Gabriel Mokobodzki

Capacités fonctionnelles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 1 (1966-1967), exp. nº 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A1_0>

10 novembre 1966

CAPACITÉS FONCTIONNELLES

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - Dans son article "Forme abstraite du théorème de capacitabilité" [1], G. CHOQUET a proposé diverses extensions de la notion de capacité, en supposant que l'ensemble des valeurs prises par les capacités n'est plus $\mathbb{R}$, mais un ensemble réticulé convenable, permettant d'obtenir la capacitabilité pour les ensembles sousliniens.

La notion de capacité fonctionnelle est alors un cas particulier d'une telle extension, utile dans les applications.

Définitions. Notations. - Soient X , Y deux espaces topologiques séparés, F_X , F_Y respectivement les fonctions numériques définies sur X , Y , à valeurs dans $[0, \infty]$, K_X , K_Y les sous-ensembles de F_X , F_Y composés de fonctions semi-continues supérieurement, à support compact.

On dira qu'une application de F_X dans F_Y est une capacité fonctionnelle si elle satisfait aux propriétés suivantes :

1° $(f_1 \leqslant f_2) \implies (\mathcal{C}(f_1) \leqslant \mathcal{C}(f_2))$;

2° $(h \in K_X) \implies \mathcal{C}(h) \in K_Y$;

3° Pour toute suite croissante $(f_n) \subset F_X$, on a

$$\mathcal{C}(\sup f_n) = \sup \mathcal{C}(f_n) \quad ;$$

4° Pour toute suite décroissante $(h_n) \subset K_X$, on a

$$\mathcal{C}(\inf h_n) = \inf \mathcal{C}(h_n) \quad .$$

On a alors une notion de capacitabilité : un élément $f \in F_X$ est dit capacitable si l'on a

$$\mathcal{C}(f) = \sup \mathcal{C}(h) \qquad (h \leqslant f \ , \ h \in K_X) \quad .$$

Au moyen de l'opération A de Souslin, on définira des éléments K-analytiques (ou K-sousliniens) dans F_X et F_Y .

Les principaux résultats obtenus sont les suivants : soit $\mathcal{C}$ une capacité fonctionnelle de F_X dans F_Y ;

1° Pour tout $f \in F_X$, capacitable pour toute capacité, $\mathcal{C}(f)$ est capacitable pour toute capacité ;

2° Tout $f \in F_X$, K-analytique, est capacitable ;

3° Pour tout $f \in F_X$, K-analytique, $\mathcal{C}(f)$ est aussi K-analytique.

EXEMPLE 1. - Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, V un noyau positif de $C_K(X)$ dans $C(X)$, et, pour tout $x \in X$, soit μ_x la mesure $\varepsilon_x V$. Pour tout f positive sur X, on pose

$$\mathcal{C}(f)(x) = \int^* f \, d\mu_x \quad .$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{C}(f)$ est une capacité fonctionnelle et, pour tout $f \in F_X$, K-analytique, $\mathcal{C}(f)$ est K-analytique, donc universellement mesurable, et l'on a, pour toute mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur X,

$$\int V(f) \, d\mu = \int \mathcal{C}(f) \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \in K_X}} \int V(\varphi) \, d\mu$$

(en fait, on sait que si f est universellement mesurable, $V(f)$ l'est aussi).

EXEMPLE 2. - Soit X un ensemble convexe compact dans un e. l. c. On dira qu'une fonction numérique f positive est concave sur X, si, pour tout $x \in X$ et toute mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur K, de barycentre X, on a

$$\int^* f \, d\mu \leqslant f(x) \quad .$$

On peut montrer que l'application qui, à tout élément f de F_X, fait correspondre la plus petite fonction concave $g = \mathcal{C}(f)$, majorant f, est une capacité fonctionnelle, et que si f est K-analytique, alors

$$\mathcal{C}(f)(x) = \sup_{\mu < \varepsilon_x} \int f \, d\mu \,, \quad \text{où} \quad x \in X \quad \text{et} \quad \mu < \varepsilon_x \quad ,$$

signifie que μ est $\geqslant 0$, de barycentre x dans X.

<u>Remarque</u>. - On peut étendre la notion de capacité fonctionnelle en supposant seulement que, pour tout $f \in K_X$, $\mathcal{C}(f)$ est K-analytique. Il résulte alors des propriétés de l'opération A de Souslin que si f est K-analytique, alors $\mathcal{C}(f)$ est K-analytique, et si f est universellement capacitable, $\mathcal{C}(f)$ l'est aussi.

Soit S l'ensemble des suites finies (ordonnées) de nombres entiers. On désigne par Σ l'ensemble des suites infinies de nombres entiers. On ordonne S de la manière suivante :

$$(s < s') \iff (s \text{ est section commençante de } s') .$$

De même, pour $s \in S$ et $\sigma \in \Sigma$, on écrira $s < \sigma$ si s est une section commençante de σ.

On appelle <u>système déterminant</u> sur F_X, une application décroissante Δ de S dans K_X.

On prolonge Δ à Σ en posant, pour tout $\sigma \in \Sigma$,

$$\Delta(\sigma) = \inf_{s<\sigma} \Delta(s) .$$

On appelle <u>noyau du système déterminant</u>, la fonction numérique

$$f = \Delta(\Sigma) = \sup_{\sigma\in\Sigma} (\inf_{s<\sigma} \Delta(s)) = \sup_{\sigma\in\Sigma} \Delta(\sigma) .$$

On dit que f <u>est</u> K-<u>analytique</u>, si c'est le noyau d'un système déterminant sur F_X.

DÉFINITION. - On dira qu'un système déterminant Δ est <u>privilégié</u> si, pour toute capacité $\mathcal{C}$ sur F_X, on a

$$\mathcal{C}(\Delta(\Sigma)) = \sup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}(\Delta(\sigma)) .$$

REMARQUE 1. - Dans la définition précédente, on peut se restreindre aux capacités à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$.

REMARQUE 2. - Le noyau d'un système déterminant privilégié est automatiquement capacitable.

PROPOSITION. - <u>Tout</u> f, K-<u>analytique, peut être obtenu comme noyau d'un système déterminant privilégié</u>.

<u>Démonstration</u>. - Appelons longueur d'une suite $s \in S$, le nombre $\ell(s)$ de ses éléments ; introduisons le nouvel ordre sur S $(s \lessdot s')$ si $\ell(s) = \ell(s')$, et s et s' s'écrivent

$$s = (n_1 , n_2 , \ldots , n_q) , \qquad s' = (n'_1 , n'_2 , \ldots , n'_p) ,$$

si l'on a $n_q \leqslant n'_p$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$.

Désignons par S_p l'ensemble des éléments de S de longueur p, et par $T_q(s)$ (resp. $T_q(\sigma)$) le terme de rang q de $s \in S$ (resp. $\sigma \in \Sigma$).

Considérons le nouveau système déterminant, défini pour tout $\sigma \in S$ par

$$\Delta'(s) = \sup_{s' \leqslant s} \Delta(s') .$$

On a évidemment $\Delta(\Sigma) \subset \Delta'(\Sigma)$. Soient

$$\sigma \in \Sigma ; \qquad (x , \lambda) \in X \times \underset{\sim}{R} ; \qquad \lambda < [\Delta'(\sigma)](x) .$$

L'ensemble S_p est aussi bien ordonné pour l'ordre lexicographique. Pour tout entier p , posons alors

$$s_p = \inf_{\substack{\ell(s)=p \\ s \leqslant \sigma \\ \lambda<[\Delta(s)](x)}} s \qquad (\text{ inf au sens de l'ordre lexicographique}) .$$

Pour tout entier q , soit $m_q = \sup_{p \geqslant q} T_q(s_p)$; on a $T_q(s_p) \leqslant T_q(\sigma)$. Soit σ' la suite infinie de terme général m_q , on a bien

$$[\Delta(\sigma')](x) > \lambda ,$$

par suite

$$\Delta'(\Sigma) = \Delta(\Sigma) .$$

Montrons maintenant que Δ' est privilégié. Pour tout $s \in S$, posons

$$g_s = \sup_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ s < \sigma}} \Delta(\sigma) ; \qquad f_s = \sup_{s' \leqslant s} g_s .$$

Soit $\mathcal{C}$ une capacité sur F_X à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$. Pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$, la famille des fonctions $(f_s)_{\ell(s)=p}$ est dénombrable, filtrante croissante, et, en particulier,

$$f_s = \sup_{\substack{s<t \\ \ell(t)=\ell(s)+1}} f_t ; \qquad \Delta'(\Sigma) = \sup_{\ell(s)=1} f_s .$$

Par suite $\mathcal{C}(f_s) = \sup_{\substack{s<t \\ \ell(t)=\ell(s)+1}} \mathcal{C}(f_t)$.

Soit $\lambda < \mathcal{C}(\Delta(\Sigma))$. Construisons par récurrence une suite s_n d'éléments de S , telle que :

1° $\ell(s_{n+1}) = \ell(s_n) + 1$ et $s_n < s_{n+1}$;
2° $\mathcal{C}(f_{s_n}) > \lambda$.

Cette construction est possible d'après les remarques précédentes. Il existe une suite σ , définie par $s_n < \sigma$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$; on a

$$\Delta'(\sigma) \leqslant \Delta'(\Sigma) \quad \text{et} \quad \Delta'(s_n) \geqslant f_{s_n} ,$$

d'où

$$\mathcal{C}(\Delta'(s_n)) \geqslant \mathcal{C}(f_{s_n}) > \lambda$$

et

$$\mathcal{C}(\Delta'(\sigma)) = \inf \mathcal{C}(\Delta'(s_n)) \geqslant \lambda .$$

(On reprend la méthode de Choquet pour montrer que tout ensemble K-analytique est capacitable.)

Pour toute capacité $\mathcal{C}$ sur F_X, on a bien

$$\mathcal{C}(\Delta'(\Sigma)) = \sup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}(\Delta'(\sigma)) .$$

Soient maintenant f une fonction K-analytique, Δ un système déterminant privilégié sur F_X tel que $\Delta(\Sigma) = f$, $\mathcal{C}$ une capacité fonctionnelle sur F_X à valeurs dans F_Y. D'après ce qui précède, le système déterminant sur F_Y, défini par

$$\Delta_1(s) = \mathcal{C}(\Delta(s)) , \qquad \forall\ s \in S ,$$

a pour noyau

$$\Delta_1(\Sigma) = \sup_{\sigma\in\Sigma} \Delta_1(\sigma) = \sup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}(\Delta(\sigma)) = \mathcal{C}(\Delta(\Sigma)) = \mathcal{C}(f) .$$

Plus généralement, soient $f \in F_X$, un élément capacitable pour toute capacité, $\mathcal{C}$ une capacité fonctionnelle de F_X dans F_Y, $\mathcal{T}$ une capacité fonctionnelle de F_Y dans F_Z, où Z est un espace topologique séparé, alors $\mathcal{T} \circ \mathcal{C}$ est une capacité fonctionnelle de F_X dans F_Z.

Comme f est capacitable pour $\mathcal{T} \circ \mathcal{C}$, on a

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{C})(f) = \sup_{\substack{\varphi\in K_X \\ \varphi\leqslant f}} \mathcal{T} \circ \mathcal{C}(\varphi) = \sup_{\substack{\varphi\in K_X \\ \varphi\leqslant f}} \mathcal{T}(\mathcal{C}(\varphi)) = \mathcal{T}(\mathcal{C}(f)) .$$

Mais comme $\mathcal{C}(\varphi) \in K_Y$, lorsque $\varphi \in K_X$, la dernière égalité montre que $\mathcal{C}(f)$ est capacitable pour toute capacité.

<u>Remarque</u>. – Le choix de l'ensemble $K_X \subset F_X$ permet d'identifier les éléments K-analytiques de F_X avec l'ensemble des applications f de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, tels que, dans $X \times \overline{\mathbb{R}^+}$, l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x , \lambda) \in X \times \overline{\mathbb{R}^+} ; \quad \lambda \leqslant f(x)\}$$

soit K-analytique au sens classique.

En particulier, la proposition précédente reste valable dans les hypothèses les plus générales où s'est placé G. CHOQUET pour établir la capacitabilité des ensembles K-sousliniens.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 83-89.