

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PHILIPPE COURRÈGE

Ensembles uniformément intégrables de fonctions et compacité faible dans L^1

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 2, p. 1-27

http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A2_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES UNIFORMÉMENT INTÉGRABLES DE FONCTIONS ET COMPACTITÉ FAIBLE DANS L^1

par Philippe COURRÈGE

Notations. - Un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{B}, \mu)$ où $\mathcal{B}$ est une tribu sur l'ensemble X , et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré ; $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ désigne l'ensemble des classes de fonctions μ -intégrables équivalentes pour μ . Si $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, et si $\hat{f}$ est un représentant de la classe f , on désignera par $\int f d\mu$ l'intégrale $\int \hat{f} d\mu$ ($\int f d\mu$ étant indépendant du choix du représentant $\hat{f}$), et par $\int_A f d\mu$, l'intégrale $\int \hat{f} 1_A d\mu$, pour tout $A \in \mathcal{B}$. $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ désigne l'ensemble des classes de fonctions équivalentes bornées en mesures.

Remarque préliminaire. - Supposons que la mesure μ est bornée, et soit H un sous-ensemble de L^1 , borné dans L^∞ (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$ pour tout $f \in H$). H a les deux propriétés suivantes :

- a. $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{[|f| \geq a]} |f| d\mu = 0$ uniformément quand f décrit H .
- b. H est faiblement relativement compact dans L^1 (c'est-à-dire que H est relativement compact pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ sur L^1).

En effet, (a) est immédiat puisque $\int_{[|f| \geq a]} |f| d\mu = 0$ pour $a > M$ et $f \in H$.

On sait que la boule-unité A^∞ de L^∞ est compacte pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$; d'autre part, l'injection canonique de L^∞ dans L^1 est continue quand L^∞ est muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, et L^1 de $\sigma(L^1, L^\infty)$. Il en résulte que A^∞ est faiblement compacte dans L^1 , d'où (b).

Nous allons montrer ci-dessous que, si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré convenable, les propriétés (a) et (b) ci-dessus sont équivalentes (théorème de Dunford-Pettis).

1. Ensembles uniformément intégrables. Définitions.

DÉFINITION 1. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un sous-ensemble H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu) = L^1$ est uniformément intégrable ⁽¹⁾ (ou encore que H

⁽¹⁾ ou encore "équi-intégrable" (cf. [3]).

possède la propriété d'uniforme intégrabilité), si

$$UI(H) \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu = 0$$

uniformément quand f décrit H [ce qui s'écrit aussi

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\sup_{f \in H} \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu \right] = 0 .]$$

DÉFINITION 2. - On dit qu'un sous-ensemble H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ a la propriété d'absolue continuité uniforme (par rapport à μ) ⁽²⁾, si

$$UC(H) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{B}, \forall f \in H, \mu(A) \leq \eta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon .$$

On dit qu'un sous-ensemble H de L^1 est latticeiellement borné, s'il existe $f \in L^1$, $f \geq 0$, tel que $|g| \leq f$ pour tout $g \in H$.

PROPOSITION 1. - Tout sous-ensemble latticeiellement borné H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ (où $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque) possède les propriétés d'uniforme intégrabilité, et d'absolue continuité uniforme.

En effet, si $|f| \leq g$ pour tout $f \in H$, on a :

$$\int_{[|f| \geq a]} d\mu \leq \int_{[g \geq a]} g \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in H \quad ;$$

l'uniforme intégrabilité résulte alors du théorème de Lebesgue appliqué à la famille $a \rightarrow \int_{[g \geq a]} g$, ($a \in \mathbb{R}_+$, $a \rightarrow +\infty$).

L'absolue continuité uniforme en résulte en écrivant

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A \cap [|f| \leq a]} |f| \, d\mu + \int_{A \cap [|f| \geq a]} |f| \, d\mu \leq a\mu(A) + \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu .$$

COROLLAIRE 1. - Tout sous-ensemble fini de L^1 possède les propriétés d'uniforme intégrabilité et d'absolue continuité uniforme.

COROLLAIRE 2. - Si la mesure μ est bornée, tout sous-ensemble H de L^1 , borné dans L^∞ possède les propriétés d'uniforme intégrabilité et d'absolue continuité uniforme.

⁽²⁾ ou encore que H est "équi-continu" (cf. [3]).

PROPOSITION 2. - La réunion d'une famille finie de sous-ensembles de L^1 , ayant la propriété d'uniforme intégrabilité (resp. la propriété d'absolue continuité uniforme), a la même propriété.

PROPOSITION 3. - Soit H un sous-ensemble de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. On a les relations

$$1^\circ \quad \mathcal{UI}(H) \implies \mathcal{UC}(H)$$

$$2^\circ \quad \mathcal{UC}(H) \text{ et } H \text{ borné dans } L^1 \implies \mathcal{UI}(H) .$$

Écrivons

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A \cap [|f| \leq a]} |f| \, d\mu + \int_{A \cap [|f| \geq a]} |f| \, d\mu ,$$

d'où

$$\int_A |f| \, d\mu \leq a\mu(A) + \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu .$$

La 1° en résulte.

Inversement, on a

$$a^1[|f| \geq a] \leq |f|$$

donc

$$\mu([|f| \geq a]) \leq \frac{1}{a} \int |f| \, d\mu ;$$

d'où le 2° .

COROLLAIRE 1. - Si μ est une mesure bornée, on a :

$$\mathcal{UI}(H) \iff \mathcal{UC}(H) \text{ et } H \text{ borné dans } L^1 .$$

En effet, si μ est une mesure bornée, $\mathcal{UI}(H) \implies H$ borné dans L^1 , car on peut écrire

$$\int |f| \, d\mu = \int_{[|f| \leq a]} |f| \, d\mu + \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu \leq a\mu(X) + \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu .$$

Remarques.

a. Si μ n'est pas bornée, $UI(H)$ n'implique pas nécessairement que H est borné dans L^1 (cf. Appendice II, exemple 1).

b. Si H n'est pas borné dans L^1 , $UC(H)$ n'implique pas nécessairement $UI(H)$ (cf. Appendice II, exemple 2).

c. Si H est borné dans L^1 , $UC(H)$ n'est pas nécessairement vérifié (cf. Appendice II, exemple 7).

Ceci montre qu'un ensemble $H \subset L^1$, équicontinu en tant qu'ensemble de formes linéaires continues sur l'espace de Banach L^∞ , ne possède pas nécessairement la propriété d'absolue continuité uniforme.

d. Par contre, soit H un sous-ensemble de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ équicontinu en tant qu'ensemble de formes linéaires sur L^∞ muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$; alors H a la propriété d'absolue continuité uniforme.

En effet, sous les hypothèses, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $f_1 \dots f_n$ de fonctions de L^1 et un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $g \in L^\infty$,

$$|\int f_K g d\mu| \leq \eta \quad (K = 1, 2, \dots, n) \text{ entraîne } |\int fg d\mu| \leq \varepsilon \text{ pour tout } f \in H.$$

Soit alors $\eta_1 > 0$ tel que $\mu(A) \leq \eta_1$ entraîne $|\int_A f_K d\mu| \leq \eta$ pour $1 \leq K \leq n$ (η existe d'après le corollaire 1 de la proposition 1).

On a alors

$$\mu(A) \leq \eta_1 \Rightarrow |\int_A f d\mu| \leq \varepsilon,$$

pour tout $f \in H$, d'où la conclusion, puisque

$$\int_A |f| d\mu \leq |\int_{A \cap \{f > 0\}} f d\mu| + |\int_{A \cap \{f \leq 0\}} f d\mu|.$$

2. Uniforme intégrabilité et compacité faible dans L^1 .

PROPOSITION 4. - Soit (f_n) une suite d'éléments de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, la suite $n \rightarrow \int_A f_n d\mu$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Alors, l'ensemble H des f_n , $H = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, possède la propriété d'absolue continuité uniforme.

a. Supposons d'abord que, pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}$, $\int_{\Lambda} f_n d\mu$ tend vers 0.

Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\mu(\Lambda) \leq \eta \Rightarrow |\int_{\Lambda} f_n d\mu| \leq \varepsilon$ pour tout n .

En effet, on a alors

$$\int_{\Lambda} |f_n| d\mu = \int_{\Lambda \cap [f_n > 0]} f_n d\mu - \int_{\Lambda \cap [f_n \leq 0]} f_n d\mu \leq 2\varepsilon \quad .$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \Lambda \in \mathcal{B}, \exists m, \mu(\Lambda) \leq \eta \text{ et } |\int_{\Lambda} f_m d\mu| > \varepsilon \quad .$$

D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il en résulte que

$$(h) \quad \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall n, \exists \Lambda \in \mathcal{B}, \exists m, m \geq n, \mu(\Lambda) \leq \eta$$

et

$$\int_{\Lambda} f_m d\mu > \varepsilon \quad .$$

Nous allons montrer qu'on peut, sous cette hypothèse, définir par récurrence une suite (Λ_K) d'ensembles de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, et une suite strictement croissante (n_K) d'entiers telles que

$$\int_{\Lambda_K} f_{n_K} d\mu \geq \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } K \quad ,$$

et

$$|\int_{\Lambda_j} f_{n_K} d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour tout } j \neq K \quad .$$

Supposons ce résultat établi, et soit $\Lambda = \bigcup_K \Lambda_K$; on a

$$\int_{\Lambda} f_{n_K} d\mu = \sum_{j \neq K} \int_{\Lambda_j} f_{n_K} d\mu + \int_{\Lambda_K} f_{n_K} d\mu$$

d'où

$$|\int_{\Lambda} f_{n_K} d\mu| \geq \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^K}\right) \geq \varepsilon/4 \quad \text{pour tout } K$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} f_n d\mu = 0 \quad .$$

Il reste à montrer l'existence des suites (Λ_K) et (n_K) .

Supposons la construction faite jusqu'au rang K ; on a

$$\int_{\Lambda_j} f_{n_j} d\mu \geq \varepsilon/2 \quad ,$$

$$|\int_{\Lambda_i} f_{n_j} d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+j+1}}$$

et

$$\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$$

pour $1 \leq i \leq K$, $1 \leq j \leq K$, $i \neq j$ et $n_1 < n_2 < \dots < n_K$.

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_j} f_n d\mu = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq K \quad ,$$

il existe n_0 tel que

$$m \geq n_0 \Rightarrow |\int_{\Lambda_j} f_m d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{K+K+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq K \quad .$$

D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il existe η_0 tel que

$$\mu(\Lambda) < \eta_0 \Rightarrow |\int_{\Lambda} f_{n_j} d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{K+K+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq K \quad .$$

En faisant alors $\eta = \eta_0$ et $n = n_0 + n_K + 1$ dans la relation (h), on obtient l'existence d'un ensemble $\Lambda \in \mathcal{B}$ et d'un entier n_{K+1} tels que :

$$|\int_{\Lambda_j} f_{n_{K+1}} d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}}$$

$$|\int_{\Lambda} f_{n_j} d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq K \quad ,$$

$$\int_{\Lambda} f_{n_{K+1}} d\mu > \varepsilon$$

et

$$n_{K+1} > n_K \quad .$$

En posant

$$\Lambda_{K+1} = \Lambda \setminus \bigcup_{j \leq K} \Lambda_j \quad ,$$

on obtient le résultat cherché.

b. Passons au cas général.

Montrons d'abord que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \exists n, \forall \Lambda \in \mathcal{B}, \forall p, q$$

$$\mu(\Lambda) \leq \eta \text{ et } p, q \geq n \Rightarrow \left| \int_{\Lambda} f_p - f_q d\mu \right| \leq \varepsilon$$

En effet, autrement, on pourrait trouver deux suites (p_K) , (q_K) et une suite (Λ_K) d'ensembles de $\mathcal{B}$, tels que $\mu(\Lambda_K) \leq \frac{1}{K}$, $p_K, q_K \geq K$ et

$$\int_{\Lambda_K} |f_{p_K} - f_{q_K}| d\mu > \varepsilon$$

pour tout K . Ceci contredit le résultat obtenu en (a), puisque la suite $(f_{p_K} - f_{q_K})$ est telle que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} (f_{p_K} - f_{q_K}) d\mu = 0$$

pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}$ d'après l'hypothèse.

Soient alors $\varepsilon > 0$; η et n tels que $\mu(\Lambda) \leq \eta$ et

$$p, q \geq n \Rightarrow \int_{\Lambda} |f_p - f_q| d\mu \leq \varepsilon/4 \quad .$$

On a d'abord, pour $\mu(\Lambda) \leq \eta$ et $p, q \geq n$,

$$\int_A |f_p - f_q| \, d\mu = \int_A [(f_p - f_q) \geq 0] (f_p - f_q) \, d\mu - \int_A [(f_p - f_q) < 0] (f_p - f_q) \, d\mu \\ \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \quad .$$

Ensuite, d'après la proposition 1, il existe η' tel que $\mu(A) < \eta'$ entraîne $\int_A |f_m| \, d\mu \leq \varepsilon/2$ pour tout $m \leq n$.

Alors, pour $m \geq n$ et $\mu(A) \leq \inf(\eta, \eta')$, on a

$$\int_A |f_m| \, d\mu \leq \int_A |f_n| \, d\mu + \int_A |f_m - f_n| \, d\mu \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - Si (f_n) est une suite d'éléments de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ convergente pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ sur L^1 , alors l'ensemble H des f_n possède la propriété d'absolue continuité uniforme.

COROLLAIRE 2. - Supposons que $\mathcal{K}$ soit un sous-ensemble $\mathcal{B}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $K_1 \in \mathcal{K}$ et $K_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$.

2° Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = \sup_{K \subset A, K \in \mathcal{K}} \mu(K)$.

Alors, (sous les hypothèses de la proposition 4) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_K |f_n| \, d\mu \leq \varepsilon$ pour tout n .

En effet, on va se ramener au cas où μ est bornée ; pour cela, pour tout n , soit μ_n la mesure $|f_n| \, \mu$, on a

$$\mu_n(A) = \int_A |f_n| \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad ,$$

et

$$\mu_n(X) = \int |f_n| \, d\mu \quad .$$

Soit ν la mesure bornée sur $(X, \mathcal{B})$ définie par

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu_n(X)} \mu_n(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad .$$

Montrons que l'on a encore

$$\nu(A) = \sup_{K \subset A, K \in \mathcal{K}} \nu(K) \quad .$$

D'abord, pour tout $f \in L^1$, f étagée positive, on a

$$\int_A f \, d\mu = \sup_{K \subset A} \int_K f \, d\mu \quad ,$$

en vertu du 1° et du 2°. On a donc, par passage à la limite croissante,

$$\int_A |f| \, d\mu = \sup_{K \subset A} \int_K |f| \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in L^1 \quad .$$

En particulier,

$$\mu_n(A) = \sup_{K \subset A} \mu_n(K) \quad ;$$

on en déduit que

$$\nu_p(A) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n \mu_n(X)} \mu_n(A) = \sup_{K \subset A} \nu_p(K) \quad ;$$

d'où

$$\nu(A) = \sup_p \nu_p(A) = \sup_p \left(\sup_{K \subset A} \nu_p(K) \right) = \sup_{K \subset A} \nu(K) \quad .$$

Posons alors, pour tout n , $\lambda_n = f_n \circ \mu$; λ_n est une mesure bornée non nécessairement positive, et on a

$$|\lambda_n(A)| = \left| \int_A f_n \, d\mu \right| \leq \mu_n(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad .$$

Comme $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu_n(A) = 0$, on a aussi, $\nu(A) = 0 \Rightarrow \lambda_n(A) = 0$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe donc, pour chaque n , une fonction $g_n \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$ telle que

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\mu = \int_A g_n \, d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad .$$

On va pouvoir appliquer alors la proposition 4 à la suite (g_n) et à l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \nu)$, où ν est cette fois une mesure bornée.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\nu(A) \leq \eta$ entraîne $\int_A |g_n| d\nu \leq \varepsilon$ pour tout n .

ν étant bornée, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\nu(K) \leq \eta$; donc $\int_K |g_n| d\nu \leq \varepsilon$ pour tout n .

Pour tout n , on a alors

$$\begin{aligned} \int_K |f_n| d\mu &= \int_{K \cap [f_n \geq 0]} f_n d\mu + \int_{K \cap [f_n \leq 0]} (-f_n) d\mu \\ &= \int_{K \cap [f_n \geq 0]} g_n d\mu + \int_{K \cap [f_n \leq 0]} (-g_n) d\mu \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat cherché.

Remarques.

a. Si X est un espace localement compact, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$, et μ une mesure de Radon positive, on peut prendre pour $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de X .

b. Si μ est une mesure σ -finie, on peut prendre pour $\mathcal{K}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) < +\infty$.

COROLLAIRE 3 (Sous les hypothèses du corollaire 2). — Pour qu'une suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans L^1 , il faut et il suffit que, pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}$, la suite des nombres $\int_A f_n d\mu$ tende vers 0.

La condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante :

L'hypothèse entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int fg d\mu = 0$ pour tout $g \in L^\infty$, g étagée.

Comme l'ensemble des fonctions étagées est partout dense dans L^∞ , il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que l'ensemble H des f_n est borné des L^1 .

D'après le corollaire 2 de la proposition 4, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_K |f_n| d\mu \leq 1$ pour tout n .

Il nous reste à montrer que l'ensemble des $\int_K |f_n| d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, est borné.

Or, ceci va résulter du lemme suivant de théorie de la mesure :

LEMME. - Soit μ une mesure bornée sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{B})$. Pour tout $\eta > 0$, il existe une partition de X en deux ensembles A et B tels que

1° Il existe une partition finie (A_j) de A formée d'atomes de $\mathcal{B}$ relatifs à la mesure μ ⁽³⁾.

2° Il existe une partition finie (B_K) de B formée d'ensembles de $\mathcal{B}$ de mesure $\leq \eta$.

[Pour une démonstration de ce lemme, cf. l'article de HALMOS ⁽⁴⁾.]

Soit alors, d'après la proposition 4, $\eta > 0$ tel que $\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \int_A |f_n| d\mu \leq 1$ pour tout n .

Appliquons le lemme à la restriction de μ à K

$$\int_K |f_n| d\mu = \sum_{j=1}^p \int_{A_j} |f_n| d\mu + \sum_{K=1}^q \int_{B_K} |f_n| d\mu.$$

Comme $\mu(B_K) \leq \eta$, on a $\int_{B_K} |f_n| d\mu \leq 1$ pour tout K .

Comme f_n garde un signe constant sur A_j , on a

$$\int_{A_j} |f_n| d\mu = \left| \int_{A_j} f_n d\mu \right|$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_j} |f_n| d\mu = 0,$$

d'où le résultat.

THÉOREME 1 [DUNFORD-PETTIS]. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré ayant les propriétés suivantes :

- a. $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ est le dual de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.
- b. Il existe un sous-ensemble K de $\mathcal{B}$ tel que :

⁽³⁾ On dit que $E \in \mathcal{B}$ est un atome relatif à μ , si pour tout $F \in \mathcal{B}$, $F \subset E \Rightarrow \mu(F) = \mu(E)$ ou $\mu(F) = 0$; toute fonction $\mathcal{B}$ mesurable est presque partout constante sur un atome.

⁽⁴⁾ HALMOS (Paul). - On the set of values of a finite measure, Bull. Amer. math. Soc., t. 53, 1947, p. 138-139.

1° $\mathcal{K}$ est stable par réunion finie ;

2° $\mu(\Lambda) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset \Lambda} \mu(K)$;

3° pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\mu(K) < +\infty$.

Alors, pour qu'un sous-ensemble H de l'espace de Banach $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit qu'il possède les deux propriétés suivantes :

(A) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_K |f| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$.

(B) H est uniformément intégrable.

En outre, H est alors borné dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

α. La condition est nécessaire.

Supposons que H est faiblement relativement compact dans L^1 .

- Pour montrer (A) raisonnons par l'absurde, en utilisant le corollaire 2 de la proposition 4.

Supposons donc que

(k) $\exists \varepsilon > 0, \forall K, \exists f \in H, \int_K |f| d\mu > \varepsilon$.

On a vu dans la démonstration du corollaire 2 de la proposition 4 que

$$\int_{\Lambda} |f| d\mu = \sup_{K \subset \Lambda} \int_K |f| d\mu \text{ pour tout } f \in L^1.$$

On construit alors par récurrence une suite (K_n) d'éléments de $\mathcal{K}$ deux à deux disjoints, et une suite (f_n) d'éléments de H telles que $\int_{K_n} |f_n| d\mu > \varepsilon$ pour tout n .

D'après le théorème de Šmulian (Appendice I, lemme 3), il existe une sous-suite (f_{n_p}) de (f_n) qui converge faiblement dans L^1 ; donc d'après le corollaire 2 de la proposition 4, il existe un ensemble $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_K |f_{n_p}| d\mu \leq \varepsilon/2$ pour tout p . On peut alors écrire,

$$\int_{K_m} |f_{n_p}| d\mu \leq \varepsilon/2 + \int_{K \cap K_m} |f_{n_p}| d\mu.$$

Mais, les ensembles K_m étant deux à deux disjoints, $\mu(K) \geq \sum_m \mu(K \cap K_m)$; donc, puisque $\mu(K) < +\infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(K \cap K_m) = 0$; donc, d'après la proposition 4, il

existe un entier m_0 tel que

$$m \geq m_0 \Rightarrow \int_{K \cap K_m} |f_{n_p}| d\mu \leq \varepsilon/2 \quad .$$

Donc $\int_{K_m} |f_{n_p}| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq m_0$ ce qui est absurde, puisque

$$\int_{K_{n_p}} |f_{n_p}| d\mu > \varepsilon \text{ pour tout } p \quad .$$

(A) est ainsi établi.

- Raisonnons aussi par l'absurde pour montrer (B) ; en supposant que H n'est pas uniformément intégrable. D'après la proposition 3, puisque H est borné dans L^1 (lemme 1, Appendice I), $UC(H)$ ne serait pas vérifiée, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists f \in H, \quad \exists A \in \mathcal{B} \quad \mu(A) \leq \eta \quad \text{et} \quad \int_A |f| d\mu > \varepsilon \quad .$$

On en déduit l'existence d'une suite (A_n) d'ensembles de $\mathcal{B}$ et d'une suite (f_n) de fonctions de H telles que

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{A_n} |f_n| d\mu > \varepsilon \quad \text{pour tout } n \quad .$$

D'après le théorème de Šmulian, on peut extraire de (f_n) une sous-suite (f_{n_p}) qui converge faiblement dans L^1 ; et cette suite mettrait en défaut la conclusion de la proposition 4. (B) est donc établi.

β . Inversement, la condition est suffisante.

Nous allons utiliser le lemme 2 (Appendice I).

Soit $\varepsilon > 0$, d'après (A) et (B), il existe $K \in \mathcal{K}$ et $a \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\int_{CK} |f| d\mu \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \int_{[|f| \geq a]} |f| d\mu \leq \varepsilon/2$$

pour tout $f \in H$.

Écrivons alors

$$f = 1_{[|f| < a]} \cap K f + 1_{[|f| < a]} \cap CK f + 1_{[|f| \geq a]} f \quad .$$

Si on pose

$$f_1 = 1_{[|f| < a] \cap K} f \quad \text{et} \quad f_2 = 1_{[|f| < a] \cap K^c} f + 1_{[|f| \geq a]} f$$

on a

$$f = f_1 + f_2, \quad |f_1| \leq a 1_K \quad \text{et} \quad \int |f_2| d\mu \leq \varepsilon.$$

En vertu du lemme 2 (Appendice I), il suffit de montrer que l'ensemble M des fonctions f telles que $|f| \leq a 1_K$ est faiblement relativement compact dans L^1 .

Montrons d'abord que M est fermé dans L^∞ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Soit f adhérent à M , et supposons que $f 1_{CK} \neq 0$. Alors, $f 1_{CK \cap [f \geq 0]} \neq 0$, par exemple, donc,

$$\int f 1_{CK \cap [f \geq 0]} d\mu > 0.$$

Il existe donc $K_1 \in \mathcal{K}$, $K_1 \subset CK$ tel que $\int f 1_{K_1} d\mu > 0$. Or ceci est absurde, puisque, f étant adhérent à M , il existe un filtre (f_i) sur M tel que $\int f_i 1_{K_1} d\mu$ tende vers $\int f 1_{K_1} d\mu$, et que $\int f_i 1_{K_1} d\mu = 0$ pour tout i .

Ainsi, l'adhérence de M est contenue dans l'ensemble des fonctions p. p. nulles dans CK . Comme la boule-unité de L^∞ est compacte pour $\sigma(L^\infty, L^1)$, cette boule-unité est faiblement fermée; on en déduit que l'adhérence de M est aussi contenue dans la boule de rayon a , donc égale à M ; M est donc fermée, et comme la boule-unité de L^∞ est compacte pour $\sigma(L^\infty, L^1)$, M est compact dans L^∞ .

Par ailleurs l'injection canonique de M dans L^1 est continue lorsque M est muni de la topologie induite par $\sigma(L^\infty, L^1)$ et L^1 de $\sigma(L^1, L^\infty)$. Il en résulte donc que M est faiblement compact dans L^1 .

γ. Si H est relativement faiblement compact dans L^1 , H est faiblement bornée, donc fortement bornée, d'après le lemme 2 (Appendice I).

COROLLAIRE 0. - Sous les hypothèses (a) et (b) du théorème 1, pour que $H \subset L^1$ soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit que H soit borné

dans L^1 , parré de la propriété d'absolue continuité uniforme, et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{CK} |f| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$.

COROLLAIRE 1. - Soient E un espace localement compact, et θ une mesure de Radon ≥ 0 sur E .

Pour qu'une partie H de $L^1(E, \theta)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que

(A) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que

$$\int_{CK} |f| d\theta \leq \varepsilon \text{ pour tout } f \in H$$

(B) H est uniformément intégrable.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 en prenant $X = E$, $\mathcal{B} = \bigwedge_E^\theta$ tribu des ensembles θ -mesurables, $\mu = \bar{\theta}$, prolongement essentiel de θ à $\mathcal{B}$, et pour $\mathcal{K}$ la famille des compacts de E . On sait que ⁽⁵⁾

$$L^1(E, \theta) = L^1(E, \mathcal{B}, \mu) \quad ,$$

$$L^\infty(E, \theta) = L^\infty(E, \mathcal{B}, \mu) \quad ,$$

que

$$L^\infty(E, \theta) \text{ est le dual de } L^1(E, \theta)$$

et que

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K) \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que la mesure μ est σ -finie.

Pour qu'une partie H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que

(A) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que

⁽⁵⁾ cf. à ce sujet :

COURRÈGE (Philippe). - "Théorie de la mesure" . - Paris, Centre de Documentation universitaire (à paraître).

$$\mu(A) < +\infty \text{ et } \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon \quad .$$

(B) H est uniformément intégrable.

Il suffit de prendre pour $\mathcal{K}$ la famille des ensembles de mesure μ finie.

On sait, d'autre part, que si μ est σ -finie, $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ est le dual de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

COROLLAIRE 3. - Soit μ une mesure bornée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{B})$.

Pour qu'une partie H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que H soit uniformément intégrable.

En effet, si μ est bornée, la condition (A) du corollaire 2 est automatiquement satisfaite. [Cf. remarque (b) ci-dessous pour une démonstration directe.]

COROLLAIRE 4. - Soit μ une mesure bornée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{B})$.

Pour qu'une partie H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que H soit bornée dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, et parré de la propriété d'absolue continuité uniforme [définition 2].

Ceci résulte du corollaire 3, et du corollaire 1 de la proposition 3.

Remarques.

a. Les conditions (A) et (B) du théorème 1 sont indépendantes (cf. Appendice II, exemples 4 et 5).

b. Le corollaire 3 donne, dans le cas où μ est bornée, un résultat agréable. Montrons directement la condition suffisante.

$$f \text{ s'écrit } f = 1_{[|f| < a]} f + 1_{[|f| > a]} f \quad .$$

Si B désigne la boule-unité de L^∞ , on a $1_{[|f| < a]} f \in aB$. Le résultat découle alors des remarques préliminaires et du lemme 2 (Appendice I).

c. Le théorème 1 entraîne que, si H vérifie (A) et (B), H est borné dans L^1 . Ce résultat peut être montré directement sans utiliser les hypothèses (a) et (b).

Supposons donc que H soit uniformément intégrable, et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$. Alors, H est borné dans L^1 .

En effet, on peut écrire

$$f = \chi_{A_n[|f| < a]} f + \chi_{A_n[|f| < a]} f + \chi_{[|f| \geq a]} f$$

d'où

$$\int |f| d\mu \leq a\mu(A) + \int_{C_A} |f| d\mu + \int_{[|f| \geq a]} |f| d\mu ,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. - Sous les hypothèses du théorème 1 (ou des corollaires 1, 2, 3), toute partie H localement bornée de L^1 est faiblement relativement compacte.

En effet, soit $h \in L^1$ telle que $|f| \leq h$ pour tout $f \in H$. On a $\int h d\mu = \sup_{K \in \mathcal{K}} \int_K h d\mu$; donc, comme $\int h d\mu < +\infty$, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{C_K} h d\mu \leq \varepsilon$. Il en résulte que H vérifie (B); d'où le corollaire, puisque H est uniformément intégrable (proposition 1).

COROLLAIRE 6. - Sous les hypothèses du théorème 1, (ou des corollaires 1, 2, 3,) dans l'espace L^1 , toute suite de Cauchy faible, est faiblement convergente.

En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy faible, $n \rightarrow \int_A f_n d\mu$ converge pour tout $A \in \mathcal{B}$. Donc, d'après la proposition 4 et son corollaire 2, l'ensemble H des f_n a la propriété d'absolue continuité uniforme ainsi que la propriété (A). Comme H est faiblement borné, H est borné dans L^1 (lemme 1, Appendice I), donc d'après la proposition 3, H vérifie aussi (c); H est donc faiblement relativement compact. La suite (f_n) a donc un point adhérent (pour la topologie faible), dans L^1 , et puisqu'elle est de Cauchy, elle converge vers ce point.

3. Parties relativement compactes de L^1 . Convergence faible et convergence en mesure.

Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, nous désignerons par $M(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace des classes de fonctions mesurables équivalentes (pour μ). [$M(X, \mathcal{B}, \mu)$ est identique à l'espace quotient $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des fonctions μ -négligeables.]

Si on pose $\delta(f, g) = \inf \{ \varepsilon \mid \mu[|f - g| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon \}$, δ est une distance invariante par translation sur M , et induisant sur M une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de M , et appelée topologie de la convergence en mesure (pour μ). Pour qu'un filtre (f_i) sur M converge vers f pour cette topologie, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$i \rightarrow \mu[|f_i - f| \geq \varepsilon]$$

converge vers 0. On dit alors que le filtre (f_i) converge vers f "en mesure".

Sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ nous avons donc actuellement **trois** topologies: la topologie de la norme (ou forte ⁽⁶⁾), la topologie faible, et la topologie de la convergence en mesure.

La topologie forte est plus fine que la topologie de la convergence en mesure. En effet $\mu[|f| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f| d\mu$, donc

$$\mu[|f| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f| d\mu.$$

Par contre, en général, les topologies faible et de la convergence en mesure ne sont pas comparables (cf. Appendice II, exemple 6).

PROPOSITION 5. - Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, et H un sous-ensemble de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ayant les deux propriétés suivantes

(A₁) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, et $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$;

(B₁) H possède la propriété d'absolue continuité uniforme.

Alors, sur H , les structures uniformes induites par la métrique de L^1 , et par la métrique de la convergence en mesure, coïncident.

Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$f \in H, g \in H \text{ et } \delta(f, g) \leq \eta \implies \int |f - g| d\mu \leq \varepsilon.$$

⁽⁶⁾ ou encore topologie de la convergence en moyenne.

Soit $\varepsilon > 0$, $f, g \in H$, $a > 0$ et $A \in \mathcal{B}$ tel que

$$(A_1) \quad \int_{CA} |f| \, d\mu \leq \varepsilon/4 \quad \text{pour tout } f \in H$$

$$\begin{aligned} \int |f - g| \, d\mu &= \int_{A \cap [|f-g| < a]} |f - g| \, d\mu + \int_{CA \cap [|f-g| < a]} |f - g| \, d\mu \\ &\quad + \int_{[|f-g| \geq a]} |f - g| \, d\mu \\ &\leq a\mu(A) + \int_{CA} \{|f| + |g|\} \, d\mu + \int_{[|f-g| \geq a]} \{|f| + |g|\} \, d\mu \quad . \end{aligned}$$

Soit $\eta_0 = \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$; pour $a \leq \eta_0$, $a\mu(A) \leq \varepsilon/4$.

D'après le choix de A , le deuxième terme est $\leq \varepsilon/2$.

Enfin, puisque H a la propriété d'absolue continuité uniforme, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\mu(B) \leq \eta_1 \Rightarrow \int_B |f| \, d\mu \leq \varepsilon/8$ pour tout $f \in H$.

Posons $\eta = \inf(\eta_0, \eta_1)$.

Si $\delta(f, g) < \eta$, il existe $a > 0$ tel que $a < \eta$ et $\mu[|f - g| \geq a] < \eta$.

On a alors

$$\int |f - g| \, d\mu \leq \varepsilon \quad .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré satisfaisant aux hypothèses (a) et (b) du théorème 1 (§ 2), ou de ses corollaires 1, 2, 3. Alors, si H est un sous-ensemble faiblement relativement compact de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, les structures uniformes de la convergence en moyenne et de la convergence en mesure coïncident sur H .

COROLLAIRE 2. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré satisfaisant aux hypothèses (a) et (b) du théorème 1 (ou de ses corollaires 1, 2, 3). Alors

1° Pour qu'un sous-ensemble H de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit relativement compact pour la topologie forte, il faut et il suffit qu'il soit relativement compact pour la topologie faible, et pour la topologie de la convergence en mesure.

2° Pour qu'une suite (f_n) d'éléments de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ converge fortement vers $f \in L^1$, il faut et il suffit qu'elle converge faiblement, et qu'elle converge en mesure vers f .

La propriété 2° résulte du corollaire 1, puisque, si (f_n) est une suite faiblement convergente, l'ensemble des (f_n) est faiblement compact.

Montrons 1°.

Soit (f_n) une suite d'éléments de H . D'après le théorème de Šmulian (Appendice I, lemme 3) on peut en extraire une sous-suite (f_{n_K}) qui converge faiblement ; et de cette suite (f_{n_K}) , on peut extraire une sous-suite (f_{m_K}) qui converge en mesure ; (f_{m_K}) converge fortement d'après 2° ; d'où le résultat d'après le critère de Bolzano-Weierstrass.

Remarque. - Sur un sous-ensemble uniformément intégrable de L^1 les topologies de la convergence en mesure et en moyenne ne coïncident pas nécessairement si la mesure n'est pas bornée. (cf. Appendice II, exemple 6).

4. Généralisations diverses.

Soient $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurés, et $(f_i)_{i \in I}$ un élément de $\prod_{i \in I} L^1(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$.

On dit que la famille (f_i) est uniformément intégrable, si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{[|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu = 0$$

uniformément en i .

On dit que la famille (f_i) possède la propriété d'absolue continuité uniforme si

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall i \in I, \forall A \in \mathcal{B}_i, \mu_i(A) \leq \eta \Rightarrow \int_A |f_i| d\mu_i \leq \varepsilon.$$

Si tous les espaces mesurés $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ sont identiques, on retrouve le cas étudié au § 1.

PROPOSITION 6. - Supposons qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que $\mu_i(X_i) \leq M$ pour tout $i \in I$. Alors, pour que la famille $(f_i)_{i \in I}$ soit uniformément intégrable, il faut et il suffit qu'elle possède la propriété d'absolue continuité uniforme, et que l'ensemble des $\int |f_i| d\mu_i$ ($i \in I$) soit borné dans $\mathbb{R}$.

La condition est nécessaire ; en effet, on peut écrire

$$\int_{\Lambda} |f_i| d\mu_i = \int_{\Lambda \cap [|f_i| < a]} |f_i| d\mu_i + \int_{\Lambda \cap [|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu_i \\ \leq a\mu_i(\Lambda) + \int_{[|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu_i \quad .$$

Elle est suffisante, car

$$a^1_{[|f_i| \geq a]} \leq |f_i| \quad .$$

Donc

$$\mu[|f_i| \geq a] \leq \frac{1}{a} \int |f_i| d\mu \quad .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. - Soient $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurés, et
 $(f_i)_{i \in I}$ un élément de $\prod_{i \in I} L^1(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$.

Pour que la famille $(f_i)_{i \in I}$ soit uniformément intégrable, il faut et il suffit
qu'il existe une application φ borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(a)}{a} = +\infty, \text{ et}$$

$$\sup_{i \in I} \int \varphi \circ |f_i| d\mu_i < +\infty \quad .$$

On peut alors choisir φ croissante.

- La condition est suffisante, en effet soit $L > 0$ tel que

$$\int \varphi \circ |f_i| d\mu_i \leq L \quad \text{pour tout } i \in I \quad .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe n tel que $a \geq n \Rightarrow \varphi(a) \geq \frac{a}{\varepsilon}$ donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{[|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu_i \leq \int_{[|f_i| \geq a]} \varphi \circ |f_i| d\mu_i \leq L \quad \text{si } a \geq n$$

c'est-à-dire

$$\int_{[|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu_i \leq \varepsilon L \quad \text{pour } a \geq n \quad .$$

- La condition est nécessaire, en effet pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, soit

$$\Psi(a) = \sup_{i \in I} \int_{[|f_i| \geq a]} |f_i| d\mu_i$$

Ψ est une fonction décroissante de a , et $\lim_{a \rightarrow \infty} \Psi(a) = 0$ d'après l'hypothèse d'uniforme intégrabilité.

Si $\exists a_0$, $\Psi(a_0) = 0$, il n'y a qu'à prendre $\varphi(n) = 0$ pour $n \leq a_0$ et $\varphi(n) = +\infty$ pour $n > a_0$.

Supposons $+\infty > \Psi(a) > 0$ pour tout a , et soit $\varphi(n) = \frac{x}{\Psi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{R}_+$.

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = +\infty.$$

$$\int \varphi \circ |f_i| d\mu_i = \int \frac{|f_i(\omega)|}{\Psi(|f_i(\omega)|)} d\mu_i(\omega) \leq \frac{1}{\Psi(0)} \int |f_i| d\mu_i$$

puisque Ψ est décroissante, d'où

$$\int \varphi \circ |f_i| d\mu_i \leq 1,$$

puisque

$$\int |f_i| d\mu_i \leq \int_{[|f_i| \geq 0]} |f_i| d\mu_i \leq \Psi(0).$$

Enfin, si $\Psi(0) = +\infty$, il n'y a qu'à prendre $\varphi(n) = 0$ pour $n < \alpha$, et $\varphi(n) = \frac{x}{\Psi(n)}$ pour $n \geq \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est tel que $+\infty > \Psi(\alpha) > 0$.

Remarque. - Soit ν_i la mesure ≥ 0 sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ image de μ_i par $|f_i|$ [ν_i est une mesure de Radon si μ_i est une mesure bornée].

On a

$$\int \varphi \circ |f_i| d\mu_i = \int \varphi d\nu_i.$$

Appendice I. - Quelques résultats sur les topologies faibles dans les espaces de Banach.

LEMME 1. - Soit B un espace normé. Tout sous-ensemble de B faiblement borné est fortement borné.

En effet, l'application qui, à tout $n \in B$, associe la forme linéaire $x' \rightarrow \langle n, x' \rangle$ sur B' est une isométrie de B dans B'' qui permet de considérer B comme un sous-espace de B'' (muni de la topologie forte). Si $H \subset B$ est faiblement borné, H est équi-continu, puisque B' est un espace de Banach, d'où le résultat, puisque toute partie équicontinue de B'' est fortement bornée.

LEMME 2. - Soient B un espace de Banach et U la boule-unité de B . Supposons que le sous-ensemble H de B soit tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble H_ε de B faiblement relativement compact, tel que $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon U$; alors H est faiblement relativement compact.

Considérons, comme précédemment, B comme un sous-espace de B'' , et, pour tout $A \subset B''$, soit $\bar{A}$ l'adhérence faible de A dans B'' . Puisque H est fortement borné dans B (lemme 1), il suffit, de montrer que $\bar{H} \subset B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\bar{H}_\varepsilon \subset B$, puisque H_ε est faiblement relativement compact dans B . Par ailleurs $\bar{H}_\varepsilon + \varepsilon \bar{U}$ est faiblement fermé dans B'' , puisque $\bar{H}_\varepsilon$ est compact, et $\varepsilon \bar{U}$ est fermé; donc $\bar{H} \subset \bar{H}_\varepsilon + \varepsilon \bar{U} \subset B + \varepsilon \bar{U}$.

Par ailleurs, $\bar{U} \subset U''$, où U'' est la boule-unité de B'' . Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\bar{H} \subset B + \varepsilon U''$.

Il en résulte que $\bar{H}$ est contenu dans l'adhérence de B dans B'' pour la topologie forte. D'où $\bar{H} \subset B$, puisque B étant complet est fermé (fortement) dans B'' .

LEMME 3 [théorème de Šmulian ⁽⁷⁾]. - Soit B un espace vectoriel normé ⁽⁸⁾ ; de toute suite faiblement relativement compacte de B , on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Soit U' la boule-unité de B' . U' est compacte pour la topologie $\sigma(B', B)$, et $B' = \bigcup_n nU'$.

⁽⁷⁾ cf. [2], p. 376.

⁽⁸⁾ ou, plus généralement, un espace vectoriel topologique métrisable.

Le lemme 3 résultera alors du lemme 4 ci-dessous.

LEMME 4. - Soient F un espace métrique, E un espace topologique qui est réunion dénombrable de sous-espaces compacts, et (f_n) une suite d'applications continues de E dans F relativement compacte dans $C(E, F)$ pour la topologie de la convergence simple. Alors il existe une suite extraite qui converge simplement.

α . Supposons d'abord que E est un espace compact métrisable ; soit D une partie dénombrable de E dense dans E , et A l'adhérence de l'ensemble des f_n dans $C(E, F)$ munis de la topologie de la convergence simple.

Sur A , la topologie de la convergence simple dans E est identique à celle de la convergence simple dans D . Or, cette dernière est métrisable, puisque D est dénombrable et F métrisable. D'où le résultat dans ce cas.

β . Supposons seulement que E soit compact.

Considérons la relation d'équivalence R sur E définie par $xRy \iff \forall n, f_n(x) = f_n(y)$, et soit φ l'application canonique de E sur $\hat{E} = E/R$. Pour tout n , il existe une application continue $\hat{f}_n$ et une seule de $\hat{E}$ dans F telle que $f_n = \hat{f}_n \circ \varphi$. Les $\hat{f}_n$ séparent les points de $\hat{E}$, il en résulte que la topologie $\mathcal{C}$ sur $\hat{E}$ la moins fine rendant continues les $\hat{f}_n$ est séparée. Comme cette topologie $\mathcal{C}$ est moins fine que celle de E/R , il en résulte d'abord que cette dernière est séparée, et, ensuite, puisque E est compact, qu'elle est compacte, donc identique à $\mathcal{C}$. Puisque l'ensemble $\hat{A}$ des $\hat{f}_n$ est dénombrable, et F métrisable, on en déduit que $\hat{E}$ est un espace métrique compact.

Soit B l'adhérence de l'ensemble A des f_n dans $C_S(E, F)$. On a xRy et $f \in B \implies f(x) = f(y)$, par passage à la limite ; donc $xRy \iff f(x) = f(y)$ pour tout $f \in B$. On en déduit que, pour tout $f \in B$, il existe une application continue $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans F telle que $\hat{f} \circ \varphi = f$. Soit $\hat{B}$ l'ensemble des $\hat{f}$ où $f \in B$. Considérons alors l'application θ qui, à tout $u \in C(\hat{E}, F)$, associe la fonction $u \circ \varphi$ de $C(E, F)$. Sa restriction à $\hat{B}$ est biunivoque, d'une part ; et, d'autre part, pour qu'un filtre (u_i) converge dans $C_S(\hat{E}, F)$, il faut et il suffit que la base de filtre des $(u_i \circ \varphi)$ converge dans $C_S(E, F)$. On en déduit que la restriction de θ à $\hat{B}$ est un homéomorphisme de $\hat{B}$ sur B pour les topologies induites par $C_S(\hat{E}, F)$ et $C_S(E, F)$ respectivement. Comme B est compacte, il en est de même de $\hat{B}$. On conclut alors en utilisant (α) et le fait que $\hat{E}$ est métrisable.

γ . Envisageons, enfin, le cas où E est réunion dénombrable de compacts.
 [σ -compact, comme disent les Russes.] Soit (K_p) une suite croissante de compacts telle que $E = \bigcup_p K_p$. Il résulte de (β) qu'on peut extraire de la suite (f_n) une sous-suite $(f_{n_{1,K}})$ qui converge en tout point de K_1 , de celle-ci une sous-suite $(f_{n_{2,K}})$ qui converge en tout point de K_2 , etc. Le procédé diagonal donne alors une suite extraite de (f_n) qui converge en tout point de $E = \bigcup_p K_p$.

C. Q. F. D.

Appendice II. - Quelques contre-exemples.

EXEMPLE 1. - X espace localement compact, non compact ; $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ tribu borélienne de X , et μ mesure de Radon ≥ 0 non bornée sur X . Si $H = \{1_K \mid K \text{ compact de } X\}$, H est borné dans L^∞ , donc uniformément intégrable, et cependant, H n'est pas borné dans L^1 .

EXEMPLE 2. - X ensemble quelconque, $\neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \varepsilon_b$ où $b \in X$, et, pour tout n , $f_n = n 1_{\{b\}}$.

Si H est l'ensemble des f_n , H vérifie $\mathcal{UC}(H)$, car :

$$\mu(A) < \frac{1}{2} \implies b \notin A \implies \mu(A) = 0 \implies \int_A |f| d\mu = 0$$

pour tout $f \in H$. Mais si $n \geq a$,

$$[|f_n| \geq a] = \{b\}$$

donc

$$\int_{[|f_n| \geq a]} |f_n| d\mu = n \quad ;$$

ce qui montre que H n'est pas uniformément intégrable.

EXEMPLE 3. - Reprenons l'exemple 2, en prenant pour X un espace compact, et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de X . H vérifie la condition : $\forall \varepsilon, \exists K$ compact tel que $\int_K |f| d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$ [prendre $K = X$!].

Cependant H n'est pas borné dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, donc H n'est pas relativement compact faiblement.

Ainsi H vérifie les conditions (a) et (b) du théorème 1 de GROTHENDIECK ([2], p. 400), sans être faiblement relativement compact.

Pour rendre l'énoncé de ce théorème correct, il suffit d'ajouter la condition " H borné dans L^1 ".

EXEMPLE 4. - $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tribu borélienne de $\mathbb{R}$, μ mesure de Lebesgue ;

$$f_n = 1_{[n, n+1]} \quad H = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad .$$

H est borné dans L^∞ , donc uniformément intégrable.

Cependant pour tout compact K , il existe n tel que

$$\int_K |f_n| d\mu = 1 \quad ,$$

donc H vérifie (B) et non (A).

EXEMPLE 5. - Reprendre l'exemple 2 ou l'exemple 3. H vérifie évidemment (A), mais H n'est pas uniformément intégrable.

EXEMPLE 6. - $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, μ mesure de Lebesgue. La topologie faible sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ n'est pas moins fine que la topologie de la convergence en mesure.

En effet, soit

$$f_n = \frac{1}{n} 1_{[0, n]} \quad .$$

(f_n) tend vers zéro en mesure, mais $\int f_n d\mu = 1$ pour tout n , donc (f_n) ne tend pas vers zéro faiblement, et ceci, bien que l'ensemble des (f_n) soit uniformément intégrable et borné dans L^1 .

EXEMPLE 7. - μ mesure bornée sur $(X, \mathcal{B})$ et (A_K) suite d'ensembles de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints tels que $\mu(A_K) = 1/2^K$ pour tout K . Si on pose $f_K = 2^K 1_{A_K}$ pour tout K , et $H = \{f_K \mid K \in \mathbb{N}\}$, H est borné dans L^1 et ne satisfait pas $\mathcal{UC}(H)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les espaces de Köthe, J. Anal., Jérusalem, t. 1, 1951, p. 81-115.
 - [2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Espaces vectoriels topologiques, 2e édition. - São Paulo, Sociedade de Matemática, 1958.
 - [3] NEVEU (Jacques). - Bases mathématiques du calcul des probabilités (Cours de 3e cycle. 1961/62).
-