

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PHILIPPE COURRÈGE

**Énoncé de quelques résultats sur les opérateurs intégraux
singuliers dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et dans $H^m(\mathbb{R}^n)$**

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A0, p. A1-A7

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A1_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉNONCÉ DE QUELQUES RÉSULTATS
SUR LES OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS DANS $L^2(\mathbb{R}^n)$ ET DANS $H^m(\mathbb{R}^n)$

par Philippe COURRÈGE

L'objectif des exposés A.1 à A.9 du présent séminaire sera de présenter des démonstrations (en restant au niveau le plus élémentaire possible) pour les résultats énoncés ci-dessous (voir la remarque finale de l'exposé).

1. Notations. Noyaux de classe C_β^∞ .

Pour chaque k entier ≤ 0 et β réel ≥ 0 , on désignera par G_β^k l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et à valeurs complexes telles que:

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x, \cdot)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et positivement homogène de degré k ;

(ii) Pour chaque indice de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction

$$(x, z) \rightarrow \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} h(x, z)$$

est de classe C_b^β ⁽¹⁾ sur

$$\mathbb{R}^n \times \{z \mid z \in \mathbb{R}^n \text{ et } |z| > \rho\}$$

pour tout $\rho > 0$.

On note que G_β^k est une algèbre sur le corps des complexes pour les opérations naturelles.

On désignera par G_β^{0k} le sous-espace de G_β^k formé des fonctions $h \in G_\beta^k$ telles que, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(1) \quad \int_{\Sigma_n} h(x, \theta) \sigma_n(d\theta) = 0,$$

où σ_n désigne la mesure superficielle euclidienne sur la sphère unité Σ_n de $\mathbb{R}^n$.

(1) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on notera $C_b^\beta(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes sur Ω de classe $C^{[\beta]}$ ($[\beta]$ partie entière de β) pour lesquelles toutes les dérivées d'ordre $\leq [\beta]$ sont bornées, et les dérivées d'ordre $[\beta]$ satisfont une condition de Hölder d'exposant $\beta - [\beta]$ uniforme sur Ω .

DÉFINITION 1. - Les noyaux-fonction sur R^n de la forme,

$$N(x, y) = h(x, x - y) \quad (x \neq y) \quad \text{où } h \in G_{\beta}^{-n},$$

seront appelés noyaux singuliers de classe C_{β}^{∞} sur R^n .

(G_{β}^{-n} est la classe C_{β}^{∞} introduite par CALDERÓN-ZYGMUND dans [4], p. 902, et par SEELEY dans [8], p. 660 ; voir aussi CALDERÓN [3], p. 68, et le Séminaire Cartan-Schwartz [9], exposé n° 9.)

2. Transformation de Fourier pour les fonctions de H_{β}^{-n} (voir exp. A.2 et A.3).

LEMME 1.

1° Soit h une fonction de G_{β}^{-n} (§ 1). Pour chaque $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$,

$$(2) \quad \hat{h}(x, \xi) = \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ A \uparrow \infty}} \int_{\varepsilon \leq |z| \leq A} e^{-i\langle z, \xi \rangle} h(x, z) dz$$

existe dans $\mathbb{C}$; et la fonction $\hat{h}$, ainsi définie, appartient à G_{β}^{00} .

2° Inversement, pour toute fonction $\sigma \in G_{\beta}^{00}$, il existe une fonction $h \in G_{\beta}^{-n}$ et une seule telle que :

$$\hat{h} = \sigma.$$

(Voir AGMON [1], lemme 11.2, p. 153, et CALDERÓN [3], p. 27, pour le cas où h ne dépend pas de x , et CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 3, p. 913, pour le cas général.)

3. Noyaux singuliers de classe C_{β}^{∞} opérant en valeur principale dans L^2 et dans H^m (voir exp. A.4, A.5 et A.6).

THÉORÈME 1. - Soient β réel ≥ 0 , a une fonction complexe de classe C_{β}^{∞} sur R^n , et $h \in G_{\beta}^{-n}$ (§ 1).

Pour $\varepsilon > 0$, $x \in R^n$ et $f \in L^2 = L^2(R^n)$, on pose :

$$(3) \quad H_{\varepsilon} f(x) = a(x) f(x) + \int_{|z| \geq \varepsilon} h(x, z) f(x - z) dz \quad (2).$$

Alors,

(a) Pour chaque $f \in L^2$, $H_{\varepsilon} f \in L^2$ pour tout $\varepsilon > 0$, et $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_{\varepsilon} f$ existe

(2) Cette intégrale est absolument convergente, en vertu de l'inégalité de Schwartz.

dans L^2 , on désigne par Hf cette limite.

(b) $f \rightarrow Hf$ est un opérateur linéaire borné de L^2 dans L^2 ; plus précisément, il existe un nombre $A > 0$ (ne dépendant que de n) tel que, pour $f \in L^2$,

$$(4) \quad \|Hf\|_2 \leq \|f\|_2 A \sup_{\substack{|z|=1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} (|a(x)| + |h(x, z)|).$$

(c) L'opérateur H applique continûment $H^m = H^m(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout entier $m \geq 0$ tel que :

$$(5) \quad 0 \leq m \leq \beta.$$

(d) L'opérateur H applique continûment $L^2 \cap C_b^\beta$ dans $L^2 \cap C_b^\beta$ si $0 < \beta < 1$, et $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$ dans lui-même si $\beta > 0$ ⁽³⁾.

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 2, p. 909, et aussi CALDERÓN [3], § 8, p. 57, et MIKHLIN [7], § 25, p. 119.)

4. Symbole des opérateurs intégraux singuliers de type C_β^∞ (voir exp. A.4 et A.5).

DÉFINITION 2. - On appellera opérateur intégral singulier de type C_β^∞ , tout opérateur linéaire borné H de L^2 dans L^2 de la forme

$$Hf = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_\varepsilon f \quad (f \in L^2),$$

où $H_\varepsilon f$ est défini par la relation (3) à partir de $a \in C_b^\beta(\mathbb{R}^n)$ et $h \in G_\beta^{0-n}$. On notera $CZ_\beta^0(\mathbb{R}^n)$ (ou CZ_β^0) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ formé de ces opérateurs ⁽⁴⁾.

On note que a et h sont déterminés de façon unique par l'opérateur H à cause de la relation :

$$(6) \quad Hf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x, x+y) f(y) dy$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $f \in L^2 \cap C_b^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) tels que $x \notin \text{Supp } f$.

DÉFINITION 3. - Si H est l'opérateur intégral singulier de type C_β^∞ associé au couple $(a, h) \in C_b^\beta \times G_\beta^{0-n}$, on pose,

⁽³⁾ Voir la remarque finale de cet exposé.

⁽⁴⁾ CZ_β^0 n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2, L^2)$; voir le § 6.

$$(7) \quad \sigma_H(x, \xi) = a(x) + \hat{h}(x, \xi) \quad (x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad (5).$$

La fonction σ_H ainsi définie est appelée le symbole de l'opérateur H . (Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], définition 2, p. 913.)

Cela étant, pour chaque $\beta \geq 0$:

THÉORÈME 2.

(a) L'application $H \rightarrow \sigma_H$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de CZ_β^0 sur H_β^0 .

(b) Pour tout $H \in CZ_\beta^0$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{O}$,

$$(8) \quad Hf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \sigma_H(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (6).$$

(c) Pour tout $H \in CZ_\beta^0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$(9) \quad \sigma_H(x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda \langle x, \xi \rangle} H(fe^{i\lambda \langle \cdot, \xi \rangle})(x),$$

où $f \in \mathcal{O}$ est telle que $f = 1$ au voisinage de x .

(d) Il existe une constante $A > 0$ (ne dépendant que de n) telle que, pour tout $H \in CZ_\beta^0$ et $f \in L^2$,

$$(10) \quad \|Hf\|_2 \leq AM_H \|f\|_2,$$

où

$$M_H = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, |z| \geq 1 \\ |\alpha| \leq 2n}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \sigma_H(x, z) \right|.$$

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 3, p. 913, en ce qui concerne les propriétés (a) et (d); et HÖRMANDER [5], § 3, en ce qui concerne (b) et (c).)

5. Composé de deux opérateurs intégraux singuliers de type C_β^∞ (voir exp. A.7 et A.8).

THÉORÈME 3. - Soient H_1 et H_2 des opérateurs de CZ_β^0 avec $\beta > 1$, et H l'unique opérateur de CZ_β^0 tel que :

(5) Voir le lemme 1 (§ 2).

(6) $\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f , définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

$$\sigma_H = \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} \quad (7).$$

Alors, l'opérateur $H_1 H_2 - H$ applique $(8) H^m$ dans H^{m+1} pour $0 \leq m < [\beta]$; en particulier $H_1 H_2 - H$ applique L^2 dans H^1 .

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 5, p. 914, et CALDERÓN [3], théorème 4, p. 71, ainsi que SEELEY [8], théorème 3, p. 678, et le cours de F. TRÈVES, 1965/66.)

6. Algèbres d'opérateurs intégraux singuliers (voir exp. A.7 et A.8).

LEMME 2. - Soit $H \in CZ_\beta^0$ avec $\beta > 1$. Si H applique L^2 dans H^1 , alors H est nul.

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], lemme, p. 918, et le cours de F. TRÈVES, 1965/66.)

Cela étant, nous avons la définition suivante :

DÉFINITION 4. - Pour chaque entier $m \geq 1$, on désignera par CZ_m l'ensemble des opérateurs linéaires bornés S de L^2 dans L^2 de la forme $S = H + K$, où $H \in CZ_\beta^0$ avec $\beta > m$, et où K applique continûment H^r dans H^{r+1} pour $0 \leq r < m$.

On a $CZ_m \subset CZ_1$ pour $m \geq 1$. Les éléments de CZ_1 seront appelés opérateurs intégraux singuliers.

Il résulte alors des théorèmes 2 et 3, et du lemme 2, le théorème suivant :

THÉORÈME 4.

(a) CZ_m ($m \geq 1$) est une sous-algèbre de $\mathcal{E}(L^2, L^2)$, et, pour tout $S \in CZ_1$, la décomposition $S = H + K$ (avec $H \in CZ_\beta^0$, $\beta > 1$, et K appliquant L^2 dans H^1) est unique.

(b) Pour tout $S = H + K \in CZ_1$, on pose

$$\sigma_S = \sigma_H.$$

Alors, l'application $S \rightarrow \sigma_S$ est un homomorphisme de l'algèbre CZ_1 sur l'algèbre $\Sigma_m = \bigcup_{\beta > m} G_\beta^0$ (§ 1) dont le noyau (9) est constitué par l'ensemble des opérateurs $K \in \mathcal{E}(L^2, L^2)$ appliquant continûment H^r dans H^{r+1} pour $0 \leq r < m$.

(7) Théorème 2, propriété (a).

(8) Continûment en vertu du théorème du graphe fermé.

(9) Ensemble des $S \in CZ_1$ tels que $\sigma_S = 0$.

DEFINITION 5. - Pour chaque $S \in CZ_1$, σ_S est appelé le symbole de l'opérateur S .

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 6, p. 918.)

REMARQUE. - On peut envisager aussi d'autres sous-algèbres de CZ_1 contenant CZ_m^0 ($m \geq 1$). En particulier,

- la sous-algèbre de CZ_1 engendrée par CZ_β^0 avec $\beta > m$;
- les sous-algèbres de CZ_1 formées des opérateurs S de la forme $S = H + K$, où K est l'opérateur intégral associé à un noyau-fonction $k(x, y)$ appartenant à $L_{Loc}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et ayant éventuellement certaines propriétés de régularité (continuité, différentiabilité ou caractère höldérien en dehors de la diagonale de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$).

7. Régularisation d'un opérateur intégral singulier elliptique (voir exp. A.9).

THÉOREME 5. - Soit $S \in CZ_1$ un opérateur intégral singulier tel que,

$$\sigma_S(x, \xi) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Alors, il existe un opérateur intégral singulier $T \in CZ_1$ inversible de L^2 dans L^2 et tel que,

$$(11) \quad \sigma_T \sigma_S = 1.$$

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 6, p. 918.)

APPLICATION. - Sous l'hypothèse du théorème 5, l'équation

$$Sf = g \quad (f \in L^2, \quad g \in L^2)$$

équivalent à l'équation

$$f + Kf = Tg,$$

où l'opérateur $K = TS - 1$ applique L^2 dans H^1 ; cette dernière équation étant du type de Fredholm dans L^2 , lorsque K est compact de L^2 dans L^2 (voir [6]; en particulier, le théorème 7, p. 288).

REMARQUE. - Les résultats énoncés ci-dessus sont, en fait, valables lorsqu'on remplace L^2 par L^p , et H^m par L_m^p ($1 < p < +\infty$). On se limite ici au cas où $p = 2$ qui est nettement plus simple que le cas général, afin de bien mettre en lumière l'objectif du présent séminaire d'initiation :

Extraire de la littérature existante sur ce sujet des démonstrations les plus élémentaires possibles des résultats énoncés ci-dessus dans le cas particulier où $p = 2$.

(Pour les généralisations diverses, en particulier aux opérateurs sur les variétés, voir [2], [5], [8] et [9].)

BIBLIOGRAPHIE ⁽¹⁰⁾

- [1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).
- [2] CALDERÓN (Alberto P.). - Singular integrals, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 427-465.
- [3] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Facultad de Ciencias exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).
- [4] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.
- [5] HÖRMANDER (Lars). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.
- [6] KOHN (J. J.) and NIRENBERG (L.). - An algebra of pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 269-305.
- [7] MIKHLIN (S. G.). - Multidimensional singular integrals and integral equations. - Oxford, Pergamon Press, 1965 (International Series of Monographs in pure and applied Mathematics, 83).
- [8] SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.
- [9] Séminaire Cartan-Schwartz, 16e année, 1963/64 : Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1965.
- [10] STEIN (Elias). - Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables, Cours professé à la Faculté des Sciences d'Orsay en 1966/67, rédigé par MM. Bachvan et Somen.

⁽¹⁰⁾ On trouvera, dans [2], une bibliographie très complète sur le sujet.