

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES ROYER

ALAIN LOUVEAU

## **Ensembles bornés dans un espace uniforme**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 8 (1968-1969), exp. n° 6, p. 1-14

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1968-1969\\_\\_8\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A6_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES BORNÉS DANS UN ESPACE UNIFORME

par Gilles ROYER et Alain LOUVEAU

Définitions. - Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace uniforme  $E$ . On dira que  $A$  est borné par rapport à  $E$  si, pour toute fonction numérique uniformément continue définie dans  $E$ ,  $f(A)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $E$  un espace uniforme. On dira que  $E$  est borné (ou intrinsèquement borné) s'il est borné par rapport à lui-même, c'est-à-dire si toute fonction uniformément continue sur  $E$  est bornée.

Commençons par quelques énoncés immédiats, mais utiles pour la suite.

PROPOSITION 1. - Soient  $E$  et  $F$  deux espaces uniformes,  $E \subset F$ . Alors,

"  $A$  borné par rapport à  $E$  "  $\implies$  "  $A$  borné par rapport à  $F$  " .

COROLLAIRE 2. - "  $E$  borné "  $\implies$  "  $E$  borné par rapport à  $F$  " .

PROPOSITION 3. - Tout espace uniforme précompact  $E$  est borné.

Démonstration. - Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue sur  $E$ ;  $f$  se prolonge en  $\hat{f}$  sur le complété  $\hat{E}$  de  $E$ ;  $\hat{E}$  est compact, donc  $\hat{f}$  est bornée.

COROLLAIRE 4. - Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Alors :

"  $A$  borné par rapport à  $\mathbb{R}$  "  $\iff$  "  $A$  relativement compact "   
  $\iff$  "  $A$  intrinsèquement borné " .

PROPOSITION 5. - Soit  $E$  un espace uniforme, avec  $A$  et  $B \subset E$ . Alors :

"  $A$  borné par rapport à  $E$  et  $B \subset A$  "  $\implies$  "  $B$  borné par rapport à  $E$  " ;

"  $A$  borné par rapport à  $E$  "  $\iff$  "  $\bar{A}$  borné par rapport à  $E$  " ;

"  $A$  et  $B$  bornés par rapport à  $E$  "  $\implies$  "  $A \cup B$  borné par rapport à  $E$  " .

PROPOSITION 6. - Soient  $E$  un espace uniforme séparé,  $\hat{E}$  son complété. Alors :

"  $A$  borné par rapport à  $E$  "  $\iff$  "  $A$  borné par rapport à  $\hat{E}$  " .

Démonstration. - L'implication "  $\implies$  " est vraie parce que  $E \subset \hat{E}$ . Etudions l'implication "  $\impliedby$  " : supposons  $A \subset E$  borné par rapport à  $E$ , et soit

$f : E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ ,  $f$  étant uniformément continue ;  $f$  se prolonge en  $\hat{f}$  sur  $\hat{E}$  ; on a  $f(A) = \hat{f}(A)$ , et  $\hat{f}(A)$  est borné par hypothèse.

COROLLAIRE 7. - "E borné"  $\iff$  " $\hat{E}$  borné".

PROPOSITION 8. - Soient E et F deux espaces uniformes,  $f : E \rightarrow F$  uniformément continue,  $A \subset E$ . Alors :

"A borné par rapport à E"  $\implies$  "f(A) borné par rapport à F" .

COROLLAIRE 9. - Si f est surjective, "E borné"  $\implies$  "F borné".

### 1. Définition équivalente des ensembles bornés.

PROPOSITION 10. - Soient E un espace uniforme,  $A \subset E$ . Pour que A soit borné par rapport à E, il faut et il suffit que, pour tout entourage V de la structure uniforme de E, il existe une partie finie P de A et un entier n tels que  $A \subset V^n(P)$ . (Autrement dit, en supposant V symétrique, que tout point de A soit reliable à au moins un point de P par une V-chaîne d'éléments de E ayant au plus n maillons.)

#### Démonstration.

1° La condition est suffisante. - Supposons-la remplie, et soit  $f : E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$  uniformément continue ; on peut trouver un entourage symétrique V tel que

$$(x, y) \in V \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 .$$

A V est associé par hypothèse P, et n tels que  $A \subset V^n(P)$  ; donc, pour tout  $x \in A$ , il existe  $x_0 \in P, \dots, x_i \in E, \dots, x_n = x$  tels que,

$$\forall i, \quad (x_{i-1}, x_i) \in V .$$

Donc

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq 1, \dots, |f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq 1, \dots, |f(x_{i-1}) - f(x_n)| \leq 1 .$$

Finalement  $|f(x) - f(x_0)| \leq n$  ; donc  $f(x)$  reste à une distance  $\leq n$  de  $f(P)$  qui est fini ; donc  $f(A)$  est borné.

2° La condition est nécessaire. - On peut se limiter à un entourage V de la forme  $V = \{(x, y), d(x, y) \leq \varepsilon\}$ , où d est un écart uniformément continu sur E .

Considérons dans E la relation d'équivalence

"  $x \sim y$  "  $\iff$  "  $x$  et  $y$  sont reliables par une  $V$ -chaîne " ;

soient  $E_i$  les classes d'équivalence pour cette relation ; on a  $d(E_i, E_j) \geq \varepsilon$  pour  $i \neq j$  (car sinon il y aurait deux points appartenant respectivement à  $E_i$  et  $E_j$  et voisins d'ordre  $V$ , donc équivalents). On en déduit que toute fonction constante sur chacun des  $E_i$  est uniformément continue. Par conséquent,  $A$  ne rencontre qu'un nombre fini de  $E_i$ , soit  $E_{i_1}, \dots, E_{i_p}$  : en effet, si  $A$  en rencontrait un nombre infini et en particulier  $E_{i_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on pourrait fabriquer une fonction uniformément continue sur  $E$  et valant  $n$  sur  $E_{i_n}$ , donc non bornée sur  $A$ . Soit  $a_k \in E_{i_k} \cap A$ . On va montrer que tout point de  $E_{i_k} \cap A$  est fiable à  $a_k$  par une  $V$ -chaîne d'éléments de  $E$  de longueur  $\leq m_k$ , ce qui démontrera le 2°.

Soit  $U_n$ ,  $n \geq 1$ , l'ensemble des points de  $E_{i_k}$  reliables à  $a_k$  par une  $V$ -chaîne ayant  $n$  maillons ; on a :

$$U_n \subset U_{n+1},$$

$$\bigcup_n U_n = E_{i_k},$$

$$\forall n, d(U_n, E_{i_k} - U_{n+1}) \geq \varepsilon$$

(car tout point à une distance  $< \varepsilon$  de  $U_n$  appartient à  $U_{n+1}$ ).

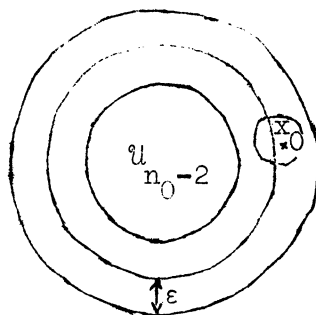
Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $E_{i_k}$  par  $f_n(x) = \inf(1, \frac{d(x, U_n)}{\varepsilon})$  ;  $f_n$  est une fonction qui vaut 0 sur  $U_n$ , 1 sur  $E_{i_k} - U_{n+1}$ , et qui est lipschitzienne (pour l'écart  $d$ ) de rapport  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $E$  par :

$$f(x) = 0 \text{ pour } x \notin E_{i_k},$$

$$f(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x) \text{ pour } x \in E_{i_k} \quad (\text{formule qui a un sens puisque si } x \in U_{n_0}, \text{ on a } f_n(x) = 0 \text{ pour } n \geq n_0).$$

On va montrer que  $f$  est uniformément continue en montrant que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{2}{\varepsilon}$  dans toute  $d$ -boule  $B(x_0, \varepsilon)$ . Si  $x_0 \notin E_{i_k}$ , pas de problème car  $B(x_0, \varepsilon) \cap E_{i_k} = \emptyset$ . Supposons  $x_0 \in E_{i_k}$ , et soit  $n_0$  le plus petit entier  $n$  tel que  $x_0 \notin U_{n_0}$  ; il est clair que.

$$B \subset U_n \cap E_{i_k}, \quad \forall n \geq n_0 + 1 \quad \text{et} \quad B \subset E_{i_k} - U_n, \quad \forall n \leq n_0 - 2.$$



Donc

$$\forall x \in B, \quad f(x) = (n_0 - 2) + f_{n_0-1}(x) + f_{n_0}(x),$$

donc

$$\forall x, y \in B, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{\epsilon},$$

$f$  est donc uniformément continue ; comme on a

$$f(x) \geq n, \quad \text{pour } x \in E_{i_k} - U_n,$$

et que, par hypothèse,  $f$  est bornée sur  $A$ ,  $A \cap E_{i_k}$  est inclus dans un des ensembles  $U_n$ .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 11. - Soient  $E_\alpha$  une famille d'espaces uniformes, et  $A_\alpha \subset E_\alpha$ .  
Alors,

$$"\forall \alpha, A_\alpha \text{ borné par rapport à } E_\alpha" \implies "\prod_\alpha A_\alpha \text{ borné par rapport à } \prod E_\alpha"$$

Démonstration.

1° Cas d'un nombre fini de facteurs. - Prenons-en deux,  $E_1$  et  $E_2$  ; pour tous entourages  $V_1$  de  $E_1$ ,  $V_2$  de  $E_2$ , soit

$$U_{V_1, V_2} = \{((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) \in (E_1 \times E_2)^2, (x_1, x'_1) \in V_1, (x_2, x'_2) \in V_2\};$$

les ensembles  $U_{V_1, V_2}$  constituent une base d'entourages de  $E_1 \times E_2$ . Soient  $A_1$  borné par rapport à  $E_1$ ,  $A_2$  borné par rapport à  $E_2$  ; il existe une partie finie  $P_1 \subset A_1$  et  $n_1$  tel que  $A_1 \subset V_1^{n_1}(P_1)$ , et une partie finie  $P_2 \subset A_2$  telle que  $A_2 \subset V_2^{n_2}(P_2)$ .

Soit donc  $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$  ; il existe

$$x_1^0 \in P_1, \dots, x_1^i \in E_1, \dots, x_1^{n_1} = x_1,$$

tels que,  $\forall i$ ,  $(x_1^{i-1}, x_1^i) \in V_1$ ; de même, il existe

$$x_2^0 \in P_2, \dots, x_2^j \in E_2, \dots, x_2^{n_2} = x_2,$$

tels que,  $\forall j$ ,  $(x_2^{j-1}, x_2^j) \in V_2$ . Posons

$$y_0 = (x_1^0, x_2^0), \dots, (x_1^0, x_2^j) = y_j, \dots, y_{n_2} = (x_1^0, x_2^{n_2}),$$

$$\dots, (x_1^i, x_2^{n_2}) = y_{n_2+i}, \dots, y_{n_1+n_2} = (x_1^{n_1}, x_2^{n_2}) = (x_1, x_2);$$

il est clair que,  $\forall p$ ,  $(y_{p-1}, y_p) \in U_{V_1 V_2}$  et  $y_0 \in P_1 \times P_2$ . Donc

$$A_1 \times A_2 \subset U^{n_1+n_2}(P_1 \times P_2).$$

Comme  $P_1 \times P_2$  est fini, le 1° est démontré.

2° Cas général. - Soit  $f$  une fonction uniformément continue sur  $\prod E_\alpha$ ; il existe des indices en nombre fini  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  et des entourages  $V_1, \dots, V_p$  de  $E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_p}$  tels que

$$(1) \quad \forall x, y \in \prod E_\alpha,$$

$$(\text{pr}_{\alpha_1}(x), \text{pr}_{\alpha_p}(y)) \in V_1, \dots, (\text{pr}_{\alpha_p}(x), \text{pr}_{\alpha_p}(y)) \in V_p$$

$$\implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Pour tout indice  $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p$ , soit  $a_\alpha$  un élément de  $E_\alpha$ ; considérons la fonction  $\tilde{f}$ , définie sur  $\prod_1^p E_{\alpha_i}$  par

$$\tilde{f}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p}) = f(\{x_\alpha\}_\alpha),$$

où  $x_\alpha = a_\alpha$  pour  $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p$ ;  $\tilde{f}$  est uniformément continue sur  $\prod_1^p E_{\alpha_i}$ , donc  $\tilde{f}$  est bornée sur  $\prod_1^p A_{\alpha_i}$  d'après le 1°; par exemple, supposons  $|\tilde{f}| \leq M$  sur  $\prod_1^p A_{\alpha_i}$ .

Soit  $x_\alpha \in A_\alpha$ , et soit  $y_\alpha$  défini par  $x_{\alpha_i} = y_{\alpha_i}$ ;  $y_\alpha = a_\alpha$  pour  $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p$ ; posons  $x = \{x_\alpha\}_\alpha$ ,  $y = \{y_\alpha\}_\alpha$ ; d'après (1),

$$|f(x) - f(y)| \leq 1;$$

comme  $f(y) = \tilde{f}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p})$ , on a

$$|f(x)| \leq M + 1 ,$$

donc  $f$  est bornée sur  $\prod_{\alpha} A_{\alpha}$ .

**COROLLAIRE 12.** - Soit  $A \subset \prod E_{\alpha}$ ; pour que  $A$  soit borné par rapport à  $\prod E_{\alpha}$ , il faut et il suffit que,  $\forall \alpha$ ,  $pr_{\alpha}(A)$  soit borné dans  $E_{\alpha}$ .

Démonstration. - Dans un sens, cela résulte du fait que les projections sont uniformément continues, et dans l'autre de la proposition ci-dessus.

**COROLLAIRE 13.** - Pour qu'un produit d'espaces uniformes soit borné, il faut et il suffit que chacun d'eux soit borné.

## 2. Comparaison entre les ensembles bornés dans les e. v. t. et les ensembles absorbés par tout voisinage de l'origine.

**PROPOSITION 14.** - Soient  $E$  un e. v. t.,  $A$  et  $B$  bornés par rapport à  $E$  (resp. intrinsèquement bornés); alors  $A + B$ ,  $\lambda A$ , l'enveloppe équilibrée de  $A$ , sont bornés par rapport à  $E$  (resp. intrinsèquement bornés).

**PROPOSITION 15.** - Soit  $A$  un sous-ensemble d'un e. v. t.  $E$ . Si  $A$  est absorbé par tout voisinage de l'origine,  $A$  est borné par rapport à  $E$ . Si  $A$  est convexe,  $A$  est même intrinsèquement borné.

Démonstration. - Par translation, on peut toujours supposer que  $0 \in A$ ; soit  $V$  un voisinage de  $0$  dans  $E$ ; par hypothèse, il existe  $n$ ,  $A \subset nV$ . Soit  $x \in A$ , on a donc  $x = nx_0$  avec  $x_0 \in V$ ; alors  $n$  est reliable à  $0$  par la  $V$ -chaîne

$$0, x_0, \dots, px_0, \dots, nx_0 = x .$$

Si de plus  $A$  est convexe,  $px_0 \in A$ ,  $\forall p \leq n$ .

C. Q. F. D.

Remarque 16. - On peut trouver en général des ensembles absorbés non intrinsèquement bornés. C'est le cas dans la boule unité d'un espace normé de dimension infinie, d'une suite  $x_n$  vérifiant  $\|x_n - x_p\| \geq \frac{1}{2}$ ,  $\forall n, \forall p$ .

**PROPOSITION 17.** - Une condition suffisante pour que, dans  $E$ , tout ensemble borné soit absorbé par tout voisinage de  $0$ , est qu'il existe une base de voisinages  $B$  de  $0$  telle que

$$(2) \quad \forall V \in B, \quad V \text{ est équilibré,} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{R}^+, \quad V + V \subset kV .$$

Démonstration. - Soit  $A$  borné par rapport à  $E$  ; pour tout  $V \in \mathcal{B}$  , il existe par hypothèse une partie finie  $P$  de  $A$  et un entier  $n$  tels que tout point de  $A$  soit reliable par une  $V$ -chaîne de  $n$  maillons à un point de  $P$  ; soient  $a \in P$  , et  $A_a$  l'ensemble des points de  $A$  reliables à  $a$  par une  $V$ -chaîne de  $n$  maillons ; il nous suffit de montrer que,  $\forall a \in P$  ,  $A_a$  est absorbé par  $V$  .

On peut toujours supposer, par translation, que  $a = 0$  ; soit  $x \in A_0$  , alors on peut trouver  $x_0 = 0$  , ... ,  $x_i$  , ... ,  $x_n = x$  tels que,  $\forall i$  ,  $(x_{i-1} , x_i) \in V$  ; alors  $x \in \underbrace{V + V + \dots + V}_{n \text{ fois}}$  ; comme nécessairement  $k \geq 1$  , on voit que

$$\forall x \in A_0 , \quad x \in k^n V .$$

C. Q. F. D.

Remarque 18. - Si  $E$  est localement convexe, l'ensemble des voisinages équilibrés convexes de  $0$  vérifie évidemment (2) ; mais cette condition peut être vérifiée sans que  $E$  soit localement convexe. Par exemple, considérons l'espace  $L^p((0, 1))$  pour  $0 < p < 1$  ; pour  $x \in L^p$  , posons

$$p(x) = \left( \int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} ;$$

on vérifie facilement que

$$(3) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \text{et} \quad p(x + y) \leq 2(p(x) + p(y)) .$$

La topologie de  $L^p$  est définie par la base de voisinages de l'origine  $B$  :

$$B = \{V_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} , \quad V_\varepsilon = \{x ; p(x) \leq \varepsilon\} ;$$

(3) nous montre que  $B$  satisfait aux conditions (2), et cependant  $L^p$  n'est pas localement convexe.

Cependant, dans l'e. v. t. le plus général, il peut exister des ensembles bornés non absorbés par tout voisinage de l'origine. Par exemple, l'espace  $S$  des fonctions mesurables sur  $(0, 1)$  , muni de la topologie de la convergence en mesure, est un espace intrinsèquement borné ; voyons cela : une base de voisinages de  $0$  dans  $S$  est fournie par les ensembles  $V(n, p)$  où  $n, p \in \mathbb{N}^*$  ,  $V(n, p) = \{x \in S , |x(t)| \leq \frac{1}{p} \text{ sauf sur un ensemble de mesure } \leq \frac{1}{n}\}$  ; soit  $I_i$  ,  $1 \leq i \leq n$  , une partition de  $(0, 1)$  en  $n$  intervalles de longueur  $\frac{1}{n}$  ; soit  $\omega_i$  la fonction caractéristique de  $I_i$  . Pour toute fonction  $x \in S$  , on peut écrire  $x = \sum_1^n x\omega_i$  ; il est clair que  $x\omega_i \in V(n, p)$  ; donc



$$S \subset \underbrace{V(n, p) + \dots + V(n, p)}_{n \text{ fois}} ;$$

donc tout point de  $S$  est reliable à  $0$  par une chaîne de  $n$  maillons.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 19. - Dans un e. l. c., il y a identité entre notre notion de borné et la notion classique de borné d'un e. v. t.

### 3. Plongement des structures uniformes dans $\mathbb{R}^I$ .

Soit  $E$  un espace uniforme ; on dira que  $E$  est plongable dans  $\mathbb{R}^I$ , s'il existe une bijection biuniformément continue de  $E$  sur un sous-espace de  $\mathbb{R}^I$  ; par exemple, tout espace compact est homéomorphe à un sous-ensemble d'un  $\mathbb{R}^I$ , et ce plongement est aussi un isomorphisme des structures uniformes. D'autre part, il est clair que pour qu'un espace soit plongable dans  $\mathbb{R}^I$ , il faut et il suffit que son complété le soit ; donc tout espace précompact est plongable dans  $\mathbb{R}^I$  ; mais on peut donner des exemples d'espaces plongables non précompacts.

PROPOSITION 20. - Soient  $X$  un espace topologique séparé,  $E$  une partie équi-continue de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Soient, sur  $E$ ,  $\mathcal{U}_1$  la structure uniforme de la convergence uniforme sur les parties compactes de  $E$ ,  $\mathcal{U}_2$  la structure uniforme de la convergence simple aux points d'une partie partout dense  $X_0$  de  $X$ . Alors  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  coïncident, donc  $(E, \mathcal{U}_1)$  est plongable dans  $\mathbb{R}^{X_0}$ .

Démonstration. -  $\mathcal{U}_1$  est définie par la famille des écarts  $d_K$ , où

$$K \text{ compact } \subset X, \quad d_K(x, y) = \sup_{t \in K} |x(t) - y(t)| .$$

$\mathcal{U}_2$  est définie par les écarts  $d_P$ , où  $P$  est une partie finie quelconque de  $X$ .

Il est clair que  $\mathcal{U}_2$  est moins fine que  $\mathcal{U}_1$ . Mais soit  $K$  un compact de  $X$  ; on peut recouvrir  $K$  par un nombre fini d'ouverts  $\omega_i$ , dans chacun desquels l'oscillation de chacune des fonctions de  $E$  est  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$  (car les fonctions de  $E$  sont équicontinues) ; choisissons un point dans chacun des ouverts  $\omega_i$ , et soit  $P$  la partie finie ainsi construite ; il est clair que

$$d_P(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{3} \implies d_K(x, y) \leq \varepsilon ;$$

donc  $\mathcal{U}_1$  est moins fine que  $\mathcal{U}_2$ .

Nous allons maintenant chercher des conditions nécessaires pour qu'un espace uniforme soit plongeable dans  $\underline{\underline{R}}^I$ .

PROPOSITION 21. - Soit E un espace uniforme plongeable dans un  $\underline{\underline{R}}^I$  ; alors toute partie de E , bornée par rapport à E , est précompacte.

Démonstration. - On peut supposer  $E \subset \underline{\underline{R}}^I$  ; soit  $A \subset E$  , A bornée par rapport à E ; alors A est bornée par rapport à  $\underline{\underline{R}}^I$  ; donc chacune des projections de A est bornée ; donc A est une partie relativement compacte de  $\underline{\underline{R}}^I$  , donc précompacte.

PROPOSITION 22. - Soit E un espace uniforme métrisable plongeable dans  $\underline{\underline{R}}^I$  . Alors E est aussi plongeable dans  $\underline{\underline{R}}^N$  , et est donc séparable.

Démonstration. - On peut supposer  $E \subset \underline{\underline{R}}^I$  ; soit d la distance sur E . La structure uniforme de  $\underline{\underline{R}}^I$  est définie par la famille filtrante d'écartes  $d_J$  où J est un sous-ensemble fini de I , et si  $(x_i) = x$  ,  $(y_i) = y$  ,

$$d_J(x, y) = \sup_{i \in J} |x_i - y_i| .$$

Ecrivons que d est uniformément continue pour la structure uniforme sur E induite par celle de  $\underline{\underline{R}}^I$  :

$$(4) \quad \forall n, \quad \exists J_n \text{ fini } \subset I, \quad \exists \varepsilon_n > 0,$$

$$\forall x, y \in E, \quad d_{J_n}(x, y) \leq \varepsilon_n \implies d(x, y) \leq \frac{1}{n} .$$

Posons  $I_0 = \bigcup_n J_n$  ;  $I_0$  est dénombrable ; soit p l'application projection de  $\underline{\underline{R}}^I$  sur  $\underline{\underline{R}}^{I_0}$  ; p est uniformément continue. Montrons que p est une bijection de E sur  $p(E)$  : supposons que  $p(x) = p(y)$  avec  $x, y \in E$  ; on a alors

$$\forall n, \quad d_{J_n}(x, y) = 0 ;$$

donc, d'après (4),

$$\forall n, \quad d(x, y) \leq \frac{1}{n} ;$$

donc  $x = y$  . Il nous reste à montrer que l'application  $p^{-1}$  de  $p(E)$  sur E est uniformément continue. Si  $x = (x_i)$  ,  $y = (y_i) \in \underline{\underline{R}}^{I_0}$  , posons

$$d_{J_n}^I(x, y) = \sup_{i \in J_n} |x_i - y_i| ;$$

$d_{J_n}^I$  est un écart uniformément continu sur  $\underline{\mathbb{R}}^I$ , et

$$d_{J_n}^I(p(x), p(y)) \leq \varepsilon_n \implies d(x, y) \leq \frac{1}{n},$$

d'après (4) et parce que  $d_{J_n}^I(p(x), p(y)) = d_{J_n}(x, y)$ ; donc  $p^{-1}$  est uniformément continue.

C. Q. F. D.

On peut maintenant donner des exemples d'espaces uniformes non plongables dans un  $\underline{\mathbb{R}}^I$ . Par exemple, un espace normé de dimension infinie n'est pas plongable dans  $\underline{\mathbb{R}}^I$ , puisque sa boule unité n'est pas précompacte. Un espace uniforme discret non dénombrable  $E$  n'est pas non plus plongable dans un  $\underline{\mathbb{R}}^I$ , puisqu'il est métrisable et non séparable bien que, dans  $E$ , toute partie bornée soit finie et donc précompacte. Cependant on pourrait croire que tout espace métrisable séparable, à parties bornées précompactes, est plongable dans un  $\underline{\mathbb{R}}^I$  (et donc dans  $\underline{\mathbb{R}}^N$ ) ; il n'en est rien.

4. Exemples d'espaces uniformes métrisables séparables à parties bornées précompactes non plongables dans  $\underline{\mathbb{R}}^N$ .

On désignera par  $\| \cdot \|$  la norme sur  $\underline{\mathbb{R}}^n$  définie par  $\| \{x_i\} \| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ; dégageons trois lemmes.

LEMME 23. - Soit  $E$  un espace uniforme plongable dans  $\underline{\mathbb{R}}^I$ ; alors, pour tout entourage  $V$  de  $E$ , il existe un entier  $n > 0$ , une application uniformément continue  $f : E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^n$ ,  $\alpha > 0$ , tels que

$$\forall (x, y) \in E, \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha \implies (x, y) \in V.$$

Démonstration. - On peut supposer  $E \subset \underline{\mathbb{R}}^N$ ; mais alors le lemme est évident à partir de la définition de la structure uniforme de  $\underline{\mathbb{R}}^N$ , en prenant pour  $f$  la projection sur le produit des  $n$  premiers facteurs, pour  $n$  convenable.

LEMME 24. - Soit  $E$  un sous-ensemble convexe d'un e. l. c.  $\mathcal{E}$ ; soit  $p$  une semi-norme sur  $\mathcal{E}$ ; supposons que  $f : E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^n$  soit une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \quad p(x - y) \leq \beta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Alors

$$\forall b \in \underline{\mathbb{R}}^+, \quad \forall x, y \in E, \quad p(x - y) \leq b \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{b}{\beta} + 1.$$

Démonstration. - Soit  $\nu$  le plus petit entier  $\geq \frac{b}{\beta}$  ; on a  $\nu < \frac{b}{\beta} + 1$  . Posons

$$x_0 = x , \dots , x_i = x + \frac{i(y-x)}{\nu} , \dots , x_\nu = y ;$$

$x_i \in E$  , parce que  $E$  est convexe. D'autre part,

$$\forall i , \quad p(x_i - x_{i-1}) = \frac{p(x-y)}{\nu} \leq \frac{b}{\nu} \leq \beta ;$$

donc

$$\forall i , \quad |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq 1 ;$$

donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \nu < \frac{b}{\beta} + 1 .$$

LEMME 25. - Soit  $C$  un cube de  $\mathbb{R}^n$  de côté  $c$  ; soit  $A$  un sous-ensemble de  $C$  qui vérifie

$$\forall X, Y \in A , \quad X \neq Y \implies |X - Y| \geq \alpha .$$

Alors on a

$$\text{card } A \leq \left[ \frac{c + \alpha}{\alpha} \right]^n .$$

Ce lemme se démontre par des considérations de volume.

Exemple 26. - Soit  $C([0, 1])$  muni de la structure de la convergence uniforme ; soit  $E$  le sous-espace de  $C([0, 1])$  défini par

$$E = \{x \in \mathcal{C}([0, 1]) , x \geq 0 \text{ et } \forall t, t' \in [0, 1] , |x(t) - x(t')| \leq x(0)|t - t'|\} ;$$

il est clair que  $E$  est un cône convexe fermé de  $C([0, 1])$  ;  $E$  est évidemment métrisable séparable ; on considèrera dans  $E$  la distance définie par la norme de  $C([0, 1])$  . Pour toutes les fonctions  $x \in B(0, R)$  , on a  $|x(0)| \leq R$  , donc, dans cette boule, toutes les fonctions sont lipschitziennes de rapport  $\underline{R}$  ; d'après le théorème d'Ascoli,  $B(0, R)$  est compacte ;  $E$  est donc un espace localement compact, dans lequel toute boule fermée est compacte ; il vérifie donc les hypothèses, puisque toute partie bornée de  $E$  est contenue dans une boule fermée de  $E$  (car  $x \rightarrow \|x\|$  est uniformément continue).

Supposons  $E$  plongeable dans  $\mathbb{R}^n$  ; d'après le lemme 1,  $\exists \epsilon > 0$  ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  uniformément continue,  $\alpha > 0$  , tels que

$$(5) \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha \implies \|x - y\| \leq \frac{1}{2} .$$

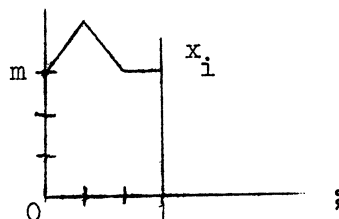
D'autre part,  $f$  est uniformément continue, donc

$$(6) \quad \exists \beta > 0 , \quad \forall x, y \in E , \quad \|x - y\| \leq \beta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 ;$$

donc, d'après le lemme 2,

$$(7) \quad \forall x, y \in E, \quad \|x - y\| \leq 1 \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\beta} + 1 .$$

Soit  $m$  un entier  $> 0$  quelconque ; posons  $a_0 = 0, \dots, a_i = \frac{i}{m}, \dots, a_m = 1$  ; soit  $x_i, 1 \leq i \leq m$ , la fonction qui vaut  $m + 1$  au point  $a_i$ ,  $m$  aux points  $a_j$  pour  $j \neq i$ , et qui est affine dans chacun des intervalles  $(x_{i-1}, x_i)$  :



on a  $x_i \in E$ , parce que  $x_i$  est lipschitzienne de rapport  $m$  et que  $x_i(0) = m$  ; comme  $\forall i \leq m, \|x_i - m\| \leq 1$ , on a, d'après (7),

$$(8) \quad |f(x_i) - f(m)| \leq \frac{1}{\beta} + 1 .$$

D'autre part, d'après (5), comme,  $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$ , on a nécessairement

$$(9) \quad \forall i \neq j, \quad |f(x_i) - f(x_j)| \geq \alpha .$$

Soit  $C_m$  le cube de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$C_m = \{X \in \mathbb{R}^n, |X - f(m)| \leq \frac{1}{\beta} + 1\} ;$$

$C_m$  contient les  $m$  points  $f(x_i)$  d'après (8), et ces points sont à des distances mutuelles  $\geq \alpha$  d'après (9). Il y a contradiction d'après le lemme 3, car, lorsque  $m$  croît,  $C_m$  se déplace mais conserve le même côté.

Exemple 27. - Prenons pour  $E$  l'espace des fonctions holomorphes dans un domaine  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{C}$  ;  $E$  est métrisable séparable et, puisque c'est un e. v. t. de Montel dans  $E$ , toute partie bornée est précompacte ; soit  $K$  un compact de  $\mathcal{O}$  ; on posera, pour  $x \in E$ ,  $p_K(x) = \sup_{t \in K} x(t)$  ; la structure uniforme de  $E$  est définie par les semi-normes  $p_K$ .

Supposons  $E$  plongeable dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ; soit  $K_1$  un compact infini de  $\mathcal{O}$  ; d'après le lemme 1,  $\exists n \in \mathbb{N}, f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  uniformément continue,  $\alpha > 0$ , tels que

$$(10) \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha \implies p_{K_1}(x - y) \leq \frac{1}{2} .$$

Comme  $f$  est uniformément continue, on a

(11)  $\exists K_2$  compact  $\subset \mathbb{Q}$ ,  $\exists \beta > 0$ , tels que  $p_{K_2}(x - y) \leq \beta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$ .

Cela implique, d'après le lemme (24),

(12)  $\forall x, y \in \mathbb{E}, \forall b \in \mathbb{R}^+, p_{K_2}(x - y) \leq b \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{b}{\beta} + 1$ .

Donnons-nous maintenant  $(n + 1)$  points distincts  $t_1, \dots, t_{n+1}$  de  $K_1$ , et un entier  $m > 0$  quelconque (le "n" qui est ici correspond à l'espace  $\mathbb{R}^n$  utilisé ci-dessus); soit  $\ell$  un nombre  $> 0$  plus petit que les distances mutuelles des points  $t_i$ ; pour toute suite  $s = (k_1, \dots, k_{n+1})$  de  $(n + 1)$  entiers  $k_i$  tels que  $0 \leq k_i < m$ , soit  $x_s$  le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut  $k_i$  au point  $t_i$ , c'est-à-dire

$$x_s(t) = k_1 \frac{(t - t_2) \dots (t - t_{n+1})}{(t_1 - t_2) \dots (t_1 - t_{n+1})} + \dots + k_{n+1} \frac{(t - t_1) \dots (t - t_n)}{(t_{n+1} - t_1) \dots (t_{n+1} - t_n)}.$$

Posons  $\delta = \inf(t, t'), t \in K_1, t' \in K_2$ ; comme  $|t_i - t_j| \geq \ell$  pour  $i \neq j$ , et  $k_i < m$ , il est clair que

$$\forall t \in K_2, |x_s(t)| \leq (n + 1)m \frac{\ell^n}{\delta^n};$$

donc, en posant  $q = (n + 1) \frac{\ell^n}{\delta^n}$ , on a

$$\forall s, p_{K_2}(x_s) \leq qm;$$

donc, d'après (12),

$$(13) \quad \forall s, \forall m, |f(x_s) - f(0)| \leq \frac{qm}{\beta} + 1.$$

D'autre part, si  $s \neq s'$ , il est clair que  $p_{K_1}(x_s - x_{s'}) \geq 1$  (il y a au moins un des points  $t_i$  où  $x_s$  et  $x_{s'}$  valent deux entiers différents); donc, d'après (5),

$$(14) \quad s \neq s' \implies |f(x_s) - f(x_{s'})| \geq \alpha.$$

Soit  $C_m$  le cube de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$C_m = \{X, |X - f(0)|\} \leq \frac{qm}{\beta} + 1;$$

d'après (13), les  $m^{n+1}$  points  $f(x_s)$  appartiennent à  $C_m$ , donc d'après (14) et le lemme 25, on a

$$\forall m, \quad m^{n+1} \leq \left[ \frac{2(\alpha m / \beta + 1) + \alpha}{\alpha} \right]^n ;$$

d'où contradiction en faisant tendre  $m$  vers l'infini.

(Texte reçu le 25 avril 1969)

Gilles ROYER  
1 rue Louis Delaporte  
75 - PARIS 20

Alain LOUVEAU  
26 rue de Montlessuy  
75 - PARIS 07

---