Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Connes

Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 8 (1968-1969), exp. n° 5, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
8e année, 1968/69, n° 5, 27 p.

19 décembre 1968

ORDRES FAIBLES ET LOCALISATION DE ZÉROS DE POLYNÔMES

par Alain CONNES

Introduction. - J. DIEUDONNÉ (*) considère que la localisation des zéros de polynômes à coefficients complexes doit se préoccuper, non de la nature arithmétique de ces zéros, mais de leur position dans le plan complexe.

Il constate que, parmi les propositions contenues dans cette théorie, certaines utilisent essentiellement le fait qu'un polynôme est une fonction analytique particulière.

Il n'y a alors aucune difficulté à les généraliser aux fonctions analytiques.

Les autres propositions (comme le théorème de Grace sur les régions circulaires) n'obéissent à aucune méthode générale. En particulier, elles ne s'étendent pas aux fonctions analytiques.

Que penser enfin du théorème de Sturm qui fait aussi bien partie de cette théorie que de celles des corps ordonnés (puisqu'il est utilisé, par exemple par ARTIN, pour démontrer la conjecture de Hilbert sur les sommes de carrés) ?

Or, nous avons obtenu une généralisation bien simple du théorème de Grace, qui montre que celui-ci peut s'énoncer dès que l'on a un corps algébriquement clos muni d'un ordre total, compatible avec l'addition, et compatible avec la prise de l'inverse, en ce sens que

$$(x > 0 \ , \quad y > 0) \qquad \text{entraîne} \qquad \left(\frac{1}{(1/x) + (1/y)} > 0\right) \ .$$

Nous montrons, dans les paragraphes 1 et 2, que ces conditions de compatibilité sont nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse énoncer la généralisation du théorème de Grace.

Ensuite, nous prouvons que la détermination des ordres partiels vérifiant ces conditions (nous les baptisons ordres faibles) conduit à des théorèmes de localisation.

(*) DIEUDONNÉ (Jean). - La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques). - Paris, Gauthier-Villars, 1938 (Mémorial des Sciences mathématiques, 93).

En particulier, l'analogue du théorème de Sturm s'énonce ainsi pour les polynômes à coefficients rationnels :

La forme générale de l'équation à coefficients rationnels, dont tous les zéros sont réels et négatifs, est $F(z) = 0$, où F désigne une fraction obtenue à partir de z et 1 par un nombre fini d'additions, de multiplications par un rationnel positif, et de moyennes harmoniques.

De plus, un ordre faible partiel se prolonge en un ordre faible total dans des conditions très larges, et la position des zéros d'un polynôme irréductible se trouve intimement liée (se reporter au paragraphe 6) à la répartition des ordres faibles sur l'extension du corps de base qu'il définit.

Dans le paragraphe 7, nous déterminons exactement les conditions dans lesquelles la notion introduite rejoint la notion usuelle de corps ordonné.

Enfin, nous montrons, pour la clôture algébrique des rationnels, que si un ordre faible total ne s'explicite pas par des inégalités rationnelles, on peut énoncer un théorème de localisation pour les polynômes de ce corps algébriquement clos, qui tient au fait que, dans certains groupes ordonnés associés, tout élément est somme finie d'éléments irréductibles.

1. Extension de l'addition d'un corps K au produit symétrique n-uple $K^{(n)}$.

Nous supposons K algébriquement clos, commutatif, de caractéristique nulle.

Soit p un polynôme de degré n dans K, il admet n zéros $z_1, \dots, z_n$ non nécessairement distincts.

Il n'y a, d'autre part, aucune raison de les indexer ainsi, plutôt que $z_{i_1}, \dots, z_{i_n}$ où $m \to i_m$ est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$.

C'est pourquoi nous considérons l'ensemble Z, $z_i \in Z$, des zéros de p, comme un sous-ensemble avec répétitions de K, c'est-à-dire $Z \in K^{(n)}$, où $K^{(n)}$ est le quotient du produit K^n par la relation

$$(1) \qquad (z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n),$$

quand il existe une permutation $i \to i'$ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $z_{i'} = (z_i)'$.

Enfin, parmi les applications de $K^{(n)}$ dans K, nous appelons affines celles qui sont combinaisons linéaires des fonctions symétriques usuelles $\sum_i = \sum z_{j_1} \dots z_{j_i}$.

Le lecteur définira lui-même la notion d'application affine de $K^{(n)}$ dans $K^{(m)}$.

THÉORÈME. - <u>En considérant</u> K <u>comme une partie</u> $\{(z , \ldots , z) , \quad z \in K\}$ <u>de</u> $K^{(n)}$, <u>il existe une seule loi de composition affine qui prolonge à</u> $K^{(n)}$ <u>l'addition</u> $(z , \ldots , z) + (z' , \ldots , z') = (z + z' , \ldots , z + z')$ <u>de</u> K .

<u>Cette loi fait de</u> $K^{(n)}$ <u>un groupe, isomorphe au groupe additif produit</u> $K \times \ldots \times K$ (n <u>fois</u>).

<u>Démonstration</u>. - Soit ℓ une telle loi ; notons σ_i les fonctions symétriques <u>pondérées</u> de $K^{(n)}$ dans K : $\sigma_i = \frac{\Sigma_i}{C_n^i}$.

Ecrivons que ℓ est affine ; ainsi la fonction $\sigma_k(\ell(Z , Z'))$ est une fonction affine de Z et Z' , et il existe des nombres $a_k^{i,j} \in K$ tels que

$$\sigma_k(\ell(Z , Z')) = \sum a_k^{i,j} \sigma_i(Z) \sigma_j(Z') .$$

Ecrivons que ℓ prolonge l'addition de K ; on a $\sigma_i(z , \ldots , z) = z^i$, et notre hypothèse se traduit par l'égalité :

$$\forall \ z \text{ et } z' \text{ dans } K , \qquad (z + z')^k = \sum a_k^{i,j} z^i z'^j .$$

Comme K est de caractéristique nulle, on peut identifier ces deux polynômes en z et z' , donc ℓ vérifie nécessairement :

$$(2) \qquad \sigma_k(\ell(Z , Z')) = \sum C_k^i \sigma_i(Z) \sigma_{k-i}(Z') , \qquad k = 1 , 2 , \ldots , n .$$

Il est clair que l'égalité (2) détermine une loi ℓ unique, nous la notons + , et nous montrons qu'elle vérifie les conditions du théorème 1.

Associons, à un élément Z de $K^{(n)}$, la série formelle $S_Z(x)$ de la variable x définie modulo x^{n+1} par la formule :

$$(3) \qquad S_Z(x) = 1 + \frac{\sigma_1(Z)}{1!} x + \frac{\sigma_2(Z)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\sigma_n(Z)}{n!} x^n + \ldots .$$

Les formules (2) montrent que $S_{Z+Z'} = S_Z S_{Z'}$, on en déduit que $K^{(n)}$ est isomorphe au groupe multiplicatif des séries formelles de premier terme 1 , définies modulo x^{n+1} .

Ce groupe est isomorphe au groupe additif K^n par l'application

$$\log S = \log(1 + T) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} \ldots \quad \text{modulo } x^{n+1} .$$

Le lecteur montrera que l'application D de $K^{(n)}$ dans $K^{(n-1)}$, qui associe aux zéros de p les zéros du polynôme dérivé, est un homomorphisme de groupe, et il identifiera son noyau.

2. Recherche, parmi les ordres totaux de l'ensemble K, de ceux qui font des $K^{(n)}$ des groupes ordonnés.

Soit ω un ordre total de l'ensemble K ; $y \geqslant x$.

Il est clair que la relation d'ordre produit sur $K^{(n)}$:

$$(y_1 , \dots , y_n) \geqslant (x_1 , \dots , x_n) \qquad \text{quand } y_i \geqslant x_i , \quad i = 1 , 2 , \dots , n ,$$

n'est pas compatible avec la relation (1) pour $n \neq 1$.

Mais ω fait de $K^{(1)} = K$ un groupe ordonné, on peut donc lui associer sa partie positive $\omega = \{x , \; x \geqslant 0\}$, qui vérifie

$$(4) \qquad \omega + \omega = \omega , \qquad \omega \cap - \omega = \{0\} , \qquad \omega \cup - \omega = K .$$

Dans $K^{(n)}$, nous considérons la partie $\omega^{(n)} = \{Z ; \; \forall z_i \in Z , \; z_i \geqslant 0\}$, et nous demandons que $\omega^{(n)}$ soit l'ensemble des éléments positifs pour un ordre du groupe $K^{(n)}$, ce qui se traduira par :

$$(5) \qquad \omega^{(n)} + \omega^{(n)} = \omega^{(n)} , \qquad \omega^{(n)} \cap - (\omega^{(n)}) = \{0\} .$$

THÉORÈME. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre total ω de l'ensemble K fasse des $K^{(n)}$ des groupes ordonnés, est que :

(a) ω soit compatible avec l'addition (4) ;

(b) ω soit compatible avec la prise de l'inverse $x \to \frac{1}{x}$ dans K, en ce sens que

$$(x > 0 , \quad y > 0) \quad \text{entraîne} \quad \frac{1}{(1/x) + (1/y)} > 0 .$$

Démonstration.

Si ω fait de $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ des groupes ordonnés, il vérifie (a) et (b). Le (a) est clairement vérifié, montrons que (b) l'est aussi.

Soient z, z_1, z_2 trois éléments positifs de K ; comme l'ordre est total, nous choisissons $z_2 \geqslant z_1 \neq 0$.

La somme $Z'' = Z + Z'$ des éléments $Z = (z_1 , z_2)$ et $Z' = (0 , z)$ de $K^{(2)}$ s'écrit

$$Z'' = (z_1 , z_1) + (0 , z_2 - z_1) + (0 , z) .$$

Or, par hypothèse, $K^{(2)}$ étant un groupe ordonné, la somme des deux derniers termes est dans $\omega^{(2)}$.

Donc, $Z'' = (z_1 , z_1) + (z'_1 , z'_2)$ avec $z'_i \in \omega$, et en notant $Z'' = (z''_1 , z''_2)$, ceci s'écrit $z''_1 = z_1 + z'_1$, $z''_2 = z_1 + z'_2$, donc $z''_i \geqslant z_1 > 0$, et le produit

$$z''_1 \, z''_2 = \sigma_2(Z + Z') = z_1 \, z_2 + z \, \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ne peut s'annuler.

Ainsi une égalité $-\frac{2}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ est impossible entre trois nombres positifs, <u>ce qui montre la nécessité de la condition</u> (b).

<u>Si</u> ω <u>est un ordre total vérifiant</u> (a) <u>et</u> (b), <u>les</u> $K^{(n)}$ <u>sont des groupes ordonnés</u>.

En généralisant le raisonnement déjà fait pour $n = 2$, le lecteur montrera que l'égalité $\omega^{(n)} + \omega^{(n)} = \omega^{(n)}$ équivaut à l'impossibilité de la relation

$$\sigma_n(Z + Z') = 0 \quad ,$$

dès que $Z' = (z'_1 , \ldots , z'_n)$ vérifie $z'_i > 0$, et que $Z \in \omega^{(n)}$.

Or, en utilisant l'égalité (2), la relation ci-dessus s'écrit

$$\sigma_n(Z + Z') = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, \sigma_i(Z) \, \sigma_{n-i}(Z') = 0 \quad .$$

Soit, en désignant par S_Z une série associée à Z (3), et par d la dérivation des séries formelles :

$$\sigma_n(Z + Z') = [\prod_1^n (d + z'_i) \, S_Z] \, (0) = 0 \quad .$$

L'impossibilité d'une telle relation résulte alors du lemme suivant.

LEMME. - <u>Soient</u> $Z \in \omega^{(n)}$, S_Z <u>une série associée,</u> z' <u>un nombre positif non nul de</u> K ; <u>alors</u> $[(d + z') \, S_Z] \, (0) \neq 0$ <u>et, en désignant par</u> λ <u>son inverse,</u> <u>l'élément</u> Z_1 <u>de</u> $K^{(n-1)}$, <u>tel que</u> $S_{Z_1} = \lambda(d + z') \, S_Z$ (<u>modulo</u> x^n), <u>est dans</u> $\omega^{(n-1)}$.

La première conclusion du lemme résulte de l'égalité

$$[(d + z') \, S_Z] \, (0) = \sigma_1(Z) + z' = \frac{1}{n} \, (z_1 + \ldots + z_n) + z' > 0 \quad .$$

Montrons la deuxième, l'équation en z des éléments de Z_1 s'écrit

$$\frac{n}{z + z'} = \sum \frac{1}{z - z_i} .$$

Si elle avait une racine négative $-y$, le nombre positif y vérifierait $y - z' = \frac{1}{(1/n) \sum (1/(z_i + y))}$, ce qui contredirait le lemme suivant.

LEMME. - *Si* ω *est un ordre total vérifiant* (a) *et* (b), *et si* λ_i, $i = 1, \ldots, q$, *sont des rationnels positifs de somme* 1, *la condition* $\alpha_i \geqslant \alpha > 0$ *entraîne* $\frac{1}{\sum(\lambda_i/\alpha_i)} \geqslant \alpha$.

Il nous suffit de démontrer ce lemme quand $q = 2$, or comme l'ordre est total, prenons $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, et montrons que $\frac{1}{(\lambda_1/\alpha_1) + (\lambda_2/\alpha_2)} - \alpha_1 \geqslant 0$; cela résulte, en posant $\beta = \lambda_1(\alpha_2 - \alpha_1) > 0$, de l'égalité

$$\frac{1}{(\lambda_1/\alpha_1) + (\lambda_2/\alpha_2)} - \alpha_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{(1/\alpha_1) + (1/\beta)} ,$$

ce dernier nombre est positif, d'après l'hypothèse (b).

Pour conclure la démonstration du théorème, montrons que $\omega^{(n)} \cap -(\omega^{(n)}) = \{0\}$. Ceci est vrai pour $n = 1$.

D'autre part, l'application D de $K^{(n)}$ dans $K^{(n-1)}$, qui fait passer des zéros de p aux zéros de p', est croissante (car si z est une racine de p', on a $\sum \frac{1}{z - z_i} = 0$, les z_i, $i = 1, \ldots, n$, désignant les zéros de p).

Supposons avoir prouvé que $\omega^{(n-1)} \cap -(\omega^{(n-1)}) = \{0\}$, prenons Z dans $\omega^{(n)} \cap -(\omega^{(n)})$, DZ est nul, Z est formé des n racines n-ièmes d'un même nombre, donc ne peut être dans $\omega^{(n)}$.

Le théorème que nous venons de montrer a pour conséquence le théorème d'apolarité de Grace, quand $K = \underset{\sim}{C}$, corps des complexes, et quand ω est un ordre R linéaire total.

On peut le voir, d'une part en remarquant que ce que l'on appelle domaine circulaire (intérieur ou extérieur d'un cercle, plus une partie connexe de la frontière), dans le plan complexe, se déduit d'un R-ordre total par homographie, et d'autre part en énonçant le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Pour toute application affine* f *de* $K^{(n)}$ *dans* K, *l'ensemble des valeurs prises par* f, *pour* $Z \geqslant 0$, $f(\omega^{(n)})$, *est égal à l'ensemble des valeurs* $f(z, \ldots, z)$, $z \geqslant 0$, *prises sur la partie positive de la diagonale* K.

3. Ordres faibles sur une extension d'un corps ordonné. Problème de prolongement.

Avant d'étudier les groupes ordonnés $K^{(n)}$, nous cherchons à savoir comment sont faits les ordres totaux de K qui vérifient les conditions (a) et (b), aussi adoptons-nous la définition ci-dessous, où k est un corps ordonné, K une extension de k .

Définition. - On appelle k-ordre faible du corps K , un ordre partiel ω de l'ensemble K , $a > b \ (\omega)$, tel que :

1° ω est compatible avec la structure vectorielle de K sur k . (Il n'y a aucune raison logique pour ne pas attribuer le même nom ω à la partie positive $\omega = \{x \ , \ x > 0 \ (\omega)\}$ de l'ordre ω , elle vérifie $\omega + \omega = \omega$, $\omega \cap - \omega = \emptyset$, $\forall \lambda \in \mathbf{k}$, $\lambda > 0$, $\lambda\omega = \omega$.)

2° ω est compatible avec la prise de l'inverse $x \to \frac{1}{x}$, en ce sens que $\omega' = \frac{1}{\omega} = \{x \ , \ \frac{1}{x} > 0 \ (\omega)\}$ vérifie $\omega' + \omega' = \omega'$. (Cette condition n'est autre que (b) : $x > 0$, $y > 0 \implies \frac{1}{(1/x) + (1/y)} > 0$.)

L'existence d'au moins un tel ordre total sur K ne pose pas de problème :

Ecrivons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K sous la forme $\overline{K} = \overline{\overline{k}}(i)$, où $\overline{k}$ est une clôture réelle de k , et $\overline{\overline{k}}$ un corps ordonné maximal dans $\overline{K}$.

L'ordre induit sur K par le $\overline{\overline{k}}$-ordre faible total de $\overline{\overline{k}}(i)$,

$$z = a + bi \ , \qquad z > 0 \quad \text{quand} \quad a > 0 \quad \text{ou} \quad a = 0 \ , \ b > 0 \ ,$$

est un k-ordre faible total.

La question que l'on se pose facilement est la suivante : Cette notion de compatibilité ordre-corps n'est-elle pas trop lache, du fait qu'elle ne fait pas intervenir le produit, mais l'addition et la prise de l'inverse ?

LEMME. - Dans K , l'application $(x , y) \to xy$ est déterminée, à partir des applications $(x , y) \to x + y$ et $x \to \frac{1}{x}$, par les formules

$$\text{(A)} \qquad x \neq 0 \ , \ x \neq 1 \ , \qquad x^2 = x - \frac{1}{(1/x) + (1/(1 - x))} \ ,$$

$$\text{(B)} \qquad 2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \ .$$

Ce lemme permet de préciser l'ensemble des points de K intéressés par un k-ordre faible ω .

THÉORÈME. - Si ω est un k-ordre faible de K, l'ensemble $\frac{\omega - \omega}{\omega - \omega}$ des éléments de la forme $\frac{u - v}{u' - v'}$, $u > 0$, $v > 0$, $u' > 0$, $v' > 0$, est un sous-corps de K.

Démonstration. - Donnons-nous huit éléments positifs $u_1, \ldots, v'_2$ de K, et cherchons à écrire $\frac{u_1 - v_1}{u'_1 - v'_1} \times \frac{u_2 - v_2}{u'_2 - v'_2}$ sous la forme $\frac{u_3 - v_3}{u'_3 - v'_3}$ avec $u_3, \ldots, v'_3$ positifs.

Nous remarquons que si λ est différent de 0, la condition $y > x\ \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$, quand $\lambda y > \lambda x\ (\omega)$, définit un k-ordre faible, que nous notons $\frac{\omega}{\lambda}$.

En choisissant $\lambda = u_1 + v_1 + u'_1 + v'_1 + u_2 + v_2 + u'_2 + v'_2$, on se ramène au cas où les huit éléments $u_1, \ldots, v'_2$, ainsi que leurs sommes deux à deux, sont inférieurs à 1.

Les formules (A) et (B) permettent alors d'écrire les différents produits $u_1 u_2, \ldots$ sous la forme d'une différence de deux éléments positifs.

On obtient ainsi la formule :

$$(u_3 - v_3)/(u'_3 - v'_3) \quad ,$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
u_3 &= \frac{1}{(1/(u_1 + u_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} + \frac{1}{(1/(v_1 + v_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} \ , \\
v_3 &= \frac{1}{(1/(u_1 + v_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} + \frac{1}{(1/(v_1 + u_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} \ , \\
u'_3 &= \frac{1}{(1/(u'_1 + u'_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} + \frac{1}{(1/(v'_1 + v'_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} \ , \\
v'_3 &= \frac{1}{(1/(u'_1 + v'_2)) + (1/(\sum \text{autres}))} + \frac{1}{(1/(u'_2 + v'_1)) + (1/(\sum \text{autres}))} \ ,
\end{aligned}\right.$$

où $\sum$ autres, dans le même dénominateur que $u_1 + u_2$ par exemple, signifie

$$v_1 + u'_1 + v'_1 + v_2 + u'_2 + v'_2 \ .$$

En opérant de même pour la somme, on obtient la proposition annoncée.

Nous nous autorisons à appeler support de ω, le sous-corps ainsi défini.

Le lecteur se rendra facilement compte que la famille des k-ordres faibles de K est inductive. (En l'ordonnant par : ω_2 plus fin que ω_1, si $\omega_1 \subset \omega_2$.)

Nous cherchons à quelle condition une partie A de K est contenue dans la partie positive d'un k-ordre faible.

Dans le cas particulier $K = k(x_1, \dots, x_n)$, corps des fractions à n indéterminées x_i, nous notons $\Omega(x_1, \dots, x_n)$ le k-ordre faible engendré par $x_1, \dots, x_n$.

Nous disons qu'une fraction F est k-faiblement positive, si elle est dans $\Omega(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si elle est obtenue à partir de $x_1, \dots, x_n$ par un nombre fini d'additions, de multiplications par un élément positif de k, et de moyennes harmoniques.

Nous retournons au cas général, A désigne une partie de l'extension K de k.

THÉORÈME. - <u>S'il n'existe aucun</u> k-<u>ordre faible</u> ω <u>de</u> K <u>tel que</u> $A \subset \omega$, <u>il existe un entier</u> n, n <u>éléments</u> $u_1, \dots, u_n$ <u>de</u> A, <u>et une fraction</u> k-<u>faiblement positive</u> F <u>telle que</u>

$$F(u_1, \dots, u_n) = 0 .$$

Si aucune des valeurs $F(u_1, \dots, u_m)$, $m \in N$, $u_i \in A$, $F \in \Omega(x_1, \dots, x_m)$, n'est nulle, l'ensemble qu'elles forment est la partie positive du plus petit k-ordre faible $\Omega(A)$ contenant A.

<u>Démonstration</u>. - Si A est inclus dans la partie positive ω d'un k-ordre faible de K, pour toute fraction $F \in \Omega(x_1, \dots, x_n)$, et toute sous-famille finie $u_1, \dots, u_n$ de A, on a $F(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Inversement, si cette condition est vérifiée, nous pouvons calculer toutes les valeurs $F(u_1, \dots, u_m)$, $m \in N$, $u_i \in A$, $F \in \Omega(x_1, \dots, x_m)$.

En effet, la seule opération délicate est la moyenne harmonique, car l'on risquerait de devoir diviser par 0.

Mais cela ne peut se produire, dans le calcul de $\frac{2}{(1/F) + (1/F')}$, que si $F = -F'$, donc $F + F' = 0$.

Or nous pouvons supposer avoir pu calculer les valeurs de F et F' sans difficulté, donc que $F + F' \neq 0$.

On pourra donc déterminer $\Omega(A)$, et le lecteur vérifiera que c'est la partie positive d'un k-ordre faible.

Notons que le support de l'ordre faible $\Omega(A)$ est le corps $k\left(\frac{A}{a}\right)$, où a désigne un élément quelconque de A.

Nous posons maintenant un problème que nous n'avons pas su résoudre dans toute sa généralité :

<u>Problème de prolongement</u> : Un k-ordre faible maximal est-il total ?

Nous montrons cependant que l'unique manière de le résoudre, pour toutes les extensions de k, est de montrer que, en éliminant u entre deux relations

$$F(u_1 , \dots , u_n , u) = 0 \qquad \text{et} \qquad F'(u'_1 , \dots , u'_m , - u) = 0 ,$$

on obtient une relation

$$F''(u_1 , \dots , u_n , u'_1 , \dots , u'_m) = 0 .$$

En fait, soit ω la partie positive d'un k-ordre faible maximal non total, alors il existe u tel que

$$\omega \cup \{u\} \qquad \text{et} \qquad \omega \cup \{- u\}$$

ne sont contenus dans aucun k-ordre faible, donc il existe deux relations

$$F(u_1 , \dots , u_n , u) = 0 \qquad \text{et} \qquad F'(u'_1 , \dots , u'_m , - u) = 0 ,$$

bien que

$$F''(u_1 , \dots , u_n , u'_1 , \dots , u'_m) \neq 0 , \qquad \text{pour toute } F'' .$$

Inversement, l'existence de deux relations $F = 0$, $F' = 0$, bien que $F'' \neq 0$ pour toute F'' , assure l'existence dans une certaine extension K de k d'un k-ordre faible maximal non total.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer le lemme suivant, pour montrer que si la relation obtenue en éliminant u entre $F = 0$ et $F' = 0$ est impossible en nombres k-faiblement positifs, elle s'écrit nécessairement $F'' = 0$.

LEMME. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation algébrique irréductible, à coefficients dans</u> k ,

$$P(x_1 , \dots , x_n) = 0 , \qquad P \in k[x_1 , \dots , x_n] ,$$

<u>soit impossible en nombres k-faiblement positifs, est qu'il existe une fraction k-faiblement positive</u> $F \in \Omega(x_1 , \dots , x_n)$, <u>dont</u> P <u>divise le numérateur sans diviser le dénominateur</u>.

<u>Démonstration du lemme</u>. - La condition énoncée est clairement suffisante, nous montrons sa nécessité.

Supposons qu'elle ne soit pas vérifiée ; considérons le quotient de l'anneau $k[x_1, \dots, x_n]$ par le polynôme irréductible P, c'est un anneau intègre $\mathfrak{A}$.

Soit $K = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ le corps des fractions de cet anneau.

Dans K, il existe un k-ordre faible contenant la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$, comme on le voit en utilisant le théorème précédent et l'hypothèse que P ne divise aucun numérateur de fraction $F(x_1, \dots, x_n)$ sans diviser le dénominateur.

Or $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ dans $\mathfrak{A} = k[x_1, \dots, x_n]/P$, donc la relation $P = 0$ n'est pas impossible en nombres k-faiblement positifs.

4. Cas des extensions algébriques de degré 2 .

Le lecteur ne manquera pas de sourire en lisant ce titre, cependant il me semble que ce cas particulier permet de mieux comprendre le cas général.

$K = k\sqrt{d}$; deux cas se présentent suivant le signe de d :

Cas $d < 0$. – La condition de compatibilité d'un ordre k-linéaire de K avec l'opération $x \to \frac{1}{x}$ (i. e. $a + b\sqrt{d} \to \frac{1}{a^2 - db^2}(a - b\sqrt{d})$) est toujours vérifiée.

En effet, $a^2 - db^2 \geqslant 0$, pour a et b dans k. L'ensemble des k-ordres faibles de K est donc identique à l'ensemble des ordres k-linéaires de cet espace vectoriel de dimension 2 sur k.

Aussi nous laissons au lecteur les démonstrations suivantes :

Les éléments maximaux sont les ordres totaux.

Tout ordre partiel est intersection de deux ordres totaux.

L'ensemble des ordres totaux est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des parties monotones (i. e. croissantes, $(x \in J\ ,\ y > x)$ entraîne $(y \in J)$, ou décroissantes) de k par l'application

$$\omega \to \operatorname{tg} \omega = \{b \in k\ ,\ 1 + b\sqrt{d} > 0 \ \ (\omega)\} .$$

Ainsi, si on se limite à ceux qui rendent $\sqrt{d} > 0$, on obtient une correspondance biunivoque avec l'ensemble des coupures de k.

Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

1° $\operatorname{tg} \omega$ définit une coupure principale ;

2° ω n'est pas k-archimédien (i. e. $\exists\, x$ et $y > 0$ tels que, $\forall \lambda > 0$, $\lambda \in k$, $x < \lambda y$) ;

3° ω est défini par des conditions rationnelles (i. e. σ désignant le seul k-automorphisme de K , et $\omega(\sigma)$ l'un des deux ordres $\frac{\sigma(x) - x}{\sigma(x_0) - x_0} > 0$, ω s'écrit $\omega = u\omega(\sigma) \cup k^+ u$).

Enfin, l'ensemble des ordres k-archimédiens maximaux, muni de la topologie la moins fine contenant les fermés F_θ , où θ est k-archimédien générateur, et $F_\theta = \{\omega , \omega \supset \theta\}$ est un espace compact, connexe, localement connexe, que l'on reliera à k .

<u>Cas $d > 0$</u> . - Commençons par exhiber les deux ordres (au sens usuel) du corps $K = k\sqrt{d}$ qui prolongent l'ordre de k .

Notons

$$\omega_1 = \{a + b\sqrt{d} , \quad a > 0 , \quad a^2 > db^2\} ,$$

$$\omega_2 = \{a + b\sqrt{d} , \quad b > 0 , \quad a^2 < db^2\} ,$$

$$\omega_3 = - \omega_1 ,$$

$$\omega_4 = - \omega_2 .$$

Si nous prenons $f = \omega_1 \cup \omega_2$ et $f' = \omega_1 \cup (- \omega_2)$, nous obtenons deux ordres au sens usuel de K , comme le lecteur le vérifiera.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> ω <u>un</u> k-<u>ordre faible de</u> K ; <u>si</u> ω <u>n'est contenu dans aucun des</u> ω_i , $i = 1 , 2 , 3 , 4$, <u>c'est l'un des</u> f , f' , $-f$ <u>ou</u> $-f'$.

<u>Tout ordre</u> k-<u>linéaire contenu dans l'un des</u> ω_i <u>est faible</u>.

<u>Démonstration</u>. - La deuxième conclusion résulte du signe constant de $a^2 - db^2$ dans chaque ω_i .

Pour démontrer la première, prouvons d'abord que si ω coupe ω_1 et $-\omega_1$, il coupe ω_2 ou $-\omega_2$.

Soient $x_1 \in \omega \cap \omega_1$, $x_3 \in \omega \cap - \omega_1$; si l'ensemble $\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 , 0 < \lambda < 1\}$ ne coupe ni ω_2 , ni $-\omega_2$, c'est que, pour tous ses points, l'on a $a^2 \geqslant db^2$; or il contient un point tel que $a = 0$, donc il contient 0 , ce qui est en contradiction avec le fait que ω est saillant.

Supposons maintenant que ω coupe ω_1 et ω_2 en x_1 et x_2 . Nous désignons par $'$ (prime), l'opération $a + b\sqrt{d} \to \frac{a + b\sqrt{d}}{a^2 - db^2}$, et nous utilisons le fait que ω' est un cône convexe pour démontrer que $\omega' = f'$.

Il est clair que les deux points x_1 et x_2 sont k-linéairement indépendants.

Soit $x \in \omega_1$, écrivons $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, comme ω_1 est un cône k-convexe, λ_1 est positif.

Si λ_2 est positif, x , somme de $\lambda_1 x_1$ qui est dans ω , et de $\lambda_2 x_2$ dans ω , est dans ω , donc x est dans ω' .

Si λ_2 est négatif, x est la somme de $\lambda_1 x_1$ qui est dans ω' , et de $\lambda_2 x_2$ qui est dans ω' , puisque x_2 est dans ω_2 , donc x est dans ω' , ...

5. Quelques lemmes.

Nous démontrons quelques lemmes qui nous seront utiles dans l'étude des k-ordres faibles d'une extension algébrique de k .

Nous les démontrons pour des extensions finies ; les généraliser à des extensions algébriques est tout-à-fait facile : s'il y a une propriété à démontrer faisant intervenir $x_1 , \dots , x_m$, on prend $k(x_1 , \dots , x_m)$ [avec l'ordre faible $\omega \cap k(x_1 , \dots , x_m)$], qui est une extension finie, etc.

LEMME du support. - Soit ω un k-ordre faible de K , extension finie de k , $v \in \omega - \omega$, $v \neq 0$, alors

$$\text{Support } \omega = \frac{\omega - \omega}{v} \quad .$$

En effet, prenons une base de $\omega - \omega$ sur k , formée de nombres $u_i > 0$, l'élément $u = u_1 + \dots + u_m$ vérifie alors :

$$\forall\, x \in \omega - \omega , \qquad \exists\, \lambda \in k \quad \text{tel que} \quad x < \lambda u \quad .$$

Les formules (A) et (B) montrent alors que l'ensemble $\frac{\omega - \omega}{u}$ est un k-sous-anneau de K , donc un sous-corps : c'est le support de ω . Comme une application injective linéaire, liant deux espaces de même dimension, est surjective, la même conclusion reste valable pour $v \neq 0$, $v \in \omega - \omega$.

COROLLAIRE. - Le nombre $m = \dim \omega - \omega$ divise le degré de l'extension K de k .

On en déduit, comme il n'y a guère que 2 qui soit divisible par tous les entiers qui le précèdent, le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Pour que, sur l'extension (a priori quelconque, même non algébrique) K de k , tout ordre k-linéaire soit faible, il faut et il suffit que $K = k(\sqrt{-d})$, avec $d \geqslant 0$ dans k .

Munissons k de sa topologie de l'ordre, $\omega - \omega$, qui est de dimension finie m sur k , de la topologie produit.

Alors <u>l'intérieur de</u> ω <u>est identique à sa plus grande classe d'Archimède</u> :

$$\overset{\circ}{\omega} = \{x \ , \quad \forall\, y > 0 \ , \quad \exists\, \lambda \in k \ , \quad y < \lambda x\} \ .$$

Ainsi, en utilisant la continuité de l'application $x \to \frac{1}{x}$ dans K , munie de la topologie produit, et une récurrence sur les sous-extensions de K , on montre le résultat suivant.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> ω <u>un</u> k-<u>ordre faible total d'une extension finie</u> K <u>de</u> k :

(a) <u>Il existe une décomposition unique de</u> ω <u>sous la forme</u> :

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots \cup \omega_r \ ,$$

<u>où chaque élément de</u> ω_{i+1} <u>vérifie, par rapport à chaque élément de</u> ω_i ,

$$\forall\, \lambda > 0 \ , \quad \lambda \in k \ , \qquad x_{i+1} < \lambda x_i \ ;$$

(b) <u>Les supports</u> $K = K_1 , K_2 , \ldots , K_r$ <u>forment une chaîne strictement décroissante de sous-corps de</u> K ;

(c) <u>Chacun des</u> ω_i , <u>ramené à son support (dans un sens évident), est</u> k-<u>archimédien maximal</u>.

Comme le corps k est de caractéristique nulle, si K désigne une extension finie de k , on peut mettre K sous la forme $K = k[x]/p$: quotient de l'anneau des polynômes par le polynôme irréductible p .

Soit n le degré de p .

Munissons k de sa topologie de l'ordre, prenons le complété pour la structure uniforme associée $\bar{k}$, c'est encore un corps ordonné.

On vérifie que le complété de K , muni de la topologie produit, est le quotient $\bar{k}[x]/p$.

Comme p peut fort bien ne plus être irréductible dans $\bar{k}$, $p = p_1 \times \ldots \times p_s$, $\bar{k}[x]/p$ n'est plus un corps, mais un produit de corps

$$\bar{k}[x]/p_1 \times \ldots \times \bar{k}[x]/p_s \ .$$

(En effet, p étant séparé, les facteurs p_i sont distincts.)

Il nous faut maintenant étendre la définition d'un k-ordre faible à un tel anneau.

Nous remplaçons la condition 2° de la définition du § 3 par :

Pour tout triplet de nombres inversibles x , y , z , liés par la relation $z^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$, on a $x > 0$, $y > 0$, entraîne $z > 0$.

Pour éviter les confusions, nous notons δ l'application naturelle de K dans son complété A .

LEMME du complété. - L'application $\omega \to \overset{\circ}{\overline{\delta(\omega)}}$, où l'on prend l'intérieur dans l'espace $\overline{\delta(\omega)} - \overline{\delta(\omega)}$, est une bijection entre l'ensemble des k-ordres faibles k-archimédiens de K et l'ensemble des $\bar{k}$-ordres faibles Ω , $\bar{k}$-archimédiens de A , tels que $\Omega \cap \delta(K)$ soit dense dans Ω .

L'application inverse s'écrit $\Omega \to \delta^{-1}(\Omega)$.

Démonstration. - Soit ω un k-ordre faible, k-archimédien de K .

Prenons l'intérieur Ω de $\overline{\delta(\omega)}$ dans la topologie de $\overline{\delta(\omega)} - \overline{\delta(\omega)}$.

Grâce au lemme du support, on peut se limiter au cas $\overline{\delta(\omega)} - \overline{\delta(\omega)} = A$ pour montrer que Ω est un $\bar{k}$-ordre faible de A tel que $\delta^{-1}(\Omega) = \omega$.

Pour montrer cela, il nous suffit d'écrire la condition $z \in \Omega$ sous la forme : z admet un voisinage V tel que $V \cap \delta(K) \subset \delta(\omega)$.

Cette condition suffisante est aussi nécessaire :

Soit $z \in \Omega$, écrivons $z = \sum_1^n z_i$ avec $\{z_1 , \ldots , z_n\}$, base de A sur $\bar{k}$ formée d'éléments de $\overline{\delta(\omega)}$.

Prenons n points z_i' dans $\delta(\omega)$ assez voisins des z_i pour former une base de A et pour que

$$z = \sum_1^n \lambda_i z_i' , \qquad \text{avec } \lambda_i > 0 , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n .$$

Alors l'ensemble V des points de A de la forme

$$z' = \sum_1^n \lambda_i' z_i' , \qquad \text{avec } \lambda_i' > 0 , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n ,$$

est un ouvert contenant z , tel que $z' \in \delta(K) \cap V$ entraîne $\lambda_i' \in k$, donc $z' \in \delta(\omega)$.

Le lecteur vérifiera que, si ω est un $\bar{k}$-ordre faible $\bar{k}$-archimédien de A , tel que $\omega \cap \delta(K)$ soit dense dans ω , $\Omega = \overset{\circ}{\overline{\delta(\delta^{-1}(\omega))}}$ est un $\bar{k}$-convexe, contenant

$\omega \cap \delta(K)$ comme sous-ensemble dense, donc ω comme sous-ensemble dense, et est égal à ω .

Revenons à la décomposition $A = \overline{k}[x]/p_1 \times \dots \times \overline{k}[x]/p_s$, nous notons $K_i = \overline{k}[x]/p_i$, et π_i la projection de A dans K_i .

LEMME du produit. - <u>Soit</u> $A = K_1 \times \dots \times K_s$ <u>un produit d'extensions finies du corps ordonné</u> $\overline{k}$. <u>(Le fait que</u> $\overline{k}$ <u>soit complet n'intervient pas.) Tout</u> $\overline{k}$-<u>ordre faible</u> $\overline{k}$-<u>archimédien</u> ω <u>de</u> A <u>admet au moins une projection</u> $\pi_q(\omega)$ <u>qui est un</u> $\overline{k}$-<u>ordre faible,</u> $\overline{k}$-<u>archimédien de</u> K_q .

<u>Démonstration</u>. - Nous supposons qu'aucune des projections de ω n'est réduite à $\{0\}$, sans quoi l'on raisonnerait sur le produit des facteurs restants.

Soit $i \in \{1 , \dots , s\}$; $\pi_i(\omega) - \pi_i(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de K_i dans lequel $\pi_i(\omega)$ est ouvert.

Montrons que $\pi_i(\omega) - \pi_i(\omega) = \lambda K_i'$, K_i' sous-corps de K_i , et que

$$(x \in \pi_i(\omega) , \quad y \in \pi_i(\omega) , \quad x + y \neq 0) \qquad \text{entraîne} \qquad \left(\frac{xy}{x+y} \in \pi_i(\omega)\right) .$$

<u>Pour cela, il nous suffit de montrer que</u>

$$(x \in \pi_i(\omega) , \quad y \in \pi_i(\omega) , \quad x + y \neq 0) \qquad \text{entraîne} \qquad \left(\frac{xy}{x+y} \in \overline{\pi_i(\omega)}\right) .$$

En effet, $\overline{\pi_i(\omega)}$ est alors stable par $(x , y) \to \frac{xy}{x+y}$ pour $x + y \neq 0$, et, en modifiant légèrement la démonstration du lemme du support, on peut écrire

$$\overline{\pi_i(\omega)} - \overline{\pi_i(\omega)} = \lambda K_i' .$$

Mais $\overline{\pi_i(\omega)} - \overline{\pi_i(\omega)} = \pi_i(\omega) - \pi_i(\omega)$, qui est fermé comme espace vectoriel, donc $\pi_i(\omega)$ est ouvert dans $\lambda K_i'$, or l'application $(x , y) \to \frac{xy}{x+y}$, $x + y \neq 0$, restreinte à $\lambda K_i'$, est ouverte.

Ainsi tout point $z = \frac{xy}{x+y}$, $x \in \pi_i(\omega)$, $y \in \pi_i(\omega)$, $x + y \neq 0$, est intérieur à $\overline{\pi_i(\omega)}$, donc est dans $\pi_i(\omega)$.

<u>Reste à prouver que</u>

$$(x \in \pi_i(\omega) , \quad y \in \pi_i(\omega) , \quad x + y \neq 0) \qquad \text{entraîne} \qquad \left(\frac{xy}{x+y} \in \overline{\pi_i(\omega)}\right) .$$

Pour tout voisinage V , W de tout couple X , Y dans $\omega \times \omega$, il existe un couple X' , Y' , $X' \in V$, $Y' \in W$, tel que X' est inversible, Y' est inversible, et $X'^{-1} + Y'^{-1}$ aussi.

En effet, il suffit de considérer les X' et Y' de la forme

$$X' = X + \sum \lambda_i X_i , \qquad Y' = Y + \sum u_i Y_i ,$$

où X_i est tel que $\pi_i(X_i) \neq 0$ et $\pi_i(Y_i) \neq 0$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Supposons qu'aucune des projections $\pi_i(\omega)$ de ω ne soit un $\bar{k}$-ordre faible, c'est-à-dire ne soit saillante. Nous allons aboutir à une contradiction.

Alors clairement pour tout i , $1 \leqslant i \leqslant s$, $\pi_i(\omega) = \lambda_i K_i'$.

Considérons la relation suivante dans $\{1 , 2 , \ldots , s\}$, entre i et j ,

$$\forall X , Y \in \omega \times \omega , \qquad \pi_i(X) + \pi_i(Y) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \pi_j(X) + \pi_j(Y) = 0 .$$

En renommant les indices $1 , 2 , \ldots , s$, on peut supposer que les éléments $1 , 2 , \ldots , r$ sont maximaux et indépendants.

Nous montrons que la projection $\pi(\omega)$ de ω sur $K_1' \times \ldots \times K_r'$ est partout dense dans cet ensemble.

Donc, le support $\pi(\omega) - \pi(\omega)$ est $\lambda_1 K_1' \times \lambda_2 K_2' \times \ldots \times \lambda_r K_r'$, et $\pi(\omega)$ est ouvert dans cet ensemble.

Ainsi il existe deux points X et Y de ω tels que $\pi(X) + \pi(Y)$, mais alors, $\forall j = 1 , 2 , \ldots , s$, $\pi_j(X) + \pi_j(Y) = 0$, donc $X = - Y$, or ω est saillant, voilà la contradiction.

Pour terminer, il nous suffit de construire, pour tout point $(u_1 , \ldots , u_r) = u$, $u_i \neq 0$, $i = 1 , 2 , \ldots , r$, de $K_1' \times \ldots \times K_r'$, une fonction f , définie sur un certain voisinage de 0 , U dans k , à valeurs dans A , telle que $\varepsilon \to 0$ entraîne $f(\varepsilon) \to (u_1 , \ldots , u_r)$, et $\varepsilon > 0$ entraîne $f(\varepsilon) \in \pi(\omega)$.

Comme $\pi_i(\omega) = K_i'$, nous pouvons trouver X_i et X_i' dans $\pi(\omega)$, tels que $\pi_i(X_i) = - \pi_i(X_i') = u_i$, mais nous ne sommes pas certains de $\pi_j(X_i) \neq - \pi_j(X_i')$ pour $i \neq j$.

Comme les entiers i et j sont indépendants, on peut trouver $X_{i,j}$ et $X_{i,j}'$ dans $\pi(\omega)$, tels que $\pi_i(X_{i,j} + X_{i,j}') = 0$, mais $\pi_j(X_{i,j} + X_{i,j}') \neq 0$.

Comme $\pi(\omega)$ est $\bar{k}$-archimédien, on peut rajouter $\lambda(X_{i,j} + X_{i,j}')$ (avec λ assez petit) à X_i et X_i' , de manière que les nouveaux éléments soient dans $\pi(\omega)$, et vérifient

$$\pi_i(Y_i) = - \pi_i(Y_i') = u_i , \qquad \pi_j(Y_i) \neq - \pi_j(Y_i') \quad \text{pour } i \neq j .$$

On corrige ensuite, par rapport à chaque $j' \neq i$, $j' \neq j$, assez peu pour ne pas altérer les corrections précédentes.

Nous assurons ainsi l'existence de $2n$ points Z_i et Z'_i de $\pi(\omega)$, tels que

$$\pi_i(Z_i) = - \pi_i(Z'_i) = u_i \ , \qquad \pi_j(Z_i) \neq - \pi_j(Z'_i) \quad \text{pour} \quad i \neq j \ .$$

Nous posons ensuite

$$f_i(\varepsilon) = \frac{1}{2} [(1 + \varepsilon)\ Z_i + (1 - \varepsilon)\ Z'_i]$$

et

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(1/f_1(\varepsilon)) + (1/f_2(\varepsilon)) + \dots + (1/f_s(\varepsilon))} \ ,$$

bien sûr pour ε positif assez petit, $f(\varepsilon) \in \pi(\omega)$.

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que $f(\varepsilon) \to (u_1 , \dots , u_r)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Etablissons une conséquence importante des trois lemmes ; k désigne un corps ordonné, $\overline{k}$ son complété.

COROLLAIRE. - Si pour chaque extension finie de $\overline{k}$, tout $\overline{k}$-ordre faible partiel se prolonge en un $\overline{k}$-ordre faible total, alors dans chaque extension algébrique de k , tout k-ordre faible partiel se prolonge en un k-ordre faible total.
(i. e. Le problème de prolongement est local.)

Soit K une extension algébrique de k , supposons qu'il existe dans K un k-ordre faible non contenu dans un k-ordre faible total. En utilisant les notations du § 3, cela revient à l'existence de $n + m + 1$ éléments de K ,

$$u_1 , \dots , u_n , u'_1 , \dots , u'_m , u \ ,$$

et de deux fractions k-faiblement positives F et F' , telles que

$$F(u_1 , \dots , u_n , u) = 0 \ , \qquad F'(u'_1 , \dots , u'_m , - u) = 0 \ ,$$

$$\forall F'' , \quad F''(u_1 , \dots , u_n , u'_1 , \dots , u'_m) = 0 \ .$$

Donc, dans l'extension $k(u_1 , \dots , u_n , u'_1 , \dots , u'_m , u)$, qui est une sous-extension finie de K , on aura la même hypothèse.

Ainsi nous nous limitons au cas où K est une extension finie d'ordre n de $\mathbf{k}$.

Soient ω un k-ordre faible partiel de K , et m la dimension du support de ω .

Si $m = 1$, on se reporte au § 3 pour le prolonger. Nous raisonnons par récurrence sur m . (i. e. Nous supposons savoir prolonger tous les k-ordres faibles dont le support est de dimension plus petite que m .)

Considérons l'intérieur de ω pour la topologie de l'espace vectoriel $\omega - \omega$. Il est non vide, et c'est un k-ordre faible k-archimédien $\mathring{\omega}$.

Nous écrivons ensuite $K = k[x]/p$, nous complétons k en $\bar{k}$, K en $A = K_1 \times \dots \times K_s$.

En utilisant le lemme du complété, puis le lemme du support, nous obtenons l'existence d'une projection $\pi_q(\mathring{\omega})$ de $\mathring{\omega}$ dans K_q , contenue dans un $\bar{k}$-ordre faible $\bar{k}$-archimédien Ω de l'extension finie K_q .

Ainsi en utilisant l'hypothèse du corollaire, nous pouvons prolonger Ω en un $\bar{k}$-ordre faible total Ω' de K_q .

Il est clair que $\pi_q^{-1}(\Omega')$ est un k-ordre faible total étendant $\mathring{\omega}$, mais rien ne prouve qu'il contient ω .

Nous pouvons appliquer un des corollaires du lemme du support, $\pi_q^{-1}(\Omega')$ est total, utilisons sa décomposition en ordres k-archimédiens. Soit θ la réunion de tous les éléments de $\pi_q^{-1}(\Omega')$ qui sont tels que x , $x < \lambda y$ $(\pi_q^{-1}(\Omega'))$, $\forall \lambda > 0$, $\lambda \in k$, $y \in \mathring{\omega}$.

θ est un k-ordre faible, son complémentaire θ' dans $\pi_q^{-1}(\Omega')$ en est un également.

La dimension du support de θ est strictement inférieure à m .

Nous considérons maintenant l'intersection de ω avec $\theta - \theta$, c'est encore un k-ordre faible et, d'après l'hypothèse de récurrence, nous pouvons le prolonger à $\theta - \theta$.

<u>En rajoutant ce prolongement à</u> θ' , <u>on obtient un</u> k-<u>ordre faible total contenant</u> ω .

En effet, c'est un k-ordre faible, car la somme d'un élément quelconque de $\theta - \theta$ et d'un élément de θ' est dans θ' . ($x_1 - x_2 + y$ avec $x_i < \lambda y$, $\forall \lambda > 0$, donc $x_1 - x_2 + y \in \pi_q^{-1}(\Omega')$, puis $x_1 - x_2 + y \notin \theta$.)

Il contient ω , car si un élément de ω n'y était pas, il serait dans $-\theta'$, or dans l'espace vectoriel $\omega - \omega$, $-\theta'$ est ouvert et $\omega \subset \mathring{\omega}$.

6. Extensions algébriques des corps de constantes.

Soit k un corps ordonné tel que son complété $\overline{k}$ soit réel fermé (par exemple, le complété R du corps Q des rationnels est réel fermé).

Alors les seules extensions de $\overline{k}$ sont $\overline{k}$ et $\overline{k}(i)$, $i^2 = -1$.

Donc (voir § 4) le problème de prolongement est résolu pour ces extensions.

D'après le corollaire des trois lemmes, il est donc résolu pour toutes les extensions algébriques de k .

Nous utilisons le nom de "corps de constantes" pour un corps ordonné k tel que $\overline{k}$ soit réel fermé, nous le justifierons dans le paragraphe suivant.

THÉORÈME. - Sur une extension algébrique K du corps de constantes k , tout k-ordre faible partiel s'étend en un k-ordre faible total.

De plus, comme nous allons le voir, l'expression des k-ordres faibles totaux est simple.

Pour la présenter, nous utilisons la notion suivante.

Définition. - On appelle k-conjugaison de l'extension normale K de k , un k-automorphisme σ , $\sigma^2 = 1$, et un ordre fort k-linéaire sur son corps fixe K^σ , tels que : $\forall\, u \in K$, $u\sigma(u) \geqslant 0$.

Soient σ une k-conjugaison, et x_0 un élément de K non dans K^σ .

La condition $\dfrac{\sigma(x) - x}{\sigma(x_0) - x_0} > 0$ définit un k-ordre faible $\omega(\sigma)$, qui ne dépend de x_0 que par son signe.

Il est clair, d'autre part, qu'à toute k-conjugaison de K est associé un plongement Δ de K dans $\overline{k}(i)$, tel que $\Delta \circ \Sigma = \Sigma \circ \Delta$, où Σ désigne l'unique $\overline{k}$-conjugaison $a + b_i \to a - b_i$ de $\overline{k}(i)$.

Inversement, si l'extension K de k est normale, tout plongement Δ de K dans $\overline{k}(i)$ permet de lire Σ selon une k-conjugaison.

THÉORÈME. - K désigne une extension finie du corps de constantes k .

(a) Soit ω un k-ordre faible k-archimédien total de K . Si ω n'est pas un ordre au sens usuel ou son opposé, il existe un plongement Δ de K dans $\overline{k}(i)$, et un ordre $\overline{k}$-linéaire $\overline{k}$-archimédien de $\overline{k}(i)$, θ , tels que

$$\omega = \Delta^{-1}(\theta)$$

(le couple Δ , θ est unique, à une conjugaison $a + bi \to a - bi$ près).

(b) Si l'extension finie K est normale, et si ω est un k-ordre faible total, en désignant par $\omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_r$ sa décomposition, K_i le support de ω_i , il existe $r - 1$ k-conjugaisons $\sigma_1 , \dots , \sigma_{r-1}$ telles que, pour tout $\lambda \in \omega_r - \omega_r$, $\lambda \neq 0$, $i = 1 , 2 , \dots , r - 1$, alors ω_i est l'un des deux k-ordres faibles $\lambda\omega(\sigma_i)$ ou $-\lambda\omega(\sigma_i)$ restreint au corps fixe K_i de $\sigma_1 , \dots , \sigma_{i-1}$, $i = r$, $\frac{\omega_r}{\lambda}$ est un k-ordre faible k-archimédien, total sur son support K_r , corps fixe de $\sigma_1 , \dots , \sigma_{r-1}$.

Ce théorème, que le lecteur déduira des lemmes du § 5, permet de classer les k-ordres faibles totaux de K .

ω sera rationnel si ω_r est un ordre fort (au signe près), algébrique s'il existe une extension K' de K et un ordre rationnel sur K' , ω' , tel que $\omega' \cap K = \omega$, transcendant dans les autres cas.

On vérifiera que ω a la même nature algébrique que la coupure $\operatorname{tg} \theta$, définie sur la droite $1 + ik$ de $\bar{k}(i)$ par l'ordre θ , tel que $\omega_r = \Delta^{-1}(\theta)$ (d'après (a)).

Le rang r d'un k-ordre faible total ω est clairement limité par le nombre de k-conjugaisons de K .

De plus, s'il n'y a sur K aucune k-conjugaison, les seuls k-ordres faibles de K sont des ordres usuels (au signe près).

On montre facilement que, dans le cas général, le groupe Γ , engendré par les k-conjugaisons, est un sous-groupe distingué du groupe de Galois G de l'extension normale K de k .

Ainsi cette extension se décompose en :

k' , extension normale de k , sans autres k-ordres faibles que les ordres usuels (ou leur opposé). (Il suffit de prendre $k' = K^{\Gamma}$, corps fixe de Γ , et de s'assurer qu'il est démuni de k-conjugaison.)

K , extension normale de k' , dont le groupe Γ est engendré par les k'-conjugaisons. (On prend sur k' l'un quelconque des ordres usuels étendant celui de k .)

Il n'y a aucune difficulté à généraliser le théorème précédent au cas d'une extension algébrique de k .

La décomposition d'un k-ordre faible total s'écrit alors

$$\omega = \bigcup_{i \in S} \omega_i \quad ,$$

où S est un ensemble totalement ordonné.

La condition pour que l'on puisse affirmer que, pour tout k-ordre faible ω de K, S a un plus grand élément, s'écrit :

K <u>est une extension imaginaire de</u> k. (i. e. Il y a une relation non triviale $\sum \lambda_i a_i^2$, $\lambda_i \in k$, $\lambda_i > 0$, $a_i \in K$, $a_i \neq 0$.)

De plus, comme le problème de prolongement (voir § 3) est résolu, pour toutes les extensions algébriques de k, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME. - <u>Soient</u> K <u>une extension algébrique de</u> k, <u>corps de constantes, et</u> A <u>une partie de</u> K.

<u>L'intersection des</u> <u>k-ordres faibles totaux de</u> K, <u>contenant</u> A, <u>est identique à l'ensemble des éléments</u> z <u>de</u> K <u>qui vérifient une équation</u>

$$F(-z, u_1, \ldots, u_m) = 0 ,$$

<u>où</u> F <u>est une fraction</u> <u>k-faiblement positive, et</u> $u_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$.

Prenons le cas particulier où K est une extension finie d'ordre n de k, désignons par Δ_j les divers plongements de K dans $\bar{k}(i)$.

Nous supposons que A <u>est une partie ouverte</u> de K pour la topologie d'espace vectoriel sur k.

Soit A_j le $\bar{k}$-cône convexe engendré par $\Delta_j(A)$ dans $\bar{k}(i)$.

Il est clair qu'alors l'ensemble Ω, intersection des k-ordres faibles totaux contenant A, est identique à l'intersection des $\Delta_i^{-1}(A_i)$, et est une intersection de n "demi-espaces" de l'espace vectoriel K de dimension n sur k, d'où le résultat suivant.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> A <u>est une partie ouverte de l'extension finie d'ordre</u> n <u>de</u> k, <u>l'ensemble</u> Ω <u>des solutions d'une équation</u>

$$F(-z, u_1, \ldots, u_m) = 0 , \qquad u_i \in A ,$$

<u>vérifie la propriété suivante</u> :

<u>Pour tout sous-ensemble fini</u> $z_1, \ldots, z_p$ <u>de</u> Ω, <u>il existe</u> n <u>points</u> $z'_1, \ldots, z'_n$ <u>de</u> Ω <u>tels que chaque</u> z_i, $i = 1, \ldots, p$, <u>s'écrive de manière unique sous la forme</u>

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} z'_j , \qquad \lambda_{i,j} \in k , \quad \lambda_{i,j} \geqslant 0 .$$

Nous groupons les autres résultats sous forme d'un théorème que le lecteur démontrera en se reportant au § 3.

THÉORÈME. - k désigne un corps de constantes.

(a) La forme générale, rationnelle, de l'équation en z à coefficients dans k, dont toutes les racines dans $\overline{k}(i)$ sont réelles et négatives, est $F(z, 1) = 0$ quand F décrit $\Omega(x_1, x_2)$.

(b) La forme générale de l'équation en z, dont toutes les racines sont de partie réelle négative, est $F(z, \frac{1}{z}, 1) = 0$ où F décrit $\Omega(x_1, x_2, x_3)$.

(c) Soit K une extension imaginaire de k, munie d'un k-ordre faible, k-archimédien, total et transcendant ω. Nous plongeons K, ω dans $\overline{k}(i)$, θ (en utilisant le (a) du théorème de classement des k-ordres faibles totaux). Alors une équation irréductible à coefficients dans K, $p(x) = 0$, admet autant de racines positives dans $\overline{k}(i)$, θ qu'il y a d'extensions de ω en un k-ordre faible total du corps $K[x]/p$ telles que $x > 0$.

7. Extensions fortement réelles.

Dans le § 6, nous avons démontré des résultats valables pour un corps ordonné k dont le complété $\overline{k}$ était réel fermé.

Il est facile de se rendre compte que nos démonstrations utilisaient uniquement le fait que k était dense pour l'ordre dans un certain corps réel fermé.

Or parmi les corps réels fermés contenant k, un seul est algébrique sur k, on l'appelle sa clôture réelle, et on la note $\hat{k}$.

Je pense que le lecteur ne nous en voudra pas de préciser seulement maintenant, en accord avec le § 6, la définition suivante.

Définition. - Nous appelons corps de constantes, un corps ordonné dense au sens de l'ordre dans sa clôture réelle $\hat{k}$.

On vérifie qu'elle équivaut à la suivante :

Tout polynôme p séparé (i. e. le résultant de p et p' est différent de 0) admet autant de zéros dans la clôture réelle $\hat{k}$ de k que de changements de signe dans k.

Ainsi, si k n'est pas un corps de constantes, un polynôme p de degré n peut avoir n zéros dans $\hat{k}$ sans changer de signe dans k.

[On pourra le vérifier sur l'exemple suivant :

$$p(x) = (x^2 + X)(x^2 + 2X) \quad ,$$

dans le corps $k = Q(X)$, corps des séries à coefficients rationnels

$$a_{-v}\, X^{-v} + \ldots + a_0 + a_1\, X + \ldots$$

ordonné par la condition $a_{-v} > 0$.]

Le théorème de classement des k-ordres faibles totaux, énoncé au § 6, permet d'affirmer que, si k est un corps de constantes, un polynôme p , irréductible de degré n , admet n zéros dans $\hat{k}$ si, et seulement si, dans l'extension $k[x]/p$ tout k-ordre faible se prolonge en un ordre usuel (au signe près).

Nous remarquons que si k n'est pas un corps de constantes, la première condition n'entraîne plus la seconde.

[On vérifie l'exemple suivant : $k = Q(X)$ précédemment défini, $K = k(\sqrt{2}\ , \sqrt{X})$, p le polynôme associé à $\sqrt{2} + \sqrt{X}$ par exemple. Tout élément de K s'écrit alors

$$(a_{-v/2} + b_{-v/2}\sqrt{2})\ X^{-v/2} + \ldots + a_0 + b_0\sqrt{2} + \ldots \quad .$$

La condition v pair, $a_{-v/2} + b_{-v/2}\sqrt{2} > 0$ (au sens réel), ou v impair et $a_{-v/2} - b_{-v/2}\sqrt{2} > 0$, définit un k-ordre faible de K qui n'est, ni un ordre usuel, ni son opposé, car $1 > 0$, mais $\sqrt{2} > 0$, $X^{1/2} > 0$, bien que $\sqrt{2}\, X^{1/2} < 0$.]

Nous démontrons un théorème qui précise, lorsque k n'est plus un corps de constantes mais un corps de fonctions à m variables, les conditions qu'il faut rajouter pour obtenir l'équivalence.

THÉORÈME. - k <u>désigne un corps ordonné ; nous appelons extension fortement réelle de</u> k , <u>une extension dans laquelle tout</u> k-<u>ordre faible se prolonge en un ordre usuel au signe près</u>.

(a) <u>Pour qu'une extension</u> K <u>de</u> k <u>soit fortement réelle, il faut et il suffit qu'elle soit algébrique, et que ses sous-extensions finies soient fortement réelles</u>.

(b) <u>Si</u> k <u>est un corps de fonctions à</u> m <u>variables (c'est-à-dire est muni d'une valuation discrète</u> v <u>de rang</u> m , <u>telle que l'égalité</u> $v(x + y) = \inf(v(x)\ , v(y))$ <u>ait lieu dès que</u> x <u>et</u> y <u>sont positifs, et que le corps ordonné résiduel</u> rés k <u>soit un corps de constantes), désignons par</u> $v = v_m \subset v_{m-1} \subset \ldots \subset v_1 \subset v_0 = k$ <u>la chaîne des différentes composantes de</u> v , <u>par</u> v_i <u>celle de rang</u> i . <u>Alors, l'extension</u> $K = k[x]/p$ <u>de</u> k <u>est fortement réelle si, et seulement si,</u>

(α) p <u>a tous ses zéros dans la clôture réelle</u> $\hat{k}$ <u>de</u> k ,

(β) <u>Les indices usuels</u> e <u>et</u> f <u>de chaque extension</u> $\hat{v}_i$ <u>de</u> v_i <u>à</u> K <u>vérifient</u> : $e = 1$, f <u>quelconque ; ou</u> $e = 2$, $f = 1$.

<u>Démonstration</u>. - La nécessité des conditions exprimées dans (a) et (b) est une conséquence de la construction générale suivante :

Soit k un corps ordonné, muni d'une valuation à valeurs dans le groupe ordonné H , et telle que $v(x + y) = \inf[v(x) , v(y)]$, quand x et y sont positifs ; soit φ la place associée, à valeurs dans le corps ordonné résiduel rés k .

Soient K , $\hat{v}$, $\hat{H}$, $\hat{\varphi}$, rés K , des extensions respectives de k , v , H , φ , rés k .

Soient G le groupe quotient $\hat{H}/H$, $g \to \varepsilon g$ une application de G dans K telle que $\hat{v}(\varepsilon g) \equiv g$ modulo H .

Alors, toute application $g \to \omega(g)$ de G dans l'ensemble des rés k -ordres faibles de rés K définit un k-ordre faible ω de K par la condition :

$x \in \omega$ quand il existe $\lambda \in k$, $\lambda > 0$, tel que, si $\hat{v}(x) \equiv g$ modulo H , on ait

$$\varphi\left(\frac{\lambda x}{\varepsilon g}\right) \in \omega(g) \quad .$$

Voici la suite de lemmes qui permet de montrer que les conditions (α) et (β) de (c) sont suffisantes :

LEMME. - <u>Soient</u> k <u>un corps ordonné,</u> u <u>un élément positif de</u> k , <u>alors l'extension</u> $k(\sqrt{u})$ <u>est fortement réelle</u>.

Il résulte facilement du § 4.

LEMME. - <u>Soit</u> k <u>un corps ordonné, muni d'une valuation</u> v <u>discrète de rang</u> 1 , <u>telle que</u> $v(x + y) = \inf(v(x) , v(y))$ <u>dès que</u> x <u>et</u> y <u>sont positifs. Nous supposons que</u> k <u>est complet pour la structure uniforme associée à</u> v .

<u>Soit</u> K <u>une extension finie de</u> k <u>telle que</u> :

K <u>est non ramifiée, l'unique extension</u> $\hat{v}$ <u>de</u> v <u>à</u> K <u>vérifie</u> $e = 1$;

<u>L'extension résiduelle</u> rés $k \subset$ rés K <u>est fortement réelle</u>.

<u>Alors l'extension</u> K <u>est fortement réelle</u>.

On vérifie que la topologie définie par v est identique à la topologie de l'ordre, et que la topologie définie par $\hat{v}$ sur K est identique à sa topologie d'espace vectoriel sur k .

On peut donc, pour montrer la conclusion du lemme, se limiter au prolongement d'un k-ordre faible ω ouvert pour la topologie $\hat{v}$.

Soit alors $\omega = \bigcup_i^\infty \omega_j$, où i désigne le plus petit entier tel que

$$\omega_i = \{x \in K \ , \ \forall\ \varepsilon \in K \ , \ \hat{v}(\varepsilon) \geqslant i \ \text{ entraîne } \ (1+\varepsilon)x \in \omega\}$$

soit non vide.

On remarque que ω_i est un k-ordre faible et que, si x et y sont dans ω_i, $\hat{v}(x+y) = \inf(\hat{v}(x) , \hat{v}(y))$.

Ainsi, en désignant par $\hat{\varphi}$ la place associée à $\hat{v}$, $\hat{\varphi}(\omega_i)$ est un rés k -ordre faible de rés K, il se prolonge d'après l'hypothèse en un ordre au sens usuel (au signe près) de rés K. Nous le notons $\geqslant$ sans ambiguïté, et l'on vérifie alors que la condition

$$x \in K \ , \ x > 0 \ , \quad \text{quand il existe } \lambda \in k \ , \ \lambda > 0 \ , \ \text{ tel que } \hat{\varphi}(\lambda x) > 0 \ ,$$

définit un k-ordre <u>usuel</u> de K (au signe près), et que cet ordre prolonge ω.

La démonstration du théorème résulte alors, en faisant une récurrence sur m, de la proposition suivante que l'on démontre en utilisant les lemmes du § 5 et les deux lemmes qui précèdent.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> k <u>un corps ordonné, muni d'une valuation</u> v, <u>discrète, de rang</u> 1, <u>telle que</u> $v(x+y) = \inf(v(x) , v(y))$ <u>si</u> x <u>et</u> y <u>sont positifs</u>.

<u>L'extension</u> $K = k[x]/p$ <u>de</u> k <u>est fortement réelle si (et seulement si)</u> :

1° p <u>a tous ses zéros dans la clôture réelle</u> $\hat{k}$ <u>de</u> k ;

2° <u>Chaque extension</u> V_r <u>de</u> v <u>à</u> K <u>vérifie</u> $e_r = 1$ <u>ou</u> $e_r = 2$, $f_r = 1$;

3° <u>Les extensions résiduelles</u> $\text{rés}\, k \subset \text{rés}_{V_r} K$ <u>sont fortement réelles</u>.

8. Les éléments irréductibles des groupes ordonnés $K^{(n)}$.

Nous revenons aux groupes ordonnés $K^{(n)}$, que nous avions associé (au § 2) à un corps algébriquement clos K, muni d'un k-ordre faible total ω.

Nous notons $Z \geqslant 0$ la condition, $\forall\ z \in Z$, $z \geqslant 0$ (ω).

Rappelons qu'un élément est dit irréductible, s'il vérifie la condition

$$\{Z > 0 \ \text{ et } \ Z = Z' + Z'' \ , \text{ avec } Z' > 0 \ , \ Z'' > 0 \ , \text{ est impossible}\} \ .$$

THÉORÈME.

(a) Soit ω un Q-ordre faible total sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Pour qu'un élément positif Z de $K^{(n)}$ soit irréductible, il faut et il suffit qu'il contienne 0 , $0 \in Z$.

Tout élément positif contenant 0 est une somme finie d'éléments irréductibles. Cette décomposition n'est pas unique, mais il n'y a en tout qu'un nombre fini.

(b) Si ω est un Q-ordre faible total Q-archimédien (i. e. archimédien au sens usuel), tout élément positif est somme finie d'éléments irréductibles.

De plus, dans le cas où K est la clôture algébrique de Q , on montre, en se reportant au § 6, que la conclusion de (b) ne peut avoir lieu que si ω est Q-archimédien, donc transcendant.

(Texte reçu le 1er décembre 1969)

Alain CONNES
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75 - PARIS 05