Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gabriel Mokobodzki

Espaces de Riesz complètement réticulés et ensembles équicontinus de fonctions harmoniques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 1 (1965-1966), exp. n° 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 6

3 février 1966

ESPACES DE RIESZ COMPLÈTEMENT RÉTICULÉS ET ENSEMBLES ÉQUICONTINUS DE FONCTIONS HARMONIQUES

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - L'origine de ce travail a été la recherche d'une démonstration du résultat suivant, directement applicable aux espaces de fonctions harmoniques définis dans les axiomatiques de BRELOT ou de BAUER :

Soient X un espace topologique séparé, H un espace vectoriel de fonctions numériques continues sur X.

On suppose que H satisfait aux conditions suivantes :

1° H est réticulé pour l'ordre défini par H^+ ;

2° Pour toute famille filtrante décroissante (h_α) d'éléments de H^+, la fonction numérique $\inf_\alpha h_\alpha = h$ est un élément de H ;

3° Pour tout $h_0 \in H^+$, et toute suite (h_n) d'éléments de H, $0 \leqslant h_n \leqslant h_0$, qui converge simplement vers $h \in H^+$, la convergence est uniforme sur tout compact de X.

On peut alors démontrer la propriété suivante :

4° Pour tout $h_0 \in H^+$, l'ensemble $A = \{h \in H^+ ;\ 0 \leqslant h \leqslant h_0\}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X.

Pour faire cette démonstration, j'ai dû faire appel à une étude approfondie des formes linéaires sur les espaces de Riesz complètement réticulés.

I. Espaces de Riesz complètement réticulés.

Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{R}$.

Les notations générales employées sont celles de BOURBAKI ([2], chap. I), sauf pour une définition : nous appellerons espace vectoriel complètement réticulé, un espace de Riesz, complètement réticulé au sens de Bourbaki.

Les résultats généraux sur les espaces vectoriels complètement réticulés peuvent être trouvés dans AMEMIYA [1] et DIEUDONNÉ [5].

Soit H un espace vectoriel complètement réticulé.

1. Notations, définitions.

1° Soient $a , b \in H$, $a \leqslant b$. On notera

$$[a , b] = \{x \in H ; \quad a \leqslant x \leqslant b\} ,$$

$$]a , b] = \{x \in H ; \quad x \in [a , b] , \quad x \neq a\} ,$$

etc.

2° On dira qu'un ensemble $A \subset H$ est épais si

$$(0 \leqslant |y| \leqslant |x| \quad \text{et} \quad x \in A) \implies (y \in A) .$$

3° Une forme linéaire ℓ sur H sera dite normale si, pour tout ensemble filtrant décroissant $(x_\alpha) \subset H^+$, tel que $\inf_\alpha x_\alpha = 0$, on a

$$\lim_\alpha \ell(x_\alpha) = 0 .$$

4° Les formes linéaires normales sur H forment un espace vectoriel qu'on appellera le dual normal de H.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons toujours que H et son dual normal L sont en dualité, c'est-à-dire que L sépare H.

THÉORÈME 1.

1° Toute forme linéaire normale ℓ sur H est relativement bornée.

2° Dans l'espace vectoriel Ω de toutes les formes linéaires relativement bornées sur H, le dual normal L de H forme une bande.

COROLLAIRE 2. - Si ℓ est normale, $\ell^+ = \sup(0 , \ell)$ et $\ell^- = \sup(0 , -\ell)$ sont aussi normales.

Considérons maintenant H', le dual normal de L. L'espace H se plonge canoniquement, injectivement, dans H'. De plus, pour tout $x \in H$,

$$\sup_H (x , 0) = \sup_{H'} (x , 0) ,$$

de sorte qu'on peut identifier H à son image dans H'.

THÉORÈME 3. - Tout $x \in H'^+$ s'écrit

$$x = \sup_{\substack{0 \leqslant y \leqslant x \\ y \in H}} y .$$

COROLLAIRE 4.

1° H est un sous-espace vectoriel épais de H' .

2° Pour tous $a , b \in H$ (resp. H'), $a \leqslant b$, l'intervalle $[a , b]$ est compact pour $\sigma(H , L)$ (resp. $\sigma(H' , L)$).

COROLLAIRE 5.

1° L est complet pour la topologie de Mackey $\tau(L , H)$.

2° H et H' ont même dual normal.

Cas particulier important. - On dit qu'un élément $u \in H^+$ est une unité pour l'ordre si, pour tout $x \in H$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|x| \leqslant \lambda u \quad .$$

PROPOSITION 6.

1° Si H possède une unité pour l'ordre u , alors H est identique à son bidual normal H' .

2° L'application $\ell \longmapsto \langle|\ell| , u\rangle = \|\ell\|$ définit une norme sur L pour laquelle L est complet.

3° H s'identifie au dual topologique de L , lorsque L est munie de la topologie associée à la norme définie dans 2°.

COROLLAIRE 7. - Dans H , possédant une unité pour l'ordre u , les ensembles bornés pour l'ordre, bornés pour la topologie $\sigma(H , L)$ (ou $\tau(H , L)$), relativement compacts pour $\sigma(H , L)$, sont les mêmes.

L'intérêt des espaces vectoriels complètement réticulés provient du fait qu'on peut y étendre des théorèmes importants de théorie de la mesure.

Nous dirons qu'une forme sous-linéaire p sur H est normale si, pour tout ensemble filtrant décroissant $(x_\alpha) \subset H^+$, tel que $\inf_\alpha x_\alpha = 0$, on a

$$\lim_\alpha p(x_\alpha) = \lim_\alpha p(- x_\alpha) = 0 \quad .$$

Si p est normale, et si on a une forme linéaire $\ell \leqslant p$, alors ℓ est normale.

Soit $A \subset L$, dual normal de H . On définira la forme sous-linéaire p_A sur H par

$$p_A(x) = \sup_{\ell \in A} \langle|\ell| , |x|\rangle \qquad \forall\ x \in H \quad .$$

PROPOSITION 8. - Soit $A \subset L$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est relativement compact pour $\sigma(L , H)$.

2° La forme sous-linéaire p_A est normale sur H .

3° Pour toute suite (x_n) décroissante d'éléments de H^+ , telle que

$$\inf_n x_n = 0 , \qquad \inf_n p_A(x_n) = 0 .$$

4° L'ensemble

$$B = \bigcup_{\ell \in A} [- |\ell| , + |\ell|]$$

est relativement compact pour $\sigma(L , H)$.

5° L'enveloppe convexe fermée de A est faiblement compacte.

THÉORÈME 9. - Toute suite de Cauchy faible $(\ell_n) \subset L$ est faiblement convergente dans L (c'est-à-dire pour $\sigma(L , H)$).

DÉFINITION 10. - Soit (E , F) un système dual d'espaces vectoriels. On dit qu'une partie A de F est limitée si elle vérifie les conditions suivantes équivalentes (cf. DIEUDONNÉ [5]) :

(a) Toute suite faiblement convergente (x_n) de E converge uniformément sur A .

(b) Toute suite de Cauchy faible (x_n) de E converge uniformément sur A .

PROPOSITION 11. - Soit $A \subset L$, dual normal de H . Pour que A soit limité, il faut et il suffit que A soit relativement compact pour $\tau(L , H)$.

La proposition 9 permet de comparer la convergence dans H au sens de l'ordre et au sens de la topologie $\tau(H , L)$.

DÉFINITION 12. - On dit qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur H converge pour l'ordre s'il existe $X_0 \in \mathfrak{F}$, X_0 borné pour l'ordre, et si

$$\inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup X) = \sup_{X \in \mathfrak{F}} (\inf X) .$$

THÉORÈME 13. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur H qui converge pour l'ordre. Alors $\mathfrak{F}$ converge pour la topologie de Mackey $\tau(H , L)$.

Pour des résultats plus fins, nous aurons besoin de théorèmes dus à NACHBIN et GROTHENDIECK.

Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E , B la boule unité de E .

PROPOSITION 14. (NACHBIN). - Soient H un espace vectoriel complètement réticulé, $u \in H^+$.

Pour toute application linéaire π de F dans H telle que

$$\pi(B \cap F) \subset [- u , + u] ,$$

il existe une application linéaire $\tilde{\pi}$ de E dans H , prolongeant π , et telle que

$$\pi(B) \subset [- u , + u] .$$

PROPOSITION 15 (GROTHENDIECK). - Soient K un espace compact, E un espace localement convexe séparé, π une application linéaire de $\mathcal{C}(K)$ dans E .

Si π est faiblement compacte, alors π transforme les suites de Cauchy faibles en suites convergentes et les parties faiblement compactes en des parties relativement compactes.

II. Espaces fonctionnels complètement réticulés.

Dans cette deuxième partie, on reprend les notations de l'introduction.

THÉORÈME 16. - Pour tout $h_0 \in H^+$, l'ensemble

$$A = \{h \in H^+ , \ h \leqslant h_0\}$$

est compact pour la topologie de la convergence simple dans X .

Démonstration. - Pour tout $x \in X$, la forme linéaire ℓ_x définie sur H par

$$\langle \ell_x , h\rangle = h(x) \qquad \text{pour tout } h \in H$$

est une forme linéaire normale, $\geqslant 0$, et les formes linéaires normales, $(\ell_x)_{x\in X}$, séparent H .

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 4.

LEMME 17. - Soient $h_0 \in H^+$, $h_0 \neq 0$, et soit H_0 le sous-espace vectoriel de H défini par

$$(h \in H_0) \iff (\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+ , \text{ tel que } |h| \leqslant \lambda h_0) .$$

Soit L_0 le dual normal de H_0 .

Alors toute suite (h_n) d'éléments de H_0 qui converge vers $h \in H_0$, pour la topologie $\sigma(H_0 , L_0)$ est bornée pour l'ordre dans H_0 .

Démonstration. - La suite h_n est faiblement compacte dans H_0, d'après le corollaire 7, elle est bornée pour l'ordre.

COROLLAIRE 18 (Mêmes notations que pour le lemme 17). - Pour tout compact K de X, l'ensemble des formes linéaires $(\ell_x)_{x\in K}$ est une partie limitée dans le dual L_0 de H_0, par suite elle est compacte pour $\tau(L_0 , H_0)$.

Démonstration. - Par translation et homothétie, toute suite h_n d'éléments de H_0, qui converge vers $h \in H_0$, pour $\sigma(H_0 , L_0)$, peut être amenée dans l'ensemble $A = \{h \in H^+ , \ 0 \leqslant h \leqslant h_0\}$.

D'après la propriété 3°, vérifiée par l'espace H, la suite h_n converge uniformément vers h sur tout compact K de X, autrement dit, la famille $(\ell_x)_{x\in K}$ est une partie limitée de L_0.

D'après la proposition 11, l'ensemble $(\ell_x)_{x\in K}$ est compact pour $\tau(L_0 , H_0)$, puisqu'il est déjà compact pour $\sigma(L_0 , H_0)$.

COROLLAIRE 19. - Pour tout $h_0 \in H^+$, l'ensemble

$$A = \{h \in H^+ , \ h \leqslant h_0\}$$

est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X.

Démonstration. - L'ensemble A est compact pour $\sigma(H_0 , L_0)$, par suite, pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $(\ell_x)_{x\in K}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur A, d'où le résultat.

Soient maintenant Y un espace compact, X un ensemble partout dense dans Y.

On se donne un sous-espace vectoriel complètement réticulé H de $\mathcal{C}(X , \underset{\approx}{R})$, satisfaisant aux conditions 1° et 2° définies dans l'introduction, et tel qu'il existe $h_0 \in H^+$, $h_0 \geqslant 1$.

PROPOSITION 20. - Soit $h_0 \in H^+$, et soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}(Y)$, telle que :

1° La suite (f_n) converge faiblement dans $\mathcal{C}(Y)$;
2° Pour tout n, $f_{n|X} \in H^+$, et $0 \leqslant |f_{n|X}| \leqslant h_0$.

Dans ces conditions la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de X vers $f \in H$.

Démonstration. - Soit $F \subset \mathcal{C}(Y)$, l'espace vectoriel engendré par la suite (f_n), et soit π l'injection canonique de F dans H. D'après NACHBIN, il existe une application linéaire $\tilde{\pi}$ de $\mathcal{C}(Y)$ dans H, qui prolonge π et telle que,

$$(f \in \mathcal{C}(Y)\ ,\ \|f\| \leqslant 1) \implies (\pi(f) \in [-h_0\ ,\ +h_0])\ .$$

L'application linéaire $\tilde{\pi}$ est alors faiblement compacte, et on conclut avec le théorème de Grothendieck.

COROLLAIRE 21 (mêmes notations que pour la proposition précédente). - Soit $A \subset \mathcal{C}(Y)$, un ensemble borné, compact pour la topologie de la convergence simple, et tel que pour tout $f \in A$, $f_{|X} \in H$.

Alors A est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X.

(Appliquer le théorème d'Eberlein. Cf. GROTHENDIECK [6].)

Soient maintenant Ω un espace localement compact, ω un ouvert relativement compact de Ω.

Soient $H_\Omega \subset \mathcal{C}(\Omega\ ,\ \underset{\sim}{R})$, et $H_\omega \subset \mathcal{C}(\omega\ ,\ \underset{\sim}{R})$ des espaces vectoriels complètement réticulés satisfaisant aux conditions 1° et 2° définis dans l'introduction. On suppose de plus qu'il existe $h_0 \in H_\omega^+$ tel que $h_0(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \omega$.

PROPOSITION 22. - Si pour tout $h \in H_\Omega$, $h_{|\omega} \in H_\omega$, alors pour tout ensemble $A \subset H_\Omega$, compact pour $\sigma(H_\Omega\ ,\ L_\Omega)$, l'ensemble $A_{\overline{\omega}}$ des restrictions à $\overline{\omega}$ des éléments de A, est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de ω.

Démonstration. - Pour toute mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur Ω, à support compact, la forme linéaire ℓ_μ, définie sur H_Ω par

$$\langle h\ ,\ \ell_\mu \rangle = \int h\, d\mu\ ,$$

est normale sur H ; par suite $A_{\overline{\omega}}$ est compact pour $\sigma(\mathcal{C}(\overline{\omega})\ ,\ \mathcal{M}(\overline{\omega}))$. La proposition se déduit alors du corollaire précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (Ichiro). - On ordered topological linear spaces, Proceedings of the international symposium on linear spaces [1960. Jerusalem], p. 14-23. - Jerusalem, Jerusalem Academic Press, 1961.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[4] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Montréal, Eté 1965, n° 14).

[5] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les espaces de Köthe, J. Anal. math., Jérusalem, t. 1, 1951, p. 81-115.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques. 3a ediçao. - São Paulo, Sociedade de Matematica, 1961.

[7] NACHBIN (Leopoldo). - A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 28-46.

Concernant les ensembles équicontinus de fonctions harmoniques, on pourra consulter un article de LOEB, à paraître, et une note de CONSTANTINESCU :

CONSTANTINESCU (Corneliu). - Familles continues de mesures et équicontinuité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 1309-1312.