Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Fulbert Mignot

Espaces analytiques banachiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 1 (1966-1967), exp. nº 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A4_0>

ESPACES ANALYTIQUES BANACHIQUES

par Fulbert MIGNOT

(d'après la thèse d'Adrien DOUADY [3])

Un espace analytique de dimension finie est un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ (où X est un espace topologique, et $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur $\mathcal{O}_X$), localement isomorphe à un modèle $(Y, \mathcal{O}_Y)$, où Y désigne l'ensemble des zéros d'une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions analytiques définies sur un ouvert U $(U \subset \underset{\sim}{C}^p)$, et où $\mathcal{O}_Y$ est le faisceau d'anneaux défini sur Y , dont la fibre $\mathcal{O}_{Y,f}$ est égale à $\mathcal{O}_{U,y}/\mathfrak{J}_y$ (avec $\mathcal{O}_{U,y}$ anneau des germes de fonctions analytiques en y , et $\mathfrak{J}_y$ idéal de $\mathcal{O}_{U,y}$ engendré par les germes en y des fonctions $f_1, \ldots, f_n$).

Si $\mathcal{O}_X$ est réduit ($\mathcal{O}_{X,x}$ ne possède pas d'éléments nilpotents), une fonction analytique sur X est une section du faisceau $\mathcal{O}_X$. Cette notion coïncide avec la définition habituelle dans le cas où X est un ouvert de $\underset{\sim}{C}^p$. On a immédiatement la notion de fonction analytique à valeurs dans un $\underset{\sim}{C}^q$, et la donnée de $\mathcal{O}_X$ détermine ces fonctions par passage aux composantes. Il n'en est pas de même dans le cas des espaces de Banach, ce qui nécessite de considérer les faisceaux des fonctions analytiques à valeurs dans un Banach quelconque.

1. Modèles d'espaces analytiques. Définitions.

(a) Fonctions analytiques.

1° E , F désignent des Banach sur $\underset{\sim}{C}$, U un ouvert de E , $f : U \to F$. f est analytique en $x \in U$, s'il existe une boule $B(x, r)$ contenue dans U , telle que, sur B ,

$$f(y) = \sum_0^\infty f_n(y) ,$$

les f_n étant des fonctions polynomiales de degré n en $(y - x)$, et si, $\tilde{f}_n$ désigne la fonction multilinéaire associée à f_n ,

$$\sum_0^\infty \|\tilde{f}_n\| < +\infty .$$

2° f est analytique sur U , si elle est analytique en tout point x $(x \in U)$.

3° Les propositions suivantes sont équivalentes :

f est analytique sur U ;

f est $\underset{\sim}{C}$-différentiable sur U ;

f est continue, et, pour tout ν $(\nu \in F')$, $(\nu \circ f)$ est analytique [3].

4° Définition d'un modèle.

Notations. – E , F , G désignent des Banach complexes, U un ouvert de E , $f : U \mapsto F$ une application analytique, $X = f^{-1}(0)$.

A tout ouvert V $(V \subset U)$, on associe $\mathcal{H}(V , G)$, espace vectoriel des fonctions analytiques définies sur V , à valeurs dans G . La donnée des $\{\mathcal{H}(V , G)\}_{V \subset U}$ définit un faisceau noté $\mathcal{H}(G)$.

Soit $\mathcal{N}(f , G)$ le faisceau sur U défini par

$V \subset U$, $\quad \mathcal{N}(f , G) = \{g : V \to G , \ \exists\, \lambda \in \mathcal{H}(V , \mathcal{L}(F , G)) , \ g(x) = \lambda(x).f(x)\}$.

Remarque. – Si $E = \underset{\sim}{C}^p$, $F = \underset{\sim}{C}^n$, $G = \underset{\sim}{C}$. Alors $f = (f_1 , \dots , f_n)$, et

$$\mathcal{N}(f , \underset{\sim}{C})(V) = \{g : V \to \underset{\sim}{C} , \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, f_i(x)\} .$$

$\mathcal{N}(f , \underset{\sim}{C})$ est donc le faisceau d'idéaux associé aux fonctions $f_1 , \dots , f_n$.

Soit $\Phi(G)$ le faisceau associé au préfaisceau quotient $\mathcal{H}(G)/\mathcal{N}(f , G)$. Le support de ce faisceau est X ;

Soient $x_0 \notin X$, $g \in \mathcal{H}_{x_0}$ (fibre de $\mathcal{H}$ en x_0), $f(x_0) \neq 0$. Soit ν appartenant à F' , $\nu(f(x_0)) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que, sur $V(x_0)$,

$$g(x) = \frac{g(x)}{\nu(f(x))}\, \nu(f(x)) \in \mathcal{N}(f , G)(V(x_0)) .$$

On désignera encore par $\Phi(G)$ la restriction du faisceau à X .

Etant donnés deux Banach G et G' , et une application analytique $h : G \to G'$, on définit, grâce au lemme suivant, un morphisme de $\Phi(G)$ dans $\Phi(G')$.

LEMME 1. – Soient Ω un ouvert de $U \times F$ contenant un point $(x_0 , 0)$ $(x_0 \in X)$, et η une application analytique de Ω dans un Banach G' , nulle sur $(U \times 0) \cap \Omega$. Il existe alors un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans U , tel que $(x , f(x)) \in \Omega$ pour tout $x \in U_0$, et que la fonction $g \in \mathcal{H}(U_0 , G')$, définie par $g(x) = \eta(x , f(x))$ appartienne à $\mathcal{N}(f/U_0 , G')$.

De plus, si Ω est de la forme $U' \times F$ (U' ouvert de U), alors $U_0 = U'$.

Démonstration. - Soit U_0 l'ouvert de U , défini par

$$U_0 = \{x \ , \ \forall \ t \in [0 \ , \ 1] \ , \ (x \ , \ tf(x)) \in \Omega\}$$

($x_0 \in U_0$ car $f(x_0) = 0$). Si $\Omega = U' \times F$, $U_0 = U'$.

Soit $\lambda(x) = \int_0^1 \eta_2'(x \ , \ tf(x)) \, dt$ (η_2' dérivée partielle de η par rapport à la seconde variable). Alors, pour tout $x_0 \in U_0$,

$$g(x) = \eta(x \ , \ f(x)) = \lambda(x) \ f(x) \ .$$

C. Q. F. D.

(b) Construction d'un morphisme de $\Phi(G)$ dans $\Phi(G')$, associé à h analytique, $G \to G'$.

Soit $U' \subset U$,

$$h_{U'} : \mathcal{H}(U' \ , \ G) \to \mathcal{H}(U' \ , \ G') \ ,$$
$$\gamma \mapsto (h \circ \gamma) \ .$$

Si γ et γ' sont deux éléments de $\mathcal{H}(U' \ , \ G)$, représentant un même élément de $\Phi(U' \ , \ G)$,

$$\gamma' = \gamma + \lambda \ f/U' \ , \qquad \lambda \in \mathcal{N}(f \ , \ G)(U') \ .$$

Pour $(x \ , \ y) \in U' \times F$, la fonction $\eta(x \ , \ y)$,

$$\eta(x \ , \ y) = h_{U'}(\gamma(x) + \lambda(x) \ y) - h_{U'}(\gamma(x)) \ ,$$

est analytique sur $U' \times F$, nulle sur $U' \times (0)$; d'après le lemme 1 :

$$h_{U'}(\gamma') = h_{U'}(\gamma) + g \ , \qquad g \in \mathcal{N}(f/U' \ , \ G') \ ,$$

donc $h_{U'}(\gamma')$ et $h_{U'}(\gamma)$ définissent le même élément par passage au quotient dans $\Phi(G')(U')$. Ceci permet de considérer le morphisme de faisceau :

$$\Phi(h) = h_* : \ \Phi(G) \to \Phi(G') \ .$$

(c) Définition des faisceaux $\Phi(W)$. - Soit W un ouvert de G . L'ensemble des sections du faisceau $\Phi(G)$, dont la fonction ensembliste sous-jacente est à valeurs dans W , constitue un sous-faisceau (d'ensembles) de $\Phi(G)$, noté $\Phi(W)$.

Si $h : W \to W'$ est analytique, on peut définir un morphisme de faisceau $h_* : \ \Phi(W) \to \Phi(W')$.

Soient $\alpha \in \Phi_{x_0}(W)$ (fibre de $\Phi(W)$ en x_0), et γ un représentant de α, $\gamma \in \mathcal{H}(U', G)$ (U' voisinage de x_0) ; deux représentants γ et γ' $(\gamma \in \mathcal{H}(U'', G))$ sont tels que

$$(\gamma - \gamma') \in \mathcal{N}(f , G)(\tilde{U}) , \qquad \tilde{U} \subset U' \cap U'' ,$$

$$\gamma - \gamma' = \lambda.f .$$

Soit $\eta(x , y) = h(\gamma'(x) + \lambda(x) y) - h(\gamma'(x))$. η est défini sur un ouvert Ω, $(x_0\ 0) \in \Omega \subset \tilde{U} \times F$; de plus, η s'annule sur $\Omega \cap \tilde{U} \times (0)$. D'après le lemme 1, il existe un voisinage $\tilde{U}_0$ de x_0 tel que $\eta(x , f(x))$ appartienne à $\mathcal{N}(f , G')(\tilde{U}_0)$. Il en résulte que $(h \circ \gamma)$ et $(h \circ \gamma')$ définissent le même germe de $\Phi_{x_0}(W')$.

(d) <u>Définition du foncteur</u> Φ . - Soit Φ le foncteur défini sur la catégorie des ouverts d'espaces de Banach (flèches : les applications analytiques) , à valeurs dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X , qui :

- à tout ouvert W associe $\Phi(W)$;

- à $h : W \to W'$ associe le morphisme, défini précédemment, de $\Phi(W)$ dans $\Phi(W')$ (noté $\Phi(h)$).

Le triplet (U , f , Φ) constitue un modèle.

(e) <u>Définition des espaces</u> $\mathcal{K}$-<u>fonctés</u>. - Soit $\mathcal{K}$ une catégorie.

1° Un espace $\mathcal{K}$-foncté sera un couple (X , Φ) où :

X est un espace topologique,

Φ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{K}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X .

2° Un morphisme de (X , Φ) dans (Y , Ψ) est un couple (f_0 , f_1) , où f_0 est une application continue de X dans Y , et f_1 un morphisme du foncteur $f_0^* \Psi$ dans Φ (f_0^* : foncteur image réciproque par f_0).

<u>Remarque</u> 1. - Comme les foncteurs f_0^* et f_{0*} sont adjoints, il revient au même de se donner f_1 ou un morphisme de Ψ dans $f_{0*} \Phi$.

<u>Remarque</u> 2. - Si (X , Φ) est un espace $\mathcal{K}$-foncté, et si $Y \subset X$, $j : Y \to X$ (j désignant l'injection canonique), $(Y , j^* \Phi)$ est alors un espace $\mathcal{K}$-foncté. On dira que cette structure est induite sur Y par Φ .

<u>Remarque</u> 3. - Les modèles $\mu(U , f , \Phi)$ constituent des exemples d'espaces $\mathcal{K}$-fonctés ($\mathcal{K}$: catégorie des ouverts d'espaces de Banach avec les applications analytiques).

Remarque 4. - Un modèle $\mu(U, f, \Phi)$ est dit lisse si $f = 0$. Le foncteur Φ, à tout ouvert W, associe $\mathcal{H}(W)$, ensemble des fonctions analytiques définies dans U à valeurs dans W.

Un espace analytique banachique (e. a. b.) est lisse, s'il est localement isomorphe à un modèle lisse : cette notion se confond avec celle de variété analytique banachique.

(f) Définition des espaces analytiques banachiques. - Soit $\mathcal{K}$ la même catégorie que dans les remarques précédentes.

Un espace analytique banachique est un espace $\mathcal{K}$-foncté dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe à un modèle.

Tout e. a. b. a un espace annelé sous-jacent : $\Phi(\underset{\sim}{C})$. Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, cet espace annelé ne détermine pas nécessairement la structure d'e. a. b., sauf si l'e. a. b. est lisse.

2. Contre-exemple (dû à A. DOUADY).

Soit (c_0) l'espace de Banach des suites tendant vers 0 à l'infini,

$$\ell^1 = (c_0)', \qquad \ell^\infty = (\ell^1)', \qquad (\ell^\infty)'.$$

Considérons c_0 comme modèle lisse d'une part, et d'autre part comme e. a. b. associé à $p : \ell^\infty \to \ell^\infty/c_0$, on le note $\underset{\sim}{c}_0$,

$$\underset{\sim}{c}_0 = \mu(\ell^\infty, p, \ell^\infty/c_0).$$

(1) $$\Phi(c_0, \underset{\sim}{C}) = \Phi(\underset{\sim}{c}_0, \underset{\sim}{C}).$$

En effet, $(c_0)'$ est facteur direct dans $(\ell^\infty)'$, et par récurrence, il est immédiat que $\mathcal{L}((\ell^\infty)^n, \underset{\sim}{C})$ admet $\mathcal{L}((c_0)^n \underset{\sim}{C})$ comme facteur direct. Ceci permet d'identifier les deux espaces annelés.

(2) $$\Phi(c_0, \underset{\sim}{c}_0) \neq \Phi(\underset{\sim}{c}_0, c_0).$$

En effet, $\mathrm{Id}_{c_0} \in \Phi(c_0, c_0)$ et $\mathrm{Id}_{c_0} \notin \Phi(\underset{\sim}{c}_0, c_0)$, sinon l'identité de c_0 se prolongerait localement en une application φ-analytique définie sur un ouvert de ℓ^∞. Pour $x \in c_0$, $\varphi'(x) \in \mathcal{L}(\ell^\infty, c_0)$ et $\varphi'(x) \circ \varphi'(x) = \varphi'(x)$. $\varphi'(x)$ serait un projecteur de ℓ^∞ sur c_0, ce qui ne peut être car (c_0) n'est pas facteur direct dans ℓ^∞.

PROPOSITION 1. - A toute section de $\Phi(W)(U)$, on peut asscier une fonction continue de U dans W (U ouvert de X), appelée application ensembliste sous-jacente.

Il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. - Soient (X , Φ) et (Y , Ψ) deux modèles d'e. a. b., et (f_0 , f_1) un morphisme : $(X , \Phi) \to (Y , \Psi)$. Si s appartient à $(f_0^* \Psi)(W)(U)$ (U ouvert de X), et si $\varepsilon(s)$ désigne la fonction ensembliste sous-jacente, alors

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(f_1(W)\ s) .$$

En effet, soient $x \in U$, et $\varepsilon_x(s)$ la valeur de $\varepsilon(s)$ en x . Pour tout W' voisinage de $\varepsilon_x(s)$, $\varepsilon_x(f_1(W)\ s)$ appartient à W' , avec $i : W' \to W$,

$$\begin{tikzcd}
(f_0^* \Psi)(W') \arrow[r, "f_1(W')"] \arrow[d, "(f_0^* \Psi)(i)"'] & \Phi(W') \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Phi(i)"] & \mathfrak{F}(W') \arrow[d, "\mathfrak{F}(i)"] \\
(f_0^* \Psi)(W) \arrow[r, "f_1(W)"] & \Phi(W) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathfrak{F}(W)
\end{tikzcd}$$

($\mathfrak{F}(W)$ faisceau des fonctions continues dans X à valeurs dans W).

$\varepsilon_x(s) \in W'$, il existe $s' \in (f_0^* \Psi)(W')$ tel que

$$(f_0^* \Psi)(i)s' = s \qquad \text{(en prenant } U \text{ assez petit)} ,$$

$$\Phi(i)\ f_1(W')s' = f_1(W)s .$$

$$\varepsilon(f_1(W)s) = \varepsilon(\Phi(i)\ f_1(W')s') = \mathfrak{F}(i)\ \varepsilon(f_1(W')s') ,$$

$\varepsilon(f_1(W')s')$ prend ses valeurs dans W' , donc $\varepsilon(f_1(W)s)$ aussi.

C. Q. F. D.

Une section de $\Phi(W)(U)$ étant donnée, il suffit de considérer un recouvrement de U par des X_i , tel que (X_i , Φ_i) soit isomorphe à un modèle. L'isomorphisme permet de construire une fonction ensembliste sous-jacente à s/X_i , et le lemme 2 montre que cette fonction ne dépend pas des X_i choisis.

PROPOSITION 2. - Soients (X , Φ) un e. a. b., et X' un ouvert d'espace de Banach. L'ensemble des morphismes de (X , Φ) dans le modèle lisse $(X' , \mathcal{H}_{X'})$ s'identifie à $\Phi(X , X') = H^0(X , \Phi(X'))$.

(α) Morphisme défini par une section. - Soient $s \in \Phi(X , X')$, et $g = \tilde{s}$: $X \to X'$ l'application continue sous-jacente. Soit V' un ouvert de X' ; $i_{V'} : V' \to X'$,

$$\Phi(i_{V'}) : \Phi(g^{-1}(V') , V') \to \Phi(g^{-1}(V') , X') ;$$

il existe $s_{V'}$ unique tel que

$$\Phi(i_{V'})s_{V'} = s/g^{-1}(V') . \tag{3}$$

Soit W ouvert d'un Banach,

$$\mathcal{H}(V' , W) \to \Phi(g^{-1}(V') , W) = (g_* \Phi)(V' , W)$$
$$h \mapsto \Phi(h)s_{V'} .$$

Cette application définit un morphisme f_1 du foncteur $\mathcal{H}$ dans $g_* \Phi$.

A la section s , on associe le morphisme (g , f_1) . Cette application est injective.

(β) Section définie par un morphisme. - Il s'agit de montrer que tout morphisme détermine une section à laquelle il est associé par la construction précédente ;

$$(X , \Phi) \xrightarrow{(f_0 , f_1)} (X' , \mathcal{H}) ,$$

$$V' \subset X' , \qquad \mathcal{H}(V' , W) \xrightarrow{f_1(V' , W)} \Phi(f_0^{-1}(V') , W) .$$

En prenant $W = V'$, $id_{V'} \in \mathcal{H}(V' , V')$,

$$s_{V'} = f_1(V' , V') (id_{V'}) \in \Phi(f_0^{-1}(V') , V') .$$

Si $V' = X'$,

$$s_{X'} = f_1(X' , X') (id_{X'}) \in \Phi(X , X') .$$

Il suffit de montrer que $s_{X'}$ admet f_0 comme fonction sous-jacente, et que f_1 coïncide avec le morphisme associé à $s_{X'}$ par la méthode du (α). Soient les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(V' , V') \arrow[r, "f_1(V' , V')"] \arrow[d, "\mathcal{H}(i)"'] & \Phi(f_0^{-1}(V') , V') \arrow[d, "\Phi(i)"] \\
\mathcal{H}(V' , X') \arrow[r, "f_1(V' , X')"] & \Phi(f_0^{-1}(V') , X') \\
\mathcal{H}(X' , X') \arrow[r, "f_1(X' , X')"] \arrow[u] & \Phi(X , X') , \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On obtient

$$\Phi(i_{V' \to X'})s_{V'} = s/f_0^{-1}(V') .$$

Ceci montre que les $s_{V'}$, définis ici, coïncident avec les $s_{V'}$, définis dans (α) $s_{V'} \in \Phi(f_0^{-1}(V') , V')$. La fonction $\tilde{s}$ associée à s est telle que $\tilde{s}(f_0^{-1}(V')) \subset V'$, donc $\tilde{s} = f_0$. D'autre part, le diagramme suivant montre que $f_1(V' , W)h = \Phi(h)s_{V'}$, donc que le morphisme associé à s coïncide avec f_1 ,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(V' , V') \arrow[r, "f_1(V' , V')"] \arrow[d, "\mathcal{H}(h)"'] & \Phi(f_0^{-1}(V') , V') \arrow[d, "\Phi(h)"] \\
\mathcal{H}(V' , W) \arrow[r, "f_1(V' , W)"] & \Phi(f_0^{-1}(V') , W)
\end{tikzcd}$$

COROLLAIRE 1. - *Tout morphisme* (f_0 , f_1) *d'un modèle lisse* $(W , \mathcal{H}_W)$, *dans un modèle lisse* $(W' , \mathcal{H}_{W'})$, *est entièrement déterminé par l'application* f_0 *qui est donc analytique :* f_1 *est l'injection canonique de* $f_0^* \mathcal{H}_{W'}$ *dans* $\mathcal{H}_W$, *et la section associée au morphisme est* f_0 (*considéré comme élément de* $\Phi(W , W')$.

COROLLAIRE 2. - $(X , \Phi) \xrightarrow{(f_0 , f_1)} (X' , \Phi') \xrightarrow{(g_0 , g_1)} (W , \mathcal{H})$ ($(W , \mathcal{H})$ *modèle lisse). Si* (g_0 , g_1) *est représenté par* $s' \in \Phi'(X' , W)$, *le composé* $g \circ f$ *est représenté par* $f_1(W)s' \in \Phi(X , W)$,

$$f_1(W) : \Phi'(W) \to (f_{0*} \Phi)(W) .$$

COROLLAIRE 3. - *Soit le modèle* $(X , \Phi) = \mu(U , F , f)$, *et soit* i_0 *l'injection canonique :* $X \to U$. *Pour tout ouvert* W , *on a un morphisme* $i_1(W)$: $i_0^* \mathcal{H}(U , W) \to \Phi(W)$, *donc un morphisme :*

$$(X , \Phi) \xrightarrow{(i_0\ i_1)} (U , \mathcal{H}) ,$$

déterminé par la section $\sigma \in \Phi(X_0 , U)$,

$$\sigma = i_1(U)\ (Id_U) .$$

Remarque. - Soit G un espace de Banach. Un morphisme

$$(f_0 , f_1) : (X , \Phi) \to (G , \mathcal{H})$$

sera dit nul, si la section $s \in \Phi(X , G)$, représentant le morphisme, est nulle (faisceau d'e. v.). f_0 envoie alors X sur 0 .

PROPOSITION 3. - *Soient* E , F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert de* E , *et* f *un morphisme du modèle lisse* $(U , \mathcal{H}_U)$ *dans le modèle lisse* $(F , \mathcal{H}_F)$ (f_0 *application analytique associée). Pour tout e. a. b.* (X , Φ) , *l'ensemble des morphismes* $g = (g_0 , g_1)$ *de* (X , Φ) *dans le modèle* $(X_0 , \Phi) = \mu(U , F , f_0)$ *s'identifie à l'ensemble des morphismes* $u = (u_0 , u_1)$ *de* (X , Φ) *dans le modèle lisse* $(U , \mathcal{H}_U)$, *tels que* $f \circ u = 0$.

LEMME 3. - *Soient* G , G' , G'' *trois espaces de Banach,* W *un ouvert de* G , *et des applications analytiques* $\varphi \in \mathcal{H}(W , G')$ *et* $\nu \in \mathcal{H}(W , \mathcal{L}(G' , G''))$ *qui définissent* $\varphi' = \nu.\varphi \in \mathcal{H}(W , G'')$. *Si* (X , Φ) *est un e. a. b., et si* $s \in \Phi(Y , W)$ (Y *ouvert de* X) *vérifie* $\Phi(\varphi)(s) = 0$, *alors* $\Phi(\varphi')(s) = 0$.

La propriété étant de caractère local, on se ramène au cas où (X , Φ) est un modèle $\mu(U , F , f)$. La démonstration se fait alors sans difficulté.

Démonstration de la proposition 3. - $(f \circ u = 0)$ est équivalent à :

$$\forall\ h \in \mathfrak{N}(f_0/U' , G) \quad (U' \text{ ouvert de } U), \qquad u_1(U' , G)(h) = 0 .$$

En effet, d'après le corollaire 2 , $f \circ u = 0$ est équivalent à :

$$u_1(U , F)f_0 = 0 .$$

Soit le carré commutatif $(h \in \mathcal{H}_U(U' , G)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_U(U' , U') & \xrightarrow{u_1(U' , U')} & \Phi(u_0^{-1}(U') , U') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}_U(h)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi(h)} \\
\mathcal{H}_U(U' , G) & \xrightarrow{u_1(U' , G)} & \Phi(u_0^{-1}(U') , G)
\end{array}$$

On applique ceci à $\mathrm{Id}_{U'}$:

$$\Phi(h)\, u_1(U' , U')\, (\mathrm{Id}_{U'}) = u_1(U' , G)\, \mathcal{H}_U(h)\, (\mathrm{Id}_{U'}) ,$$

si $s = u_1(U' , U')\, (\mathrm{Id}_{U'})$,

$$\Phi(h)s = u_1(U' , G)(h) .$$

D'autre part, $u_1(U' , F)\, (f_0/U') = 0$, donc

$$\Phi(f/U')(s) = 0 .$$

Or,

$$\forall\ h \in \mathcal{N}(f_0/U' , G) \quad h = \lambda f_0/U' \quad (\lambda \in \mathcal{H}(U' , \mathcal{L}(F , G))) .$$

Il suffit d'appliquer le lemme 3, avec $Y = u_0^{-1}(U')$ et $W = U'$, pour obtenir $\Phi(h)(s) = 0$, donc $u_1(U' , G)(h) = 0$.

La réciproque est évidente : il suffit de prendre $h = f_0$.

Soit $(i_0 , i_1) = i$ le morphisme canonique

$$(X_0 , \Phi_0) \to (U , \mathcal{H}_U) .$$

$f \circ i = 0$, car $f_0 \in \mathcal{N}(f_0 , F)$; donc, si u se factorise à travers i , $f \circ u = 0$.

Réciproquement, si $f \circ u = 0$, $u_1(U' , G)$ se factorise à travers $i_1(U' , G)$ (car $u_1(U' , G)\, j(G) = 0$).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N}(f_0/U' , G) \arrow[r, "j(G)"] & \mathcal{H}(U' , G) \arrow[rr, "i_1(U' , G)"] \arrow[dr, "u_1(U' , G)"'] & & (i_{0*}\, \Phi_0)(U' , G) \arrow[r] \arrow[dl, "\tilde{g}_1(U' , G)"] & 0 \\
& & & (u_{0*}\, \Phi)(U' , G) & &
\end{tikzcd}$$

$$u_1(U' , G) = \tilde{g}_1(U' , G)\, i_1(U' , G) .$$

D'autre part, $f \circ u = 0$ entraîne $f_0 \circ u_0 = 0$, donc

$$u_0 = i_0 \circ g_0 , \qquad g_0 : X \to X_0 .$$

On peut donc écrire $\tilde{g}_1(U' , G) = i'_{0*}\, g_1(U' , G)$, et obtenir un morphisme

$$g_1(U' , G) : \Phi_0(U' , G) \to (g_{0*}\, \Phi)(U' , G) .$$

Pour un ouvert W de G, le faisceau $\Phi(W)$ étant l'image dans $\Phi(G)$ du sous-faisceau $\mathcal{H}(W)$ de $\mathcal{H}(G)$ par $i_1(G)$, il en résulte que $u_1(U', W)$ se factorise aussi à travers $i_1(U', W)$. Les morphismes $g_1(U', W)$ caractérisent un morphisme unique $(g_0, g_1) = g$ vérifiant $u = i \circ g$.

COROLLAIRE 4. - Tout modèle $\mu(U, F, f)$ est un noyau de la double flèche $U \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} F$ dans la catégorie des e. a. b.

3. Propriétés générales de la catégorie des espaces analytiques banachiques.

(a) Sous-espaces analytiques banachiques.

Un sous-espace analytique banachique de (X, Φ) est un e. a. b. (X', Φ'), tel qu'il existe un morphisme $j = (j_0, j_1) : (X', \Phi') \to (X, \Phi)$ tel que j_0 soit l'injection canonique d'un sous-espace X' de X dans X, et que, pour tout espace de Banach G, le morphisme

$$j_1(G) : (j_0)^* \Phi(G) \to \Phi'(G)$$

fasse de $\Phi'(G)$ un quotient de $(j_0)^* \Phi(G)$ (j est alors un monomorphisme).

(b) Produits finis.

Cas des modèles lisses. - Soient deux modèles lisses U' et U'', (X, Φ) un e. a. b. quelconque :

$$\mathrm{Mor}(X, U' \times U'') = \Phi(X, U' \times U'') = \Phi(X, U') \times \Phi(X, U'') .$$

Ceci montre que $U' \times U''$ est le produit des modèles lisses.

Cas de deux modèles $\mu(U', f', F')$ et $\mu(U'', f'', F'')$. - Leur produit est $\mu(U' \times U'', f' \times f'', F' \times F'')$. En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}(X, \mu(U' \times U'', f' \times f''), F' \times F'') \\
&\qquad = \{\varphi, \ \varphi \in \mathrm{Mor}(X, U' \times U''), \ (f' \times f'')\varphi = 0\} \qquad \text{(prop. 3)} \\
&\qquad = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Mor}(X, U') \times \mathrm{Mor}(X, U''), \ f' \circ \varphi_1 = f''\varphi_2 = 0\} \\
&\qquad = \mathrm{Mor}(X, \mu(U', f', F')) \times \mathrm{Mor}(X, \mu(U'', f'', F'')) .
\end{aligned}$$

Cas de deux e. a. b. quelconques X et Y. - Il suffit de considérer des recouvrements de X et Y par des ouverts X_i et Y_j, (X_i, Φ_i) et (Y_j, Φ_j) étant isomorphes à des modèles $(\Phi_i = i^* \Phi$ ou $i : X_i \to X)$. On transporte la structure d'e. a. b. du produit des modèles sur $X_i \times Y_j$ (les espaces sous-jacents étant homéomorphes). Les structures d'e. a. b. ainsi définies localement se reccl-lent, ce qui permet de définir sur $X \times Y$ une structure d'e. a. b. qui vérifie la propriété du produit.

(c) Noyaux de doubles flèches.

Soient u et v deux morphismes de X dans X_1. Un noyau de la double flèche (u , v) est un sous-espace analytique banachique X' de X, tel que, pour tout e. a. b. Y,

$$\mathrm{Mor}(Y , X') = \{h , \quad h \in \mathrm{Mor}(Y , X) u_0 h = v_0 h\} .$$

Construction. - On suppose que $X = \mu(U , F , f)$, $X_1 = \mu(U_1 , F_1 , f_1)$, et que u et v se prolongent en des applications analytiques de U dans E_1. D'après la proposition 3, $X' = \mu(U , F \times E_1 , (f , v - u))$ répond à la question.

Cas général. - On construit X' localement.

La catégorie des e. a. b., admettant des noyaux de double flèche et des produits finis, admet des produits fibrés et des limites projectives finies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Some applications of the new theory of Banach analytic spaces, J. London math. Soc., t. 41, 1966, p. 70-78.

[2] CARTAN (Henri). - Thèse de Douady, Séminaire Bourbaki, t. 18, 1965/66, n° 296, 16 p.

[3] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 1-95 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).