Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gabriel Mokobodzki
Daniel Sibony

Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 1 (1966-1967), exp. nº 5, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A5_0>

CÔNES ADAPTÉS DE FONCTIONS CONTINUES ET THÉORIE DU POTENTIEL

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

1. Introduction.

Soient Ω un espace localement compact, $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur Ω.

On dit qu'un espace vectoriel $V \subset \mathcal{C}(\Omega)$ est adapté (cf. CHOQUET [3]), s'il vérifie les conditions suivantes :

1° $V = V^+ - V^+$, où $V^+ = V \cap \mathcal{C}^+(\Omega)$;

2° Pour tout $x \in \Omega$, il existe $v \in V$, tel que $v(x) > 0$;

3° Pour tout $v \in V^+$, il existe $w \in V^+$, $w \geqslant v$, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$(x \in \complement K) \implies (v(x) \leqslant \varepsilon\, w(x)) \quad .$$

On a alors le théorème suivant (cf. aussi ARENS [1]) :

THÉORÈME (CHOQUET). - *Soit $V \subset \mathcal{C}(\Omega)$ un espace vectoriel adapté.*

Pour toute forme linéaire f sur V, positive sur V^+, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω, telle que :

(a) *Tout $v \in V$ est μ-intégrable* ;

(b) $\langle f , v \rangle = \int v \, d\mu$, $\forall\, v \in V$.

On se propose, dans le présent travail, d'étudier divers procédés de construction d'espaces adaptés, d'étudier des topologies "naturelles" (fortes et faibles) qu'on peut définir sur les espaces adaptés. Enfin, on donnera quelques applications à la théorie du potentiel et à la théorie des frontières.

Les résultats obtenus sont utilisés dans un autre travail des mêmes auteurs, sur la théorie globale du potentiel [1].

---

[1] Un index des notations et définitions figure à la fin du présent mémoire.

2. Généralités sur les espaces adaptés.

Soit Ω un espace localement compact dénombrable à l'infini.

A. Définitions. Notations.

DÉFINITION 1.

(a) Soient u et v deux fonctions numériques $\geqslant 0$ sur Ω.

Nous dirons que " u domine v à l'infini", ce qu'on notera $u \succ^{\uparrow} v$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$(x \in \complement K) \implies (v(x) \leqslant \varepsilon\, u(x)) \quad .$$

(b) Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$ sur Ω, on désigne par $o(g)$ l'ensemble des fonctions numériques f sur Ω telles que $g \succ^{\uparrow} |f|$.

De même, pour une famille P de fonctions numériques $\geqslant 0$,

$$o(P) = \bigcup_{g \in P} o(g) \quad .$$

On a immédiatement les conséquences suivantes :

(i) $o(g)$ est un espace vectoriel qui contient toutes les fonctions numériques à support compact ;

(ii) Si P est filtrant croissant, $o(P)$ est un espace vectoriel.

THÉORÈME 2. - Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$ sur Ω, $o(g)$ et $o(g) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sont des espaces vectoriels adaptés.

Démonstration. - Soit $f \in o(g)$, $f \geqslant 0$. Par hypothèse, il existe une suite croissante K_n de compacts de Ω,

$$K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \ , \qquad \Omega = \bigcup_n K_n \quad ,$$

telle que

$$(x \in \complement K_n) \implies \left(f(x) \leqslant \frac{1}{2^n}\, g(x)\right) \quad .$$

Soit alors (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}^+(\Omega)$, telle que :

(a) $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$;

(b) $\varphi_n(x) = 0$ si $x \in K_n$, $\varphi_n(x) = 1$ si $x \in \complement K_{n+1}$.

Posons alors $f' = \sum_n \varphi_n f$. On voit immédiatement que $f' \in o(g)$, et que, si f

est continue, f' est aussi continue ; enfin, par construction,

$$f \uparrow\!< f' \ .$$

COROLLAIRE 3. - Soit P une famille filtrante croissante de fonctions $\geqslant 0$ sur Ω. Alors, $o(P)$ et $o(P) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sont des espaces vectoriels adaptés.

DÉFINITION 4.

1° Soit g une fonction numérique $\geqslant 0$ sur Ω.

On dit qu'une fonction numérique f sur Ω est g-majorable, s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$|f| \leqslant \lambda g \ .$$

2° On désigne par H_g l'espace vectoriel des fonctions g-majorables, qu'on munit de la g-norme suivante : si $f \in H_g$,

$$\|f\|_g = \{\inf \lambda \ ; \ \lambda > 0 \ , \ |f| \leqslant \lambda g\} \ .$$

L'espace H_g, muni de la norme $\| \ \|_g$, est un espace de Banach ; il en est de même pour $H_g \cap \mathcal{C}(\Omega)$, si g est localement bornée.

3° Si P est une famille filtrante croissante de fonctions numériques $\geqslant 0$ sur Ω, on dira qu'une fonction numérique f sur Ω est P-majorable, s'il existe $g \in P$, telle que $f \in H_g$. De même, on posera

$$H_P = \bigcup_{g \in P} H_g \ ,$$

et H_P est un espace vectoriel.

Désignons par $\mathcal{C}_K(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques à support compact sur Ω, par $\mathfrak{M}(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon sur Ω. On munira $\mathfrak{M}(\Omega)$ de la topologie faible $\sigma(\mathfrak{M}(\Omega), \mathcal{C}_K(\Omega))$.

PROPOSITION 5. - Soit (K_α) une famille de parties de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$.

1° Il existe un plus grand espace adapté $F \subset \mathcal{C}(\Omega)$, tel que, pour tout $f \in F$ et tout K_α, l'application de K_α dans $\underset{\sim}{R}$,

$$\mu \longmapsto \int |f| \, d\mu \ ,$$

soit continue ;

2° Si la famille (K_α) est une suite (K_n) de parties compactes de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$, alors F est identique à l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, telles que, sur chaque K_n, l'application $\mu \longmapsto \int |f| \, d\mu$ soit continue.

<u>Démonstration</u>. - Remarquons que si deux espaces vectoriels adaptés F_1, $F_2 \subset \mathcal{C}(\Omega)$ ont la propriété indiquée dans 1°, l'espace vectoriel $F_1 + F_2$ la possède aussi. D'autre part, $\mathcal{C}_K(\Omega)$ est adapté et possède la propriété 1°, d'où le résultat.

Démontrons la deuxième partie de la proposition.

Soit $f \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ telle que, sur chaque K_n, l'application $\mu \longmapsto \int f\, d\mu$ soit continue.

Soit (A_n) une suite croissante de parties compactes de Ω, $A_n \subset \mathring{A}_{n+1}$, $\Omega = \bigcup_n A_n$, et soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}^+(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, telle que

$$\varphi_n(x) = 0 , \qquad \text{si } x \in A_n ,$$

$$\varphi_n(x) = 1 , \qquad \text{si } x \in \complement A_{n+1} .$$

Pour chaque compact K_m, on a

$$\inf_n \left(\sup_{\mu \in K_m} \int f\varphi_n\, d\mu\right) = 0 .$$

Par conséquent, on peut trouver une suite d'entiers $s(m , p)$ telle que :

(a) $s(m , p) \leqslant s(m , p + 1)$;
(b) $\sup_{\mu \in K_m} \int f\varphi_{s(m,p)}\, d\mu \leqslant \frac{1}{2^p}$.

Posons alors

$$n(p) = \sup_{m \leqslant p} s(m , p) ,$$

et considérons la fonction

$$f' = \sum f\varphi_{n(p)} ,$$

on a évidemment $f' \succ\!\uparrow f$, et, pour tout K_m, l'application $\mu \longmapsto \int f'\, d\mu$ est continue.

COROLLAIRE 6. - <u>Soit</u> (P_α) <u>une famille d'opérateurs</u> $\geqslant 0$ <u>de</u> $\mathcal{C}_K(\Omega)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(\Omega)$. <u>Il existe un plus grand espace adapté</u> F <u>tel que</u>

$$P_\alpha(F) \subset \mathcal{C}(\Omega) \qquad \underline{\text{pour tout}}\ \alpha .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour tout $x \in \Omega$ et tout P_α, soit $\varepsilon_x P_\alpha$ la mesure $\geqslant 0$ sur Ω définie par

$$\varphi \longmapsto P_\alpha\, \varphi(x) , \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_K .$$

On peut prendre pour K_α l'ensemble $(\varepsilon_x P_\alpha)$, $x \in \Omega$, et appliquer la proposition précédente.

COROLLAIRE 7. - Soit (P_n) une suite d'opérateurs $\geqslant 0$ de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Le sous-espace vectoriel $F \subset \mathcal{C}(\Omega)$, défini par la propriété :

$$(f \in F) \iff (P_n(|f|) \in \mathcal{C}(\Omega)) \quad ,$$

est un espace vectoriel adapté.

Démonstration. - Soit (A_n) une suite croissante de parties compactes de Ω , $A_n \subset \mathring{A}_{n+1}$, $\Omega = \bigcup_n A_n$. On applique la proposition précédente à la famille

$$K_{n,m} = (\varepsilon_x P_n)_{x \in A_m} \quad .$$

DÉFINITION 8. - Un opérateur linéaire $\geqslant 0$, U , de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, est dit itérable, si on peut définir par récurrence la suite

$$U^n \varphi = U(U^{n-1} \varphi) \quad ,$$

et si $U^n \varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$.

THÉORÈME 9. - Soit U un opérateur linéaire $\geqslant 0$, itérable, de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Il existe un plus grand espace vectoriel adapté $E \subset \mathcal{C}(\Omega)$, tel que $U(E) \subset E$.

Démonstration. - Si l'on applique le corollaire précédent à la suite (U^n) , on en conclut l'existence d'un plus grand espace vectoriel adapté $E \subset \mathcal{C}(\Omega)$, tel que

$$U^n(E) \subset \mathcal{C}(\Omega) \quad ,$$

c'est l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ telles que $U^n(|f|) \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Soit alors $f \in E^+$; on a

$$U^2(f) = U(U(f)) \in \mathcal{C}(\Omega) \quad ,$$

par suite $U(f) \in E$.

On est alors conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 10. - Soit (P_α) une famille d'opérateurs $\geqslant 0$, de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

On appelle domaine naturel de la famille (P_α) , le plus grand espace vectoriel adapté $F \subset \mathcal{C}(\Omega)$ tel que

$$P_\alpha(F) \subset \mathcal{C}(\Omega) \qquad \text{pour tout } \alpha \quad .$$

LEMME 11. - Soient $A \subset \mathfrak{M}^+(\Omega)$, g une fonction mesurable $\geqslant 0$ sur Ω , telle que, sur A , l'application $\mu \longmapsto \int g \, d\mu$ soit localement bornée. Alors, si $f \in \mathcal{C}^+(\Omega) \cap o(g)$, l'application $\mu \longmapsto \int f \, d\mu$ est continue sur A .

Démonstration. - Soient $\mu \in A$, $\lambda > 0$ majorant g au voisinage de μ (g considérée comme application de A dans $\underset{\sim}{R}$).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$(x \in \complement K) \implies (f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} g(x)) \ .$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}_K^+$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi(x) = 1$, $\forall x \in K$. On a alors

$$f - \psi f \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} g \quad \text{sur } \Omega \text{ et sur } A \ ,$$

et

$$|f - \psi f| < \varepsilon \quad \text{dans un voisinage de } \mu \ ;$$

comme ψf est continue sur A , f est aussi continue sur A .

COROLLAIRE 12. - Soit P un opérateur linéaire positif de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Soit E un espace vectoriel adapté tel que, pour tout $f \in E^+$, $P(f)$ soit localement bornée. Alors,

$$P(f) \in \mathcal{C}(\Omega) \qquad \text{pour tout } f \in E \ .$$

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le lemme précédent à l'ensemble

$$A = (\varepsilon_x P)_{x \in \Omega} \ .$$

B. Propriété de densité pour les espaces adaptés.

Soit $V = V^+ - V^+ \subset \mathcal{C}(\Omega)$ un espace vectoriel adapté, où $V^+ = V \cap \mathcal{C}^+(\Omega)$. La propriété essentielle de V est que toute forme T , linéaire sur V , $\geqslant 0$ sur V^+ , peut se représenter par une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω , telle que

$$T(v) = \int v \, d\mu \ , \qquad \forall v \in V \ .$$

Le cas où la mesure μ est unique, est caractérisé par la condition :

(1) $$\sup_{f \leqslant \psi} T(f) = \inf_{g \geqslant \psi} T(g) \qquad (\text{où } f, g \in V) \ ,$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$.

DÉFINITION 13. - On dira que l'espace adapté V a la propriété d'unicité, si pour toute forme linéaire $\geqslant 0$, T , sur V , la condition (1) est vérifiée.

Dans les applications à la théorie du potentiel, il en sera le plus souvent ainsi.

PROPOSITION 14. - Soit V un espace vectoriel adapté. V a la propriété d'unicité si, et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$ et toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω V-intégrable, on a

$$\int \varphi \, d\mu = \inf_{\substack{v \geqslant \varphi \\ v \in V}} \int v \, d\mu \quad .$$

Démonstration. - Si T est une forme linéaire $\geqslant 0$ sur V, et si V a la propriété d'unicité, la forme sous-linéaire sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$ définie par

$$\varphi \rightarrow p(\varphi) = \inf_{\substack{f \geqslant \varphi \\ f \in V}} T(f)$$

est en fait linéaire, car elle est égale à $\sup_{\substack{g \leqslant \varphi \\ g \in V}} T(g)$ (cas d'unicité dans le théorème de Hahn-Banach).

COROLLAIRE 15. - Pour toute fonction φ sur Ω, continue et V^+-majorable, et toute mesure $\mu \geqslant 0$ V-intégrable, on a

$$\int \varphi \, d\mu = \inf_{\substack{v \geqslant \varphi \\ v \in V}} \int v \, d\mu \quad .$$

Démonstration. - Soit w une fonction de V^+ qui majore $|\varphi|$. On a

$$\int \varphi \, d\mu = \int w \, d\mu + \int (\varphi - w) \, d\mu = \int w \, d\mu + \inf_{\substack{\psi \geqslant \varphi - w \\ \psi \in \mathcal{C}_K(\Omega)}} \int \psi \, d\mu$$

$$= \int w \, d\mu + \inf_{\substack{v \in V \\ v \geqslant \varphi - w}} \int v \, d\mu = \inf_{\substack{v \in V \\ v \geqslant \varphi}} \int v \, d\mu \quad .$$

Remarque. - L'espace adapté V, s'il a la propriété d'unicité, est dense dans $L^1(\mu)$, pour toute mesure $\geqslant 0$, μ, représentant une forme linéaire $T \geqslant 0$ sur V. Nous allons voir que cette propriété est, en fait, caractéristique des espaces adaptés ayant la propriété d'unicité (ce qui répondra à une question de G. CHOQUET [3]).

THÉORÈME 16. - Soient V un espace adapté, M^+ le cône des mesures $\geqslant 0$ V-intégrables (M^+ est l'ensemble des mesures représentant les formes linéaires $\geqslant 0$ sur V^+). Si, pour toute $\mu \in M^+$, V est dense dans $L^1(\mu)$, alors V a la propriété d'unicité.

Démonstration. - Soit M l'ensemble des mesures V-intégrables, $M = M^+ - M^+$. Soit H_V l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω V^+-majorables. On a $H_V \supset \mathcal{C}_K(\Omega)$.

Il suffit, pour démontrer le théorème, de prouver que V est dense dans H_V pour la topologie $\sigma(H_V , M)$, autrement dit, d'après le théorème de Hahn-Banach, que

$$(\mu \in M \; ; \; \mu(v) = 0 \, , \; \forall \, v \in V) \implies (\mu = 0) \; .$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait $v_0 \in V$, qu'on peut supposer $\geqslant 0$, tel que

$$\int v_0 \, d\mu^+ = \int v_0 \, d\mu^- = \lambda > 0 \; .$$

Soit $\theta \in L^1(|\mu|)$ telle que

$$\theta \geqslant 0 \, , \qquad \int (v_0 - \theta) \, d\mu^+ = 0 \quad \text{et} \quad \int \theta \, d\mu^- = 0 \; .$$

V étant dense dans $L^1(|\mu|)$, il existe $v \in V$ tel que

$$\int |v - \theta| \, d|\mu| < \frac{\lambda}{2} \; .$$

Donc,

$$\int (\theta - v) \, d\mu < \frac{\lambda}{2} \; .$$

Donc,

$$\int \theta \, d\mu < \frac{\lambda}{2} \; ,$$

ce qui est absurde, puisque $\int \theta \, d\mu = \lambda$.

C. Q. F. D.

Dans la démonstration, on a utilisé la remarque suivante qui est évidente :

Si, pour tout $v \in V^+$, on a $\int v \, d|\mu| = 0$, alors $\mu = 0$.

Signalons qu'un théorème analogue au précédent peut être énoncé pour les espaces vectoriels

$$V = V^+ - V^+ \subset \mathcal{C}(\Omega) \; ,$$

tels que toute forme linéaire positive sur V se représente par une mesure au moins. Si V est un tel espace, on a donc :

$$\int \varphi \, d\mu = \inf_{\substack{v \geqslant \varphi \\ v \in V}} \int v \, d\mu \, , \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall \, \mu \geqslant 0 \ V\text{-intégrable} \; .$$

3. Topologies sur les espaces ordonnés et les espaces adaptés.

Nous aurons besoin de quelques extensions du théorème de Hahn-Banach pour introduire ces topologies.

A. Espaces ordonnés abstraits.

PROPOSITION 1. - Soient E un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{R}$, E' un sous-espace vectoriel de E, P un cône convexe de E. Si $E' + P = E$, toute forme linéaire f' sur E', positive sur $E' \cap P$, se prolonge à E en une forme linéaire f qui est $\geqslant 0$ sur P.

Pour que ce prolongement soit unique, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, on ait

$$\sup_{\substack{a \in E' \\ a \leqslant x}} f'(a) = \inf_{\substack{b \in E' \\ x \leqslant b}} f(b)$$

(où la relation de préordre $\leqslant$ est celle définie dans E par le cône convexe P ; cf. CHOQUET [3]).

DÉFINITION 2. - Soient E un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{R}$, P un cône convexe de E, E' un sous-espace vectoriel de E, f une application linéaire de E' dans $\underset{\sim}{R}$, $\leqslant$ la relation de préordre associée à P.

On dira que f est relativement bornée sur E', si, pour tout $x \in P$, f est bornée sur l'ensemble

$$(- x , x) = \{y \in E' ; \ - x \leqslant y \leqslant x\} .$$

Soit E un espace vectoriel ordonné par un cône convexe $E^+ \subset E$. On peut supposer, sans restreindre la généralité de l'étude, que :

1° $E = E^+ - E^+$;

2° Les formes linéaires sur E, positives sur E^+, séparent E.

Soient L l'espace des formes linéaires relativement bornées, L^+ le cône des formes linéaires positives ; on a alors $L = L^+ - L^+$, si E est réticulé pour l'ordre défini par E^+.

DÉFINITION 3.

1° On appelle topologie de l'ordre sur E, la topologie localement convexe $\mathcal{T}_0$ la plus fine pour laquelle les ensembles bornés pour l'ordre sont bornés (c'est donc une topologie bornologique).

2° Pour tout $a \in E^+$, soit E_a l'espace vectoriel de E défini par

$$(x \in E_a) \iff (\exists\, \lambda > 0 \text{ , tel que } -a \leqslant \lambda x \leqslant a) \quad ,$$

et normé par la norme-jauge de l'ensemble convexe $B_a = [-a , +a]$.

THÉORÈME 4. - *L'espace* E , *muni de la topologie de l'ordre* $\mathcal{T}_0$, *est limite des espaces normés* E_a , *et* $\mathcal{T}_0$ *est séparée.*

Démonstration immédiate.

COROLLAIRE 5. - *Sur l'espace* E , *la topologie* $\mathcal{T}_0$ *est identique à la topologie de Mackey* $\tau(E , L)$.

Démonstration. - En effet, pour qu'une forme linéaire f sur E soit continue pour $\mathcal{T}_0$, il faut et il suffit qu'elle soit relativement bornée.

COROLLAIRE 6. - *Si* E *est réticulé, l'application* $x \to |x|$ *est uniformément continue dans* E *muni de* $\mathcal{T}_0$.

Démonstration. - Comme E est réticulé, $L = L^+ - L^+$. Soit $A \subset L$, compacte pour $\sigma(L , E)$. Comme $[0 , a]$ est borné dans E , pour tout $a \in E^+$, on a

$$p_A(a) = \sup_{\substack{0 \leqslant b \leqslant a \\ \mu \in A \\ b \in E}} \langle \mu , b \rangle < +\infty \quad .$$

L'application $x \to p_A(|x|)$ est une semi-norme sur E , et l'ensemble $B \subset L$ défini par

$$(\mu \in B) \iff (\mu \leqslant p_A)$$

est convexe compact pour $\sigma(L , E)$, et si $\mu \in A$, $\mu^+ \in B$.

On obtient ainsi une famille fondamentale de semi-normes sur E qui définit la topologie $\mathcal{T}_0$, et l'application $x \to p_A(|x|)$ est uniformément continue sur E en raison des inégalités

$$|x| \leqslant |y| + |x - y| \quad ,$$

d'où l'on tire

$$|p_A(|x|) - p_A(|y|)| \leqslant p_A(|x - y|) \quad .$$

COROLLAIRE 7.

1° *Le complété* $\hat{E}$ *de* E , *muni de* $\mathcal{T}_0$, *est un espace vectoriel réticulé (dont le cône positif est l'adhérence de* E^+ *dans* $\hat{E}$ *).*

2° La topologie de l'ordre sur $\hat{E}$ est identique à la topologie sur $\hat{E}$ obtenue par complétion de E, si $\mathcal{T}_0$ est métrisable.

Démonstration. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy pour $\mathcal{T}_0$ sur E. D'après le corollaire 6, $\lim_{\mathfrak{F}} |x|$ et $\lim_{\mathfrak{F}} (|x| - x)$ existent, dans $\hat{E}$, de sorte que

$$\hat{E} = \hat{E}^+ - \hat{E}^+ .$$

D'autre part, pour tout $y \in \hat{E}$, désignons par $|y|$ l'élément $\lim_{\mathfrak{F}} |x|$, où $\mathfrak{F}$ est le filtre des voisinages de y dans $\hat{E}$, pour $\mathcal{T}_0$.

Pour tout $\ell \in L^+$, le segment $[-\ell, \ell]$ est compact pour $\sigma(L, E)$, et la semi-norme p_ℓ :

$$x \longmapsto p_\ell(x) = \langle \ell , |x| \rangle = \sup_{-\ell \leq \ell' \leq \ell} \langle \ell' , x \rangle ,$$

est continue pour $\mathcal{T}_0$. Par suite,

$$\sup_{-\ell \leq \ell' \leq \ell} \langle \ell' , y \rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \left[\sup_{-\ell \leq \ell' \leq \ell} \langle \ell' , x \rangle \right] = \lim_{\mathfrak{F}} p_\ell(x) = p_\ell(y) ,$$

ou encore

$$\langle \ell , |y| \rangle = \sup_{-\ell \leq \ell' \leq \ell} \langle \ell' , y \rangle ,$$

ce qui montre que $\hat{E}$ est réticulé pour l'ordre défini par $\hat{E}^+$.

Si $\mathcal{T}_0$ est métrisable, toute forme linéaire sur $\hat{E}$, positive sur $\hat{E}^+$, est continue, donc la topologie de l'ordre sur $\hat{E}$, $\mathcal{T}_0$, est identique à $\tau(\hat{E}, L)$.

Enfin, on utilisera le résultat classique suivant :

Si (E , E^+), (F , F^+) sont deux espaces vectoriels ordonnés munis de la topologie de l'ordre, tout opérateur linéaire positif P de E dans F est continu.

B. Espaces ordonnés de fonctions continues.

Soient Ω localement compact dénombrable à l'infini, C un cône convexe, $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, H_C l'espace vectoriel des fonctions continues C-majorables.

L'espace H_C est réticulé ; pour tout $g \in C$, H_g est un espace de Banach pour la g-norme, par suite H_C, muni de la topologie de l'ordre, est tonnelé (et même ultrabornologique) comme limite inductive d'espaces tonnelés.

On suppose toujours que $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$, ce qui équivaut à dire :

$$\forall\, x \in \Omega , \qquad \exists\, f \in C , \quad f(x) \neq 0 .$$

On désignera par $\mathfrak{F}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions numériques sur Ω.

THÉORÈME 8.

1° Le complété de H_C , muni de la topologie de l'ordre $\mathcal{T}_0$, est tonnelé.

2° $\hat{H}_C$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$.

Démonstration. - La topologie $\mathcal{T}_0$ est plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, ce qui démontre 2°. D'autre part, H_C est tonnelé, donc aussi son complété.

DÉFINITION 9. - On dit qu'une mesure μ sur Ω est C-intégrable, si, pour tout $f \in C$ $(C \subset \mathcal{C}^+(\Omega))$,

$$\int f \, d|\mu| < +\infty \quad .$$

Remarque. - Il est immédiat que les mesures C-intégrables sont les mesures $o(C)$-intégrables.

LEMME 10. - Pour que $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ soit C-intégrable, il faut et il suffit que μ soit $o(C^+)$-intégrable.

Démonstration. - Soient $f \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, tels que,

$$\forall \, g \in o(f) \, , \qquad \int |g| \, d\mu < +\infty \quad .$$

Montrons que

$$\int f \, d\mu < +\infty \quad .$$

Sinon, il existerait une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$, telle que $\int \varphi_n \, d\mu \geqslant 2^n$.

Soit alors

$$g = \sum \frac{1}{2^n} \varphi_n \quad ,$$

on devrait avoir

$$\int g \, d\mu = \sum_n \frac{1}{2^n} \int \varphi_n \, d\mu = +\infty \quad ,$$

ce qui est contradictoire, puisque $g \in o(f)$.

PROPOSITION 11. - Soient $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe adapté, M l'espace des formes linéaires relativement bornées sur H_C .

1° Pour tout $T \in M$, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, et une seule, telle que

$$\int u \, d\mu = \langle T , u \rangle \, , \qquad \forall \, u \in H_C \quad .$$

2° En identifiant M à un sous-espace de $\mathcal{M}(\Omega)$, on a la caractérisation :

$$(\mu \in M) \iff \left(\int v \, d|\mu| < +\infty \, , \quad \forall \, v \in C\right) \quad .$$

Démonstration.

1° Le cône C étant adapté, la mesure μ représentant $T \in M$, s'obtient comme la restriction de T à $\mathcal{C}_K(\Omega)$, elle est donc unique.

2° Si $T \in M^+$, μ la mesure $\geqslant 0$ représentant T, on a

$$\int v \, d\mu < +\infty , \qquad \forall \; v \in C .$$

Inversement, si $\mu \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, et $\int v \, d\mu < +\infty$, $\forall \; v \in C$, alors μ définit un élément de M^+.

LEMME 12. - Soient $g \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, H_g l'espace des fonctions continues g-majorables.

Toute forme linéaire T, $\geqslant 0$ sur H_g, est limite faible de mesures $\geqslant 0$ à support compact contenu dans l'ouvert $\{g > 0\}$.

Démonstration. - On peut se ramener au cas où $g \equiv 1$. Soit $\hat{\Omega}$ le compactifié de Čech de Ω. La forme linéaire T s'identifie à une mesure $\geqslant 0$ sur $\hat{\Omega}$, et comme Ω est un ouvert partout dense dans $\hat{\Omega}$, on en déduit le résultat.

Le théorème qui suit peut être considéré comme le théorème fondamental qui justifie l'emploi des espaces adaptés.

THÉORÈME 13. - Soient $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe adapté, H_C et M, comme dans la proposition précédente.

Pour toute partie $A \subset M$, simplement bornée sur H_C, et tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur A, il existe une mesure μ C-intégrable, donc $\mu \in M$, telle que

$$\forall \; v \in H_C , \qquad \int v \, d\mu = \lim_{\mathcal{U}} \int v \, d\nu .$$

Démonstration. - L'espace H_C est tonnelé, donc A est faiblement relativement compacte dans M muni de $\sigma(M , H_C)$ et $M \subset \mathfrak{M}(\Omega)$.

PROPOSITION 14. - Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Toute forme linéaire $\geqslant 0$ sur H_C se représente par une mesure $\geqslant 0$ sur Ω ;
2° $M \cap \mathfrak{M}^+(\Omega)$ est complet pour $\sigma(M , H_C)$.

Démonstration. - D'après le lemme 12, $M \cap \mathfrak{M}^+(\Omega)$ est dense dans M^+ pour $\sigma(M , H_C)$, donc 2° $\Longrightarrow$ 1°. La réciproque est immédiate.

C. Applications aux familles d'opérateurs C-bornés.

Dans ce qui suit, $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ est un cône convexe adapté.

DÉFINITION 15.

1° Soit U un opérateur linéaire positif de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathfrak{F}(\Omega)$.
On dira que U est C-borné si, pour tout $w \in C$, il existe $w' \in C$ tel que

$$Uw \leqslant w'$$

(où $Uw = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}_K^+ \\ \varphi \leqslant w}} U\varphi$).

2° Une famille (U_α) d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathfrak{F}(\Omega)$ est dite uniformément C-bornée si, pour tout $w \in C$, il existe $w' \in C$ tel que

$$U_\alpha w \leqslant w' , \qquad \forall \alpha .$$

Dans les applications à la théorie du potentiel, si l'on prend pour C le cône des potentiels continus, les opérateurs de la résolvante ou du semi-groupe associé à un noyau de Hunt, fournissent des familles naturelles d'opérateurs C-bornés ou uniformément C-bornés.

PROPOSITION 16. - Soit U un opérateur linéaire positif de H_C dans $\mathfrak{F}(\Omega)$. On suppose que U est C-borné et qu'il existe un espace vectoriel $E \subset H_C$, dense dans H_C pour $\sigma(H_C, M)$, tel que $U(E) \subset \mathcal{C}(\Omega)$. Dans ces conditions,

$$U(H_C) \subset H_C .$$

Démonstration. - Pour tout $x \in \Omega$, soit $T_x \in M$ la forme linéaire $\geqslant 0$ sur H_C définie par

$$\langle T_x , f \rangle = Uf(x) .$$

Pour un compact $K \subset \Omega$, soit $A = \{T_x\}_{x \in K}$. Comme U est C-borné, A est simplement borné dans M, donc faiblement relativement compact, puisque H_C est tonnelé. Sur l'adhérence faible $\bar{A}$ de A, les topologies $\sigma(M, H_C)$ et $\sigma(M, E)$ sont identiques, on en conclut que l'application $x \to T_x$ de K dans A est continue lorsqu'on munit A de $\sigma(M, H_C)$. Par suite, pour tout $f \in H_C$, Uf est continue et dans H_C, car U est C-borné.

COROLLAIRE 17. - Soient C un cône adapté, U un opérateur linéaire $\geqslant 0$, C-borné de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Alors, $U(H_C) \subset H_C$.

Démonstration. - Puisque C est adapté, $\mathcal{C}_K(\Omega)$ est dense dans H_C pour $\sigma(H_C , M)$, et U se prolonge en un opérateur linéaire $\geqslant 0$ de H_C dans $\mathfrak{F}(\Omega)$, qui est C-borné.

COROLLAIRE 18. - Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille uniformément C-bornée d'opérateurs linéaires $\geqslant 0$ de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$. (Les opérateurs U_α se prolongent en opérateurs linéaires $\geqslant 0$ de H_C dans $\mathfrak{F}(\Omega)$.) Soit $E \subset H_C$, dense dans H_C pour $\sigma(H_C , M)$, et soit $\mathcal{U}$ un filtre sur A tel que :

1° $\lim_{\mathcal{U}} U_\alpha \varphi = U\varphi$ existe pour tout $\varphi \in E$;

2° $\lim_{\mathcal{U}} U_\alpha \varphi = U\varphi$ est continue pour tout $\varphi \in E$.

Dans ces conditions, pour tout $f \in H_C$,

$$Uf = \lim_{\mathcal{U}} U_\alpha f$$

existe, est continue, et $Uf \in H_C$.

Démonstration. - Soit T_x^α la forme linéaire sur H_C définie par

$$\langle T_x^\alpha , f\rangle = U_\alpha f(x) , \qquad \forall f \in H_C .$$

L'ensemble $A = \{T_x^\alpha\}_\alpha$ est simplement borné, donc relativement compact pour $\sigma(M , H_C)$, et sur $\bar{A}$, les topologies $\sigma(M , H_C)$, $\sigma(M , E)$ sont identiques. On en déduit que, pour tout $f \in H_C$, $\lim_{\mathcal{U}} U_\alpha f(x)$ existe, et on conclut à l'aide de la proposition 16.

La définition suivante sera utile dans la suite.

DÉFINITION 19. - Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe. On pose

$$C_\sigma = \{u \in \mathcal{C}^+(\Omega) \; ; \; \exists\, (u_n) \subset C , \quad u = \sum_n u_n\} .$$

On dira que C est stable par sommes continues, si $C = C_\sigma$.

PROPOSITION 20. - Soit (K_α) une famille de parties de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$, compactes pour la topologie vague.

Soit

$$V = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \; ; \; \mu \to \int |f| \, d\mu \text{ continue sur } K_\alpha , \; \forall \alpha\} ,$$

alors $V = H_{V+}$ est complet pour la topologie de l'ordre.

Démonstration. - Comme H_V est bornologique, K_α est une partie équicontinue de $(H_V)'$. La proposition résulte alors d'un résultat classique de GROTHENDIECK [4] sur le complété d'un espace localement convexe.

(On a déjà montré que $\hat{H}_{V+}$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$.)

COROLLAIRE 21. - Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes compacts de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ (muni de $\sigma(\mathfrak{M}(\Omega)\ ,\ \mathcal{C}_K(\Omega))$), et soit $V \subset \mathcal{C}(\Omega)$ défini par

$$(f \in V) \iff (\mu \longmapsto \int |f|\ d\mu \text{ continue sur chaque } H_i) \ .$$

Alors $V = H_{V^+}$, et V est complet pour la topologie de l'ordre.

COROLLAIRE 22. - Supposons la famille précédente $(H_i)_{i\in I}$ dénombrable.

Alors, V est un espace de Fréchet pour la topologie de l'ordre (et V est adapté).

Démonstration. - Supposons $I = \underset{\sim}{N}$. Si $\Omega = \bigcup_n K_n$, où (K_n) est une suite fortement croissante, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\mathfrak{M}^1(K_n) \subset H_n$, et que la suite H_n est croissante.

Définissons alors la suite de semi-normes p_n sur V :

$$p_n(f) = \sup_{\mu\in H_n} \int |f|\ d\mu \ .$$

Il est clair que V muni de la topologie $\mathcal{T}_1$, définie par la famille p_n , est un espace de Fréchet, et que $\mathcal{T}_1$ est moins fine que la topologie de l'ordre $\mathcal{T}_0$ sur V . D'autre part, $V = V^+ - V^+$, donc toute forme linéaire positive (ou relativement bornée) sur V est continue pour $\mathcal{T}_1$ (NAMIOKA [9]).

Soient alors V' le dual de V muni de $\mathcal{T}_1$, M le dual de V muni de $\mathcal{T}_0$. (M est l'espace des formes linéaires relativement bornées.)

On a alors $M \subset V'$, donc

$$\mathcal{T}_1 = \tau(V\ ,\ V') \quad \text{est plus fine que} \quad \tau(V\ ,\ M) = \mathcal{T}_0 \ .$$

Par suite, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0$.

En application immédiate du corollaire précédent, le domaine naturel d'une suite (P_n) d'opérateurs positifs de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ apparaît comme un espace adapté, qui est un espace de Fréchet lorsqu'on le munit de la topologie de l'ordre.

PROPOSITION 23. - Soit $S \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe, stable par sommes continues, tel que $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_S$.

L'espace vectoriel $o(S) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est alors un espace adapté complet, métrisable pour la topologie de l'ordre.

<u>Démonstration</u>. - Rappelons que S est dit stable par sommes continues si, pour toute suite (v_n) d'éléments de S, on a

$$(v = \sum v_n \quad \text{continue}) \implies (v \in S) \quad .$$

Soit (K_n) une suite fortement croissante de compacts de Ω, $\Omega = \bigcup_n K_n$.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, on pose

$$p_n(\varphi) = \inf_{\substack{f \geqslant \varphi \\ f \in S}} (\sup_{x \in K_n} f(x)) \quad .$$

Soit $M_n \subset \mathfrak{M}^+(\Omega)$ défini par

$$(\mu \in M_n) \iff (\mu \leqslant p_n) \quad .$$

L'ensemble M_n est convexe compact, et l'on a la formule classique, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$,

$$\sup_{\mu \in M_n} \int \varphi \, d\mu = p_n(\varphi) \quad .$$

1° Pour toute $f \in o(S)$, l'application $\mu \longmapsto \int f \, d\mu$ est continue sur M_n, $\forall\, n$.

2° On va montrer que $o(S)$ est identique à l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ telles que pour tout n, l'application

$$\mu \longmapsto \int |f| \, d\mu$$

soit continue sur M_n.

Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_K^+(\Omega)$ telle que

$$\sum \varphi_n = 1 \qquad \text{et} \qquad S\varphi_n \subset \complement K_n \quad ,$$

et posons

$$r_n = \sum_{m \geqslant n} \varphi_m \quad .$$

Par application du lemme de Dini, la suite $(f.r_n)$, considérée comme fonction continue sur le compact M_p, tend uniformément vers 0. Par suite, pour tout entier p, il existe n_p tel que

$$\sup_{\mu \in M_p} (\int f r_{n_p} \, d\mu) \leqslant \frac{1}{2^p} \quad .$$

Posons alors $\psi_p = r_{n_p} - r_{n_{p+1}}$. Comme $\psi_p \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, on a

$$\inf_{\substack{g\in S\\ g\geq f\psi_p}} \left(\sup_{x\in K_p} g(x)\right) = \sup_{\mu\in M_p} \left(\int f\psi_p \, d\mu\right) .$$

Il existe donc $g_p \in S$ tel que

$$g \geq f\psi_p \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in K_p} g(x) \leq \frac{1}{2^{p-1}} .$$

Prenons alors $g = \sum_p g_p$; c'est une fonction continue, donc $g \in S$, d'autre part

$$f = \sum_p f\psi_p \leq \sum g_p = g .$$

L'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, telles que $\mu \longmapsto \int |f| \, d\mu$ soit continue sur chaque compact M_n , est un espace adapté complet qui contient donc $o(S)$, et dont la topologie de l'ordre peut être définie par la famille de semi-normes

$$\varphi \to p_n(|\varphi|) , \qquad \varphi \in o(S) .$$

DÉFINITION 24. - Soit $S \subset \mathcal{C}(\Omega)$ un cône convexe.

On dira, pour deux mesures μ , $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ que μ est balayée de ν , qu'on notera $\mu \preccurlyeq \nu$, si pour tout $s \in S$, on a

$$\int s \, d\mu \leq \int s \, d\nu$$

(lorsque ces intégrales ont un sens).

On peut améliorer la proposition précédente lorsque le cône S est stable par enveloppe inférieure finie. On peut alors identifier les ensembles $M_n \subset \mathcal{M}^+(\Omega)$, introduits précédemment, au moyen du lemme suivant.

LEMME 25. - <u>Pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, <u>et pour tout compact</u> $K \subset \Omega$, <u>on a</u>

$$\sup_{\substack{x\in K\\ \mu\preccurlyeq\varepsilon_x}} \int \varphi \, d\mu = \inf_{\substack{f\in S\\ f\geq\varphi}} \left(\sup_{x\in K} f(x)\right) .$$

<u>Démonstration</u>. - Introduisons la fonction numérique

$$\hat{\varphi} = \inf_{\substack{f\in S\\ f\geq\varphi}} f \quad ;$$

alors, en tout point $x \in \Omega$, on a

$$\hat{\varphi}(x) = \sup_{\mu\preccurlyeq\varepsilon_x} \int \varphi \, d\mu \quad ,$$

et pour tout couple $\mu , \nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, $\mu \ll \nu$, on a

$$\sup_{\sigma \ll \mu} \int \varphi \, d\sigma = \int \hat{\varphi} \, d\mu \leqslant \int \hat{\varphi} \, d\nu \qquad \text{(MOKOBODZKI [6])} .$$

La fonction $\hat{\varphi}$ est s. c. s., et le lemme s'en déduit immédiatement.

Considérons maintenant l'ensemble convexe compact $A_n \subset \mathcal{M}^+(\Omega)$ défini par

$$(\mu \in A_n) \iff (\exists \, \nu \in \mathcal{M}^1(K_n) \text{ , telle que } \mu \ll \nu) .$$

Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, on a alors

$$\sup_{\mu \in A_n} \int \varphi \, d\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{M}^1(K_n)} \left(\sup_{\mu \ll \nu} \int \varphi \, d\mu\right) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}^1(K_n)} \int \hat{\varphi} \, d\nu .$$

Finalement, on obtient

$$\sup_{\mu \in A_n} \int \varphi \, d\mu = \sup_{x \in K_n} \hat{\varphi}(x) = \inf_{\substack{f \in S \\ f \geqslant \varphi}} \left(\sup_{x \in K_n} f(x)\right) = \sup_{\mu \in M_n} \int \varphi \, d\mu .$$

Les deux ensembles A_n et M_n sont convexes compacts (donc fermés !), l'égalité précédente montre qu'on doit donc avoir $A_n = M_n$ (Hahn-Banach).

De cette identification, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 26. - Soit $S \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe satisfaisant aux conditions de la proposition 23 et stable par enveloppe inférieure.

Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω telle que

$$\int s \, d\mu < + \infty , \qquad \forall \, s \in S ,$$

il existe un compact $K \subset \Omega$, et une mesure $\nu \geqslant 0$ sur K telle que

$$\int s \, d\mu \leqslant \int s \, d\nu , \qquad \forall \, s \in S .$$

Démonstration. - L'espace $o(S)$ est complet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $\varphi \to p_n(|\varphi|)$, et μ définit une forme linéaire positive donc continue sur $o(S)$.

Il existe un entier n , et $\lambda > 0$ tel que

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lambda p_n(|\varphi|) ,$$

ce qui entraîne que

$$\mu \in \lambda(A_n - A_n) \qquad \text{ou} \qquad \mu = \lambda(\sigma_1 - \sigma_2) ,$$

avec $\sigma_1 , \sigma_2 \in A_n$. Soit $\nu \in \mathcal{M}^1(K_n)$, $\nu \geqslant \sigma_1$, on a alors

$$\mu \preccurlyeq \lambda\sigma_1 \preccurlyeq \lambda\nu \quad ,$$

d'où $\mu \preccurlyeq \lambda\nu$.

COROLLAIRE 27. - Soit S_{br} le cône convexe des fonctions $f \geqslant 0$, numériques boréliennes, localement bornées sur Ω , satisfaisant à la famille d'inégalités

$$\int f \, d\mu \leqslant f(x) \ , \qquad \forall \mu \preccurlyeq \varepsilon_x \ , \quad \forall x \in \Omega \ .$$

Alors,

$$o(S_{br}) \cap \mathcal{C}(\Omega) = o(S) \cap \mathcal{C}(\Omega) \quad .$$

Démonstration. - Pour tout compact $A_n \subset \mathcal{M}^+(\Omega)$, tout $f \in S_{br}$ est bornée sur A_n et, si $g \in o(f)$, $g \in \mathcal{C}(\Omega)$, alors g est continue sur A_n .

Par suite,

$$o(S_{br}) \cap \mathcal{C}(\Omega) = o(S) \cap \mathcal{C}(\Omega) \quad .$$

Ce corollaire s'appliquera en théorie du potentiel et des fonctions excessives.

CONJECTURE 28. - Soit C un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, stable par sommes continues, et tel que toute forme linéaire croissante sur C se représente par une mesure unique positive sur Ω .

Alors, le cône C est adapté.

D. Construction de cônes convexes adaptés de fonctions continues.

Jusqu'ici nous avons étudié des espaces vectoriels adaptés du type $V = H_{V+}$.

Dans ce chapitre, on s'intéressera plus particulièrement aux cônes convexes adaptés en vue d'applications à la théorie du potentiel.

On suppose toujours que Ω est un espace localement compact dénombrable à l'infini et que, pour un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, le cône convexe C_σ des sommes continues d'éléments de C est défini par

$$(f \in C_\sigma) \iff (\exists \, (f_n) \subset C \text{ , telle que } \textstyle\sum f_n = f \text{ soit continue}) \ .$$

PROPOSITION 29. - Soient C_1 , C_2 deux cônes convexes tels que

$$C_1 \subset C_2 \subset \mathcal{C}^+(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_{C_2} \ .$$

Alors,

$$(C_1 \subset o(C_2)) \implies (C_{1\sigma} \subset o(C_{2\sigma})) \ .$$

Démonstration. - Soit (K_n) une suite fortement croissante de compacts de Ω , $\Omega = \bigcup_n K_n$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, on pose

$$p_n(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C_2 \\ f \geqslant \varphi}} \left(\sup_{x \in K_n} f(x)\right) \ ;$$

de même, soit M_n le convexe compact de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ défini par

$$(\mu \in M_n) \iff \left(\int \varphi \, d\mu \leqslant p_n(\varphi) \ , \ \forall \ \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)\right) \ .$$

Pour toute $f \in C_1$, on a

$$\sup_{\mu \in M_n} \int f \, d\mu = \sup_{x \in K_n} f(x) \ .$$

Soit alors (f_n) une suite d'éléments de C_1 telle que $f = \sum f_n$ soit continue.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\sup_{x \in K_n} f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \ ,$$

d'où

$$\sup_{\mu \in M_n} \int f_n \, d\mu \leqslant \frac{1}{2^n} \ .$$

L'application $\mu \longmapsto \int f \, d\mu$ est alors continue sur chaque compact M_n , comme limite uniforme de fonctions continues.

D'après une proposition antérieure (proposition 23), on en déduit que

$$f \in o(C_{2,\sigma}) \ .$$

PROPOSITION 30. - Soient $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe, $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$, et soit $\overline{C}$ l'adhérence de C pour la topologie de la convergence compacte. On a toujours $o(C_\sigma) = o(\overline{C})$, et si $C \subset o(\overline{C})$, alors C_σ est adapté.

<u>Démonstration</u>. - On a évidemment $o(C_\sigma) \subset o(\overline{C})$.

Soit $f \in o(\overline{C})$; on peut supposer qu'il existe $g \in \overline{C}$, tel que $g(x) > 0$, $\forall\, x$, et $f \in o(g)$.

Il existe alors une suite (g_n) d'éléments de C , une suite (K_n) de compacts de Ω , telle que :

1° $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\Omega = \bigcup_n K_n$;

2° $(x \in \complement K_{n-1}) \implies (f(x) \leqslant \frac{1}{n^4}\, g(x))$;

3° $(x \in K_n) \implies |g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2}\, g(x)$.

Pour $x \in K_n \setminus K_{n-1}$, on a donc

$$g_n(x) \geqslant \frac{1}{2}\, g(x) \geqslant \frac{1}{2}\, n^4\, f(x) \quad ,$$

d'où $\frac{2}{n^2}\, g_n(x) \geqslant n^2\, f(x)$.

Soit alors $h = \sum \frac{2}{n^2}\, g_n(x)$, $h \in C_\sigma$ et $f \in o(h)$. Supposons maintenant que $C \subset o(\overline{C}) = o(C_\sigma)$. D'après la proposition 29, on en conclut que $C_\sigma \subset o(C_\sigma)$, autrement dit que C_σ est adapté.

COROLLAIRE 31. - <u>Soient</u> $S \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>un cône convexe, tel que</u> $S = S_\sigma$, <u>et</u> $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_S$. <u>Si</u> $S \subset \overline{o(S) \cap S}$, <u>alors</u> $C = S \cap o(S)$ <u>est adapté et</u> $C = C_\sigma$, <u>en particulier</u> $o(C) = o(S)$.

<u>Démonstration</u>. - De $C \subset o(S)$, on tire $C_\sigma \subset S_\sigma = S$, par suite $C = C_\sigma$. De $C \subset o(\overline{C})$, on obtient, d'après la proposition précédente, que $C_\sigma = C$ est adapté. Enfin,

$$o(C) = o(C_\sigma) = o(\overline{C}) = o(S) \quad .$$

Cet énoncé sera particulièrement important en <u>théorie du potentiel</u>, où l'on prendra pour C le cône des potentiels continus, et pour S le cône convexe des fonctions excessives (ou surharmoniques) positives continues.

DÉFINITION 32. - On dira qu'un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ est préadapté, si le cône convexe C_σ est adapté.

Tout cône adapté est préadapté.

Pour étudier les cônes préadaptés, nous aurons besoin des conditions (R) et (R_σ) suivantes pour des cônes $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$.

(R) $\forall\, v \in C$, $\varepsilon > 0$, $K \subset \Omega$ <u>compact, il existe</u> $K \subset \Omega$ <u>compact,</u>

$$u \in C \ ,$$

<u>tels que</u> $u \leqslant \varepsilon$ <u>sur</u> K , <u>et</u> $u \geqslant v$ <u>sur</u> $\complement K'$.

(R_σ) $\forall\, v \in C$, $\varepsilon > 0$, $K \subset \Omega$ <u>compact, il existe</u> $K' \subset \Omega$ <u>compact,</u>

$$u \in C_\sigma \ ,$$

<u>tels que</u> $u \leqslant \varepsilon$ <u>sur</u> K , <u>et</u> $u \geqslant v$ <u>sur</u> $\complement K'$.

PROPOSITION 33. - <u>Soit</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>un cône convexe tel que</u> $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$, <u>satisfaisant à la condition</u> (R) <u>ou à la condition</u> (R_σ). <u>Alors</u> $C \subset o(C_\sigma)$, <u>et</u> C_σ <u>est adapté</u>.

<u>Démonstration</u>. - Supposons que C satisfasse (R_σ), plus faible que (R). Soit $\Omega = \bigcup_n K_n$, où K_n est une suite fortement croissante de compacts. Prenons $v \in C$, et soient $u_n \in C_\sigma$ et m_n une suite croissante d'entiers tels que

$$\text{(a)} \quad u_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{sur } K_n \ ,$$

$$\text{(b)} \quad u_n \geqslant v \quad \text{sur } \complement K_{m_n} \ .$$

Alors, $u = \sum\limits_n u_n$ appartient à C_σ , et $v \in o(u)$.

D'après la proposition 30, la relation $C \subset o(C_\sigma)$ entraîne que C_σ est adapté.

COROLLAIRE 34. - <u>Soit</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>un cône convexe, tel que</u> $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$. <u>Pour que</u> C <u>soit préadapté, il faut et il suffit que</u> C <u>satisfasse</u> (R_σ).

Démonstration immédiate.

<u>Exemple</u>. - En théorie du potentiel, sur un espace localement compact $\Omega = \bigcup_n K_n$, K_n compact, $K_n \uparrow$, on a, pour tout potentiel continu p , la relation

$$\inf R_p^{\complement K_n} = 0 \ , \qquad \text{où } R_p^{\complement K_n} = \inf_{\substack{q \text{ potentiel continu} \\ q \geqslant p \text{ sur } K_n}} q \ .$$

Autrement dit, le cône convexe des potentiels continus satisfait toujours la condition (R).

Remarque. - Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe adapté. Alors, pour tout fermé $F \subset \Omega$, le cône C_F des restrictions à F des éléments de C, est un cône adapté.

E. Etude des réduites associées à un cône convexe.

Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe tel que $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$.

DÉFINITION 35. - Pour tout $\varphi \in H_C$ et tout sous-ensemble A de Ω, on appelle réduite de φ sur A, la fonction

$$R_\varphi^A = \inf_{\substack{v \in C \\ v \geqslant \varphi \text{ sur } A}} v \ .$$

Pour $A \subset \Omega$, l'application $\varphi \longmapsto R_\varphi^A$ est sous-additive sur H_C, et

$$R_\varphi^A = R_\varphi^{\bar{A}} \ .$$

PROPOSITION 36. - Soit $\overline{C}$ l'adhérence de C pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour toute $\varphi \in o(C)$ et tout fermé $F \subset \Omega$, on a

$$R_\varphi^F = \inf_{\substack{v \in C \\ v \geqslant \varphi \text{ sur } F}} v = \inf_{\substack{u \in \overline{C} \\ u \geqslant \varphi \text{ sur } F}} u = R'^F_\varphi \ .$$

Démonstration. - Soient $v \in C$, et $\varphi \in o(C)$, $v \geqslant \varphi$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que

$$(x \in \complement K_\varepsilon) \implies (\varphi(x) \leqslant \varepsilon\, v(x)) \ .$$

Soit alors $u \in \overline{C}$, $u \geqslant \varphi$ sur F. Pour tout $\alpha > 0$, il existe $u_\alpha \in C$ tel que

$$|u(x) - u_\alpha(x)| \leqslant \alpha \qquad \text{pour tout } x \in K_\varepsilon \ .$$

Soit $v_0 \in C$, $v_0(x) \geqslant 1$ sur K_ε. On a alors $\varphi \leqslant u_\alpha + \alpha v_0$ sur $F \cap K_\varepsilon$, donc $\varphi \leqslant u_\alpha + \alpha v_0 + \varepsilon v$ sur F et, si $x \in K_\varepsilon$,

$$u(x) \leqslant u_\alpha(x) + \alpha\, v_0(x) + \varepsilon\, v(x) \ ,$$

par suite

$$R_\varphi^F = R'^F_\varphi \ .$$

Remarque. - On peut supposer que C (et $\overline{C}$) sont stables par enveloppe inférieure, ce qui ne change pas les réduites.

PROPOSITION 37. - Soit $\varphi \in o(C)$, et soit $F \subset \Omega$, un fermé. On a

$$R_{\varphi}^{F} = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset F}} R_{\varphi}^{K} .$$

Démonstration. - Soient $\varphi \in o(v)$, $v \in C$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \ni x_0$, tel que

$$(x \in \complement K_\varepsilon) \implies (\varphi(x) \leqslant \varepsilon\, v(x)) .$$

Soit $u \in C$, $u \geqslant \varphi$ sur $F \cap K_\varepsilon$, on a alors

$$\varphi \leqslant u + \varepsilon v \quad \text{sur } F \text{ tout entier} ,$$

par suite

$$R_{\varphi}^{F} = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset F}} R_{\varphi}^{K} .$$

Ces deux propositions nous permettent d'étudier la stabilité de la propriété d'additivité des réduites pour un cône C , lorsqu'on passe de C à C_σ ou à $\overline{C}$.

DÉFINITION 38. - On dit qu'un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ possède la propriété d'additivité des réduites (en abrégé, propriété A.R), si pour tout fermé $F \subset \Omega$ et tous v_1 , $v_2 \in C$, on a

$$\text{(A.R)} \qquad R_{v_1+v_2}^{F} = R_{v_1}^{F} + R_{v_2}^{F} .$$

PROPOSITION 39. - Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe tel que $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C$. Si le cône C satisfait à (A.R) et si $C \subset o(\overline{C})$, alors C_σ satisfait aussi à (A.R).

Démonstration. - Pour $\varphi \in H_{C_\sigma}$, F fermé de Ω , désignons par R_{φ}^{F} , Q_{φ}^{F} les réduites de φ sur F relatives aux cônes C_σ et $\overline{C}$ respectivement.

Pour tout compact $K \subset \Omega$ et $v \in C_\sigma$, on a

$$R_{v}^{K} = Q_{v}^{K} .$$

D'autre part, d'après le corollaire 30, $C \subset o(\overline{C})$ entraîne que $C_\sigma \subset o(\overline{C})$, et d'après les propositions 36 et 37, pour $v \in C_\sigma$ et F fermé,

$$R_{v}^{F} = Q_{v}^{F} = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset F}} Q_{v}^{K} .$$

Or il est facile de voir que

$$Q^K_{v_1+v_2} = Q^K_{v_1} + Q^K_{v_2} , \qquad \forall\, K \subset \Omega \text{ compact} ,$$

et v_1 , $v_2 \in C_\sigma$ et, par suite, C_σ possède la propriété (A.R).

COROLLAIRE 40. - Soit $C \subset C^+(\Omega)$ un cône convexe préadapté. Si C possède la propriété (A.R), il en est de même pour C_σ .

En effet, on a alors $C \subset o(C_\sigma)$ et $C_\sigma \subset \overline{C}$.

4. Frontières associées à des cônes convexes de fonctions s. c. i.

On suppose toujours Ω dénombrable à l'infini.

DÉFINITION 1. - Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i. sur Ω.

1° On appelle point-frontière de Ω relatif à C , tout $x \in \Omega$ tel que si $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$,

$$\int |v|\, d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int v\, d\mu \leqslant v(x) , \qquad \forall\, v \in C ,$$

alors $\mu = \varepsilon_x$.

2° On appelle frontière fine de Ω relative à C , ou frontière de Choquet, l'ensemble des points-frontière de Ω relatifs à C . On notera cet ensemble $\delta(C)$.

L'étude des frontières fines dans le cas où Ω est compact a été abondamment traitée, et a permis de dégager des conditions suffisantes simples pour que la frontière fine ait la propriété :

$$(v \in C \text{ et } v(x) \geqslant 0 , \ \forall\, x \in \delta(C)) \Longrightarrow (v(x) \geqslant 0 , \ \forall\, x \in \Omega) .$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats au cas où Ω est localement compact et où le cône convexe C est adapté en un certain sens.

Soit C un cône convexe de fonctions numériques, on notera par C^+ l'ensemble des fonctions positives de C , et par $\inf(C , o)$ l'ensemble $\{\inf(f , o)\}_{f \in C}$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i. sur Ω . On suppose que C^+ est linéairement séparant, que

$$\inf(C , o) \subset o(C^+) \quad \text{et} \quad C \neq C^+ .$$

Dans ces conditions, $\delta(C)$ est non vide et

$$(v \in C \ , \ v(x) \geqslant 0 \ , \ \forall \ x \in \delta(C)) \implies (v(x) \geqslant 0 \ , \ \forall \ x \in \Omega) \ .$$

Avant de démontrer cette proposition, rappelons quelques définitions extraites de MOKOBODZKI [7] (cf. aussi BAUER [2]).

(a) Un fermé $F \subset \Omega$ est dit stable si, pour tout $x \in F$, et toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω telle que

$$\int v \ d\mu \leqslant v(x) \ , \qquad \forall \ v \in C \ ,$$

la mesure μ est portée par F.

Toute intersection de fermés stables est un fermé stable, et tout compact stable contient un compact stable minimal.

(b) Si on désigne par Ω^+ l'ensemble $\Omega^+ = \bigcap_{v \in C} \{v \geqslant 0\}$, un point de $x \in \complement\Omega^+$ est point-frontière si, et seulement si, $\{x\}$ est un compact stable minimal.

LEMME 3. - Pour tout $v \in C$, $v \notin C^+$, il existe un compact stable $K \subset \{v < 0\}$.

Démonstration. - Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) < 0$. Il existe une suite

$$(v_n) \subset C^+ \ ,$$

telle que $\sup_n v_n(x) > 0$, $\forall \ x \in \Omega$, et

$$\sum v_n(x_0) < + \infty \ .$$

La fonction $w = \sum v_n$ peut prendre éventuellement la valeur $+ \infty$, de plus on peut supposer que $\inf(v \ , \ o) \in o(w)$.

Posons alors

$$\lambda = \{\sup \alpha \ , \ \alpha > 0 \ , \ - \alpha v \leqslant w\} \ .$$

Il est facile de voir, en posant $u = w + \lambda v$, que l'ensemble $u^{-1}(0) = \{w = - \lambda v\}$ est non vide, et que c'est un compact stable. Enfin,

$$u^{-1}(0) \subset \{v < 0\} \ .$$

On démontrerait de la même manière le lemme suivant.

LEMME 4. - Soient F un fermé stable de Ω, $v \in C$, tels que $\{v < 0\} \cap F \neq \emptyset$. Il existe alors un compact stable $K \subset \{v < 0\} \cap F$.

La proposition va alors résulter du lemme suivant.

LEMME 5. - Tout compact stable minimal K, $K \not\subset \Omega^+$, est réduit à un point (donc identifiable à un point-frontière).

<u>Démonstration</u>. - Soient $x \in K$, $v \in C$, tels que $v(x) < 0$. S'il existait $x_1 \in K$, $x_1 \neq x$, on pourrait trouver $w \in C$ tel que $v(x) + w(x) < 0$ et $v(x_1) + w(x_1) \geqslant 0$ (C est linéairement séparant), on conclut alors à l'aide du lemme précédent.

<u>Remarque</u> 1. - Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i. La frontière $\delta(C)$ ne change pas si on adjoint au cône C , l'ensemble des fonctions s. c. i. $v \geqslant 0$ telles que

$$\int v \, d\mu \leqslant v(x) \quad ,$$

$\forall \mu \geqslant 0$ sur Ω , $x \in \Omega$ tels que

$$\int s \, d\mu \leqslant s(x) \ , \qquad \forall s \in C \ .$$

<u>Remarque</u> 2. - Si on sature, par enveloppe inférieure finie, le cône convexe C , on obtient un cône C' tel que $\delta(C) = \delta(C')$, et si $\inf(C , o) \subset o(C^+)$, on a encore

$$\inf(C' , o) \subset o(C'^+) \ .$$

Soit C un cône convexe de fonctions s. c. i. sur Ω , tel que $\mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_{C^+}$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, on pose

$$\hat{\varphi} = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geqslant \varphi}} f \ .$$

On a la caractérisation suivante de $\delta(C)$:

PROPOSITION 6. - <u>Pour qu'un point</u> $x \in \delta(C)$, <u>il faut et il suffit que, pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, <u>on ait</u>

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) \ .$$

<u>Démonstration</u>.

1° Supposons $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, et soit μ une mesure $\geqslant 0$ telle que

$$\int s \, d\mu \leqslant s(x) \ , \qquad \forall s \in C \ .$$

On aurait alors, pour $s \in C$, $s \geqslant \varphi$, $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$,

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \int s \, d\mu \leqslant s(x) \ .$$

Par suite,

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \varphi(x) \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) \ ,$$

d'où $\mu = \varepsilon_x$.

2° On suppose toujours que $\inf(C, o) \subset o(C^+)$.

Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$, finie sur $o(C^+) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, et toute $v \in C$, on a

$$\int v \, d\mu = \{\sup \int \varphi \, d\mu \; ; \; \varphi \leqslant v \; ; \; \varphi \in o(C^+) \cap \mathcal{C}(\Omega)\} \; .$$

Soit alors $x \in \delta(C)$. Sur $o(C^+) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, l'application $p : \varphi \to \hat{\varphi}(x)$ est sous-linéaire, croissante. Pour toute mesure μ sur Ω , $\mu \leqslant p$, on remarque que μ est $\geqslant 0$, et que $\int s \, d\mu \leqslant s(x)$, $\forall s \in C$. On a supposé $x \in \delta(C)$, par suite $\mu = \varepsilon_x$, ce qui montre que p est linéaire, et puisque l'on a $\varepsilon_x \leqslant p$,

$$p(\varphi) = \varphi(x) = \hat{\varphi}(x) \; , \qquad \forall \varphi \in o(C^+) \cap \mathcal{C}(\Omega) \; .$$

PROPOSITION 7. - Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i. satisfaisant aux conditions de la proposition 2. Alors $\overline{\delta(C)}$ est le plus petit fermé F ayant les deux propriétés suivantes équivalentes :

1° $(v \in C \; ; \; v(x) \geqslant 0 \; , \; \forall x \in F) \implies (v(x) \geqslant 0 \; , \; \forall x \in \Omega)$;

2° Pour tout $x \in \Omega$, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω portée par F telle que

$$\int v \, d\mu \leqslant v(x) \; , \qquad \forall v \in C \; .$$

Démonstration. - On voit immédiatement que 2° $\implies$ 1° , et que $\delta(C) \subset F$, d'après la proposition 2, par suite $\overline{\delta(C)} \subset F$.

Montrons que 1° $\implies$ 2° . Soit $x_0 \in \Omega$. Sur F , considérons l'espace vectoriel $H = o(C^+) \cap \mathcal{C}(F)$, c'est un espace adapté, et, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur F et tout $v \in C$, on a

$$\int v \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leqslant v \\ \varphi \in H}} \int \varphi \, d\mu \; .$$

Sur H , considérons la forme sous-linéaire finie p ,

$$\varphi \longmapsto p(\varphi) = \inf_{\substack{v \in C \\ v \geqslant \varphi}} v(x_0) \; .$$

Soit T une forme linéaire sur H , $T \leqslant p$. Il existe alors une mesure $\mu \geqslant 0$ sur F telle que

$$\int \varphi \, d\mu = \langle T , \varphi \rangle \leqslant p(\varphi) \; .$$

Par suite,

$$\int v \, d\mu \leqslant v(x_0) \; , \qquad \forall v \in C \; .$$

PROPOSITION 8. - Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i. sur Ω, tel que C^+ soit linéairement séparant. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$(v \in C \,, \quad v(x) \geqslant 0 \,, \quad \forall\, x \in K) \implies (v \geqslant 0) \quad .$$

Si $C \neq C^+$, alors $\delta(C) \neq \emptyset$ et $\delta(C) \subset K$, de plus

$$(v \in C \;; \quad v(x) \geqslant 0 \,, \quad \forall\, x \in \delta(C)) \implies (v \geqslant 0) \quad .$$

Démonstration.

1° En appliquant la proposition précédente à un compact $K' \supset K$ et au cône $C_{K'}$ des restrictions de C à K', on voit que $\delta(C_{K'}) = \delta(C_K)$ et que, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω, à support compact, il existe une mesure $\nu \geqslant 0$, à support dans K, telle que

$$\int v \, d\nu \leqslant \int v \, d\mu \,, \qquad \forall\, v \in C \quad .$$

Toute $\mu \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ s'écrivant $\mu = \sum \mu_\alpha$, où les mesures $\mu_\alpha \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ sont à support compact, on a la même propriété pour les mesures $\mu \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ telles que

$$\int v \, d\mu < +\infty \,, \qquad \forall\, v \in C \quad .$$

2° Montrons que $\delta(C_K) = \delta(C)$. On a évidemment $\delta(C) \subset \delta(C_K)$.

Soit $x \in \delta(C_K)$. Supposons qu'il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$, $\mu \neq \varepsilon_x$, telle que $\int v \, d\mu \leqslant v(x)$, $\forall\, v \in C$.

Soit K' compact, $K' \cap K = \emptyset$, $\mu(K') > 0$. Il existe alors deux mesures $\geqslant 0$, ν_1 et ν_2, portées par K, telles que

$$\int v \, d\nu_1 \leqslant \int v \, d\mu_{|K'} \,, \qquad \forall\, v \in C \quad ,$$

$$\int v \, d\nu_2 \leqslant \int v \, d\mu_{|\complement K'} \quad .$$

Par suite,

$$\int v \, d(\nu_1 + \nu_2) \leqslant v(x) \,, \qquad \forall\, v \in C \quad ,$$

et $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \varepsilon_x$, puisque $x \in \delta(C_K)$.

Soit $f \in \mathcal{C}(K \cup K')$ définie par

$$f(K) = 0 \,, \qquad f(K') = 1 \quad .$$

Comme $x \in \delta(C_{K \cup K'})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in C$ tel que $v \geqslant f$ et

$$v(x) \leqslant \varepsilon + f(x) = \varepsilon \quad ;$$

par suite, il existe $v_0 \in C$ tel que

$$\int v_0 \, d\nu_1 < \int v_0 \, d\mu_{|K} \quad .$$

On aurait donc

$$\int v_0 \, d\nu < \int v_0 \, d\mu \leqslant v_0(x) \quad ,$$

ce qui est contradictoire, puisqu'on doit avoir

$$\int v_0 \, d\nu = v_0(x) \quad .$$

On a donc bien $\delta(C) = \delta(C_K)$, et la proposition s'ensuit immédiatement.

Remarque. - On peut améliorer la proposition précédente en remplaçant le compact K par un fermé F tel que

$$\inf(C \, , \, o)_F \subset o(C_F) \quad .$$

LEMME 9. - *Soit C un cône convexe de fonctions s. c. i. sur Ω tel que $\mathcal{C}_K \subset H_{C^+}$.*

Soient ω un ouvert relativement compact, (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_K(\Omega)$, à support dans ω , convergeant uniformément sur Ω vers $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$.

Alors,

$$\hat{\varphi} = \lim \hat{\varphi}_n \quad .$$

Démonstration. - L'application $\varphi \to \hat{\varphi}$ est croissante sous-additive.

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, $\varphi_0(x) = 1$, $\forall x \in \overline{\omega}$, et soit $v_0 \in C^+$, $v_0 \geqslant \varphi_0$.

De $\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \varepsilon$, on déduit

$$\varphi_n \leqslant \varepsilon\varphi_0 + \varphi \qquad \text{et} \qquad \varphi \leqslant \varphi_n + \varepsilon\varphi_0 \quad ,$$

d'où

$$\hat{\varphi} \leqslant \hat{\varphi}_n + \varepsilon\hat{\varphi}_0 \leqslant \hat{\varphi}_n + \varepsilon v_0 \quad ;$$

de même

$$\hat{\varphi}_n \leqslant \hat{\varphi} + \varepsilon v_0 \quad ,$$

ce qui donne

$$|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_n| < \varepsilon v_0 \quad .$$

PROPOSITION 10. - *On suppose que Ω est à base dénombrable. Soit $C \subset \mathcal{C}(\Omega)$ un cône convexe, linéairement séparant,*

$$\inf(C \, , \, o) \subset o(C) \quad , \qquad \mathcal{C}_K(\Omega) \subset H_C \quad .$$

<u>Dans ces conditions,</u> $\delta(C)$ <u>est un</u> G_δ .

<u>Démonstration</u>. - L'espace Ω étant séparable, il existe une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$, et tout voisinage ω du support de φ , il existe une suite (φ_{n_p}) extraite, dont les éléments sont à support dans ω , suite qui converge uniformément vers φ .

En vertu de la proposition 6 et du lemme précédent,

$$\delta(C) = \bigcap_n \{\hat{\varphi}_n = \varphi_n\} \quad ,$$

et, pour tout n , $\hat{\varphi}_n$ est s. c. s., donc $\{\hat{\varphi}_n = \varphi_n\}$ est un G_δ .

Citons encore sans démonstration le corollaire suivant.

COROLLAIRE 11. - <u>Pour toute mesure</u> $\mu \geqslant 0$ <u>sur</u> Ω <u>telle que</u>

$$\int v \, d\mu < +\infty \, , \qquad \forall \, v \in C^+ \quad ,$$

<u>il existe une mesure</u> $\nu \geqslant 0$ <u>portée par</u> $\delta(C)$ <u>telle que</u>

$$\int v \, d\nu \leqslant \int v \, d\mu \, , \qquad \forall \, v \in C \quad .$$

Nous avons donc montré que la théorie du balayage, définie sur un espace compact par un cône convexe de fonctions, s'étend sans difficulté au cas non compact, en imposant aux cônes convexes considérés d'être adaptés.

Bien d'autres considérations, comme celles portant sur le "bord" et les ensembles "bordants", ou sur l'existence de noyau-diffusion associé à deux mesures μ et ν balayées l'une de l'autre, etc., peuvent être traitées dans ce nouveau cadre. Le lecteur pourra trouver, dans MEYER [5], un exposé détaillé de ces questions pour le cas compact.

Le problème des frontières associées aux espaces vectoriels adaptés était déjà abordé, dans CHOQUET [3], en connexion avec la représentation intégrale.

<u>Applications</u> : <u>Notions de support relatif, de support fin relatif</u>.

Soit C un cône convexe de fonctions numériques s. c. i., $\geqslant 0$ sur Ω , linéairement séparant.

DÉFINITION 12.

1° Pour toute fonction numérique s. c. s. $\varphi \geqslant 0$, semi-continue supérieurement, $\varphi \in H_C$, on appelle <u>support fin de</u> φ , relatif à C , noté $\delta(\varphi)$, la frontière fine du cône convexe $(C - \underset{\approx}{R}^+ \varphi)$.

2° Lorsque la relation suivante est vérifiée pour φ , s. c. s., $\geqslant 0$,

$$(v \in C \ ; \ v(x) \geqslant \varphi(x) \ , \ \forall \ x \in \delta(\varphi)) \implies (v \geqslant \varphi) \ ,$$

on appellera <u>support fermé de</u> φ , relatif à C , l'ensemble

$$\operatorname{Supp} \varphi = \overline{\delta(\varphi)} \ .$$

PROPOSITION 13. - <u>Soit</u> φ , s. c. s., $\geqslant 0$; <u>si</u> $\varphi \in o(C)$, $\varphi \neq 0$, <u>alors</u> $\delta(\varphi) \neq \emptyset$, <u>et</u> $\delta(\varphi)$ <u>est le plus petit fermé</u> $F \subset \Omega$ <u>ayant la propriété</u>

$$(v \in C \ ; \ v(x) \geqslant \varphi(x) \ , \ \forall \ x \in F) \implies (v \geqslant \varphi) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de transcrire la proposition 7.

PROPOSITION 14. - <u>Soit</u> φ , <u>s. c. s.,</u> $\geqslant 0$. <u>S'il existe un compact</u> $K \subset \Omega$, <u>tel que</u>

$$(v \in C \ ; \ v(x) \geqslant \varphi(x) \ , \ \forall \ x \in K) \implies (v \geqslant \varphi) \ ,$$

<u>et si</u> $\varphi \neq 0$, <u>alors</u> $\delta(\varphi) \neq 0$ <u>et</u> $\delta(\varphi) \subset K$.

<u>De plus</u>,

$$(v \in C \ ; \ v(x) \geqslant \varphi(x) \ , \ \forall \ x \in \delta(\varphi)) \implies (v \geqslant \varphi) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - On transcrit cette fois la proposition 8.

PROPOSITION 15. - <u>Soit</u> C_2 <u>un cône convexe de fonctions s. c. i.</u> $\geqslant 0$ <u>sur</u> Ω , <u>linéairement séparant, et soit</u> C_1 <u>un sous-cône convexe de</u> C_2 ,

$$C_1 \subset C_2 \cap \mathcal{C}^+(\Omega) \ .$$

<u>Pour tous</u> φ_1 , $\varphi_2 \in C_1$, <u>on a</u>

$$\delta(\varphi_1 + \varphi_2) \supset \delta(\varphi_1) \cup \delta(\varphi_2) \ ,$$

$$\delta(\lambda\varphi_1) = \delta(\varphi_1) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soient $x \in \delta(\varphi_1)$, et $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que

$$\int v \, d\mu \leqslant v(x) \ , \qquad \forall \ v \in C_2 \ ,$$

et

$$\int (\varphi_1 + \varphi_2) \, d\mu = (\varphi_1 + \varphi_2)(x) \ .$$

On en déduit

$$\int \varphi_1 \, d\mu = \varphi_1(x) \ ,$$

et comme $x \in \delta(\varphi_1)$, $\mu = \varepsilon_x$, ce qui montre que $x \in \delta(\varphi_1 + \varphi_2)$.

INDEX DES DÉFINITIONS

INDEX DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.). - Representation of moments by integrals, Illinois J. of Math., t. 7, 1963, p. 609-614.

[2] BAUER (H.). - Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.

[3] CHOQUET (G.). - Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 1re année, 1962, n° 4, 10 p.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques, 3a ediçao. - Saõ Paulo. Sociedade de Matematica de Saõ Paulo, 1964 [multigr.].

[5] MEYER (P.-A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[6] MOKOBODZKI (G.). - Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques sur un espace compact, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 803-805.

[7] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 15-18.

[8] NAMIOKA (I.). - Partially ordered linear topological vector spaces. - Providence, American mathematical Society, 1957 (Memoirs of the American mathematical Society, 24).

[9] SIBONY (D.). - Sur les transformations conservant l'harmonicité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 748-751.