

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

CATHERINE DOLÉANS

## **Convergence des martingales et dérivation des fonctions d'ensembles**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 4 (1964-1965), exp. n° 4, p. 1-17

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1964-1965\\_\\_4\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A3_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE DES MARTINGALES ET DÉRIVATION DES FONCTIONS D'ENSEMBLES

par Catherine COLÉANI

Le but de cet exposé est de présenter de façon autonome quelques-uns des résultats sur la convergence des martingales établis, au moyen des méthodes de dérivation des fonctions d'ensemble, par KRICKEBERG et PAUC dans leur récent article [2]. Après avoir défini les martingales, considérées ici comme des familles de fonctions (n° 1.1), on montrera que toute martingale de variation semi-bornée est la différence de deux martingales positives (n° 1.3). On énoncera ensuite la condition (V) de Vitali (n° 2.1), et on établira le théorème de convergence (n° 2.2); puis on montrera que la condition de Vitali est satisfaite dans le cas de l'ensemble ordonné filtrant des partitions d'un cube de  $\mathbb{R}^n$  (n° 3.1 et 3.2). On appliquera enfin ces résultats, en en déduisant le théorème classique de convergence des martingales à ensemble d'indice dénombrable (n° 4.1), ainsi que le théorème de Lebesgue sur la dérivation des fonctions absolument continues (n° 4.3).

1. Espace ordonné des martingales.

1.1 Définition.

(a) Soient :

- $\Theta$  un ensemble filtrant croissant pour la relation  $\ll$ ,
- $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré,
- $(\mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  une famille de sous-tribus de  $\mathcal{E}$  telle que :  $\rho \ll \theta \implies \mathcal{G}_\rho \subset \mathcal{G}_\theta$ ,
- $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$  une famille de fonctions définies sur  $E$  à valeur numérique finie ou non, possédant pour tout  $\theta$  les propriétés :

- (i)  $f_\theta$  est  $\mathcal{G}_\theta$ -mesurable.
- (ii)  $\int_E f_\theta^+ d\mu$  ou  $\int_E f_\theta^- d\mu$  est fini.

$(f_\theta, \mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est alors un processus intégrable adapté (ou prémartingale de base  $(\mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ).

(b) Si l'on a, de plus,

$$\theta \ll \rho \implies f_\theta = E(f_\rho / \mathcal{G}_\theta) \text{ presque sûrement (p. s.)}$$

(autrement dit,  $f_\theta$  est égal à l'espérance conditionnelle de  $f_\rho$  pour  $\mathcal{G}_\theta$ , c'est-à-dire pour tout  $A \in \mathcal{G}_\theta$ ,  $\int_A f_\theta d\mu = \int_A f_\rho d\mu$ ),  $(f_\theta, \mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est alors

une martingale.

Si l'on a

$$\theta \ll \rho \implies f_\theta \leq E(f_\rho / \mathcal{B}_\theta) \text{ p. s. (respectivement } \geq),$$

$(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  est une sous-martingale (resp. surmartingale).

### 1.2 Ordre sur l'espace des martingales.

Une prémartingale  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  est dite de variation bornée (resp. semi-bornée vers le haut, vers le bas) si  $\mathcal{O}$  admet un sous-ensemble terminal  $\Delta$  tel que l'ensemble des nombres  $\int_A f_\theta d\mu$ ,  $\theta \in \Delta$ ,  $A \in \mathcal{B}_\theta$ , soit borné (resp. supérieurement, inférieurement).

En particulier, si une prémartingale  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  vérifie la propriété

$$\sup_{\theta \in \mathcal{O}} \int_E |f_\theta| d\mu < +\infty,$$

elle est de variation bornée.

La relation " $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}} \leq (g_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  si et seulement si  $f_\theta \leq g_\theta$  pour tout  $\theta \in \mathcal{O}$ " définit une relation d'ordre dans l'espace des prémartingales de base  $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$ .

**1.3 LEMME de décomposition. - Toute martingale de variation semi-bornée est la différence de deux martingales positives.**

### 1.4 Démonstration du lemme 1.3.

#### (a) Rappels.

(i) Si  $\varphi$  est une fonction d'ensemble  $\sigma$ -additive définie sur une tribu  $\mathcal{B}$  et à valeur numérique finie ou non,  $\varphi$  est dite de variation bornée (resp. semi-bornée vers le haut ou vers le bas) si l'ensemble des nombres  $\varphi(A)$ , où  $A \in \mathcal{B}$ , est borné (resp. borné supérieurement, inférieurement).

(ii) Dans l'espace des fonctions  $\sigma$ -additives définies sur une tribu  $\mathcal{B}$ , la relation " $\varphi \leq \psi$  si et seulement si  $\varphi(A) \leq \psi(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{B}$ " définit une structure d'ordre.

(iii) Si  $\mathcal{R}$  est une famille filtrante croissante de fonctions d'ensemble  $\sigma$ -additives définies sur une tribu  $\mathcal{B}$ , et si  $\mathcal{R}$  contient une fonction de variation semi-bornée vers le bas, la fonction d'ensemble

$$\psi(A) = \sup_{\varphi \in \mathcal{R}} \varphi(A)$$

définit une fonction  $\sigma$ -additive sur  $\mathfrak{B}$ , qui est la borne supérieure de  $\mathfrak{R}$  dans l'espace des fonctions  $\sigma$ -additives sur  $\mathfrak{B}$ .

(b) LEMME. - Pour toute sous-martingale  $(f_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  de variation bornée, il existe une martingale majorant  $(f_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  et de variation semi-bornée vers le haut.

Soit  $(f_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  une sous-martingale de variation bornée, posons

$$\varphi_\theta(A) = \int_A f_\theta d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}_\theta,$$

on définit ainsi une fonction d'ensemble  $\varphi_\theta$   $\sigma$ -additive sur  $\mathfrak{B}_\theta$ . De plus, il existe un ensemble terminal  $\Delta$  de  $\Theta$  et un nombre  $M$  tels que

$$\left| \int_A f_\theta d\mu \right| \leq M \quad \text{pour tout } \theta \in \Delta \text{ et tout } A \in \mathfrak{B}_\theta.$$

Ceci entraîne que les nombres  $\int_E f_\theta^+ d\mu$  pour  $\theta \in \Delta$  sont bornés par  $M$ ;  $\Delta$  étant terminal, et  $(f_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  étant une sous-martingale, on a

$$\int_E f_\theta^+ d\mu \leq M \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta.$$

Considérons les fonctions d'ensemble  $\psi_\theta$  définies par  $\psi_\theta(A) = \sup_{\rho \ll \theta} \varphi_\rho(A)$ ; la famille  $\mathfrak{R}$  formée des fonctions  $(\varphi_\rho)_{\rho \gg \theta}$  est filtrante croissante, la sous-martingale  $(f_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  étant de variation bornée, il existe au moins dans  $\mathfrak{R}$  une fonction  $\varphi_\rho$  de variation semi-bornée vers le bas sur  $\mathfrak{B}_\rho$ ,  $\psi_\theta$  est donc une fonction  $\sigma$ -additive sur  $\mathfrak{B}_\theta$ .

De plus,  $\mu(A) = 0$  entraîne  $\varphi_\rho(A) = 0$  pour tout  $\rho$ , donc  $\psi_\theta(A) = 0$  pour tout  $\theta$ ; il existe donc une fonction  $g_\theta$ ,  $\mathfrak{B}_\theta$ -mesurable, telle que

$$\psi_\theta(A) = \int_A g_\theta d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}_\theta.$$

Pour tout  $\theta \ll \rho$  et tout  $A \in \mathfrak{B}_\theta$ , on a

$$(1) \quad \varphi_\theta(A) = \int_A f_\theta d\mu \leq \psi_\theta(A) = \int_A g_\theta d\mu = \psi_\rho(A) = \int_A g_\rho d\mu.$$

On peut donc, en modifiant au besoin  $g_\theta$  sur un ensemble de mesure nulle, supposer  $g_\theta \geq f_\theta$ . De plus, les inégalités

$$\int_E f_\theta^+ d\mu \leq M \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta$$

entraînent

$$\int_E g_\theta^+ d\mu \leq M \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta,$$

ce qui avec (1) montre que  $(g_\theta, \mathfrak{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est une martingale majorant la sous-

martingale  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , cette martingale est même semi-bornée vers le haut, et, pour tout  $\theta$ ,  $g_\theta$  est presque partout  $< +\infty$ .

(c) Démonstration du lemme de décomposition. - Soit  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  une martingale de variation semi-bornée, on la supposera semi-bornée vers le haut (sinon, il suffit de considérer la martingale  $(-f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ).  $(f_\theta^+, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est alors une sous-martingale positive, bornée, et, d'après le lemme 1, il existe une martingale  $(g_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  supérieure à  $(f_\theta^+, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  et telle que, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $g_\theta$  soit presque partout finie. Définissons les fonctions  $h_\theta$  et  $k_\theta$  par

$$\begin{cases} h_\theta(x) = g_\theta(x) - f_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) < +\infty \\ k_\theta(x) = g_\theta(x) & \text{si } g_\theta(x) < +\infty \\ h_\theta(x) = f_\theta^-(x) & \text{si } g_\theta(x) = +\infty \\ k_\theta(x) = f_\theta^+(x) & \text{si } g_\theta(x) = +\infty \end{cases}$$

$(h_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  et  $(k_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  sont des martingales positives, et  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est la différence de ses deux martingales positives (c'est-à-dire

$$f_\theta(x) = k_\theta(x) - h_\theta(x)$$

en tout point  $x \in E$ ),

## 2. Condition de Vitali et théorème de convergence des martingales semi-bornées.

### 2.1 Condition de Vitali.

DÉFINITION. - Pour tout sous-ensemble  $M$  de  $E$ , on appelle recouvrement fin de  $M$  une famille  $(K_\theta)_{\theta \in \Theta}$  telle que  $K_\theta \in \mathcal{B}_\theta$  pour tout  $\theta$ , et  $M \subset \bigcup_{\theta \gg \rho} K_\theta$  pour tout  $\rho \in \Theta$ .

Soit  $\mathcal{G}_\omega$  la tribu engendrée par la réunion des tribus  $\mathcal{B}_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Dans la suite, on considérera la mesure  $\mu$  comme définie seulement sur  $\mathcal{G}_\omega$ , et on désignera par  $\mu^*$  la mesure extérieure associée, c'est-à-dire

$$\mu^*(M) = \inf_{\substack{B \supset M \\ B \in \mathcal{G}_\omega}} \mu(B)$$

Condition de Vitali :

(V) Pour tout sous-ensemble  $M$  de  $E$  de  $\mu^*$  mesure finie, tout recouvrement fin  $(K_\theta)_{\theta \in \Theta}$  de  $M$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite finie d'indices

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_p$  et des sous-ensembles  $L_{\mathcal{G}_1}, \dots, L_{\mathcal{G}_p}$  disjoints tels que :

- (i)  $L_{\mathcal{G}_i} \in \mathcal{G}_{\mathcal{G}_i}$ ,  
 $L_{\mathcal{G}_i} \subset K_{\mathcal{G}_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  ;
- (ii)  $\mu^*(M \setminus \bigcup_{i=1}^p L_{\mathcal{G}_i}) < \varepsilon$ .

2.2 Théorème de convergence des martingales semi-bornées.

Si  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie, et si la base  $(\mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  vérifie la condition de Vitali (V), pour toute martingale semi-bornée  $(f_\theta, \mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$ , les fonctions  $f_\theta$  convergent presque sûrement selon le filtre des sections de l'ensemble filtrant croissant  $\mathcal{G}$ .

2.3 Démonstration du théorème.

1° D'après le lemme 1.3, on peut se limiter au cas où les fonctions  $f_\theta$  sont positives. La mesure  $\mu$  étant  $\sigma$ -finie, on peut aussi se limiter au cas où  $\mu(E)$  est finie.

2° Soit donc  $(f_\theta, \mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  une martingale positive ; supposons que les fonctions  $f_\theta$  ne convergent pas presque sûrement selon le filtre des sections de  $\mathcal{G}$ . On a alors

$$\mu^*({\liminf} f_\theta < {\limsup} f_\theta) \neq 0,$$

et il existe deux nombres  $\alpha$  et  $\beta > 0$  tels que  $\alpha < \beta$  et que l'ensemble  $B = \{ \liminf f_\theta < \alpha < \beta < \limsup f_\theta \}$  ait une mesure extérieure  $\mu^*(B) > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire, on peut maintenant trouver un ensemble  $R \in \mathcal{G}$  tel que  $R \supset B$  et  $\mu(R) = \mu^*(B)$ , puis un ensemble  $R_1 \in \bigcup_{\theta \in \mathcal{G}} \mathcal{G}_\theta$  tel que  $\mu(R_1 \cup R \setminus R_1 \cap R) < \varepsilon \mu^*(R)$ . Il existe donc un  $\rho \in \mathcal{G}$  pour lequel on a  $R_1 \in \mathcal{G}_\rho$ .

(a) Considérons la famille  $(M_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  définie par

$$\begin{aligned} M_\theta &= R_1 \cap \{f_\theta < \alpha\} && \text{si } \theta \gg \rho, \\ M_\theta &= \emptyset && \text{pour les autres } \theta \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Cette famille forme un recouvrement fin de  $B \cap R_1$  ; d'après la condition (V) de 2.1, il existe donc des ensembles  $N_{\mathcal{G}_1}, \dots, N_{\mathcal{G}_2}$  disjoints tels que

$$N_{\mathcal{G}_i} \in \mathcal{G}_{\mathcal{G}_i}, \quad N_{\mathcal{G}_i} \subset M_{\mathcal{G}_i}$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N) < \varepsilon \mu^*(B)$$

(où  $N$  désigne la réunion des  $N_{\theta_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ). On a  $N \subset R_1$ , donc

$$(2) \quad \mu(N) \leq \mu(R_1) \leq \varepsilon \mu^*(B) + \mu(R) \leq (1 + \varepsilon) \mu^*(B),$$

et d'autre part, on a

$$\mu(N) \geq \mu^*(B \cap N) \geq \mu^*(B \cap R_1) - \varepsilon \mu^*(B)$$

car

$$\mu^*(B \cap R_1) \leq \mu^*(B \cap N) + \mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N),$$

donc

$$\mu(N) \geq \mu^*(R \cap R_1) - \varepsilon \mu^*(B) \geq \mu(R \cup R_1) - 2\varepsilon \mu^*(B),$$

et par suite

$$\mu(N) \geq \mu^*(B)(1 - 2\varepsilon).$$

(b) En considérant la famille  $(K_\theta)_{\theta \in \Theta}$  définie par

$$\begin{aligned} K_\theta &= R_1 \cap \{f_\theta > \beta\} & \text{si } \theta >> \theta_i \text{ pour } i = 1, \dots, r, \\ K_\theta &= \emptyset & \text{pour les autres } \theta \in \Theta, \end{aligned}$$

on construit de même des ensembles  $L_{\eta_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$  disjoints, tels que

$$L_{\eta_j} \in \mathcal{B}_{\eta_j}, \quad L_{\eta_j} \subset K_{\eta_j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, p,$$

$$\eta_j >> \theta_i \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, p \text{ et tout } i = 1, \dots, r,$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap L) < \varepsilon \mu^*(B) \quad (\text{où } L = \bigcup_{j=1}^p L_{\eta_j}).$$

On en déduit de même l'inégalité

$$\mu(L) \geq (1 - 2\varepsilon) \mu^*(B).$$

(c) On a alors

$$\mu(N \cap L) \geq \mu(N) + \mu(L) - \mu(N \cup L) \geq (2 - 4\varepsilon) \mu^*(B) - \mu(R_1),$$

donc

$$(3) \quad \mu(N \cap L) \geq (1 - 5\varepsilon) \mu^*(B).$$

Soit  $\eta$  un indice de  $\mathcal{G}$  majorant  $\theta_1, \dots, \theta_r, \eta_1, \dots, \eta_p$ ; on a, d'après l'inégalité (2),

$$\alpha(1 + \varepsilon) \mu^*(B) \geq \alpha_\mu(N) \geq \sum_{i=1}^r \int_{N_{\theta_i}} f_{\theta_i} d\mu = \int_{N_{\theta_i}} f_{\eta} d\mu .$$

En effet, les relations  $\theta_i \ll \eta$  et  $N_{\theta_i} \in \mathcal{G}_{\theta_i}$  entraînent

$$\int_{N_{\theta_i}} f_{\theta_i} d\mu = \int_{N_{\theta_i}} f_{\eta} d\mu \quad i = 1, \dots, r .$$

Les relations  $\eta_j \gg \theta_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, r$  et tout  $j = 1, \dots, p$ , entraînent en outre que  $N$  appartient à  $\mathcal{G}_{\eta_j}$  pour tout  $j = 1, \dots, p$ , et donc

$$\int_N f_{\eta} d\mu \geq \int_{N \cap L} f_{\eta} d\mu = \sum_{j=1}^p \int_{N \cap L_{\eta_j}} f_{\eta} d\mu = \sum_{j=1}^p \int_{N \cap L_{\eta_j}} f_{\eta_j} d\mu \geq \beta \mu(N \cap L) ;$$

en se servant de l'inégalité (3), on en déduit

$$\alpha(1 + \varepsilon) \mu^*(B) \geq \beta(1 - 5\varepsilon) \mu^*(B) .$$

$\varepsilon$  avait été pris positif arbitraire ; pour  $\varepsilon$  assez petit, cette inégalité n'est pas vérifiée, car on a

$$\alpha < \beta \quad \text{et} \quad \mu^*(B) \neq 0 ,$$

l'hypothèse  $\mu^*(\{\liminf f_{\theta} < \limsup f_{\theta}\}) > 0$  est donc absurde ; d'où le théorème 2.2.

**2.4 THÉOREME.** - Supposons la mesure  $\mu$   $\sigma$ -finie, et la condition de Vitali (V) vérifiée par la base  $(\mathcal{G}_{\theta})_{\theta \in \mathcal{G}}$ . Soient  $\mathcal{G}_{\omega}$  la tribu engendrée par la tribu  $\mathcal{G}_{\theta}$ ,  $\theta \in \mathcal{G}$ , et  $f$  une fonction  $\mathcal{G}_{\omega}$ -mesurable et intégrable. Alors les fonctions  $f_{\theta} = E(f/\mathcal{G}_{\theta})$  convergent presque sûrement vers  $f$ .

$(f_{\theta}, \mathcal{G}_{\theta})_{\theta \in \mathcal{G}}$  est une martingale de variation bornée. En effet, les propriétés des espérances conditionnelles donnent :

$$|f_{\theta}| \leq E(|f|/\mathcal{G}_{\theta}) ,$$

et donc

$$\sup_{\theta \in \mathcal{G}} \int_E |f_{\theta}| d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty .$$

Il existe donc une fonction  $h(x)$  et un ensemble  $A \in \mathcal{G}_{\omega}$  de  $\mu$ -mesure nulle, tels que, pour tout  $x \notin A$ ,  $f_{\theta}(x) \rightarrow h(x)$  suivant le filtre des sections de  $\mathcal{G}$ .

Si  $h$  n'est pas presque sûrement égale à  $f$ , il existe deux nombres  $a$  et  $b$  pour lesquels l'un des deux ensembles

$$C = \{h < a < b < f\} \quad \text{ou} \quad C' = \{f < a < b < h\}$$

soit de  $\mu^*$ -mesure non nulle. Supposons tout d'abord  $\mu^*(C) > 0$ . On peut, en ôtant les points de  $A$ , trouver un ensemble  $B$  tel que

$$B \cap A = \emptyset, \quad B \subset \{h < a < b < f\} \quad \text{et} \quad \mu^*(B) > 0.$$

La fonction  $f$  est  $\mathcal{B}_\omega$ -mesurable; il existe donc un ensemble  $R \in \mathcal{B}_\omega$ , tel que  $R \subset \{b < f\}$  et  $\mu^*(B) = \mu(R)$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un ensemble  $R_1 \in \mathcal{B}_\rho$  pour un certain  $\rho \in \mathcal{W}$ , vérifiant la relation

$$\mu(R \cup R_1 \setminus R \cap R_1) < \varepsilon \mu^*(B).$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} M_\theta &= R_1 \cap \{f_\theta < a\} && \text{si } \theta \gg \rho, \\ M_\theta &= \emptyset && \text{pour les autres } \theta \in \Theta, \end{aligned}$$

$(M_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est un recouvrement fin de  $B \cap R_1$ , et on peut, comme au 2.3 (a), trouver des  $N_{\theta_1}, \dots, N_{\theta_r}$  disjoints pour lesquels on a

$$N_{\theta_i} \in \mathcal{B}_{\theta_i}, \quad N_{\theta_i} \subset M_{\theta_i} \quad i = 1, \dots, r,$$

et

$$\mu^*(B \cap R_1 \setminus B \cap N) < \varepsilon \mu^*(B) \quad (\text{où } N = \bigcup_{i=1}^r N_{\theta_i}),$$

et on en déduit, comme au 2.3 (a), les inégalités

$$(4) \quad \begin{aligned} (1 - 2\varepsilon) \mu^*(B) &\leq \mu(N) \leq (1 + \varepsilon) \mu^*(B), \\ (1 - 2\varepsilon) \mu^*(B) &\leq \mu(R \cap N) \leq (1 + \varepsilon) \mu^*(B). \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_N f \, d\mu = \sum_{i=1}^r \int_{N_{\theta_i}} f \, d\mu \leq a\mu(N) \leq a\mu^*(B) (1 + \varepsilon),$$

et

$$\int_N f \, d\mu = \int_{N \cap R} f \, d\mu + \int_{N \setminus R} f \, d\mu \geq b \mu(N \cap R) + \int_{N \setminus R} f \, d\mu,$$

donc

$$\int_N f \, d\mu \geq b(1 - 2\varepsilon) \mu^*(B) + \int_{N \setminus R} f \, d\mu,$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$(5) \quad \int_{N \setminus R} f \, d\mu + b(1 - 2\varepsilon) \mu^*(B) \leq a \mu^*(B) (1 + \varepsilon) ;$$

mais on a  $\mu(N \setminus R) \leq \mu(R_1 \setminus R) \leq \varepsilon \mu^*(B)$ , et  $f$  étant intégrable, on a

$$\left| \int_{N \setminus R} f \, d\mu \right| \leq \eta(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 ;$$

quand on passe à la limite dans (5), on arrive donc à une contradiction avec les hypothèses  $a < b$ ,  $\mu^*(B) > 0$ . On démontrerait de même qu'il n'existe pas de couple  $(a, b)$  tel que  $\mu^*({f < a < b < h}) > 0$ . D'où le résultat.

**2.5 THÉORÈME.** - Soient  $(E, \mathcal{B}, \mu)$  un espace mesuré (où la mesure  $\mu$  est  $\sigma$ -finie),  $\mathcal{G}$  un ensemble filtrant croissant,  $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  une base vérifiant la condition de Vitali (V). Si  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  est une martingale, et si les fonctions  $f_\theta$  sont uniformément intégrables, alors les fonctions  $f_\theta$  convergent presque sûrement suivant le filtre des sections de  $\mathcal{G}$  vers une fonction  $f$  qui est  $\mathcal{B}_\omega$ -mesurable, et telle que

$$f_\theta = E(f/\mathcal{B}_\theta) \quad \text{p. s. .}$$

(a) Les fonctions  $f_\theta$  sont uniformément intégrables si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble  $H \in \mathcal{B}$  et un nombre  $a > 0$  tels que

$$(i) \quad \mu(H) < +\infty ;$$

$$(ii) \quad \int_H |f_\theta| \, d\mu < \varepsilon \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{G} ;$$

$$(iii) \quad \int_{\{|f_\theta| > a\} \cap H} |f_\theta| \, d\mu < \varepsilon \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{G} .$$

(b) Si  $\varepsilon, H$ , et  $a$  sont choisis comme dans 2.5 (a), on a, pour tout  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$\int_A |f_\theta| \, d\mu \leq \int_H |f_\theta| \, d\mu + \int_{H \cap \{|f_\theta| < a\}} |f_\theta| \, d\mu + \int_{H \cap \{|f_\theta| > a\}} |f_\theta| \, d\mu ,$$

ce qui donne, pour  $A = E$ ,

$$(6) \quad \int_E |f_\theta| \, d\mu \leq 2\varepsilon + a\mu(H) = M < +\infty \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{G} ,$$

et, pour tout  $A \in \mathcal{B}$  vérifiant  $\mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{a}$ , on a

$$\int_A |f_\theta| \, d\mu \leq 2\varepsilon + a\mu(A) \leq 3\varepsilon .$$

En conclusion, si les fonctions  $(f_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  sont uniformément intégrables, la martingale  $(f_\theta, \mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{G}}$  est à variation bornée, et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta$  tel que

$$\mu(A) \leq \eta \implies \int_A |f_\theta| \, d\mu \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{G} .$$

(c) Montrons maintenant que  $(f_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  est un filtre de Cauchy dans  $L^1(E, \mathcal{G}_\omega, \mu)$ . ( $\mathcal{G}_\omega$  désigne la tribu engendrée par la réunion des tribus  $\mathcal{G}_\theta$ ,  $\theta \in \mathcal{O}$ .) En effet :

(i) Les fonctions  $f_\theta$  sont intégrables pour tout  $\theta \in \mathcal{O}$ , d'après (6).

(ii) Si l'image du filtre des sections de  $\mathcal{O}$  ne fait pas de  $(f_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  un filtre de Cauchy dans  $L^1(E, \mathcal{G}_\omega, \mu)$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  et une suite  $\theta_n$  croissante d'indices de  $\mathcal{O}$  tels que

$$\int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_{n-1}}| d\mu > \varepsilon \quad \text{pour tout } n.$$

La martingale  $(f_{\theta_n}, \mathcal{G}_{\theta_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est de variation bornée, et les  $f_{\theta_n}$  convergent donc presque sûrement vers une fonction  $g$  qui est  $\mathcal{G}_\omega$ -mesurable. Mais puisque les fonctions  $(f_{\theta_n})$  sont uniformément intégrables, il existe :

(i)  $H \in \mathcal{G}$  tel que  $\mu(H) < +\infty$  et  $\int_H |f_{\theta_n}| d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$ ,  $\forall n$ ;

(ii)  $\eta > 0$  tel que  $\mu(A) < \eta$  entraîne  $\int_A |f_{\theta_n}| d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$ ,  $\forall n$ .

D'autre part, d'après le théorème d'Egorov, il existe  $K \subset H$  tel que

(iii)  $\mu(H \setminus K) < \eta$  et les fonctions  $f_{\theta_n}$  tendent uniformément vers  $g$  sur  $K$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| d\mu &\leq \int_H (|f_{\theta_n}| + |f_{\theta_m}|) d\mu + \int_{H \setminus K} (|f_{\theta_n}| + |f_{\theta_m}|) d\mu + \int_K |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_K |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| d\mu. \end{aligned}$$

Si  $N$  est choisi tel que, pour  $n$  et  $m > N$ ,  $|f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| < \frac{\varepsilon}{3\mu(K)}$  sur  $K$ , on a

$$\int_E |f_{\theta_n} - f_{\theta_m}| d\mu < \varepsilon \quad \text{pour } n, m > N,$$

ce qui est en contradiction avec la construction des  $f_{\theta_n}$ .  $(f_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  est donc un filtre de Cauchy dans  $L^1(E, \mathcal{G}_\omega, \mu)$ , et il existe  $f \in L^1(E, \mathcal{G}_\omega, \mu)$  tel que  $\int_E |f_\theta - f| d\mu \rightarrow 0$  suivant le filtre des sections de  $\mathcal{O}$ .  $f$  est  $\mathcal{G}_\omega$ -mesurable, et on a, pour tout  $A \in \mathcal{G}_\theta$ ,  $\int_A f_\theta d\mu = \int_A f d\mu$ . On a donc  $f_\theta = E(f/\mathcal{G}_\theta)$  presque sûrement, ce qui, d'après le théorème 2.4, montre que les  $f_\theta$  tendent vers  $f$  presque sûrement. D'où le théorème 2.5.

3. Condition de Vitali dans le cas des partitions finies d'un cube de  $\mathbb{R}^n$ .

3.1 Définition de la base  $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$ .

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on appellera pavé un ensemble  $P = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$  où  $(a_k, b_k)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Le pavé  $P$  sera dit ouvert (resp. fermé, semi-ouvert à droite, semi-ouvert à gauche) si tous les intervalles  $(a_k, b_k)$  sont ouverts (resp. fermés, semi-ouverts à droite, semi-ouverts à gauche). On appellera cube de  $\mathbb{R}^n$  un pavé dont tous les côtés ont même longueur.

Soient  $E$  un cube fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $E$ ,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des partitions finies de  $E$  en pavés  $P$  semi-ouverts à droite (éventuellement fermés pour obtenir un recouvrement de  $E$ ) tels que l'on ait, si  $K$  désigne le plus petit cube contenant  $K$ , l'inégalité

$$\mu(P) > k\mu(K),$$

où  $k$  est un nombre fixé tel que  $0 < k < \frac{1}{2}$  (cette condition est toujours vérifiée si l'on se place dans  $\mathbb{R}$ ).  $\mathcal{O}$  est un ensemble filtrant croissant pour la relation de finesse en partition. Si  $\alpha$  est un nombre fixé compris strictement entre 0 et 1, et si nous désignons par  $G(P)$ , pour tout pavé  $P$ , la réunion des pavés  $P'$  tels que

$$P \cap P' = \emptyset \quad \text{et} \quad k\mu(K') \leq \mu(P') \leq \alpha\mu(P)$$

(où  $K'$  est le plus petit cube contenant  $P'$ ), il existe un nombre  $\gamma$  dépendant de  $\alpha$  et de  $k$ , mais indépendant du pavé  $P$ , tel que  $\mu(G(P)) \leq \gamma\mu(P)$ .

Pour tout  $\theta \in \mathcal{O}$ , soit  $\mathcal{B}_\theta$  la tribu sur  $E$  engendrée par la partition  $\theta$ .

3.2 THEOREME. - La base  $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  vérifie la condition de Vitali (V).

(a) Soient  $M$  un sous-ensemble de  $E$ , et  $(K_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  un recouvrement fin de  $M$ ; chaque  $K_\theta$  est alors union finie d'éléments de la partition  $\theta$ :

$$K_\theta = \bigcup_{u \in J_\theta} I_{\theta,u}$$

(les  $I_{\theta,u}$  sont supposés tous non vides).

Dans  $\mathcal{J} = \{(\theta, u) \mid \theta \in \mathcal{O}, u \in J_\theta\}$ , considérons la relation

$$(\theta, u) < (\rho, v) \quad \text{si et seulement si} \quad \theta \ll \rho.$$

On a alors, pour tout  $(\varepsilon, u) \in \mathcal{J}$ ,

$$M \subset \bigcup_{(\varepsilon, u) < (\rho, v)} I_{\rho, v}.$$

(b) Désignons par  $(I_i)_{i \in \mathcal{I}}$  la famille  $(I_{\theta, u})$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $u \in J_\theta$ ; on a alors le lemme suivant.

LEMME. - Il existe une sous-famille  $(I_j)_{j \in \mathcal{J}}$  de la famille  $(I_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , telle que les  $I_j$  soient deux à deux disjoints, et qu'à tout  $i \in \mathcal{I}$  on puisse associer un  $j \in \mathcal{J}$  pour lesquels on a

- (i)  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ ,  
 (ii)  $\mu(I_i) < \alpha \mu(I_j)$  (où  $\alpha$  est fixé et  $0 < \alpha < 1$ ).

Démonstration du lemme. - Soit  $\Omega_0$  le plus petit ensemble bien ordonné, non dénombrable, 1 étant son plus petit élément,

$$\alpha_1 = \{I_i \mid i \in \mathcal{I}\} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \sup_{\alpha_1} \mu(I_i);$$

il existe donc un pavé  $I_{i_1} \in \alpha_1$  pour lequel on a  $\mu(I_{i_1}) \geq \frac{\mu_1}{\alpha}$ .

Soit  $\beta \in \Omega_0$ ; supposons construit, pour tout  $\gamma < \beta$ , un  $I_{i_\gamma} \in \alpha_1$  tel que

- les  $I_{i_\gamma}$  pour  $\gamma < \beta$  soient deux à deux disjoints,
- si  $\alpha_\gamma = \{I_i \mid I_i \cap I_{i_{\gamma'}} = \emptyset \text{ pour tout } \gamma' < \gamma\}$

et si on désigne par  $\mu_\gamma$  le  $\sup_{\alpha_\gamma} \mu(I_i)$ , on ait

$$\mu(I_{i_\gamma}) \geq \alpha \mu_\gamma.$$

Posons alors

$$\alpha_\beta = \{I_i \mid I_i \cap I_{i_\gamma} = \emptyset \text{ pour tout } \gamma < \beta\} \quad \text{et} \quad \mu_\beta = \sup_{\alpha_\beta} \mu(I_i).$$

Si  $\alpha_\beta$  est non vide (c'est-à-dire si  $\mu_\beta > 0$ ), prenons un  $I_{i_\beta} \in \alpha_\beta$  pour lequel on a  $\mu(I_{i_\beta}) \geq \alpha \mu_\beta$ . Sinon on prendra  $I_{i_\beta} = \emptyset$ . On construit ainsi une application décroissante

$$\beta \longrightarrow \mu_\beta \quad \text{de } \Omega_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+;$$

il existe donc un  $\beta_0 \in \Omega_0$  tel que

$$\beta \geq \beta_0 \implies \mu_\beta = \mu_{\beta_0} = a.$$

Ce nombre  $a$  ne peut être strictement positif, car on aurait alors construit une infinité d'ensembles deux à deux disjoints de mesure  $\geq a$ , contenus dans le cube  $E$  de mesure finie.  $\alpha_{\beta_0}$  est donc vide. Il existe donc, pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , un

$\beta \in \Omega_0$  pour lequel on a  $I_i \cap I_{i+\beta} \neq \emptyset$ ;  $\Omega_0$  étant bien ordonné, on peut considérer  $\beta_1$  le plus petit de ces éléments  $\beta$ . On a

$$I_i \cap I_{i+\beta_1} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I_i \cap I_{i+\gamma} = \emptyset \quad \text{pour tout } \gamma < \beta_1 ;$$

et par suite,  $I_i \in \mathcal{A}_{\beta_1}$ , et donc  $\mu(I_i) \leq \alpha \mu(I_{i+\beta_1})$ . Le lemme est ainsi démontré, en prenant pour famille  $(I_j)_{j \in \mathcal{J}}$  la famille  $(I_i)_{\beta \in \Omega_0}$ .

(c) Démontrons maintenant le théorème 3.2.

L'ensemble  $\{I_j ; j \in \mathcal{J}, I_j \neq \emptyset\}$  est dénombrable; rangeons ses éléments en une suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et posons pour chaque  $p$

$$M'_p = M \setminus \bigcup_{i=1}^p L_{\theta_i} .$$

On avait, pour tout couple  $(\theta, u)$ ,

$$M \subset \bigcup_{(\theta, u) < (\rho, \nu)} I_{\rho, \nu} ;$$

tout point  $x$  de  $M$  (en particulier de  $M'_p$ ) est donc contenu dans un pavé  $I_k \in \mathcal{A}_1$  appartenant à une partition  $\theta$  dont la finesse est arbitrairement grande. Il existe donc, pour tout point  $x$  de  $M'_p$ , un pavé  $I_k$  contenant  $x$  et disjoint des  $L_{\theta_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . On a, pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > p$ ), les relations

$$I_k \cap L_{\theta_n} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mu(I_k) \leq \alpha \mu(L_{\theta_n}) .$$

Soit  $H(L_{\theta_n})$  la réunion des  $I_i$ , tels que  $i \in \mathcal{J}$ ,  $I_i \cap L_{\theta_n} \neq \emptyset$ , et  $\mu(I_i) \leq \alpha \mu(L_{\theta_n})$ . On a donc montré que  $M'_p$  est contenu dans la réunion  $\bigcup_{n > p} H(L_{\theta_n})$ . Mais les  $H(L_{\theta_n})$  sont contenus dans les  $G(L_{\theta_n})$ , considérés en 3.1. Il existe donc une constante  $\gamma$  dépendant seulement de  $\alpha$  et de  $k$ , telle que :

$$\mu(H(L_{\theta_n})) \leq \mu(L_{\theta_n}) .$$

On a donc

$$\mu^*(M \setminus \bigcup_{i=1}^p L_{\theta_i}) \leq \sum_{n > p} \mu(H(L_{\theta_n})) \leq \gamma \sum_{n > p} \mu(L_{\theta_n}) \rightarrow 0$$

lorsque  $p \rightarrow \infty$ , puisque  $\sum \mu(L_{\theta_n})$  converge.

On peut, d'après leur construction même, regrouper les  $L_{\theta_i}$  de façon à obtenir, une suite  $L'_{n_j}$  d'éléments deux à deux disjoints, et pour laquelle on a

$$L'_{n_j} \subset K_{n_j} \quad \text{et} \quad L'_{n_j} \in \mathfrak{G}_{n_j}.$$

La condition de Vitali (V) est donc vérifiée par la base  $(\mathfrak{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ .

#### 4. Applications.

##### 4.1 Cas dénombrable.

Si  $\Theta$  est dénombrable, la base  $(\mathfrak{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la condition de Vitali (V) :

En effet, si  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un recouvrement fin de  $M$ ,  $M$  étant un ensemble de  $\mu$ -mesure extérieure finie, soit  $R \in \mathfrak{B}_\infty$  ( $\mathfrak{B}_\infty$  désigne la tribu sur  $E$  engendrée par les tribus  $\mathfrak{G}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), tel que  $R \supset M$  et  $\mu^*(M) = \mu(R) < +\infty$ .  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi un recouvrement fin de  $R$ ; posons

$$L_n = K_n \setminus \bigcup_{p < n} K_p,$$

$L_n$  appartient à  $\mathfrak{G}_n$ , et les  $L_n$  forment un recouvrement disjoint de  $R$ ;  $\mu(R)$  étant finie, on a

$$\mu^*(M \setminus \bigcup_{n \leq p} L_n) \leq \mu(R \setminus \bigcup_{n \leq p} L_n) \rightarrow 0 \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty.$$

Par suite :

Toute martingale  $(f_n, \mathfrak{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , relative à une base croissante dénombrable de tribus  $\mathfrak{G}_n$  est presque sûrement convergente si elle est de variation semi-bornée; ceci a lieu en particulier si

$$\sup_n \int |f_n| d\mu < +\infty.$$

4.2 COROLLAIRE de 3.2. - Toute martingale de variation semi-bornée, ayant pour base la base  $(\mathfrak{G}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  considérée en 3.1, est presque sûrement convergente.

4.3 THÉOREME de dérivation de Lebesgue. - Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $(0, 1)$  pour la mesure de Lebesgue  $\mu$ ; si l'on pose  $g(x) = \int_0^x f d\mu$ , cette fonction  $g$  est presque partout dérivable et sa dérivée est presque partout égale à  $f$ .

L'ensemble  $\mathcal{O}$  des partitions de  $E = (0, 1)$ , considéré en 3.1, est ici exactement l'ensemble de toutes les partitions finies  $\theta$  de  $(0, 1)$  en intervalles

$$\{a_0, a_1[ , \{a_1, a_2[ , \dots , \{a_{n-2}, a_{n-1}[ ; \dots , \{a_{n-1}, a_n\} ,$$

où l'on a

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1 .$$

On notera  $\theta = (a_i)$  une telle partition. L'ensemble  $\mathcal{O}$  ordonné par la relation de finesse en partition est filtrant croissant ; soient, pour tout  $\theta \in \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{G}_\theta$  la tribu engendrée par  $\theta$ , et  $f_\theta = E(f/\mathcal{G}_\theta)$ .  $(f_\theta, \mathcal{G}_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}}$  est une martingale. D'après les théorèmes 3.2 et 2.4, il existe un sous-ensemble  $N$  de  $(0, 1)$  de mesure nulle, tel que, pour tout  $x \notin N$ , les nombres  $f_\theta(x)$  convergent vers la fonction  $f(x)$ .

Soit  $x$  fixé,  $x \notin N$  ; si  $I$  élément de la partition finie  $\theta$  de  $(0, 1)$  contient  $x$ , on a

$$f_\theta(x) = \frac{\int_I f d\mu}{\mu(I)} ,$$

et par conséquent

$$f(x) = \lim \frac{\int_I f d\mu}{\mu(I)}$$

(limite prise selon le filtre des sections de  $\mathcal{O}$ , avec  $x \in I$ ,  $I \in \theta$ ).

Pour toute partition  $\theta = (a_0 = 0, a_1, \dots, a_n = 1)$  de  $(0, 1)$ , il en existe une plus fine  $\theta' = (b_0 = 0, \dots, b_m = 1)$  pour laquelle un des  $b_i$  est égal à  $x$ . L'ensemble  $\mathcal{O}'$  des partitions finies de  $(0, 1)$ ,  $\theta = (a_i)$ , pour lesquelles un des  $a_i$  est égal à  $x$ , est filtrant croissant et

$$f(x) = \lim \frac{\int_I f d\mu}{\mu(I)}$$

(limite prise selon le filtre des sections de  $\mathcal{O}'$  avec  $x \in I$ ,  $I \in \theta$ ,  $\theta \in \mathcal{O}'$ ), c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{\substack{h>0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} .$$

Ceci est vrai pour tout point  $x \notin N$ . On démontre de la même manière, en considérant cette fois-ci les partitions finies de  $(0, 1)$  en intervalles semi-ouverts à gauche, que, sauf sur un ensemble  $N'$  de mesure nulle, on a

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \frac{g(x+k) - g(x)}{k} = f(x) .$$

La fonction  $g(x)$  est donc dérivable en tout point  $x \notin N \cup N'$  (ensemble de mesure nulle) et de dérivée presque partout égale à  $f(x)$  .

### 5. Appendice ([1]).

Soient  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  ,  $F$  une fonction d'ensemble absolument continue par rapport à  $\mu$  . Dans la théorie classique, on démontre que  $F$  est dérivable par rapport à  $\mu$  de la manière suivante :

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  , on note  $q(x, a)$  l'intervalle de centre  $x$  et de côté  $a$  , et l'on considère les nombres

$$\varphi(x, a) = \frac{F(q)}{\mu(q)}$$

et les quantités

$$\bar{D}_F(x) = \limsup_{a \rightarrow 0} \varphi(x; a)$$

$$\underline{D}_F(x) = \liminf_{a \rightarrow 0} \varphi(x; a) ,$$

appelées dérivées symétriques supérieures (resp. inférieures).

1° Soit  $(b_n)$  une suite dense dans l'intervalle  $(0, a_0]$  , et soit, pour toute  $a > 0$  , la quantité

$$\psi(x; a) = \sup_{b_n \leq a} \varphi(x; b_n) .$$

On démontre que,  $F$  étant absolument continue par rapport à la mesure  $\mu$  , on a

$$\bar{D}_F(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(x; a_k) ,$$

où  $a_k$  est une suite tendant vers 0 . Ce qui montre que  $\bar{D}_F(x)$  est une fonction mesurable. Un raisonnement analogue montre que  $\underline{D}_F(x)$  est une fonction mesurable

2° On démontre ensuite que, si en tout point d'un ensemble  $e$  de mesure finie on a

$$\alpha \leq \bar{D}_F(x) \quad (\text{resp. } \bar{D}_F(x) \leq \beta) ,$$

on a aussi la relation

$$\alpha \mu(e) \leq F(e) \quad (\text{resp. } F(e) \leq \beta \mu(e) )$$

(ceci restant valable en remplaçant  $\bar{D}_F(x)$  par  $\underline{D}_F(x)$  ).

3° On montre alors que l'on a les égalités

$$F(e) = \int_e \bar{D}_F(x) \, d\mu = \int_e \underline{D}_F(x) \, d\mu$$

pour tout ensemble  $e$  de  $\mu$ -mesure finie. Les deux fonctions  $\bar{D}_F$  et  $\underline{D}_F$  sont donc presque partout égales.

4° Enfin on considère les ensembles  $\sigma(x; a)$  contenus dans  $q(x; a)$  pour lesquels on a

$$\frac{\mu(\sigma(x; a))}{\mu(q(x; a))} \geq \theta(x) > 0,$$

et l'on pose

$$\bar{\Delta}_F(x) = \sup_{\text{suites } \sigma_n(x; a)} \left( \limsup_{a \rightarrow 0} \frac{F(\sigma_n(x; a))}{\mu(\sigma_n(x; a))} \right)$$

et

$$\underline{\Delta}_F(x) = \inf_{\text{suites } \sigma_n(x; a)} \left( \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{F(\sigma_n(x; a))}{\mu(\sigma_n(x; a))} \right).$$

On montre alors que ses fonctions sont équivalentes à  $\bar{D}_F$  et  $\underline{D}_F$  et vérifient donc, pour tout ensemble  $e$  de  $\mu$ -mesure finie,

$$F(e) = \int_e \bar{\Delta}_F \, d\mu = \int_e \underline{\Delta}_F \, d\mu.$$

Le théorème de Lebesgue s'en déduit alors facilement.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARATHÉODORY (Constantin). - Vorlesungen über reelle Funktionen. - Leipzig, B. G. Teubner, 1918.
- [2] KRICKEBERG (K.) et PAUC (C.). - Martingales et dérivation, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 455-543.