lambda \to e_\lambda(x)$ est une fonction caractéristique. Comme elle est croissante et continue à droite, elle est donc de la forme

$$\lambda \longmapsto 1_{[\alpha(x),+\infty[}(\lambda) \ .$$

Dans les deux quantités

$$\sum_{-1}^{n-1} \sup[\psi\left(\frac{K}{n}\right) , \theta\left(\frac{K}{n}\right)]\ [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)]$$

et

$$\sup[\sum_{-1}^{n-1} \psi\left(\frac{K}{n}\right)[e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)] , \sum_{1}^{n-1} \theta\left(\frac{K}{n}\right)[e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)]] \ ,$$

on a donc, si $x \in \mathcal{E}(X)$, et si q est tel que $\frac{q}{n} \leqslant \alpha(x) < \frac{q+1}{n}$,

$$e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si } K \neq q , \\ 1 , & \text{si } K = q . \end{cases}$$

Il en résulte que les deux quantités précédentes sont égales si $x \in \mathcal{E}(X)$. Or, si $\varphi(\lambda)$ est une fonction de Γ_1 , on a, en posant

$$I_\varphi^n(x) = \sum_{K=-1}^{n-1} \varphi\left(\frac{K}{n}\right)[e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)] \quad ,$$

$$I_\varphi^n(x) = \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \sum_{K=0}^{n-1} e_{K/n}(x)\left[\varphi\left(\frac{K}{n}\right) - \varphi\left(\frac{K-1}{n}\right)\right] \quad .$$

Donc $I_\varphi^n(x)$ est affine s. c. i. De plus, il est clair que la sous-suite $I_\varphi^{2^p}(x)$ est croissante (cela se voit par un calcul immédiat).

Donc $\int \varphi(\lambda)\ \delta e_\lambda(x) = \lim\limits_{n\to\infty} I_\varphi^n(x) = \lim\limits_{p\to\infty} I_\varphi^{2^p}(x)$ est affine s. c. i. Or nous avons montré, si ψ et θ appartiennent à Γ_1, que

$$I^n_{\sup(\psi,\theta)}(x) = \sup[I_\psi^n(x)\ ,\ I_\theta^n(x)] \quad \text{sur } \mathcal{E}(X) \quad .$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int \sup(\psi\ ,\ \theta)(\lambda)\ \delta e_\lambda(x) = \sup[\psi(f)(x)\ ,\ \theta(f)(x)] \quad \text{sur } \mathcal{E}(X) \quad .$$

La première fonction est affine s. c. i. sur X, la deuxième est la trace sur $\mathcal{E}(X)$ de la fonction $\psi(f) \vee \theta(f)$, qui est affine continue. Ces deux fonctions coïncident sur $\mathcal{E}(X)$; elles coïncident donc partout, et on a bien

$$\sup(\psi\ ,\ \theta)(f)(x) = \int \sup(\psi\ ,\ \theta)(\lambda)\ \delta e_\lambda(x) \quad ,$$

si ψ et θ appartiennent à Γ_1 et vérifient déjà $\psi(f) = \int \psi(\lambda)\ \delta e_\lambda$, $\theta(f) = \int \theta(\lambda)\ \delta e_\lambda$.

C. Q. F. D.

La décomposition spectrale d'une fonction du centre de $A(X)$ nous permet d'étendre le calcul fonctionnel à des fonctions qui ne sont plus nécessairement continues. Nous obtiendrons des fonctions affines sur X, non continues, mais vérifiant le calcul barycentrique, et "approchables" en un certain sens par des fonctions de H_f.

DÉFINITION 69.

1° Nous noterons H_f^I (resp. H_f^S) le cône des fonctions bornées sur X qui sont enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes (resp. enveloppes inférieures de familles filtrantes décroissantes) de fonctions de H_f. Les fonctions de H_f^I seront dites affines f - s. c. i. (et celles de H_f^S, affines f - s. c. s.).

2° Nous noterons U_f l'espace vectoriel des fonctions v sur X vérifiant :

$\forall \mu$ de $M_1^+(X)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in H_f^S$, $\exists h \in H_f^I$, telles que

$$g \leqslant v \leqslant h \text{ , et } \int (h - g)\, d\mu < \varepsilon .$$

Les fonctions de U_f sont dites f-universellement-intégrables.

Nous allons montrer que les fonctions f-semi-continues, d'abord, puis les fonctions f-universellement-intégrables, sont exactement celles que l'on peut atteindre par le calcul fonctionnel, généralisé au moyen des mesures spectrales.

PROPOSITION 70. - Soit g une fonction numérique sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) g appartient à H_f^I (resp. H_f^S) ;

(b) $g_{|\mathcal{E}(X)}$ est s. c. i. (resp. s. c. s.) pour $\mathcal{T}_f$, et g est affine s. c. i. (resp. s. c. s.) ;

(c) Il existe φ définie sur S_f , s. c. i. majorée (resp. s. c. s. minorée), telle que

$$g = \int \varphi(\lambda)\, de_\lambda .$$

La fonction φ de la condition (c) est alors unique.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est évident, car si $\{g_\alpha\}$ est une famille filtrante croissante de fonctions de H_f , telles que $g = \sup\limits_\alpha g_\alpha$, alors $g_{|\mathcal{E}(X)} = \sup\limits_\alpha g_{\alpha|\mathcal{E}(X)}$, qui est s. c. i. majorée pour $\mathcal{T}_f$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) résulte de ce que la topologie $\mathcal{T}_f$ est irréductible (cf. théorème 33).

(a) $\Longrightarrow$ (c) . Chaque $\{g_\alpha\}$ de la famille introduite ci-dessus est de la forme

$$g_\alpha = \psi_\alpha(f) ,$$

où $\psi_\alpha \in C(S_f)$. La famille ψ_α est filtrante croissante, majorée par $\sup g$. Soit $\varphi = \sup\limits_\alpha \psi_\alpha$, s. c. i. majorée sur S_f . Alors, pour tout x de X , on a

$$\int \varphi(\lambda)\, de_\lambda(x) = \sup_\alpha \int \psi_\alpha(\lambda)\, de_\lambda(x) = \sup_\alpha g_\alpha(x) = g(x) .$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) . Soit $\{\psi_\alpha\}$ une famille filtrante croissante de fonctions de $C(S_f)$, telle que $\sup \psi_\alpha = \varphi$. Alors, si $g_\alpha = \psi_\alpha(f)$, on a, pour tout x de X ,

$$g(x) = \int \varphi(\lambda)\, de_\lambda(x) = \sup_\alpha \int \psi_\alpha(\lambda)\, de_\lambda(x) = \sup_\alpha g_\alpha(x) \quad ,$$

et la famille $\{g_\alpha\}$ est filtrante croissante majorée, et incluse dans H_f .

L'unicité de φ résulte de l'égalité $g(x) = \varphi[f(x)]$, si $x \in \mathcal{E}(X)$.

C. Q. F. D.

En particulier, on voit facilement qu'on a la relation $e_\mu = \int 1_{]-\infty,\mu]}(\lambda)\, de_\lambda$.

THÉORÈME 71.

1° Soit v une fonction numérique sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) v appartient à U_f ;

(b) Il existe u définie sur S_f , universellement intégrable, telle que

$$v = \int u(\lambda)\, de_\lambda \quad .$$

2° Si v appartient à U_f , $\forall\, \mu \in M_1^+(X)$, de barycentre b , $\exists\, h_n \in H_f$ telles que $h_n \to v$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ quand $n \to \infty$, et $h_n(b) \to v(b)$.

3° Toute fonction v de U_f vérifie le calcul barycentrique modulo H_f , c'est-à-dire que, $\forall\, \mu$, ν de $M(X)$, on a $\{\mu = \nu$ sur $H_f\} \Longrightarrow \{\mu = \nu$ sur $U_f\}$.

4° L'application $u \to \int u(\lambda)\, de_\lambda$ est bijective de l'espace des fonctions universellement intégrables sur S_f , sur U_f .

Démonstration.

1° (b) $\Longrightarrow$ (a) . Il est clair que la fonction

$$u(f)(x) = \int u(\lambda)\, de_\lambda(x)$$

est affine. Soit μ dans $M_1^+(X)$, et soit b le barycentre de μ . Puisque u est universellement intégrable, u est intégrable pour $de_\lambda(b)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe ψ s. c. i. et θ s. c. s., sur S_f , que l'on peut supposer bornées puisque u l'est (considérer les mesures ε_{λ_0} , $\lambda_0 \in S_f$), telles que

$$\theta \leqslant u \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int (\psi - \theta)\, de_\lambda(b) < \varepsilon \quad .$$

On en déduit

$$\theta(f) \leqslant u(f) \leqslant \psi(f) \ , \qquad \text{et} \qquad \psi(f)(b) - \theta(f)(b) < \varepsilon \quad .$$

Mais comme $\psi(f)$ et $\theta(f)$ sont affines semi-continues, elles vérifient le calcul barycentrique. Donc on a

$$\int [\psi(f) - \theta(f)]\, d\mu < \varepsilon \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 70 que $u(f)$ appartient à U_f .

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Montrons d'abord que, si v appartient à U_f , et si x et y sont deux points de $\mathcal{E}(X)$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $v(x) = v(y)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe ψ et θ dans $C(S_f)$, telles que

$$\theta(f) \leqslant v \leqslant \psi(f) \qquad \text{et} \qquad \int (\psi - \theta)\, d\varepsilon_x < \varepsilon \quad .$$

Donc on a :

- $\theta(f)(x) \leqslant v(x) \leqslant \psi(f)(x)$,
- $\theta(f)(y) \leqslant v(y) \leqslant \psi(f)(y)$,

et

$$\psi(f)(x) - \theta(f)(x) < \varepsilon \quad .$$

Mais si $f(x) = f(y)$, on a

$$\theta(f)(x) = \theta(f)(y) \qquad \text{et} \qquad \psi(f)(x) = \psi(f)(y) \quad .$$

Donc $|v(x) - v(y)| \leqslant \varepsilon$, et ceci $\forall\ \varepsilon > 0$. Donc $v(x) = v(y)$. On peut donc définir une fonction u sur $S_f = f[\mathcal{E}(X)]$, unique, telle que $u \circ f_{|\mathcal{E}} = v_{|\mathcal{E}}$.

Mais alors, on voit que, $\forall\ de_\lambda(x)$, et $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \theta$ s. c. s. minorée et ψ s. c. i. majorée, sur S_f , telles que

$$\theta \leqslant u \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int (\psi - \theta)\, de_\lambda(x) < \varepsilon$$

(il suffit de considérer la restriction à $\mathcal{E}(X)$ de l'inégalité correspondante sur X).

Ceci signifie exactement que u est $de_\lambda(x)$-intégrable, et ceci pour tout x . Donc u est universellement intégrable sur S_f .

On peut alors trouver, pour x fixé, une suite de fonctions s. c. i. majorées ψ_n , et une suite de fonctions s. c. s. minorées θ_n , telles que

$$\theta_n(f) \leqslant v \leqslant \psi_n(f) \qquad \text{et} \qquad \int (\psi_n - \theta_n)\, de_\lambda(x) < \frac{1}{n} \quad .$$

Alors on a bien (puisqu'il résulte de ce qui précède que $\theta_n \leqslant u \leqslant \psi_n$) :

$$\int u(\lambda)\, de_\lambda(x) = \lim_n \int \psi_n(\lambda)\, de_\lambda(x) = \lim_n \psi_n(f)(x) = v(x) \quad .$$

2° Soit $\mu \in M_1^+(X)$, de barycentre b . Soient $g_n \in H_f^S$, $h_n \in H_f^I$, telles que

$$g_n \leqslant v \leqslant h_n \qquad \text{et} \qquad \int (h_n - g_n)\, d\mu < \frac{1}{n} \ .$$

On a

$$g_n = \theta_n(f) \ , \qquad h_n = \psi_n(f) \ ,$$

où θ_n est s. c. s. et ψ_n s. c. i., avec $\theta_n \leqslant \psi_n$. On sait qu'il existe alors une fonction <u>continue</u> φ_n , telle que $\theta_n \leqslant \varphi_n \leqslant \psi_n$. Donc

$$\int |v - \varphi_n(f)|\, d\mu \leqslant \int (h_n - g_n)\, d\mu < \frac{1}{n} \ , \qquad \text{et} \qquad |v(b) - \varphi_n(f)(b)| < \frac{1}{n} \ .$$

Donc $\varphi_n(f)$, qui appartient à H_f , converge vers v dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, et

$$\varphi_n(f)(b) \to v(b) \ .$$

D'ailleurs, la condition " $h_n(b) \to v(b)$ " résulte de celle sur la convergence dans $\mathcal{L}^1$, appliquée à la mesure $\frac{1}{2}(\mu + \varepsilon_b)$.

3° résulte trivialement de 2° appliqué à $\pi = \frac{\mu + \nu}{2}$.

4° résulte de l'égalité $u(f)(x) = u[f(x)]$ si $x \in \mathcal{E}(X)$, et de 1°.

C. Q. F. D.

Si, au moyen de $f_{|\mathcal{E}}$, on "identifie" $\mathcal{E}(X)$ muni de $\mathcal{T}_f$ avec S_f (car S_f est le compact séparé de l'espace quasi-compact uniformisable $\mathcal{T}_f$), le théorème 71 signifie, en quelque sorte, que toute fonction "universellement intégrable sur $\mathcal{E}(X)$ muni de $\mathcal{T}_f$ " se prolonge en une fonction vérifiant le calcul barycentrique, et "approchable au sens des $\mathcal{L}^1(\mu)$ " par des fonctions de H_f . Le problème se pose d'ailleurs de savoir si les propriétés 2° et 3° du théorème 71 sont équivalentes au fait que v appartienne à U_f .

Tous les résultats précédents sont valables pour une topologie faciale du type $\mathcal{T}_f$. Nous allons essayer de les caractériser.

DÉFINITION 72. - <u>Une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}(X)$ est dite</u> principale, <u>si c'est la topologie faciale la moins fine rendant continue une certaine fonction f de A(X) , c'est-à-dire si elle est de la forme $\mathcal{T}_f$, pour f dans Z_X .</u>

PROPOSITION 73. - <u>Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathcal{E}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :</u>

(a) $\mathcal{T}$ <u>est principale</u> ;

(b) <u>Il existe un compact K de $\underset{\sim}{R}$, et une application affine continue surjective</u>

directe φ de X sur $M_1^+(K)$, telle que $\mathcal{T}$ soit l'image réciproque par $\varphi_{|\mathcal{E}(X)}$ de la topologie de K.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est évident. On prend $K = S_f$, si $\mathcal{T}$ est de la forme $\mathcal{T}_f$ (cf. corollaire 65).

(b) $\Longrightarrow$ (a). $\mathcal{T}$ est une topologie faciale irréductible, associée à l'espace $H_{\mathcal{T}} = A[M_1^+(K)] \circ \varphi$. La fonction $\varphi_{|\mathcal{E}}$ est facialement continue pour $\mathcal{T}$, donc elle se prolonge en une fonction f de $A(X)$. Et il est alors clair que $\mathcal{T}$ est la topologie faciale la moins fine rendant $f_{|\mathcal{E}}$ continue, donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$. De plus, on voit facilement que f s'écrit $g \circ \varphi$, où $g \in A[M_1^+(K)]$; la fonction g n'est autre, alors, que la fonction

$$\mu \longmapsto \int \lambda \, d\mu(\lambda) \quad .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 74. - Si f et g sont deux fonctions facialement continues, telles que $H_f = H_g$, il existe un homéomorphisme ψ de S_f sur S_g, tel que $g = \psi(f)$ (et $f = \psi^{-1}(g)$). Inversement, si une fonction g de H_f s'écrit $g = \psi(f)$, où ψ est continue injective, alors $H_f = H_g$.

On peut définir, donc, le spectre d'une topologie principale $\mathcal{T}$, comme le spectre S_f d'une fonction f de Z_X, telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, à un homéomorphisme près. Ou bien, comme un compact K de $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété (b) de la proposition 73, à un homéomorphisme près.

7. Calcul fonctionnel et décomposition spectrale pour les fonctions facialement semi-continues.

Nous noterons $AI(X)$ le cône des fonctions affines s. c. i. sur X.

DÉFINITION 75. - Nous noterons Z_X^I (resp. Z_X^S) l'ensemble des fonctions f affines s. c. i. (resp. s. c. s.) sur X, dont la trace sur $\mathcal{E}(X)$ est s. c. i. (resp. s. c. s.) pour une topologie faciale. C'est aussi l'ensemble des prolongements affines s. c. i. (resp. s. c. s.) à X des fonctions bornées sur $\mathcal{E}(X)$, qui sont s. c. i. (resp. s. c. s.) pour une topologie faciale (théorème 25). Une fonction de Z_X^I (resp. Z_X^S) sera dite facialement s. c. i. (resp. s. c. s.).

Z_X^I n'est pas, en général, un cône convexe. C'est le cas si X est un simplexe, ou si Φ_X a un maximum.

REMARQUE 76.

(a) Il résulte des commentaires qui suivent la proposition 59 qu'une fonction f de $AI(X)$ appartient à Z_X^I si, et seulement si, pour tout réel λ , l'ensemble $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$ contient une plus grande face fermée, qui est parallélisable. Ce fait sera utilisé plus loin.

(b) Si X est un simplexe, f affine s. c. i. est dans $Z_X^I \iff \forall \lambda$, $f \vee \lambda$ existe dans $AI(X)$, et coïncide avec $\sup(f, \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$.

DÉFINITION 77. - On appellera famille spectrale de faces parallélisables étalée sur le segment $[m , M]$, une famille $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de faces parallélisables vérifiant les trois conditions suivantes :

(a) L'application $\lambda \longmapsto F_\lambda$ est croissante ;

(b) L'application $\lambda \longmapsto F_\lambda$ est "continue à droite", c'est-à-dire que, $\forall \lambda$, $F_\lambda = \bigcap_{\mu>\lambda} F_\mu$;

(c) Pour $\lambda < m$, $F_\lambda = \emptyset$, et pour $\lambda \geq M$, $F_\lambda = X$.

DÉFINITION 78. - On appelle famille spectrale de fonctions affines s. c. s. étalée sur le segment $[m , M]$, une famille $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de fonctions affines s. c. s. sur X , dont les restrictions à $\mathcal{E}(X)$ sont les fonctions caractéristiques de l'ensemble des points extrémaux de faces parallélisables, et vérifiant les trois conditions suivantes :

(a) L'application $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ est croissante pour tout x ;

(b) L'application $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ est continue à droite ;

(c) Pour $\lambda < m$, $e_\lambda \equiv 0$, et pour $\lambda \geq M$, $e_\lambda \equiv 1$.

DÉFINITION 79. - On appelle topologie spectrale sur $\mathcal{E}(X)$, une topologie faciale $\mathcal{T}$ telle qu'il existe une fonction f facialement s. c. i., pour laquelle $\mathcal{T}$ est la topologie faciale la moins fine rendant $f_{|\mathcal{E}(X)}$ s. c. i.

Toutes ces notions sont reliées par le résultat suivant.

PROPOSITION 80.

1° Il y a équivalence (et bijection) entre la donnée :

(a) d'une fonction f de Z_X^I , comprise entre m et M ;

(b) d'une famille spectrale de faces parallélisables $(F_\lambda)_\lambda$ étalée sur $[m , M]$;

(c) d'une famille spectrale de fonctions affines s. c. s. $(e_\lambda)_\lambda$ étalée sur $[m , M]$.

2° La famille $(F_\lambda)_\lambda$ de faces parallélisables définit alors une topologie faciale $\mathcal{T}_f$, qui est la moins fine rendant la fonction f associée à $(F_\lambda)_\lambda$ facialement s. c. i. ; cette topologie $\mathcal{T}_f$ est donc spectrale.

Précisons comment on passe de l'une de ces données à l'autre :

Si $f \in Z_X^I$, on pose $F_\lambda = \overline{\text{conv}}[\{x \mid f(x) \leqslant \lambda\} \cap \mathcal{E}(X)]$;

Si $(F_\lambda)_\lambda$ est une famille spectrale, on pose $e_\lambda = \hat{1}_{F_\lambda}$;

Si (e_λ) est une famille spectrale de fonctions affines s. c. s., on a, pour x dans $\mathcal{E}(X)$, $e_\lambda(x) = 1_{[f(x),+\infty[}(\lambda)$; alors $f \in Z_X^I$.

Démonstration.

1° Soit f dans Z_X^I. Pour tout λ réel, $\{x \mid f(x) \leqslant \lambda\} \cap \mathcal{E}(X)$ est un fermé d'une topologie faciale pour laquelle f est s. c. i. Donc il existe une face fermée parallélisable F_λ, telle que

$$F_\lambda = \overline{\text{conv}}[\{x \mid f(x) \leqslant \lambda\} \cap \mathcal{E}(X)] .$$

Si $m \leqslant f \leqslant M$, il est clair que $F_\lambda = \emptyset$ si $\lambda < m$, et $F_\lambda = X$ si $\lambda \geqslant M$. De plus, $\lambda \leqslant \mu$ implique $F_\lambda \subset F_\mu$.

Enfin, soit $F_{\lambda^+} = \bigcap_{\mu>\lambda} F_\mu$. C'est une face fermée de X, dont l'ensemble des points extrémaux $\mathcal{E}(F_{\lambda^+})$ n'est autre que $\bigcap_{\mu>\lambda} \mathcal{E}(F_\mu)$. Mais on a évidemment

$$\bigcap_{\mu>\lambda} \mathcal{E}(F_\mu) = \{x \in \mathcal{E}(X) \mid f(x) \leqslant \lambda\} = \mathcal{E}(F_\lambda) .$$

Donc $F_\lambda = F_{\lambda^+}$.

Soit (F_λ) une famille spectrale de faces parallélisables étalée sur $[m , M]$. Posons $e_\lambda = \hat{1}_{F_\lambda}$. Alors les (e_λ) sont affines s. c. s. ; la famille (e_λ) est croissante. Soit $e_{\lambda^+} = \inf_{\mu>\lambda} e_\mu$; cette fonction est affine s. c. s., et coïncide sur $\mathcal{E}(X)$ avec e_λ. Donc $e_\lambda = e_{\lambda^+}$. On a bien $e_{\lambda|\mathcal{E}(X)} = 1_{\mathcal{E}(F_\lambda)}$, et enfin $e_\lambda \equiv 0$ si $\lambda < m$, $e_\lambda \equiv 1$ si $\lambda \geqslant M$.

Soit (e_λ) une famille spectrale de fonctions affines s. c. s. étalée sur $[m , M]$. Si $x \in \mathcal{E}(X)$, la fonction $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$ est croissante continue à droite, et ne prend que les valeurs 0 et 1. Donc il existe $f(x)$ unique, tel que

$$e_\lambda(x) = 1_{[f(x),+\infty[}(\lambda) .$$

La fonction f, définie sur $\mathcal{E}(X)$, est telle que

$$\{x \mid f(x) \leqslant \lambda\} = \{x \mid e_\lambda(x) = 1\} .$$

Cet ensemble est donc l'ensemble des points extrémaux d'une face parallélisable F_λ.

Alors la famille (F_λ) est croissante, donc elle définit une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$, pour laquelle f est évidemment s. c. i. Il existe un prolongement de f à X, que nous noterons encore f, affine s. c. i., et unique. Et la relation $e_\lambda(x) = 1_{[f(x),+\infty[}(\lambda)$ montre que f est comprise entre m et M sur $\mathcal{E}(X)$, donc partout. Elle montre aussi que f coïncide avec la fonction dont on est parti pour fabriquer la famille (F_λ) initiale, puis la famille (e_λ).

2° Ce point a été en partie montré dans ce qui précède, et est d'ailleurs évident.

C. Q. F. D.

Nous allons voir qu'un calcul fonctionnel est possible sur une fonction f de Z_X^I, en restant dans le cadre de Z_X^I. Ceci s'interprètera par une décomposition spectrale de la fonction f, et les mesures spectrales correspondantes nous permettront de prolonger le calcul fonctionnel.

Par la même occasion, nous allons donner un critère, analogue à celui de la proposition 61, pour qu'une fonction affine s. c. i. soit facialement s. c. i.

Nous noterons $\bigvee\!\!\!\bigwedge_{p=1}^{n} \varphi_p$ une fonction quelconque obtenue à partir d'une suite de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ par composition finie d'opérations du type $\vee$ et $\wedge$, dans le cône $AI(X)$ des fonctions affines s. c. i. sur X, lorsque ces opérations ont un sens. Nous noterons $\underset{p}{IS}\, \varphi_p$ une fonction obtenue de façon analogue au moyen des inf et sup ponctuels.

PROPOSITION 81. - Soit f une fonction affine s. c. i. sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f appartient à Z_X^I ;

(b) Pour tout réel λ, l'ensemble $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leqslant \lambda\}$ contient une plus grande face fermée, et cette face est parallélisable ;

(c) Pour toute suite finie de couples de réels $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ où $a_p \geqslant 0$, $\forall p$, toutes les fonctions $\bigvee\!\!\!\bigwedge_{p} (a_p f + b_p)$ existent dans $AI(X)$, et, de plus, $\forall \lambda$ réel, $f \vee \lambda$ coïncide avec $\sup(f, \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$.

Si on désigne alors par N_f le cône convexe formé par les fonctions du type $\bigvee\!\!\!\bigwedge_{p} (a_p f + b_p)$ $(a_p \geqslant 0)$, et par C_f^I l'ensemble des fonctions majorées, enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes de fonctions de N_f, C_f^I est le plus petit cône convexe de fonctions affines s. c. i. contenant les constantes, fortement stable par $\wedge$ fini et $\vee$ quelconque, majoré dans $AI(X)$, et contenant f.

De plus, $\forall\, g_1 , g_2 \in C^I_f$, $g_1 \vee g_2$ et $g_1 \wedge g_2$ coïncident sur $\mathcal{E}(X)$ avec $\sup(g_1 , g_2)$ et $\inf(g_1 , g_2)$.

Démonstration.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) , d'après la remarque 76.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est évident, car si g , h sont facialement s. c. i. pour $\mathcal{T}$, alors les fonctions $\sup(g_{|\mathcal{E}(X)} , h_{|\mathcal{E}(X)})$ et $\inf(g_{|\mathcal{E}(X)} , h_{|\mathcal{E}(X)})$ sont s. c. i. sur $\mathcal{E}(X)$ muni de $\mathcal{T}$. Elles ont donc des prolongements affines s. c. i. u et v à X . Il est alors clair que $g \vee h = u$ et $g \wedge h = v$ dans $AI(X)$ (de plus, on a $g \wedge h = \inf(g , h)$).

(c) $\Longrightarrow$ (b) . Soit N_f le cône convexe formé par les fonctions du type $\bigvee_p \bigwedge (a_p f + b_p)$ $(a_p \geqslant 0)$, et soit C^I_f le cône formé des fonctions majorées, enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes d'éléments de N_f . Alors il est clair que, $\forall\, g , h$ de C^I_f , $g \vee h$ et $g \wedge h$ existent dans $AI(X)$, et appartiennent à C^I_f . Donc C^I_f est le plus petit cône convexe de $AI(X)$ qui contienne f , et qui soit fortement stable par $\wedge$ fini et $\vee$ quelconque, majoré dans $AI(X)$ (pour les $\vee$ quelconques, on se ramène aux familles filtrantes croissantes).

Nous allons construire une topologie faciale pour laquelle toutes les fonctions de C^I_f , et en particulier f , seront s. c. i. Pour cela nous nous inspirons d'une méthode de GOULLET de RUGY (cf. [10]).

Soit $\mathfrak{F}$ la famille des faces F C^I_f-exposées, c'est-à-dire de la forme $F = g^{-1}(0)$, où g est $\geqslant 0$ et $g \in C^I_f$. Une telle face est fermée. Montrons qu'elle est parallélisable.

Posons $\varphi_F = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (ng \wedge 1)$. Cette fonction appartient à C^I_f , donc est affine s. c. i. De plus, elle vaut 0 sur $\mathcal{E}(F)$, et 1 sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$ (cf. lemme 2). Donc elle coïncide avec la fonction $\check{1}_{C_F}$, c'est-à-dire que $1 - \varphi_F = \hat{1}_F$ est affine s. c. s. Donc F est parallélisable.

Soient maintenant F et G dans $\mathfrak{F}$. Alors, si $F = g^{-1}(0)$ et $G = h^{-1}(0)$, on a $\mathrm{conv}(F \cup G) = (g \wedge h)^{-1}(0)$ (car $g \wedge h = \inf(g , h)$ sur $\mathcal{E}(X)$, car $g \wedge h = \inf(g , h)$), et $F \cap G = (f + g)^{-1}(0)$. Donc $F \cap G$ et $\mathrm{conv}(F \cup G)$ appartiennent à $\mathfrak{F}$.

Enfin, soit (F_α) une famille filtrante décroissante de faces de $\mathfrak{F}$. Alors $\sup_\alpha \varphi_{F_\alpha} = \bigvee_\alpha \varphi_{F_\alpha} \in C^I_f$, et vaut 0 sur F , et 1 sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$. Donc c'est $\check{1}_{C_F}$, c'est-à-dire φ_F , qui appartient à C^I_f ; et $F = \varphi_F^{-1}(0)$, donc $F \in \mathfrak{F}$. Donc $\mathfrak{F}$

définit bien une topologie faciale $\mathcal{T}$.

Montrons que toute fonction de C_f^I est s. c. i. pour $\mathcal{T}$. Pour cela, il suffit de le montrer pour les fonctions de N_f .

De plus, si g , $h \in N_f$, l'égalité $(g \wedge h)_{|\mathcal{E}(X)} = \inf(g_{|\mathcal{E}(X)}, h_{|\mathcal{E}(X)})$ montre que, si g et h sont s. c. i. pour $\mathcal{T}$, il en est de même de $g \wedge h$. Compte tenu du procédé de construction de N_f , il suffit donc de montrer que :

1° Si g , $h \in N_f$, $g_{|\mathcal{E}}$ et $h_{|\mathcal{E}}$ s. c. i. pour $\mathcal{T}$, alors $(g \vee h)_{|\mathcal{E}}$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$.

2° $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$.

Le point 1° est facile : $\sup(g_{|\mathcal{E}}, h_{|\mathcal{E}})$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$, donc admet un prolongement affine s. c. i. φ . On a $\varphi \leqslant g \vee h$ sur $\mathcal{E}(X)$. Donc $\varphi \leqslant g \vee h$ sur X . Donc $\varphi = g \vee h$, et $(g \vee h)_{|\mathcal{E}(X)}$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$.

Donc, la seule chose à montrer est que $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$. Soit $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leqslant \lambda\}$. Posons $g_\lambda = f \wedge \lambda - \lambda$. Alors $g_\lambda \in C_f^I$, et $g_\lambda \not\geqslant 0$. Or, puisque $f \vee \lambda = \sup(f , \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$, on a l'égalité

$$B_\lambda \cap \mathcal{E}(X) = g_\lambda^{-1}(0) \cap \mathcal{E}(X) \quad .$$

Or $g_\lambda^{-1}(0)$ appartient à $\mathfrak{F}$. Donc $f_{|\mathcal{E}}^{-1}(]-\infty , \lambda])$ est un fermé de $\mathcal{T}$, et $f_{|\mathcal{E}}$ est s. c. i. pour $\mathcal{T}$.

C. Q. F. D.

Remarquons que <u>la nécessité de l'hypothèse</u> " $f \vee \lambda = \sup(f , \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$ " tient au fait que, si u , $v \in AI(X)$, et si $u \vee v$ existe dans $AI(X)$, on ne peut affirmer que cette fonction coïncide avec $\sup(u , v)$ sur $\mathcal{E}(X)$ (alors que c'est vrai pour $u \wedge v$ et $\inf(u , v)$).

DÉFINITION 82. - <u>Soit</u> f <u>une fonction facialement s. c. i.</u>, $m \leqslant f \leqslant M$, <u>et soit</u> $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ <u>la famille spectrale de fonctions affines s. c. s. associée à</u> f . <u>On appelle décomposition spectrale de</u> f , <u>l'application</u>

$$de_\lambda : X \longrightarrow M_1^+(\overline{S_f})$$

(<u>où</u> $S_f = f[\mathcal{E}(X)]$) <u>qui, à un point</u> x , <u>fait correspondre la mesure de Stieltjes</u> $de_\lambda(x)$ <u>associée à la fonction croissante</u> $\lambda \longmapsto e_\lambda(x)$. S_f <u>s'appelle le spectre de</u> f , <u>et</u> $de_\lambda(x)$ <u>s'appelle la mesure spectrale du point</u> x <u>associée à</u> f (<u>on voit facilement que</u> $de_\lambda(x)$ <u>a son support dans</u> $\overline{S_f}$).

THÉORÈME 83. - <u>Il existe un isomorphisme isométrique</u> Φ_f <u>du cône ordonné</u> Γ_f^I <u>des fonctions croissantes s. c. i. bornées sur</u> S_f <u>sur le cône ordonné</u> C_f^I <u>défini</u>

<u>à la proposition</u> 81. <u>Si</u> ψ <u>appartient à</u> Γ_f^I , <u>on notera</u> $\psi(f)$ <u>la fonction correspondante de</u> C_f^I .

<u>Démonstration</u>. - Soit ψ dans Γ_f^I . Alors la fonction $\psi \circ (f_{|\mathcal{E}(X)})$ est s. c. i. bornée sur $\mathcal{E}(X)$, pour la topologie faciale $\mathcal{T}$ pour laquelle f est s. c. i. D'après le théorème 25, il existe $\overline{\psi \circ (f_{|\mathcal{E}(X)})}$ unique, prolongement affine s. c. i. de $\psi \circ (f_{|\mathcal{E}(X)})$ à X . Nous poserons

$$\psi(f) = \overline{\psi \circ (f_{|\mathcal{E}(X)})} \quad .$$

L'application Φ_f : $\psi \longmapsto \psi(f)$ est additive et positivement homogène. Si $\psi(f) = \theta(f)$, il est clair que $\psi \equiv \theta$; donc Φ_f est injective. Si $\psi \geqslant \theta$, il est clair que $\psi(f) \geqslant \theta(f)$, et la réciproque est immédiate. De plus, on a

$$\|\psi(f) - \theta(f)\| = \sup_{\mathcal{E}(X)} |\psi(f) - \theta(f)| = \|\psi - \theta\|_{S_f} \quad ;$$

donc Φ_f est une isométrie.

L'image de Γ_f^I par Φ_f est un sous-cône convexe de $AI(X)$ contenant les constantes $(\psi \equiv 1)$ et la fonction f $(\psi(\lambda) \equiv \lambda)$, fortement stable par $\wedge$ fini et $\vee$ quelconque majoré dans $AI(X)$. Donc cette image contient C_f^I .

Soit Γ_0 le sous-cône de Γ_f^I formé par les restrictions à S_f des fonctions croissantes continues affines par morceaux. Une fonction ψ de Γ_0 s'écrit

$$\psi(\lambda) = \mathop{IS}_{p=1}^{n} (a_p \lambda + b_p) \ , \qquad \text{où } a_p \geqslant 0 \ , \quad \forall \ p \ .$$

Il résulte alors de la proposition 81 que l'on a

$$\psi(f) = \bigvee\!\!\bigwedge_{p=1}^{n} (a_p f + b_p) \quad .$$

Donc l'image de Γ_0 est le cône N_f .

Pour montrer que l'image de Γ_f^I n'est autre que C_f^I , il suffit de montrer que toute fonction ψ de Γ_f^I est enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions de Γ_0 .

Pour cela, remarquons que ψ peut être prolongée en une fonction croissante continue à gauche sur tout $\mathbb{R}$: si $\lambda \in \overline{S_f} \setminus S_f$, on pose

$$\psi(\lambda) = \sup_{\substack{\mu<\lambda \\ \mu\in S_f}} \psi(\mu)$$

(ceci est possible, car $\inf S_f \in S_f$). Puis on prolonge ψ à un intervalle $]a\,,\,b[$ de $\complement\overline{S_f}$, en posant

$$\psi(\lambda) = \psi(b) \qquad (b \in \overline{S_f}) \quad .$$

Enfin, si $\lambda > \sup S_f$, on pose

$$\psi(\lambda) = \psi[\sup S_f] \quad .$$

Si θ est une fonction croissante continue sur $\underline{R}$, on voit facilement que θ est enveloppe supérieure d'une suite filtrante croissante de fonctions θ_n de Γ_0 , convergeant d'ailleurs uniformément.

Comme Φ_f est une isométrie, on voit d'ailleurs que l'image de $\overline{\Gamma_0}$, c'est-à-dire du cône des fonctions croissantes continues, est exactement $\overline{N_f}$, et est incluse dans C_f^I .

Si on retourne maintenant à la fonction ψ , nous allons voir que ψ est le sup d'une famille filtrante croissante de fonctions continues <u>et croissantes</u>.

Admettons pour l'instant ce lemme. Alors ψ sera enveloppe supérieure de fonctions de $\overline{\Gamma_0}$ (et même de Γ_0), et $\psi(f)$ sera donc dans C_f^I . Donc $\Phi_f(\Gamma_f^I) \subset C_f^I$, donc on a l'égalité.

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant le lemme qu'on a admis.

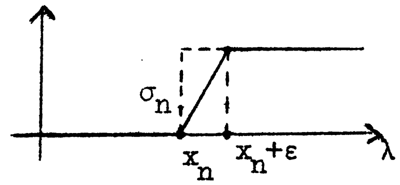
LEMME 84. - <u>Toute fonction croissante bornée continue à gauche sur $\underline{R}$ est limite croissante d'une suite de fonctions croissantes continues.</u>

<u>Démonstration.</u> - Soit ψ une telle fonction. On peut écrire

$$\psi = \psi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \,, \qquad \text{où } \theta_n(\lambda) = \sigma_n \times 1_{]x_n,+\infty[}(\lambda) \quad ,$$

en désignant par x_n un point de discontinuité de ψ , et par σ_n le saut correspondant, et la fonction ψ_1 étant croissante continue. On sait que $\sum_1^\infty \sigma_n < +\infty$, puisque ψ est bornée.

Pour tout n , soit $\theta_n^\varepsilon(\lambda)$ la fonction dont le graphe est dessiné ci-contre $(\varepsilon > 0)$.



Posons $u_\varepsilon(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^\varepsilon(\lambda)$. Comme $|\theta_n^\varepsilon| \leqslant \sigma_n$, et comme la série de terme général σ_n converge, u_ε est une fonction croissante continue en λ , et $\psi_\varepsilon = \psi_1 + u_\varepsilon$ est croissante continue. De plus, si ε décroît, ψ_ε croit. Or, si on pose $\theta_n^0(\lambda) = \theta_n(\lambda)$, pour tout λ fixé, $\theta_n^\varepsilon(\lambda)$ est <u>continue</u>

<u>en</u> $\varepsilon \geqslant 0$. De la relation $|\theta_n^{\varepsilon}(\lambda)| \leqslant \sigma_n$, $\forall\ \varepsilon \geqslant 0$, on déduit que u_ε est continue en ε . Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\varepsilon(\lambda) = \psi_1(\lambda) + \sum_1^\infty \theta_n(\lambda) = \psi(\lambda) , \qquad \text{pour tout } \lambda \text{ fixé} .$$

La suite $\psi_{1/p}$ est alors la suite cherchée.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 85. - <u>Le cône</u> C_f^I <u>est fermé pour la convergence uniforme. De plus, tout élément de</u> C_f^I <u>est limite d'une suite croissante d'éléments de</u> N_f .

En effet, l'application $\psi \longmapsto \psi(f)$ est une isométrie, et Γ_f^I est manifestement fermé, donc complet, pour la distance uniforme. Le deuxième point résulte facilement du lemme 84 et du théorème 83.

Nous allons voir que le calcul fonctionnel peut, comme dans le cas des fonctions facialement continues, s'interpréter au moyen des mesures spectrales.

THÉORÈME 86. - <u>Pour toute fonction</u> ψ <u>de</u> Γ_f^I , <u>on a la relation</u>

$$\psi(f)(x) = \int \tilde{\psi}(\lambda)\ de_\lambda(x) \quad ,$$

<u>où</u> $\tilde{\psi}$ <u>est un prolongement croissant s. c. i. quelconque de</u> ψ <u>à</u> $\underline{R}$.

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord ψ croissante <u>continue</u> sur $\underline{R}$. En reprenant le point 3° de la démonstration de la proposition 68, on voit que la fonction

$$I_\psi^\Delta(x) = \sum_{K=-1}^{n-1} \psi(\lambda_K)[e_{\lambda_{K+1}}(x) - e_{\lambda_K}(x)]$$

est affine s. c. i. (Δ désigne la subdivision λ_{-1} , λ_0 , λ_1 , ... , λ_{n-1} , où $\lambda_{-1} < \inf S_f$, $\lambda_{n-1} = \sup S_f$). De plus, si une subdivision Δ' est plus fine que Δ , $I_\psi^\Delta(x) \leqslant I_\psi^{\Delta'}(x)$. Donc

$$\lim_\Delta I_\psi^\Delta(x) = \int \psi(\lambda)\ de_\lambda(x)$$

est affine s. c. i. Or, si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a $e_\lambda(x) = 1_{[f(x),+\infty[}(\lambda)$, donc $de_\lambda(x) = \varepsilon_{f(x)}$. Donc

$$\int \psi(\lambda)\ de_\lambda(x) = \psi[f(x)] = \psi(f)(x) , \qquad \text{si } x \in \mathcal{E}(X) .$$

Les fonctions affines s. c. i. $\psi(f)$ et $\int \psi(\lambda)\ de_\lambda$ coïncidant sur $\mathcal{E}(X)$, elles coïncident partout.

Si maintenant $\tilde{\psi}$ est croissante s. c. i., alors $\tilde{\psi} = \lim \psi_n$, où les ψ_n sont croissantes continues, la suite (ψ_n) étant croissante. Alors

$$\int \tilde{\psi}(\lambda)\, de_\lambda = \sup \int \psi_n(\lambda)\, de_\lambda = \sup \psi_n(f) = \psi(f) \quad .$$

C. Q. F. D.

On peut déduire de ce résultat que, $\forall \mu \in \overline{S_f} \setminus S_f$, non adhérent à $S_f \cap \,]-\infty , \mu[$, aucune mesure spectrale $de_\lambda(x)$ ne charge le point μ .

Nous allons étendre le calcul fonctionnel aux fonctions croissantes sur S_f .

DÉFINITION 87. - Nous noterons V_f le cône convexe des fonctions v sur X vérifiant :

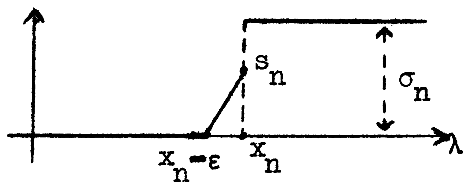
1° v est universellement intégrable (donc bornée) ;
2° $\forall \mu \in M_1^+(X)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, h \in C_f^I$ telle que $v \leq h$ et $\int (h - v)\, d\mu < \varepsilon$;
3° L'implication (D) : $\{h \in C_f^I \ , \ h \geq v$ sur $\mathcal{E}(X)\} \Longrightarrow \{h \geq v\}$.

Par ailleurs, nous noterons Δ_f le cône convexe des fonctions croissantes bornées sur S_f .

Nous allons montrer sur V_f un résultat analogue au théorème 71. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 88. - Toute fonction croissante bornée sur $\mathbb{R}$ est limite décroissante d'une suite de fonctions croissantes s. c. i. bornées.

Démonstration. - Soit u une telle fonction. On peut écrire $u = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$, où w_n est nulle sur $]-\infty , x_n[$, a une valeur $s_n > 0$ en x_n , et vaut $\sigma_n \geq s_n$ sur $]x_n , +\infty[$, et où u_1 est croissante s. c. i. bornée. De plus, on a $\sum_1^\infty \sigma_n < +\infty$.



Pour tout n , soit $w_n^\varepsilon(\lambda)$ la fonction croissante s. c. i. dont le graphe est dessiné ci-contre ($\varepsilon > 0$) .

Posons $w_\varepsilon(\lambda) = \sum_1^\infty w_n^\varepsilon(\lambda)$. Comme $\sum \sigma_n < +\infty$, c'est une fonction croissante s. c. i. en λ . Il en est de même de $u_\varepsilon = u_1 + w_\varepsilon$. De plus, si ε croît, u_ε décroît. Or, si on pose $w_n^0 = w_n$, la fonction w_n^ε est continue en $\varepsilon \geq 0$, pour tout λ fixé. De la convergence normale de la série, on déduit alors que u_ε est continue en ε . Donc on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(\lambda) = u(\lambda) \ , \qquad \forall \lambda \text{ fixé} \quad .$$

La suite $u_{1/p}$ est alors la suite cherchée.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 89.

1° Soit v une fonction minorée sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe $u \in \Delta_f$, telle que

$$v(x) = \int \tilde{u}(\lambda)\ de_\lambda(x) \quad ,$$

où $\tilde{u}$ est le plus petit prolongement croissant de u à $\overline{S_f}$;

(b) 1° Il existe une suite décroissante (h_n) de fonctions de C_f^I convergeant simplement vers v ;

2° v vérifie l'implication (D) (cf. définition 87) ;

(c) v appartient à V_f.

2° Toute fonction v de V_f vérifie le calcul barycentrique modulo N_f.

3° L'application $u \longmapsto \int \tilde{u}(\lambda)\ de_\lambda$ est une bijection de Δ_f sur V_f.

Démonstration.

1° (a) $\Longrightarrow$ (b). On suppose que $v = \int \tilde{u}(\lambda)\ de_\lambda$, où $\tilde{u}$ est un prolongement croissant borné à $\underline{R}$ de $u \in \Delta_f$. D'après le lemme 88, il existe une suite décroissante (ψ_n) de fonctions croissantes s. c. i. bornées qui converge vers $\tilde{u}$.

Soit $h_n = \psi_n(f) = \int \psi_n(\lambda)\ de_\lambda$. La suite (h_n) est décroissante, chaque h_n appartient à C_f^I, et $\forall\, x$ de X, on a

$$\lim_n h_n(x) = \lim_n \int \psi_n(x)\ de_\lambda(x) = \int \tilde{u}(\lambda)\ de_\lambda(x) = v(x) \quad .$$

De plus, soit $h \in C_f^I$, avec $h \geqslant v$ sur $\mathcal{E}(X)$. Soit $\psi \in \Gamma_f^I$, telle que $h = \psi(f)$. Si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a

$$\psi[f(x)] = h(x) \geqslant v(x) = \int \tilde{u}(\lambda)\ d\varepsilon_{f(x)}(\lambda) = u[f(x)] \quad .$$

Donc $\psi \geqslant u$ sur S_f. Par suite, si $\tilde{u}$ est le plus petit prolongement croissant de u à $\overline{S_f}$, $\psi \geqslant \tilde{u}$ sur $\overline{S_f}$. Par intégration sur $\overline{S_f}$, on en déduit $h \geqslant v$ sur X, et v vérifie l'implication (D).

(b) $\Longrightarrow$ (c). Si $v = \lim h_n$, avec $m \leqslant v \leqslant h_1$, il est clair que v est universellement intégrable. De plus, d'après le théorème de Lebesgue,

$$\lim_n \int h_n \, d\mu = \int v \, d\mu \,, \qquad \forall \mu \in M_1^+(X) \quad .$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_n \in C_f^I$ telle que $v \leq h_n$ et $\int (h_n - v)\, d\mu < \varepsilon$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) **A.** Soient deux points x et y de $\mathcal{E}(X)$, tels que $f(x) = f(y)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in C_f^I$, telle que $v \leq h$ et $\int (h - v)\, d\varepsilon_x < \varepsilon$. Or, si $f(x) = f(y)$, on a $h(x) = h(y)$, $\forall h \in C_f^I$. Donc on a les inégalités

$$v(y) \leq h(y) = h(x) \leq v(x) + \varepsilon \quad ,$$

soit

$$v(y) \leq v(x) + \varepsilon \,, \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad .$$

Donc $v(y) \leq v(x)$. Par symétrie, il en résulte que $v(x) = v(y)$. Donc on peut définir une fonction u sur S_f , unique, telle que

$$v_{|\mathcal{E}(X)} = u \circ [f_{|\mathcal{E}(X)}] \quad .$$

B. Montrons que u est croissante sur S_f . Soient x et y dans $\mathcal{E}(X)$, tels que $f(x) \leq f(y)$. Alors, $\forall h \in C_f^I$, $h(x) \leq h(y)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe h dans C_f^I , telle que $v \leq h$ et $\int (h - v)\, d\varepsilon_y < \varepsilon$, soit

$$v(x) \leq h(x) \leq h(y) \leq v(y) + \varepsilon \quad .$$

Donc $v(x) \leq v(y) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, et par suite $v(x) \leq v(y)$.

C. Soit $\tilde{u}$, prolongement de u à $\underset{\sim}{R}$, défini ainsi :

Si $\mu \in \overline{S_f} \setminus S_f$, on pose

$$\tilde{u}(\mu) = \sup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \in S_f}} u(\lambda) \quad ;$$

Si $]a , b[\subset \complement \overline{S_f}$, $b \in \overline{S_f}$, on pose

$$\tilde{u}(\lambda) = \tilde{u}(b) \,, \qquad \text{si } \lambda \in]a , b[\quad ;$$

Si $\lambda \geq \sup S_f$, on pose

$$\tilde{u}(\lambda) = \tilde{u}[\sup S_f] \quad .$$

D'après le lemme 88, il existe une suite décroissante ψ_n de fonctions croissantes s. c. i. bornées, telles que $\lim \psi_n = \tilde{u}$ sur $\underset{\sim}{R}$.

Soit w la fonction définie par

$$w(x) = \int \tilde{u}(\lambda)\, de_\lambda \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $x \in X$. Il existe h dans C_f^I , telle que

$$v \leqslant h \qquad \text{et} \qquad \int (h - v)\, d\varepsilon_x < \varepsilon \ ,$$

donc $v(x) \leqslant h(x) \leqslant v(x) + \varepsilon$. Alors il existe θ croissante bornée s. c. i., telle que $h = \int \theta \, de_\lambda = \theta(f)$. Remplaçons θ par la fonction $\tilde{\theta}$ obtenue en prolongeant $\theta_{|S_f}$ par le même procédé que celui utilisé pour prolonger u . Alors on a encore $h = \int \tilde{\theta}\, de_\lambda$.

L'inégalité $v \leqslant h$, restreinte à $\mathcal{E}(X)$, prouve que $u \leqslant \theta_{|\mathcal{E}(X)}$, donc $\tilde{u} \leqslant \tilde{\theta}$.

Soient $\theta_n = \inf(\tilde{\theta}\, , \psi_n)$. Alors la suite θ_n décroît vers $\tilde{u}$. Donc

$$\theta_n(f)(x) = \int \theta_n \, de_\lambda(x) \longrightarrow \int \tilde{u}\, de_\lambda(x) = w(x) \ .$$

Or on a $\theta_n(f)(x) \leqslant h(x) \leqslant v(x) + \varepsilon$. Mais, sur $\mathcal{E}(X)$, on a $v \leqslant \theta_n(f)$ (puisque, si $y \in \mathcal{E}(X)$, $v(y) = u[f(y)] \leqslant \theta_n(y)$). Donc $v \leqslant \theta_n(f)$ sur X , et, en particulier, $v(x) \leqslant \theta_n(f)(x)$. Quand n tend vers l'infini, on obtient

$$v(x) \leqslant w(x) \leqslant v(x) + \varepsilon \ , \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ ,$$

donc $v(x) = w(x) = \int \tilde{u}(\lambda)\, de_\lambda(x)$.

Et il est clair que $\tilde{u}_{|\overline{S_f}}$ est le plus petit prolongement croissant de u à $\overline{S_f}$.

2° Cela résulte immédiatement de la propriété (b).

3° C'est bien clair, d'après ce qui précède : la correspondance $u \longmapsto \tilde{u}$ étant bijective, si $\int \tilde{u}\, de_\lambda = \int \tilde{u}'\, de_\lambda$, alors il y a égalité sur $\mathcal{E}(X)$, donc $u = u'$ (et par suite $\tilde{u} = \tilde{u}'$).

C. Q. F. D.

REMARQUE 90. - <u>Si le convexe compact</u> X <u>est standard, l'implication</u> (D) <u>peut être supprimée</u> dans la définition de V_f et dans la condition (b) du théorème 89.

Dans le premier cas, soit en effet $\mu \in M_1^+(X)$, de barycentre x . Soit $\nu = \dfrac{\mu + \varepsilon_x}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in C_f^I$, telle que $h \geqslant v$ et $\int (h - v)\, d\nu < \varepsilon$. Donc on a à la fois

$$0 \leqslant \int h \, d\mu - \int v \, d\mu < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant h(x) - v(x) < \varepsilon \ .$$

Or les fonctions de C_f^I vérifient le calcul barycentrique. Donc $\int h \, d\mu = h(x)$. Par suite $\left|\int v \, d\mu - v(x)\right| < 2\varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, donc $\int v\, d\mu = v(x)$. Donc v vérifie le calcul barycentrique. Soit alors $h \in C_f^I$, $h \geqslant v$ sur $\mathcal{E}(X)$. Si h et v

vérifient le calcul barycentrique, et si toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(X)$, il est clair que $h \geqslant v$ sur X.

Dans le deuxième cas, si (h_n) est une suite de fonctions de C_f^I, et si $h_n \searrow v$, avec $v \geqslant m$, le théorème de Lebesgue prouve que v vérifie le calcul barycentrique. On conclue alors comme précédemment.

Achevons en explicitant la liaison entre le cône C_f^I et la topologie $\mathcal{T}_f$ associée à f.

PROPOSITION 91. - <u>Soit</u> g <u>une fonction affine s. c. i. sur</u> X. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) g <u>appartient au cône</u> C_f^I ;

(b) $g_{|\mathcal{E}(X)}$ <u>est s. c. i. pour la topologie</u> $\mathcal{T}_f$.

<u>Démonstration.</u>

(a) $\Longrightarrow$ (b) est évident.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Si $F_\lambda = \overline{\mathrm{conv}}[\{x \mid f(x) \leqslant \lambda\} \cap \mathcal{E}(X)]$, on sait que les F_λ, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, sont exactement les fermés de $\mathcal{T}_f$.

Si nous montrons que $\varphi_{F_\lambda} = \widecheck{1_{CF_\lambda}}$ appartient à C_f^I, alors g appartiendra à C_f^I, car d'après la démonstration du théorème 25, g est limite croissante de combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions du type φ_{F_λ} (à une constante fixe près).

Or $\mathcal{E}(F_\lambda)$ est l'ensemble des points où $(f - \lambda)^+$ est nulle. Comme on a $0 \leqslant (f - \lambda)^+ \leqslant (f - \lambda) \vee 0$, et comme ces deux dernières fonctions coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, on voit que

$$F_\lambda = ((f - \lambda) \vee 0)^{-1}(0) \quad .$$

Alors, il en résulte facilement qu'on a l'égalité

$$\varphi_{F_\lambda} = \bigvee_n \{n[(f - \lambda) \vee 0] \wedge 1\}$$

(cf. démonstration de la proposition 81). Par suite, φ_{F_λ} appartient à C_f^I.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik). - On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, Math. Scand., t. 17, 1965, p. 169-176.

[2] ALFSEN (Erik) and ANDERSEN (Tage Bai). - Split faces of compact convex sets, Aarhus Universitat, Reprint series, 1968/69, n° 32.

[3] BAUER (Heinz). - Kennzeichnung kompakter Simplexe mit abgeschlossener Extremalpunktmenge, Archiv der Math., t. 14, 1963, p. 415-421.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chapitre 9. 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[5] CHOQUET (Gustave) et MEYER (Paul-André). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[6] EFFROS (Edwards). - Structure in simplexes, Acta Math., Uppsala, t. 117, 1967, p. 103-121.

[7] EFFROS (Edwards). - Structure in simplexes, II, J. of funct. Anal., t. 1, 1967, p. 379-391.

[8] FAKHOURY (Hachim). - Solution d'un problème posé par Effros, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 77-79.

[9] GOULLET de RUGY (Alain). - Géométrie des simplexes. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1968.

[10] GOULLET de RUGY (Alain). - Travaux à paraître.

[11] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 9, 3 p.

[12] NAGEL (Rainer). - Idealtheorie in geordneten lokalkonvexen Vektorraümen, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität, Tübingen, 1969.

[13] PHELPS (Robert). - Lecture on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[14] ROGALSKI (Marc). - Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée, et application à un théorème de Alfsen ; quotient par une relation d'équivalence, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 2, 25 p.

[15] ROGALSKI (Marc). - Caractérisation des simplexes par des propriétés portant sur les faces fermées et sur les ensembles compacts de points extrémaux, Math. Scand. (à paraître).

[16] ROGALSKI (Marc). - Quelques problèmes concernant une caractérisation des simplexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 645-647.

[17] ROGALSKI (Marc). - Topologies faciales dans les convexes compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 766-768.

(Texte reçu le 22 janvier 1970)

Marc ROGALSKI
1 rue Montbrun
75 - PARIS 14