Michèle Dehen

Continuité d'applications linéaires

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 8 (1968-1969), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
8e année, 1968/69, n° 2

21 novembre 1968

CONTINUITÉ D'APPLICATIONS LINÉAIRES

par Michèle DEHEN

Je vais rechercher des conditions suffisantes assez générales qui permettent d'assurer la continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé dans un autre.

Tous les espaces vectoriels que je considèrerai seront supposés localement convexes et séparés.

1. Théorème des homomorphismes et théorème du graphe fermé.

LEMME 1.1.0. - *Soient* F *un espace vectoriel topologique de Baire, et* W *un sous-ensemble de* F *tel que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW = F$, *et vérifiant la condition de Baire (si* $D(W)$ *est l'ensemble dérivé de* $\widehat{W}$, $D(W) \setminus W$ *est maigre). Alors* :

(a) W *est non maigre* ;

(b) $W - W$ *est un voisinage de l'origine de* F .

Démonstration.

(a) Puisque F est un espace de Baire et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW = F$, on peut en déduire que W est non maigre.

(b) Soit $O(W) = \overset{\circ}{\widehat{D(W)}}$; puisque W est non maigre, $O(W)$ est non vide, c'est-à-dire : il existe $y \in O(W)$; $[O(W) - y]$ est encore un ouvert non vide contenant l'origine et, pour tout z appartenant à $[O(W) - y]$, $[O(W) + z] \cap O(W)$ est encore un ouvert non vide ; ceci entraîne, puisque W vérifie la condition de Baire, que $[W + z] \cap W$ est non vide. Or ceci est vérifié pour tout z appartenant à $O(W) - O(W)$. Par suite, $O(W) - O(W)$ est contenu dans $W - W$, et $W - W$ est donc un voisinage de l'origine.

THÉORÈME 1.1 (*Théorème des homomorphismes*). - *Soit* u *une application linéaire, continue, surjective d'un espace vectoriel métrisable* E *sur un espace de Baire* F . *Si* u *transforme tout ouvert de* E *en un ensemble vérifiant la condition de Baire dans* F , *alors* u *est un homomorphisme du premier espace sur le second.*

Démonstration. - En considérant le quotient de E par le noyau de u , on obtient encore un espace métrisable. On peut donc supposer u injective.

Pour démontrer que u^{-1} est une application continue de F sur E, il suffit de démontrer que, pour tout voisinage V équilibré et ouvert de l'origine dans E, l'image $u(V)$ est un voisinage de l'origine dans F. Si l'on pose $W = u(V)$, comme $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV$, on déduit que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW$, et de plus W vérifie la condition de Baire. D'après le lemme 1.1.0, on conclut alors que $W - W = 2W$ est un voisinage de l'origine dans F. L'application u est donc un homomorphisme.

COROLLAIRE 1.1.1. - *Soit* u *une application linéaire continue surjective d'un espace vectoriel métrisable* E *sur un espace de Baire* F. *Si* u *transforme tout ouvert de* E *en un ensemble* $\mathfrak{F}$*-analytique de* F *(où* $\mathfrak{F}$ *désigne l'ensemble des fermés de* F *), alors* u *est un homomorphisme du premier espace sur le second.*

Démonstration. - Elle est immédiate si l'on utilise le fait que tout ensemble $\mathfrak{F}$-analytique vérifie la condition de Baire.

COROLLAIRE 1.1.2. - *Soit* u *une application linéaire continue surjective d'un espace métrisable et complet* E *sur un autre* F. *Alors* u *est un homomorphisme du premier espace sur le second.*

Démonstration. - Si F est métrisable et complet, alors F est un espace de Baire.

Soient d une distance sur E, et d' une distance sur F. Pour tout ouvert V de E, il existe une distance d_V sur V qui fasse de V un espace métrique complet, et qui définisse sur V la même topologie que d. Comme u est injective, $u(V)$ peut être muni de la distance d'_V, image de d_V par u, et d'_V fait de $u(V)$ un espace métrique, complet. La continuité de u implique que la topologie définie par d'_V sur $u(V)$, est plus fine que la topologie définie par la restriction de la distance d' de F à $u(V)$.

On peut supposer que d'_V est majorée par 1, par exemple, ainsi que d'. L'application de $F \times F$ dans $\mathbb{R}_+$, qui, au couple (x, y), associe :

- Si $(x, y) \in u(V) \times u(V)$,

$$d_0(x, y) = \sup(d'_V(x, y), d'(x, y)) ,$$

- Si x ou y appartient à $\complement u(V)$,

$$d_0(x, y) = 1 ,$$

définit une distance sur F. De plus, cette distance d_0 définit, sur $u(V)$, une topologie identique à la restriction de celle de F à $u(V)$, et d_0 fait de $u(V)$

un sous-espace complet de F . Il résulte du fait que l'application identité

$$(u(V) , d') \dashrightarrow (F , d_0) \quad ;$$

est continue, que $u(V)$ est un G_δ de F muni de la distance initiale d' , c'est-à-dire un G_δ de F muni de sa topologie.

Or un G_δ vérifie la condition de Baire, et on peut conclure que $D[u(V)] - u(V)$ est maigre.

On peut donc conclure que $u(V)$ vérifie la condition de Baire, et par suite u est un homomorphisme de E sur F .

COROLLAIRE 1.1.3. - Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques métrisables, F étant de plus un espace de Baire. Si u est une application linéaire continue de E dans F , qui transforme tout ouvert de E en un ensemble de F vérifiant la condition de Baire, et si $u(E)$ n'est pas égal à F , alors $u(E)$ est maigre.

Démonstration. - Si l'on suppose que $W = u(E)$ est non maigre dans F , on peut déduire du lemme 1.1.0 que $W - W = u(E)$ est un voisinage de l'origine dans F . Utilisant la métrisabilité de F , on déduit que

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(W - W) = u(E) \quad ,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

THÉORÈME 1.2 (Continuité d'applications linéaires). - Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques métrisables, E étant de plus un espace de Baire. Si u est une application linéaire de E dans F , telle que tout ouvert du graphe de u dans $E \times F$ se projette sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u est une application continue de E dans F .

Démonstration. - Soit H le graphe de u , $H = \{(x , u(x)) \mid x \in E\}$. H étant un sous-espace vectoriel de $E \times F$, est métrisable. La projection p_E de H sur E est une application linéaire, continue, surjective, et qui transforme tout ouvert de H en un ensemble vérifiant la condition de Baire. D'après le théorème 1.1, son inverse est donc une application continue de E sur H . L'application u qui s'obtient en composant cette application avec la projection de H sur F est donc aussi continue.

COROLLAIRE 1.2.1. - Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel métrisable de Baire E dans un espace métrisable F . Si tout ouvert du graphe de u

dans $E \times F$ se projette en un ensemble $\mathfrak{F}$-analytique de E (où $\mathfrak{F}$ désigne l'ensemble des fermés de E), alors u est continue.

Démonstration. - On se ramène au théorème 1.1, car tout ensemble $\mathfrak{F}$-analytique vérifie la condition de Baire.

COROLLAIRE 1.2.2. - Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel métrisable et complet E dans un autre F. Si le graphe de u est fermé, alors u est une application continue.

Démonstration. - Le graphe H de u étant un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$, est métrisable complet. D'après le corollaire 1.1.2, p_E est donc bicontinue, et par suite, u est bien une application continue de E dans F.

COROLLAIRE 1.2.3. - Dans un cadre plus général, si E et F sont deux espaces métrisables, si E est un espace de Baire, et si E et F sont des espaces sousliniens (c'est-à-dire des images d'espaces polonais par des applications continues), ou bien des espaces $\mathcal{K}$-sousliniens (on dit qu'un espace X est $\mathcal{K}$-souslinien, s'il existe un espace polonais P et une application Φ semi-continue supérieurement au sens fort de P dans l'ensemble des compacts de X tels que $X = \Phi(P)$), toute application linéaire u de E dans F, dont le graphe est un ensemble borélien de $E \times F$, est continue.

Démonstration. - Les conditions sur E et F entraînent que $E \times F$ est $\mathcal{K}$-souslinien. Si V est un ouvert du graphe H de u, V est borélien dans $E \times F$.

La projection de V dans E est, par suite, un sous-ensemble $\mathfrak{F}$-analytique de E, et l'on sait qu'un tel sous-ensemble vérifie la condition de Baire.

On peut donc conclure que u est continue.

2. Généralisations du théorème de continuité d'applications linéaires.

LEMME 2.1.1. - Si f est une application linéaire continue d'un espace métrisable de Baire Ψ dans un espace métrisable de Baire Φ, alors :

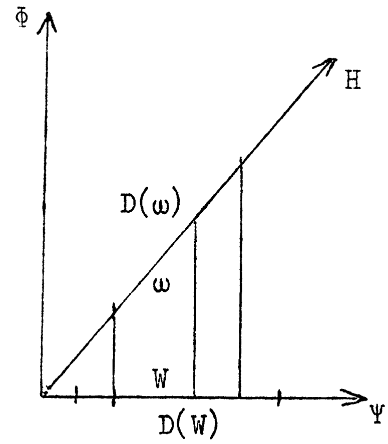
(a) Tout ouvert du graphe H de f se projette sur Ψ en un ensemble qui vérifie la condition de Baire ;

(b) f est un homomorphisme de Ψ dans Φ.

Démonstration.

(a) On notera H le graphe de f dans $\Psi \times \Phi$, et p la projection de H sur Ψ.

Comme f est continue, H est un sous-espace vectoriel fermé de $\Psi \times \Phi$, il est de plus métrisable.



Soient ω un ouvert de H, et W la projection de ω sur Ψ.

Comme $(D(\omega) \setminus \omega)$ est rare dans H, pour tout point x de Ψ et pour tout voisinage $\mathscr{W}_x$ de $p(x)$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_x$ de x tel que $f(\mathscr{V}_x) \subset \mathscr{W}_x$.

L'ensemble $(\mathscr{V}_x \times \mathscr{W}_x) \cap H$ est alors un voisinage de $(x, p(x))$ dans H. L'ensemble $(\mathscr{V}_x \times \mathscr{W}_x) \cap (D(\omega) \setminus \omega)$ est rare dans H, donc dans $\Psi \times \Phi$.

Comme Φ est métrisable, $D(\mathscr{V}_x \cap W) \setminus \mathscr{V}_x \cap W$ est maigre dans Ψ.

L'ensemble $D(W) \setminus W$ est donc localement maigre ; il est, par suite, maigre.

(b) se déduit immédiatement de (a) en utilisant le théorème 1.2.

LEMME 2.1.2. - <u>Soient</u> E <u>un espace vectoriel métrisable de Baire, et</u> F <u>un espace vectoriel localement convexe, limite projective d'espaces</u> (F_α) <u>par des applications</u> $f_\alpha : F \to F_\alpha$, <u>ces espaces</u> F_α <u>vérifiant</u> :

"<u>Si</u> u_α <u>est une application de</u> E <u>dans</u> F_α, <u>dont le graphe</u> H_α <u>dans</u> $E \times F_\alpha$ <u>est tel que tout ouvert de</u> H_α <u>se projette sur</u> E <u>en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors</u> u_α <u>est continue</u>".

<u>Si</u> u <u>est une application de</u> E <u>dans</u> F <u>telle que tout ouvert du graphe se projette sur</u> E <u>en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors</u> u <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout α, on pose $u_\alpha = f_\alpha \circ u$.

On note G le graphe de u dans $E \times F$, et G_α le graphe de u_α dans $E \times F_\alpha$.

Comme f_α est continue, l'application g_α de $E \times F$ dans $E \times F_\alpha$ définie par $g_\alpha = (\text{identité de } E, f_\alpha)$ est aussi continue.

On note p_E la projection de $E \times F$ sur E, et p_E^α la projection de $E \times F_\alpha$ sur E.

Pour montrer que le graphe G_α de u_α vérifie les conditions exigées, il suffit de montrer que, pour tout ouvert ω_α de G_α, la projection $p_E^\alpha(\omega_\alpha)$ vérifie la propriété de Baire.

Puisque G_α est muni de la topologie induite par celle de $E \times F_\alpha$, il existe un ouvert ω'_α de $E \times F_\alpha$ tel que

$$\omega'_\alpha \cap G_\alpha = \omega_\alpha \quad .$$

On peut alors écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} p_E^\alpha(\omega_\alpha) &= \{x \in E : \quad (x \,,\, u_\alpha(x)) \in \omega'_\alpha\} \\ &= \{x \in E : \quad (x \,,\, f_\alpha \circ u(x)) \in \omega'_\alpha\} \\ &= \{x \in E : \quad (x \,,\, u(x)) \in g_\alpha^{-1}(\omega'_\alpha)\} \quad . \end{aligned}$$

Comme g_α est continue, $g_\alpha^{-1}(\omega'_\alpha)$ est alors un ouvert de $E \times F$, et par suite $g_\alpha^{-1}(\omega'_\alpha) \cap G$ est un ouvert du graphe G de u.

L'égalité précédente peut encore s'écrire :

$$p_E^\alpha(\omega_\alpha) = p_E[g_\alpha^{-1}(\omega'_\alpha) \cap G] \quad .$$

D'après l'hypothèse sur u, la projection sur E de l'ouvert $g_\alpha^{-1}(\omega'_\alpha) \cap G$ de G est un ensemble vérifiant la condition de Baire ; par suite, il en est de même de $p_E^\alpha(\omega_\alpha)$, et l'on peut conclure que u_α est continue. Comme F est muni de la topologie limite projective des F_α, il en résulte que u est continue.

LEMME 2.1.3. - *Soient* E *un espace métrisable de Baire, et* Φ *un espace vectoriel, limite inductive dénombrable d'espaces* Φ_p *métrisables par des applications* φ_p *telles que* $\Phi = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \varphi_p\, \Phi_p$. *Si* v *est une application continue de* E *dans* Φ, *alors, il existe un entier* p_0 *tel que* $v(E) \subset \varphi_{p_0}(\Phi_{p_0})$. *Si, de plus,* Φ_{p_0} *est un espace de Baire, et si* φ_{p_0} *est injective, il existe une application* v_{p_0}, *linéaire continue de* E *dans* Φ_{p_0}, *telle que* $\varphi_{p_0} \circ v_{p_0} = v$.

Démonstration. - Si B_p désigne le sous-espace de $E \times \Phi_p$ défini par :

$$B_p = \{(x \,,\, y) \mid v(x) = \varphi_p(y)\} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, dashed, "v_p"'] & & \Phi \\ & \Phi_p \arrow[ur, "\varphi_p"'] & \end{tikzcd}$$

B_p est un sous-espace fermé métrisable. La projection π_p de B_p sur E est linéaire et continue. De plus $E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \pi_p(B_p)$, par conséquent l'un des $\pi_p(B_p)$ est non maigre.

D'après le corollaire 1.1.3, on peut donc déduire qu'il existe un p_0 tel que

$\pi_{p_0}(B_{p_0}) = E$, et, par suite, $v(E)$ est continue dans $\varphi_{p_0}(\Phi_{p_0})$.

D'après le théorème 1.1, φ_{p_0} est un homomorphisme, par suite, l'application $\varphi_{p_0}^{-1}$ de $v(E)$ dans Φ_{p_0} est continue ; et donc l'application v_{p_0} de E dans Φ_{p_0} , définie par $v_{p_0} = \varphi_{p_0}^{-1} \circ v$, est continue.

On peut de plus remarquer que v_{p_0} est, d'après le lemme 2.1.1, un homomorphisme de E dans Φ_{p_0} .

LEMME 2.1.4. - *Soit* E *un espace vectoriel métrisable de Baire, et soit* Φ *un espace localement convexe séparé, limite inductive dénombrable d'une suite d'espaces* Φ_p *métrisables de Baire par des applications* φ_p *vérifiant* $\Phi = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \varphi_p(\Phi_p)$. *On suppose que* $\overline{\omega}$ *est une application continue surjective de* Φ *sur* E *, qui transforme tout ouvert de* Φ *en un ensemble vérifiant la condition de Baire dans* E . *Alors* $\overline{\omega}$ *est un homomorphisme.*

Démonstration. - On peut poser, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\overline{\omega_p} = \overline{\omega} \circ \varphi_p$. Pour tout p , $\overline{\omega_p}$ est une application continue surjective de l'espace métrisable de Baire Φ_p sur l'espace E de Baire et métrisable.

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\overline{\omega}"] & E \\ \Phi_p \arrow[u, "\varphi_p"] \arrow[ur, dashed, "\overline{\omega_p}"'] & \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 2.1.1, $\overline{\omega_p}$ est donc un homomorphisme. Comme ceci est vrai pour tout p , on peut en déduire que $\overline{\omega}$ est un homomorphisme.

THÉORÈME 2.1. - *Soient* E *un espace vectoriel métrisable de Baire, et* F *un espace vectoriel localement convexe séparé, limite inductive dénombrable d'espaces métrisables de Baire* (F_p) *par des applications linéaires* f_p *, tels que*

$$F = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} f_p(F_p) \quad .$$

Si u *est une application linéaire de* E *dans* F *, telle que tout ouvert du graphe de* u *se projette sur* E *en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors* u *est une application continue de* E *dans* F .

Démonstration. - Soit Φ le graphe de u dans $E \times F$, on pose

$$\Phi_p = \Phi \cap [E \times f_p(F_p)] \quad ,$$

et on désigne par φ_p , l'injection canonique de Φ_p dans Φ . Si $f_p(F_p)$ est muni de la topologie image de celle de F_p , et si Φ_p est muni de la topologie induite par la topologie produit de celle de E et de celle de $f_p(F_p)$ définie précédemment, on peut déduire que φ_p est une application continue de Φ_p dans Φ, que Φ, muni de la topologie restriction de celle de $E \times F$, est limite inductive des Φ_p par les injections φ_p, et que

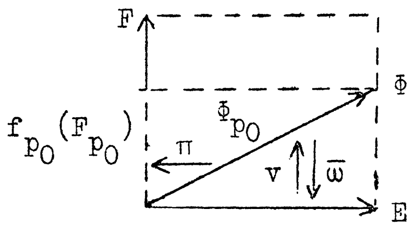
$$\Phi = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \varphi_p(\Phi_p) \quad .$$

De plus, comme les (F_p) sont métrisables et de Baire, il en est de même des (Φ_p).

Soient v l'application de E sur Φ définie par : $x \to v(x) = (x , u(x))$, et $\overline{\omega}$ l'application de Φ sur E définie par : $(x , u(x)) \to x$. $\overline{\omega}$ est continue et surjective, et les espaces E et Φ vérifient les conditions du lemme 2.1.4, par suite $\overline{\omega}$ est un homomorphisme, et donc $v = \overline{\omega}^{-1}$ est continue.

D'après le lemme 2.1.3, on peut alors déduire qu'il existe un entier p_0 tel que $v(E) = \Phi$ soit contenu dans Φ_{p_0}, et, comme Φ_{p_0} est de Baire, il existe une application linéaire continue v_{p_0} de E dans $\Phi_{p_0} = \Phi$ telle que $v = \varphi_{p_0} \circ v_{p_0}$.

Soit π la projection de Φ_{p_0} sur $f_{p_0}(F_{p_0})$, π est une application continue, et par suite $u = \pi \circ v_{p_0}$ est aussi une application continue.



LEMME 2.2.1. - Soit E un espace vectoriel localement convexe séparé, limite inductive (de puissance quelconque) d'espaces vectoriels topologiques (E_α) métrisables et de Baire par des applications linéaires (e_α) ; et soit F un espace vectoriel localement convexe séparé vérifiant :

"Si u_α est une application de E_α dans F linéaire, et si tout ouvert du graphe de u_α se projette sur E_α en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u_α est continue".

Si u est une application de E dans F, telle que tout ouvert du graphe de u se projette sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u est continue.

Démonstration. - Pour tout α, on considère l'application $u_\alpha = u \circ e_\alpha$ de E_α dans F. Comme e_α est continue, tout ouvert du graphe H_α de u_α se projette sur E_α en un ensemble vérifiant la condition de Baire. Par suite, $u \circ e_\alpha = u_\alpha$

est une application continue de E_α dans F .

Comme E est muni de la topologie limite inductive des E_α , on peut en déduire que u est continue de E dans F .

THÉORÈME 2.2. - Soit E un espace vectoriel limite inductive (de puissance quelconque) d'espaces vectoriels topologiques (E_α) métrisables et de Baire par des applications linéaires. Soit F un espace limite projective (de puissance quelconque) d'espaces (F_ε) , les espaces (F_ε) étant des limites inductives dénombrables d'espaces $(F_\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{N}}$ vectoriels topologiques métrisables et de Baire par des applications (f_ε^p) ; on suppose que, pour tout ε , $F_\varepsilon = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} f_\varepsilon^p(F_\varepsilon^p)$.

Si u est une application linéaire de E dans F , telle que tout ouvert du graphe de u se projette sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u est une application continue de E dans F .

Démonstration. - Elle est immédiate en utilisant successivement le théorème 2.1, le lemme 2.1.2, et le lemme 2.2.1.

(Texte reçu le 7 janvier 1969)

Mlle Michèle DEHEN
Ass. Fac. Sc. Paris
11 bis rue du Lion
93 - BONDY