

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

HENRI SKODA

FRANÇOIS ROUVIÈRE

Opérateurs singuliers de convolution

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A4, p. A1-A9

http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A5_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS SINGULIERS DE CONVOLUTION

par Henri SKODA et François ROUVIÈRE

1. Introduction.

On se propose d'étudier ici quelques propriétés d'une classe particulière d'opérateurs de convolution de L^2 dans L^2 ($L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$, pour la mesure de Lebesgue). Nous commençons par quelques résultats généraux.

LEMME. - Une fonction mesurable g opère par multiplication dans L^2 (i. e. $\forall f \in L^2$, $g.f \in L^2$ et $\|g.f\|_2 \leq C\|f\|_2$) si, et seulement si, g appartient à L^∞ . Alors sa norme d'opérateur est $\|g\|_\infty$.

Démonstration.

Il est évident que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire :

Soit $A_M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |g(x)| > M\}$; A_M est mesurable. Si $\text{mes } A_M > 0$, il existe un compact $K_M \subset A_M$ de mesure > 0 . Soit

$$f_M = \frac{1}{\sqrt{\text{mes } K_M}} \varphi_{K_M},$$

où φ_{K_M} est la fonction caractéristique de K_M . On a

$$\|f_M\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad M \leq \|g.f_M\|_2 \leq C.$$

Donc

$$\text{mes } A_M > 0 \implies M \leq C.$$

Par suite, $g \in L^\infty$

Evidemment, la norme d'opérateur $\|g\|$ est inférieure à $\|g\|_\infty$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$; prenons $M = \|g\|_\infty - \varepsilon$. Alors $\text{mes } A_M > 0$, par définition de $\|g\|_\infty$, donc

$$M = \|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|g.f_M\|_2;$$

par suite, $\|g\| = \|g\|_\infty$.

PROPOSITION (¹). - Soit S une distribution tempérée. La convolution par S opère dans L^2 si, et seulement si, $\hat{S} \in L^\infty$. La norme d'opérateur est alors $\|\hat{S}\|_\infty$.
 ("opère dans L^2 " veut dire "se prolonge en un opérateur continu de L^2 dans L^2 ", c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathcal{O}, \quad S * f \in L^2 \text{ et } \|S * f\|_2 \leq C \|f\|_2 .)$$

Démonstration. - Si la convolution par S opère dans L^2 , on a

$$\forall g \in \hat{\mathcal{O}}, \quad \hat{S} \cdot g \in L^2 \text{ et } \|\hat{S} \cdot g\|_2 \leq C \|g\|_2 .$$

Donc \hat{S} est une fonction mesurable (elle est en effet mesurable au voisinage de tout point, car, pour tout x_0 , il existe une fonction $g \in \hat{\mathcal{O}}$ ne s'annulant pas au voisinage de x_0). $\hat{\mathcal{O}}$ étant dense dans L^2 , on est ramené à la situation du lemme

2. Noyaux de Calderón-Zygmund.

DÉFINITION. - On appelle noyau de Calderón-Zygmund, une fonction $k : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ positivement homogène de degré $-n$, dont la restriction à la sphère unité Σ est dans $L^2(\Sigma)$, avec $\int_{\Sigma} k \, d\sigma = 0$.

Nous reprenons ici les notations de l'exposé 2 : Si E est un espace de fonctions sur Σ , et s un nombre réel, on note G_E^s l'espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, positivement homogènes de degré s , et dont la restriction à Σ appartient à E ; si $E \subset L^1(\Sigma)$, on note $\overset{0}{G}_E^s$ le sous-espace de G_E^s formé des fonctions d'intégrale nulle sur Σ .

On note donc $\overset{0}{G}_{L^2}^{-n}$ l'espace des noyaux de Calderón-Zygmund. Soit

$$k_{\varepsilon, \eta}(x) = \begin{cases} k(x), & \text{si } \varepsilon \leq |x| < \eta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle les résultats suivants (exposé n° 2) :

THÉORÈME 1.

1° $\hat{k}_{\varepsilon, \eta}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vers une fonction \hat{k} , lorsque

(¹) On prend ici la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x, \xi)} f(x) \, dx .$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ et $\eta \rightarrow \infty$.

2° Il existe $C > 0$ tel que $|\hat{k}_{\varepsilon, \eta}(\xi)| \leq C$, si $\xi \neq 0$, $0 < \varepsilon \leq \eta$.

3° $|\hat{k}(\xi)| \leq C$ pour $\xi \neq 0$, et $\hat{k} \in \overset{\circ}{C}{}^0_{L^\infty}$.

THEOREME 2.

1° Soit $f \in \mathcal{S}$;

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int k_{\varepsilon, \eta} \cdot f \, dx$$

existe ;

2° Cette limite définit une distribution tempérée vpk ,

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad \langle \text{vpk}, f \rangle = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int k_{\varepsilon, \eta} \cdot f \, dx ;$$

3° $\widehat{\text{vpk}} = \hat{k}$ (égalité dans \mathcal{S}').

THEOREME 3. - L'application $k \mapsto \hat{k}$ est une bijection ;

$$\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty} \rightarrow \overset{\circ}{G}{}^0_{C^\infty}.$$

3. Opérateurs singuliers de convolution.

THEOREME. - Soit $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{L^2}$. Pour tout $f \in L^2$, $k_{\varepsilon, \eta} \star f$ converge dans L^2 , lorsque $\eta \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. Soit $\underline{K}f$ la limite ; \underline{K} est un opérateur continu de L^2 , et

$$\widehat{\underline{K}f} = \hat{k} \cdot \hat{f}.$$

Démonstration. - Comme $k_{\varepsilon, \eta} \in L^1$, on a

$$k_{\varepsilon, \eta} \star f \in L^2 \quad \text{et} \quad \widehat{k_{\varepsilon, \eta} \star f} = \hat{k}_{\varepsilon, \eta} \cdot \hat{f}.$$

Par ailleurs $\hat{k} \in L^\infty$, donc $\hat{k} \cdot \hat{f} \in L^2$; soit $g \in L^2$ telle que $\hat{g} = \hat{k} \cdot \hat{f}$. On a

$$\|g - k_{\varepsilon, \eta} \star f\|_2 = \int |\hat{k} - \hat{k}_{\varepsilon, \eta}| \cdot |\hat{f}|^2 \, dx ;$$

les fonctions à intégrer sont majorées par Cte $|\hat{f}|^2$ et convergent vers 0 simplement presque-partout. Le théorème de Lebesgue donne donc

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} k_{\varepsilon, \eta} \star f = g \quad \text{dans } L^2, \quad \text{avec } \hat{g} = \hat{k} \cdot \hat{f}.$$

Enfin $\|\underline{Kf}\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = \|\hat{k} \cdot \hat{f}\|_2 \leq \|\hat{k}\|_\infty \|f\|_2$; et il résulte du lemme du paragraphe 1 que $\|\underline{K}\| = \|\hat{k}\|_\infty$.

Lien avec vpk . - Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, on a $\underline{Kf} = \text{vpk} \star f$.

En effet, $\text{vpk} \star f \in \mathcal{S}'$ et $\widehat{\text{vpk} \star f} = \widehat{\text{vpk}} \cdot \hat{f} = \hat{k} \cdot \hat{f} = \widehat{\underline{Kf}}$ (théorème 2). On peut aussi remarquer que

$$\text{vpk} \star f(x) = \langle \text{vpk}_y, f(x-y) \rangle = \lim_{\varepsilon, \eta} k_{\varepsilon, \eta} \star f(x)$$

en tout point x ; or les seconds membres convergent dans L^2 vers \underline{Kf} , donc

$$\text{vpk} \star f \in L^2 \quad \text{et} \quad \text{vpk} \star f = \underline{Kf} .$$

DEFINITION . - On appelle opérateur singulier de convolution, un opérateur de L^2 dans L^2 de la forme

$$Hf(x) = a \cdot f(x) + \underline{Kf}(x) \quad \text{avec} \quad a \in \underline{\mathbb{C}} , \quad k \in G_{L^2}^{0-n} .$$

On a donc $\widehat{Hf} = (a + \hat{k}) \cdot \hat{f}$, et on appelle symbole de H la fonction $\sigma(H) = a + \hat{k} \in G_{L^\infty}^0$;

$$\widehat{Hf} = \sigma(H) \cdot \hat{f} .$$

Evidemment, $\sigma(H) = 0$ entraîne $H = 0$; et, d'après le lemme du paragraphe 1, on a $\|H\| = \|\sigma(H)\|_\infty$.

4. Propriétés des opérateurs singuliers de convolution.

THEOREME . - Les opérateurs singuliers de convolution à symboles C^∞ forment une sous-algèbre \mathfrak{a} commutative, unitaire, involutive de $\mathcal{L}(L^2)$. L'application σ est un isomorphisme isométrique d'algèbres normées, unitaires, involutives de \mathfrak{a} sur $G_{C^\infty}^0$.

(Dans $G_{C^\infty}^0$, on prend la multiplication habituelle et la norme $\|\cdot\|_\infty$.)

En particulier :

$$\sigma(H_1 \circ H_2) = \sigma(H_1) \sigma(H_2) , \quad \text{pour } H_1, H_2 \in \mathfrak{a} ;$$

$$\sigma(H^*) = \overline{\sigma(H)} , \quad \text{pour } H \in \mathfrak{a} , \quad H^* \text{ désignant l'adjoint dans } L^2 ;$$

$$\text{Si } \sigma(H) \text{ ne s'annule pas, } H \text{ est inversible dans } \mathfrak{a} \text{ et } \sigma(H^{-1}) = \frac{1}{\sigma(H)} .$$

Démonstration . - σ est bijective, d'après le théorème 3 : Si $f \in G_{C^\infty}^0$, il existe $k \in G_{C^\infty}^{-n}$ et $a \in \underline{\mathbb{C}}$, uniques, tels que $a + \hat{k} = f$ (on doit prendre

$$a = \int_{\Sigma} f \, d\sigma).$$

Si $H_1 \in \mathfrak{a}$ et $H_2 \in \mathfrak{a}$, on a, pour $f \in L^2$,

$$\widehat{H_1 \circ H_2 f} = \sigma(H_1) \sigma(H_2) \hat{f}.$$

Par suite, \mathfrak{a} est une algèbre, et σ un homomorphisme.

Enfin, si $H \in \mathfrak{a}$, $f \in L^2$, $g \in L^2$,

$$(\widehat{H^* f}, \hat{g}) = (H^* f, g) = (f, Hg) = (\hat{f}, \widehat{Hg}) = (\overline{\sigma(H)} \hat{f}, \hat{g}),$$

donc $\widehat{H^* f} = \overline{\sigma(H)} \hat{f}$. Par suite, \mathfrak{a} est involutive, et $\sigma(H^*) = \overline{\sigma(H)}$.

COROLLAIRE. - La fermeture de \mathfrak{a} dans $\mathcal{L}(L^2)$ est une C^* -algèbre isomorphe à $C(\Sigma)$.

En effet, $C(\Sigma)$ est l'adhérence de $C^\infty(\Sigma)$ dans $L^\infty(\Sigma)$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

Dans la suite de ce paragraphe, H désigne un opérateur singulier de convolution ($\sigma(H) \in G_{L^\infty}^0$).

PROPOSITION. - Pour $s \geq 0$, H est un opérateur continu de H^s dans H^s (2), et pour $f \in H^s$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq s$, $HD^\alpha f = D^\alpha Hf$ (3).

Démonstration. - Si $f \in H^s$, on a immédiatement

$$\|Hf\|_{H^s} \leq \|\sigma(H)\|_\infty \|f\|_{H^s}.$$

De plus

$$\widehat{HD^\alpha f} = \sigma(H) \xi^\alpha \hat{f} = D^\alpha \widehat{Hf}.$$

PROPOSITION. - Si H applique L^2 dans H^s , pour un $s > 0$, H est nul.

Démonstration. - Comme H est un opérateur continu de L^2 dans L^2 , ce serait alors un opérateur continu de L^2 dans H^s (théorème du graphe fermé), d'où

$$\|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \sigma(H).f\|_2 \leq C \|f\|_2, \quad \text{pour } f \in L^2.$$

(2) $H^s = \{u \in \mathcal{S}' \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2\}$; $\|u\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\|_2$.

(3) $D_j = -i\partial/\partial x_j$.

Par la lemme du paragraphe 1, il en résulterait que

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \sigma(H) \in L^\infty ;$$

d'où $\sigma(H)$ est nul, puisque homogène de degré 0 .

PROPOSITION. - Si H est un opérateur compact de L^2 dans L^2 , il est nul.

La proposition résulte, par transformation de Fourier, du lemme suivant :

LEMME. - Soit $g \in L^\infty$. Si l'application

$$f \mapsto g.f ,$$

$$L^2 \rightarrow L^2 ,$$

est compacte, $g = 0$.

Démonstration. - Soient $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \{x \mid |g(x)| > \varepsilon\}$, φ_ε sa fonction caractéristique, et $L_\varepsilon^2 = \{f \in L^2 \mid f = 0 \text{ sur } [A_\varepsilon]\}$, muni de la topologie induite par L^2 .

La composée des applications

$$f \mapsto g.f \mapsto g\varphi_\varepsilon.f ,$$

$$L^2 \rightarrow L^2 \rightarrow L^2 ,$$

respectivement compacte et continue, est compacte ; donc aussi l'application

$$f \mapsto g\varphi_\varepsilon.f = g.f ,$$

$$L_\varepsilon^2 \rightarrow L_\varepsilon^2 .$$

Or, cette dernière est inversible dans $\mathcal{L}(L_\varepsilon^2)$, car $|\frac{1}{g(x)}| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ pour $x \in A_\varepsilon$. Par suite, L_ε^2 est de dimension finie (4), donc $\text{mes } A_\varepsilon = 0$. En effet, si $\text{mes } A_\varepsilon > 0$, il existe une suite infinie de compacts disjoints de mesure > 0 , contenus dans A_ε , et leurs fonctions caractéristiques sont indépendantes.

5. Opérateurs de Riesz.

On applique ici la théorie précédente aux noyaux $\gamma_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, qui sont dans G^{o-n} . La constante γ_n ne dépend que de n et sera précisée plus loin. Soit R_j

(4) Cf. Exposé n° 1.

($1 \leq j \leq n$) l'opérateur singulier de convolution obtenu (opérateur de Riesz) :

$$R_j f(x) = \gamma_n \lim_{\varepsilon, \eta} \int_{\varepsilon \leq |x-y| < \eta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy \quad (f \in L^2).$$

On a $\sigma(R_j) = \frac{\xi_j}{|\xi|} \in \overset{\circ}{G} \overset{\circ}{C}^\infty$, et

$$\widehat{R_j f(\xi)} = \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \quad (f \in L^2).$$

Démonstration. - Cela résulte d'une formule signalée à propos des polynômes harmoniques (exposé n° 3), mais on peut aussi le déduire de l'expression de \hat{k} donnée dans le théorème 4 (exposé n° 2),

$$\hat{k}(\theta) = \int_{\Sigma} (\log \frac{1}{|\langle \theta, \theta' \rangle|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \langle \theta, \theta' \rangle) k(\theta') d\sigma(\theta').$$

Or k est impair,

$$\begin{aligned} \hat{k}(\theta) &= -i \frac{\pi}{2} \int_{\Sigma} (\operatorname{sgn} \langle \theta, \theta' \rangle) k(\theta') d\sigma(\theta') \\ &= -i\pi \int_{\Sigma^+(\theta)} k(\theta') d\sigma(\theta'), \end{aligned}$$

où $\Sigma^+(\theta) = \{\theta' \in \Sigma \mid \langle \theta, \theta' \rangle \geq 0\}$.

Soit e_j le j -ième vecteur de la base canonique de R^n . Ici $k(\theta') = \gamma_n \langle e_j, \theta' \rangle$ donc

$$\hat{k}(\theta) = -i\pi\gamma_n \int_{\Sigma^+(\theta)} \langle e_j, \theta' \rangle d\sigma(\theta').$$

Soit $\{z_1, \dots, z_n\}$ une base orthonormée de R^n , avec $z_1 = \theta$. Comme

$$\langle e_j, \theta' \rangle = \sum_{\ell} \langle e_j, z_{\ell} \rangle \langle z_{\ell}, \theta' \rangle,$$

on a

$$\hat{k}(\theta) = -i\pi\gamma_n \sum_{\ell} \langle e_j, z_{\ell} \rangle \int_{\Sigma^+(z_1)} \langle z_{\ell}, \theta' \rangle d\sigma(\theta').$$

Si $\ell \neq 1$, l'intégrale est nulle par symétrie par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à z_{ℓ} (qui conserve $\Sigma^+(z_1)$). Il reste

$$\begin{aligned} \hat{k}(\theta) &= -i\pi\gamma_n \langle e_j, z_1 \rangle \int_{\Sigma^+(z_1)} \langle z_1, \theta' \rangle d\sigma(\theta') \\ &= C_n \langle e_j, \theta \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{k}(\xi) = C_n \frac{\xi_j}{|\xi|};$$

le calcul donne $C_n = -i\pi v_{n-1} \gamma_n$ (v_{n-1} = volume de la sphère unité de \mathbb{R}^{n-1});
on prend donc $\gamma_n = \frac{1}{-i\pi v_{n-1}}$, dans la définition des opérateurs de Riesz.

PROPRIÉTÉS (vérification immédiate par transformation de Fourier).

1° R_j est auto-adjoint dans L^2 .

2° $\sum_{j=1}^n R_j^2 = \text{Id}_{L^2}$.

3° Les R_j commutent entre eux.

4° $D_j R_k = R_k D_j = D_k R_j : H^1 \rightarrow L^2$.

5° Soit $\Lambda = \sum_{j=1}^n D_j R_j = \sum_{j=1}^n R_j D_j : H^1 \rightarrow L^2$. On a $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$ pour $f \in H^1$,

d'où $\widehat{\Lambda^2 f}(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$ pour $f \in H^2$, c'est-à-dire

$$\Lambda^2 = -\Delta : H^2 \rightarrow L^2.$$

6° $D_j = R_j \Lambda : H^1 \rightarrow L^2$.

7° Λ commute aux R_j , donc

$$D_j D_k = R_j R_k \Lambda : H^2 \rightarrow L^2.$$

Si $f \in \mathcal{S}'$ et $\Delta f \in H^s$ ($s \geq 0$), alors toutes les dérivées secondes de f sont dans H^s (en effet, les R_j opèrent dans H^s).

6. Application.

THÉOREME. - Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants, homogène d'ordre m . Il existe un opérateur singulier de convolution H tel que

$$P = H\Lambda^m : H^m \rightarrow L^2.$$

Démonstration. - Comme $D_j = R_j \Lambda$, on a

$$P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha R^\alpha \Lambda^m,$$

d'où le théorème, avec

$$\sigma(H) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} \frac{\xi^{\alpha}}{|\xi|^m} = \frac{P(\xi)}{|\xi|^m}.$$

En particulier, si P est elliptique ($P(\xi) \neq 0$ pour ξ réel $\neq 0$), $\sigma(H)$ ne s'annule pas, donc H est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$.

L'équation $Pf = g$, $g \in L^2$, $f \in H^m$, équivaut à $\Lambda^m f = H^{-1} g$. Si m est pair, $m = 2p$, on se ramène à $\Delta^p f = (-1)^p H^{-1} g$, c'est-à-dire à résoudre l'équation de Laplace.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).
 - [2] CALDERÓN (Alberto P.) and ZYGMUND (Antoni). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.
-