SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Torsion homologique et sections rationnelles

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 5, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A5_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

16 juin 1958

TORSION HOMOLOGIQUE ET SECTIONS RATIONNELLES.

par Alexandre GROTHENDIECK

[Cet exposé a été rédigé et complété sur certains points en septembre 1958].

1. Espaces homogènes de groupes affines résolubles.

Comme dans les exposés précédents, on suppose fixé une fois pour toutes un corps de base $\underset{\sim}{k}$ algébriquement clos.

PROPOSITION 1. - *Soient* X *un espace algébrique affine,* G *un groupe affine connexe unipotent. Alors tout espace fibré principal* P *localement trivial sur* X *, de groupe* G *, est trivial.*

Récurrence sur $n = \dim(G)$. Si $n = 0$, c'est trivial, si $n = 1$, on sait que G est isomorphe au groupe additif $\underset{\sim}{k}$, ([6], théorème 4) donc le groupe des classes de fibrés principaux localement triviaux sur X , de groupe G , s'identifie à $H^1(X , \underset{\sim}{O}_X)$, d'où $\underset{\sim}{O}_X$ désigne le faisceau des anneaux locaux de X . Ce groupe est nul si X est affine, comme il est bien connu.

Supposons $n > 1$, et le résultat démontré pour les dimensions $< n$. Il existe alors un sous-groupe fermé invariant G' de G , distinct de (e) et de G . D'après un théorème de Rosenlicht, G fibré par G' est localement trivial, d'où il résulte aussitôt que P est un fibré principal localement trivial sur P/G' , de groupe G' ; d'autre part P/G' est un fibré principal localement trivial sur X , de groupe G/G' . Comme G' et G/G' sont des groupes affines connexes résolubles unipotents ([4], corollaire au théorème 3), de dimension $< n$, l'hypothèse de récurrence montre que les fibrés précédents ont chacun une section régulière. En composant ces sections, on trouve une section régulière de P sur X , ce qui prouve que P est trivial.

REMARQUE. - On s'est seulement servi du fait que $H^1(X , \underset{\sim}{O}_X) = 0$. On peut montrer aussi facilement que le résultat obtenu reste encore valable si on ne suppose plus G connexe.

PROPOSITION 2. - *Soient* R *un groupe affine résoluble connexe,* R' *un sous-groupe fermé connexe,* N (resp. N') *la partie unipotente de* R (resp. R'),

T (resp. T') un tore maximal de R (resp. R'), on suppose $T' \subset T$. On a $R = T.N$, $R' = T'.N'$ (produits semi-directs de groupes algébriques), ce qui permet d'identifier T à R/N, T' à R'/N', d'où un morphisme naturel

$$p : R/R' \to T/T'$$

i. Ce morphisme p définit R/R' comme un espace fibré trivial sur T/T', de fibre N/N'.

ii. N/N' est isomorphe (en tant que variété algébrique) à un espace affine $\underset{\sim}{k}^m$.

Signalons tout de suite le corollaire suivant, résultat de la conjonction de(i) et(ii) et du fait que T/T' est un tore, donc est isomorphe à $\underset{\sim}{k}^{*n}$ ([4]) :

COROLLAIRE. - Soient R un groupe affine résoluble connexe, R' un sous-groupe fermé connexe, alors R/R' est une variété isomorphe à $\underset{\sim}{k}^n \times \underset{\sim}{k}^{*n}$, donc isomorphe à un ouvert d'un espace affine $\underset{\sim}{k}^{n+n}$.

Démontrons la proposition 2.

i. Comme T est un tore, T' un sous-tore, il résulte facilement de [4], corollaires 3, 4 au théorème 2, p. 4, qu'il existe un autre sous-tore T'' de T tel que T s'identifie au produit des groupes algébriques T' et T''. On peut donc identifier T/T' à T''. Définissons

$$f_o : T'' \times N \to R/R'$$

par

$$f_o(t'', n) = t''n \bmod R' \quad ;$$

on obtient un morphisme de variétés satisfaisant $f_o(t'', nn') = f_o(t'', n)$ pour $n' \in N'$. Comme la variété quotient de $T'' \times N$ par N' s'identifie à la variété produit $T'' \times (N/N')$ (c'est par exemple une conséquence du fait que N fibré par N' est localement trivial, d'après le résultat cité de Rosenlicht), f_o définit par passage au quotient un morphisme de variétés

$$f : T'' \times (N/N') \to R/R' \quad .$$

Définissons de même un morphisme

$$g_o : R \to T'' \times (N/N')$$

par

$$g_o(t''t'n) = (t'' , t'nt'^{-1} \bmod N')$$

pour $t'' \in T''$, $t' \in T'$, $n \in N$ (notant que l'application $(t'' , t' , n) \to t''t'n$ de $T'' \times T' \times N$ dans G est un isomorphisme de variétés algébriques). On a pour $r \in R$, $r' \in R'$, $g_o(rr') = g_o(r)$, car on peut écrire $r = t''t'n$, $r' = t_1'n'$ ($t'' \in T''$, $t_1' \in T'$, $n \in N$, $n' \in N'$) d'où $rr' = t''.(t't_1').((t_1'^{-1} nt_1')n')$ et par suite $g_o(rr') = (t'' , (t't_1')((t_1'^{-1} nt_1')n')(t't_1')^{-1} \bmod N')$ or l'expression écrite dans le deuxième facteur du deuxième membre est congrue mod N' au transformé de $(t_1'^{-1} nt_1')$ par $(t't_1')$ (le transformé de n' par ce même élément étant dans N'), donc est congrue à $t'nt'^{-1}$, d'où

$$g_o(rr') = t'' , t'nt'^{-1} \bmod N') = g_o(r) .$$

Par suite g_o définit par passage au quotient un morphisme de variétés :

$$g : R/R' \to T'' \times (N/N')$$

On vérifie aussitôt que gf et fg sont les applications identiques, donc f est un isomorphisme de variétés. Comme cet isomorphisme est compatible avec les projections sur $T/T' = T''$,(i) est démontré.

ii. On procède par récurrence sur $\dim(N) = n$, l'assertion étant triviale si $n = 0$, et résultant du fait que N est isomorphe à $\underset{\sim}{k}$ si $n = 1$. Supposons $n > 1$, et l'assertion démontrée pour des dimensions $< n$. Soit $d = \dim(N) - \dim(N')$, on procède par récurrence sur d , l'assertion étant triviale si $d = 0$. Supposons $d > 0$, et l'assertion démontrée pour des différences de dimension $< d$. On a donc $N' \neq N$, donc le normalisateur connexe N'' de N' est distinct de N' ([6], N° 1, lemme). D'après le résultat de Rosenlicht déjà cité, N est fibré localement trivial sur N/N'' , de groupe N'' , donc le fibré associé N/N' est fibré localement trivial sur N/N'' , de groupe N''/N' .

D'après l'hypothèse de récurrence, N/N'' est isomorphe à un espace affine, donc a fortiori est une variété affine. En vertu de la proposition 1, comme N''/N' est un groupe affine unipotent connexe, il s'ensuit que le fibré précédent est trivial, donc N/N' est isomorphe à la variété produit $(N/N'') \times (N''/N')$. On est ramené à prouver que le deuxième facteur est un espace affine. Si $N'' \neq N$, i.e. $\dim(N'') < n$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Sinon, N' est invariant dans N , et N/N' est un groupe affine unipotent connexe.

Si la dimension de ce dernier est $< n$ i.e. $N' \neq (e)$, on a fini d'après l'hypothèse de récurrence. On est donc ramené à prouver que N est isomorphe à un espace affine. Comme $\dim(N) > 1$, il existe un sous-groupe invariant fermé connexe N'' de N distinct de (e) et de N , et on achève comme ci-dessus en considérant N comme fibré localement trivial sur N/N'' , de groupe structural N'' .

2. Classes de cycles sur les espaces fibrés.

Les trois propositions suivantes peuvent s'énoncer et se prouver dans le cadre de la théorie axiomatique développée dans les exposés précédents, lorsque l'axiome d'exactitude (E) est vérifié. Nous l'énoncerons seulement dans la théorie de Chow, $A(X)$ désignant l'anneau des classes de cycles de l'espace quasi-projectif non singulier X .

PROPOSITION 3. - *Soient* E *un espace fibré sur un espace algébrique* X , a *un point de* X , F_a *la fibre de* E *au-dessus de* a , $i : F_a \to E$ *le morphisme d'injection,* f *la projection de* E *sur* X . *On suppose* X *et* E (donc aussi F_a) *quasi-projectives non singulières. On suppose* E *localement trivial en* a . *Alors l'homomorphisme* $i^* : A(E) \to A(F_a)$ *est surjectif.*

i. Supposons d'abord que E soit trivial, donc on peut supposer que $E = X \times F$, avec $i(b) = (a , b)$. Soit alors $y \in A(F)$, on a évidemment $y = i^*(1_X \times y)$, ce qui prouve (i) dans ce cas. Dans le cas général, soit U un ouvert contenant a tel que $f^{-1}(U)$ soit fibré trivial sur U , d'après ce qu'on a vu, l'homomorphisme de restriction $A(f^{-1}(U)) \to A(F_a)$ est surjectif ; on sait d'autre part qu'il en est de même de l'homomorphisme de restriction $A(E) \to A(f^{-1}(U))$ (propriété d'exactitude), donc i^* qui est le composé de ces homomorphismes est lui aussi surjectif.

COROLLAIRE. - *Sous les conditions de la proposition 3, supposons* f *propre et* X *connexe. Alors il existe un* $z \in A(E)$ *tel que* $f_*(z) = 1_X$, *et* $f^* : A(X) \to A(E)$ *est un isomorphisme de* $A(X)$ *sur un groupe facteur direct de* $A(E)$.

Soient g le morphisme $F_a \to (a)$ induit par f , j le morphisme d'injection $(a) \to X$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "f"'] & F_a \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g"] \\ X & (a) \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

En vertu de l'exposé 4, proposition 2, on a $g_* i^* = j^* f_*$. Or on a $j^* = \varepsilon$ (l'augmentation de $A(X)$) si on identifie $A(a)$ à $\underset{\sim}{Z}$. Désignons de plus l'homomorphisme $g_* : A(F_a) \to \underset{\sim}{Z}$ par π. Alors la formule précédente s'écrit

$$(1) \qquad \pi(i^*(z)) = \varepsilon(f_*(z)) \qquad (z \in A(E))$$

Or on peut trouver, en vertu de la proposition 3, un $z \in A(E)$ tel que $i^*(z)$ soit un élément donné de $A(F_a)$, et en particulier tel que $\pi(i^*(z)) = 1$. Donc on a alors $\varepsilon(f_*(z)) = 1$, ce qui signifie que $f_*(z) = 1_X$.

Considérons alors l'application $z' \to f_*(zz')$ de $A(E)$ dans $A(X)$. Elle est inverse à gauche de $f^* : A(X) \to A(E)$, car on a $f_*(zf^*(x)) = f_*(z).x$ (formule de projection) $= x$ puisque $f_*(z) = 1_X$. Cela achève la démonstration.

On notera que, dans ce corollaire, l'hypothèse que f soit propre est essentielle, la conclusion étant en défaut, par exemple, si E est l'ensemble des points non nuls d'un fibré vectoriel non trivial de rang 1 sur X.

PROPOSITION 4. - <u>Soit E un espace fibré localement isotrivial</u> (cf. exposé 1) <u>de fibre F, de groupe structural un groupe linéaire connexe G, de base X. On suppose E, F, X non singulières et quasi- projectives. Soient $a \in X$, $F_a = f^{-1}(a)$ la fibre de a, où $f : E \to X$ désigne la projection du fibré. Soit m un entier > 0, et supposons qu'il existe un revêtement $g : X' \to X$ de X, non ramifié en a, de degré m, et tel que le fibré $g^{-1}(E)$ sur X' soit trivial au dessus d'un voisinage de $g^{-1}(a)$. Alors le conoyau de $i^* : A(E) \to A(F_a)$ est annulé par m.</u>

On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

COROLLAIRE. - <u>Supposons qu'on ait des entiers $m_i > 0$ satisfaisant aux conditions envisagées pour m, et soit d le plus grand commun diviseur des m_i. Alors le conoyau de $i^* : A(E) \to A(F_a)$ est annulé par d.</u>

Démontrons la proposition 4. Se servant de l'exactitude, on est aussitôt ramené au cas où X' est non ramifié sur X, et $E' = g^{-1}(E)$ est trivial au-dessus de tout X' (en effet, on peut remplacer X par un voisinage ouvert convenable de a).

Soient a'_i $(1 \leq i \leq m)$, les points de l'image inverse de a. Identifions E' à $X' \times F$, alors l'image réciproque par $h : E' \to E$ de $F = F_a$ est la réunion F' des $(a'_i) \times F = F_i$. De façon précise, h induit un isomorphisme $h_i : F_i \to F$, et on a $h_i h_j^{-1} = s_{ij}$, où s_{ij} est un automorphisme de F

défini par un élément de G. Soit enfin, pour tout $x' \in X'$,

$$i_{x'} : F \to E' = X' \times F$$

défini par $i_{x'}(y) = (x', y)$. Soit maintenant $\xi \in A(F)$; il existe un élément z' de $A(E')$ tel que $i_{x'}^*(z') = \xi$ pour tout $x' \in X'$: il suffit de prendre $z' = 1_{X'} \times \xi$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "i"] & F' \arrow[l, "\bar{h}"'] \arrow[d, "j'"] \\ E & E' \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

on est sous les conditions d'application de la proposition 2 de l'exposé 4, donc on a $\bar{h}_* j'^* = i^* h_*$. Posons $z = h_*(z')$, on a donc

$$i^*(z) = \bar{h}_* j'^*(z') = \sum_{1 \leq i \leq m} (s_{1,i})_* (\xi) .$$

La proposition 4 sera prouvée si nous prouvons que le dernier membre est égal à $m\xi$. Or cela résulte aussitôt du

LEMME 1. - *Soit G un groupe linéaire connexe opérant dans un espace algébrique non singulier quasi-projectif F. Alors les opérations de G dans $A(F)$ sont triviales.*

Ce lemme lui-même résulte de la conjonction des deux lemmes suivants :

LEMME 2. - *Soit G un groupe linéaire connexe. Alors pour tout $x \in G$, il existe une partie fermée C de G, contenant x et l'élément neutre e, et isomorphe à une partie ouverte de la droite affine $\underset{\approx}{k}$.*

En effet, on sait ([5]) que x est contenu dans un sous-groupe de Borel de G, ce qui nous ramène au cas où G est résoluble. En vertu du corollaire 1 à la proposition 2, il en résulte que G est isomorphe en tant que variété algébrique à une partie ouverte U d'un espace affine. L'assertion s'ensuit en prenant l'intersection avec U de la droite affine joignant les deux points envisagés de U.

LEMME 3. - *Soient S, V, W trois variétés algébriques, on suppose V et W quasi-projectives et non singulières, et S isomorphe à une partie ouverte de l'espace affine $\underset{\approx}{k}^n$. Soit φ un morphisme de $S \times V$ dans W, et pour tout $s \in S$ soit φ_s le morphisme $v \to \varphi(s, v)$ de V dans W. Alors* *le morphisme* $\varphi_s^* : A(W) \to A(V)$ *est indépendant de* s .

Soit $i_s : V \to S \times V$ défini par $i_s(v) = (s, v)$; on a donc $\varphi_s = \varphi i_s$, et on est ramené à montrer que i_s^* est indépendant de s . Soit p la projection de $S \times V$ sur V , en vertu de l'exposé 4, proposition 6, l'homomorphisme p^* de $A(V)$ dans $A(S \times V)$ est surjectif. On est donc ramené à prouver que $i_s^* p^*$ est indépendant de s ; or cet homomorphisme est en effet égal à $(pi_s)^*$, i.e. à l'identité,

C.Q.F.D.

REMARQUE. - On obtient une variante de la proposition 4, se prouvant de façon toute analogue, en remplaçant l'équivalence rationnelle par l'équivalence algébrique, et en supposant seulement en revanche que le groupe algébrique G est connexe.

PROPOSITION 5. - *Soient* $f : E \to X$ *un morphisme de variétés quasi-projectives non singulières,* a *un point de* X , $F_a = f^{-1}(a)$ *sa fibre,* $i_a : F_a \to E$ *le morphisme d'injection,* n *la dimension de* F_a . *On suppose l'application tangente* f' *surjective en tout point de* F_a . *Supposons la condition suivante vérifiée,* (pour un entier $d > 0$ donné) :

i. *Il existe des entiers* $n_i > 0$, *de plus grand commun diviseur* d , *et des revêtements* $g_i : X_i \to X$ *de* X , *non ramifiés en* a , *de degrés* n_i , *tels que les fibrés* $E_i = g_i^{-1}(E)$ *aient une section régulière au voisinage de* $g_i^{-1}(a)$.

Sous ces conditions, on a :

ii. *Il existe un* $z \in A^n(E)$ *tel que* $w(i_a^*(z)) = d$.

DÉMONSTRATION. - Soient n_i des entiers tels que $\sum n_i m_i = d$. Soit U_i un voisinage ouvert de $g_i^{-1}(a)$ sur lequel existe une section régulière s_i de E_i , et soit Z_i l'adhérence dans E_i de $s_i(U_i)$, enfin soit z_i la classe de Z_i dans $A(E_i)$. Soient h_i l'application naturelle de E_i dans E , $F_i = h^{-1}(F)$, et soit $\bar{h}_i$ l'application $F_i \to F$ induite par h . On a comme plus haut un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{\bar{h}_i} & F_i \\ {\scriptstyle i_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_i} \\ E & \xleftarrow{h_i} & E_i \end{array}$$

d'où on conclut encore ; compte tenu de la proposition 2 de l'exposé 4, que $\overline{h}_{i*} j_i^* = i_a^* h_{i*}$. Posant $z_i' = h_{i*}(z_i)$, on en déduit facilement que $\varkappa(i_a^*(z_i')) = m_i$. Posant alors $z = \sum m_i z_i'$, on aura bien $\varkappa(i_a^*(z)) = \sum n_i m_i = d$,

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - Sous les conditions de la proposition 5, supposons de plus que f soit propre. Alors on a $f_*(z) = d.1_X$, et l'homomorphisme f^* a un noyau qui est annulé par d .

La première assertion résulte de la formule (1) suivant la proposition 3, et la deuxième en est une conséquence immédiate, car en vertu de la formule de projection on aura $d.x = f_*(zf^*(x))$ pour tout $x \in A(X)$.

REMARQUE. - Il semble plausible que réciproquement, si f est propre la condition(ii) implique(i) Pour le prouver, il suffirait de savoir que dans toute classe de cycles sur E , il y a un cycle représentatif qui coupe transversalement la fibre F_a . On peut espérer qu'un énoncé de ce type, précisant le "lemme de Chow" de la théorie des intersections, soit valable en toute généralité.

3. Construction de sections de fibrés à l'aide de représentations linéaires.

Soient G un groupe algébrique, F un sous-groupe fermé. Alors G est un espace fibré principal localement isotrivial de base G/F , groupe structural F (cf. exposé 1). Par suite, pour toute représentation régulière u de F dans un groupe algébrique F' , on peut considérer le fibré principal associé au précédent, qui est un fibré localement isotrivial de groupe structural F' . Si en particulier F' est le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel V , i.e. si u est une représentation linéaire de F , alors on obtient même un fibré localement trivial sur G/F , de groupe structural F' (loc. cit.), d'où un fibré vectoriel localement trivial sur G/F , appelé fibré vectoriel homogène associé à la représentation linéaire u de F , noté $V(u)$. En tant qu'espace algébrique, c'est l'espace quotient de $G \times V$ par le groupe de transformations F , opérant par $f.(g , v) = (gf , u(f^{-1}).v)$. Comme G opère par translations à gauche dans l'espace fibré principal G sur G/F , il opère par transport de structure sur le fibré associé $V(u)$ (de façon compatible avec ses opérations sur la base G/F) ; de façon précise, $g' \in G$ définit l'opération sur $V(u)$ déduite par passage au quotient à partir de l'application $(g , v) \rightarrow (g'g , v)$ de $G \times V$ dans lui-même.

Supposons de façon générale que l'on ait un espace fibré vectoriel E de base X, et un groupe algébrique opérant sur E (donc aussi sur X) en respectant la structure de fibré vectoriel. Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace des sections régulières de E sur X, supposons W invariant par G. On a donc une représentation linéaire naturelle du groupe G par des automorphismes de W. Cette représentation est rationnelle. La vérification n'offre pas de difficultés : soit P le fibré principal associé à E, $H = \mathrm{Aut}(\underset{\sim}{k}^n)$ son groupe structural, alors les sections régulières de E sur X s'identifient aux applications régulières de P dans $\underset{\sim}{k}^n$ qui sont covariantes par H, ce qui nous ramène aussitôt à vérifier notre assertion dans le cas d'un fibré trivial $P \times \underset{\sim}{k}$, le groupe G opérant via des opérations de G sur le seul facteur P. Dans ce cas, le résultat est bien connu et résulte du fait que toute fonction régulière sur $G \times P$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\varphi(g)\,\psi(p)$, où $\varphi(\psi)$ est une fonction régulière sur $G(P)$.

Revenant à la situation G, F, u, $V(u)$ envisagée plus haut, supposons maintenant que G/F soit une variété complète. Alors l'espace des sections $W(u)$ de $V(u)$ sur G/F est de dimension finie, d'après un théorème bien connu dû à SERRE (cf. par exemple [7]). On obtient donc une représentation rationnelle de G dans $W(u)$, appelée représentation linéaire de G induite par la représentation linéaire u de F. D'après ce qui précède, c'est une représentation rationnelle de G.

Conservons les hypothèses et notations précédentes, et supposons de plus qu'on se soit donné un espace fibré principal P, localement isotrivial de groupe G, de base X. Alors P/F est un espace fibré localement isotrivial sur X, de fibre G/F complète, associé à P (cf. exposé 1). Le morphisme de projection

$$f : P/F \to X$$

est propre. De plus, on constate aussitôt que P est un espace fibré principal localement isotrivial sur P/F, de groupe F. Par suite, la représentation linéaire u de F permet de considérer encore sur P/F le fibré vectoriel associé, que nous noterons $V(u, P)$. De même, la représentation linéaire v de G dans $W(u)$, induite par u, permet de construire un fibré vectoriel sur X, associé à P et à cette représentation, et que nous désignerons par $W(u, P)$. Ceci dit, on constate aussitôt que les sections régulières de $W(u, P)$ sur un ouvert U de X s'identifient aux sections régulières de $V(u, P)$ au-dessus de l'ouvert $f^{-1}(U)$ de P/F, l'espace vectoriel fibre de $W(u, P)$ en $x \in X$

s'identifiant de façon naturelle à l'espace vectoriel des sections régulières de $V(u\ ,\ P)$ au-dessus de la fibre $f^{-1}(x)$ de x dans P/F . La vérification de ces faits est laissée au lecteur.

Soit maintenant N la dimension de G/F , et supposons que N soit aussi la dimension de la représentation u de F dans V , donc aussi le rang du fibré vectoriel $V(u)$ sur G/F . Supposons de plus qu'on ait une section régulière s de $V(u)$ au-dessus de G/F , transversale à la section nulle, et soit d le nombre total de zéros de s (dont chacun a nécessairement la multiplicité 1). Si on désigne comme ci-dessus par x un point de X , on peut (en choisissant un point de P au-dessus de x) identifier la fibre $f^{-1}(x)$ de x dans P/F avec G/F , et la fibre $W(u\ ,\ P)_x$ de $W(u\ ,\ P)$ en x s'identifie à l'espace vectoriel des sections de $V(u)$ au-dessus de G/F . Par suite s peut s'interpréter comme un élément de la fibre $W(u\ ,\ P)_x$. Soit alors S une section régulière de $W(u\ ,\ P)$ au-dessus d'un voisinage U de x , telle que $S(x) = s$. En vertu de ce qui précède, S peut aussi s'identifier à une section de $V(u\ ,\ P)$ au-dessus de $f^{-1}(U)$. Par construction, la restriction de cette section à la fibre $f^{-1}(x)$ de x n'est autre que s , donc est transversale à la section nulle du fibré $V(u\ ,\ P)|f^{-1}(x)$, et son nombre total de zéros est d . Soit alors X' l'ensemble des zéros de cette section S de $V(u\ ,\ P)$ sur $f^{-1}(U)$, je dis que X' coupe transversalement la fibre $f^{-1}(x)$, et le nombre de points d'intersection est exactement d . Seule la première assertion demande une vérification. Or elle résulte aussitôt du "critère de multiplicité 1" et du lemme suivant :

LEMME 4. - *Soient Y un espace algébrique non singulier, Y' un sous-espace fermé non singulier, E un fibré vectoriel sur Y , de rang N , E' sa restriction à Y' , s une section régulière de E au-dessus de Y , telle que le cycle des zéros Z de s existe et coupe proprement Y' . Soit s' la restriction de s à Y' . Alors le cycle des zéros Z' de s' existe, et est égal au cycle produit $Z.Y'$.*

La vérification est immédiate : par définition, on a $Z = t^{-1}(\Delta_E)$, où $t : Y \rightarrow E \times E$ est l'application définie par $t(y) = (0_y\ ,\ s(y))$, et où Δ_E est le cycle diagonal de E . On a, avec les notations correspondantes, $Z' = t'^{-1}(\Delta_{E'})$. Soit i le morphisme d'injection de Y' dans Y , on a donc $Z.Y' = i^{-1}(Z) = i^{-1}\ t^{-1}(\Delta_E) = (ti)^{-1}(\Delta_E) = ((j \times j)t')^{-1}(\Delta_E)$, où $j : E' \rightarrow E$ est le morphisme d'injection. Or on vérifie aussitôt que $(j \times j)^{-1}(\Delta_E) = \Delta_{E'}$, d'où enfin $Z.Y' = t'^{-1}(\Delta_{E'}) = Z'$

C.Q.F.D.

L'assertion relative à X' est donc prouvée. On en conclut aussitôt, tenant compte du fait que le morphisme f est propre, que, à condition de remplacer U par un voisinage plus petit de x, X' est un revêtement non ramifié de degré d du voisinage U de x. De plus, si on désigne par P' l'image réciproque de P par la projection $g : X' \rightarrow U$, il y a une section régulière naturelle de P'/F au-dessus de U.

Nous avons donc démontré le résultat suivant, qui remplace avantageusement dans certains cas la réciproque hypothétique de la proposition 5 envisagée dans la remarque à la fin du numéro précédent.

PROPOSITION 6. - Soient G un groupe algébrique, F un sous-groupe fermé tel que G/F soit complet, N la dimension de G/F. On suppose qu'il existe une représentation linéaire rationnelle u de F, de rang N, telle que le fibré vectoriel homogène correspondant $V(u)$ sur G/F admette une section régulière, transversale à la section nulle, et dont le nombre total de zéros est d. Alors pour tout espace fibré principal localement isotrivial P, de groupe structural G, de base non singulière X, et pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un revêtement non ramifié $g : X' \rightarrow U$ de degré d, tels que, désignant par P' le fibré principal sur X' image réciproque de P, le fibré associé P'/F admette une section régulière.

Cela signifie aussi que le groupe structural de P' peut se réduire à F. Posons alors la définition suivante :

DEFINITION. - Un groupe algébrique F est dit spécial si tout fibré principal localement isotrivial de groupe structural F est localement trivial.

Une caractérisation élémentaire des groupes algébriques affines spéciaux est donnée dans l'exposé 1. On y a vu aussi qu'un groupe affine connexe résoluble, ainsi que le groupe $G\ell(n)$, sont spéciaux. On obtiendra plus bas une caractérisation "homologique" des groupes affines spéciaux.

COROLLAIRE de la proposition 6. - Sous les conditions de cette proposition, supposons que F soit un groupe affine spécial (par exemple un sous-groupe de Borel de G supposé affine). Alors on peut même choisir $g : X' \rightarrow U$ de telle sorte que P' soit trivial.

D'après ce qui précède, on sait seulement, le groupe structural de P' pouvant être réduit à F, que P' est localement trivial. Je dis qu'à condition de remplacer U par un voisinage plus petit de x, P' sera même trivial. Cela résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 5. - <u>Soit</u> F <u>un groupe affine spécial, et soit</u> P <u>un fibré principal localement isotrivial</u> (donc localement trivial) <u>de groupe</u> G, <u>de base</u> X. <u>Soit</u> S <u>une partie finie de</u> X, <u>contenue dans une partie ouverte affine</u> V <u>de</u> X. <u>Alors il existe un voisinage</u> V' <u>de</u> S <u>tel que la restriction de</u> P <u>à</u> V' <u>soit triviale</u>.

Supposons d'abord que F soit le groupe $G\ell(n)$; notre assertion est alors équivalente à la suivante : pour tout fibré vectoriel E sur X, il existe un voisinage ouvert V' de S tel que $E|V'$ soit trivial. On peut évidemment supposer X lui-même affine (en le remplaçant par V). Soit, pour tout $s \in S$, $(e_i^s)_{1 \leq i \leq n}$ une base de la fibre de E en s. Il est alors bien connu, en vertu de la théorie des faisceaux algébriques cohérents sur les variétés affines (cf. par exemple FAC de SERRE [9]) qu'il existe, pour $1 \leq i \leq n$, une section régulière f_i de E telle que $f_i(s) = e_i^s$ pour tout $s \in S$. Les f_i définissent alors un homomorphisme du faisceau $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_X^n$ dans E, surjectif en les points de S en vertu du "lemme de Nakayama". Donc, pour des raisons de rang il est bijectif en ces points, donc bijectif dans un voisinage ouvert de S. Supposons maintenant que F soit un groupe affine spécial quelconque, on peut donc supposer que c'est un sous-groupe fermé du groupe linéaire $F' = G\ell(n)$. En vertu de ce qui précède, le fibré principal P' associé à F, de groupe F', a une restriction triviale à un voisinage V' de S, i.e. s'identifie à un produit $V' \times F'$. Comme P se déduit de ce fibré par restriction du groupe structural, il est donné par une section régulière de P'/F, i.e. par une application régulière u de V' dans F'/F. On constate alors que P sera trivial si et seulement si cette application se relève en une application régulière de V' dans F'. Or soit $T = u(S)$. On sait que F' fibré par F est localement trivial, F étant spécial (exposé 1). Je dis qu'il existe même une partie ouverte U de F'/F, contenant la partie finie donnée T de F'/F, et telle que la restriction de F' au-dessus de U soit triviale : en effet, si F' est trivial au-dessus de l'ouvert U_o de F'/F, il suffit de choisir un $a \in F'$ tel que $T \subset a.U_o$: un tel a existe, car pour $t \in T$, l'ensemble des $a \in G$ tels que $t \in a.U_o$, i.e. $a^{-1}.t \in U_o$, est une partie ouverte non vide de F', soit F'_t, et l'intersection des F'_t est donc non vide. Remplaçant maintenant V' par $u^{-1}(U)$, on peut supposer que $u(V') \subset U$. Alors u admet un relèvement

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si le groupe G est affine, il est inutile dans l'énoncé de la proposition 6 de supposer X non singulier. En effet, on se ramène aussitôt au cas où X est non singulier, en notant que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U, tel que $P|U$ soit isomorphe à l'image réciproque, par un morphisme $u : U \to Y$, d'un fibré principal localement isotrivial Q sur une variété <u>non singulière</u> Y (et on peut même choisir Q indépendant de P). Pour le voir, on suppose que G est un sous-groupe fermé du groupe $G' = G\ell(n)$, et on considère G' comme espace fibré principal Q sur $Y = G'/G$, de groupe structural G.

4. Anneau caractéristique et torsion.

Soient G un groupe algébrique affine connexe, B un sous-groupe de Borel de G, B^u la partie unipotente de B, T un tore maximal de B (donc de G). On sait que B est le produit semi-direct des groupes algébriques T et B_u ([5], théorème 3), ce qui permet d'identifier T et B/B^u. Comme les caractères rationnels de B induisent sur B^u le caractère trivial, il s'ensuit que le groupe des caractères rationnels de B s'identifie au groupe $\hat{T}$ des caractères rationnels de T (qui est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, n étant le "rang" de G).

D'après le résultat de Rosenlicht, G est un espace fibré principal localement trivial sur G/B, de groupe structural B. Par suite tout caractère rationnel χ de B, i.e. tout homomorphisme rationnel de B dans k^*, définit un espace fibré principal principal localement trivial associé, de groupe structural k^* Un tel espace fibré peut être considéré comme associé à un fibré vectoriel de rang 1 sur G/B, dont la classe à un isomorphisme près peut être considéré comme une classe de diviseurs, c'est-à-dire un élément de $A^1(G/B)$, noté $c_G(\chi)$. On obtient ainsi une application naturelle

$$c_G : \hat{T} \to A^1(G/B)$$

qui est un homomorphisme de groupes, comme on constate aussitôt.

On l'appelle l'<u>homomorphisme caractéristique</u> pour le groupe algébrique affine connexe G. Soit $S(\hat{T})$ l'algèbre symétrique du $\mathbb{Z}$-module $\hat{T}$ (qui est donc isomorphe à une algèbre de polynômes à n indéterminées), alors c_G se prolonge en un homomorphisme d'algèbres graduées :

$$c_G : S(\hat{T}) \to A(G/B) \tag{4.1}$$

appelé encore homomorphisme caractéristique. Son image est un sous-anneau de $A(G/B)$, appelé le *sous-anneau caractéristique* de $A(G/B)$. Il dépend évidemment de G (et non seulement de la variété G/B).

Soient maintenant G , G' deux groupes algébriques affines connexes, u un homomorphisme régulier de G dans G' , B un sous-groupe de Borel de G , B' un sous-groupe de Borel de G' contenant $u(B)$. Alors u induit d'une part un morphisme $G/B \to G'/B'$ d'où un homomorphisme d'anneaux gradués $A(G'/B') \to A(G/B)$; d'autre part il induit un homomorphisme $B \to B'$ d'où par transposition un homomorphisme $\hat{B}' \to \hat{B}$ et par prolongement à l'algèbre symétrique un homomorphisme d'anneaux $S(\hat{B}') \to S(\hat{B})$. Ceci posé, il y a commutativité dans le diagramme

(4.2)
$$\begin{array}{ccc} S(\hat{B}) & \xrightarrow{c_G} & A(G/B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S(\hat{B}') & \xrightarrow{c_{G'}} & A(G'/B') \end{array}$$

Pour le voir, il suffit de se borner aux éléments de degré 1 dans $S(\hat{B}')$, i.e. à $\hat{B}'$, et alors notre assertion résulte de la fonctorialité de la classe de diviseurs associée à une classe de fibrés vectoriels de rang 1.

Supposons maintenant que u soit le morphisme d'injection dans G' d'un sous-groupe fermé G de G' . Considérons le diagramme d'homomorphismes naturels :

(4.3)
$$\begin{tikzcd} & G'/B' & \\ G/B \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"] & G'/B \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"] & G'/G \\ & B'/B \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

LEMME 6. - i. *Le morphisme* p *est une projection d'espace fibré localement trivial, de fibre* B'/B *, et* p^* : $A(G'/B') \to A(G'/B)$ *est surjectif.*

ii. *Le morphisme* q *est une projection de fibré localement isotrivial de groupe structural* G *, associé au fibré principal* $G' \to G'/G$ (de groupe G) *et à l'espace de représentation* G/B *de* G . *Pour que le fibré* G'/B *sur* G'/G *admette une section rationnelle, il faut et il suffit que* G' *fibré par* G *admette une section rationnelle, i.e. soit localement trivial.*

iii. *L'homomorphisme* $\hat{B}' \to \hat{B}$ *est surjectif.*

DÉMONSTRATION. - i. En vertu du résultat de Rosenlicht, G' est fibré localement trivial par B', de base G'/B'. En prenant le fibré associé à ce fibré principal, et l'espace de représentation B'/B du groupe structural B', on obtient donc un espace fibré localement trivial de fibre B'/B, qui n'est autre que G'/B. En vertu du corollaire 1 à la proposition 2, la fibre B'/B est isomorphe à un ouvert d'un espace affine. En vertu du corollaire 1 au théorème 3 de l'exposé 4, il s'ensuit bien que p^* est surjectif.

ii. La première assertion est évidente. Il en résulte que G'/B fibré sur G'/G admet une section régulière au-dessus d'un ouvert U de G'/G si et seulement si le groupe structural de l'espace fibré principal G' sur G'/G peut se réduire de G à B. Mais en vertu du résultat de Rosenlicht, cela implique déjà que ce fibré est localement trivial sur U, donc (translatant U) sur tout G'/G. Cela signifie aussi que G' fibré par G admet une section rationnelle.

iii. Soit T un tore maximal de B, T' un tore maximal de B' contenant T. On est ramené à prouver que $\hat{T}' \longrightarrow \hat{T}$ est surjectif, ce qui est contenu dans [4], théorème 2, corollaire 3.

THÉORÈME 1. - Soient G' un groupe algébrique affine connexe, G un sous-groupe fermé connexe, B un sous-groupe de Borel de G et B' un sous-groupe de Borel de G' contenant B. Considérons le diagramme d'homomorphismes canoniques (4.3). Alors on a les relations suivantes dans l'anneau de Chow $A(G/B)$:

$$\mathrm{Im}(c_G) = \varphi^*(\mathrm{Im}\, c_{G'}) \subset \mathrm{Im}\ \varphi^* = \mathrm{Im}\, i^*$$

En d'autres termes, l'anneau caractéristique dans $A(G/B)$ est l'image par φ^* de l'anneau caractéristique de G'/B', et i^* et φ^* ont même image.

La première assertion résulte de la commutativité dans (4.1) et du lemme 6, iii. La deuxième résulte de la formule $\varphi^* = i^* p^*$ et du fait que p^* est surjectif (lemme 6, i).

Pour énoncer des corollaires, introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 2. - Soit G un groupe algébrique affine connexe. On dit que G est sans torsion si le sous-anneau caractéristique de $A(G/B)$ est identique à $A(G/B)$ tout entier, i.e. si l'homomorphisme c_G est surjectif.

Nous allons caractériser les groupes sans torsion au numéro suivant. Bornons-nous pour l'instant à remarquer qu'un groupe algébrique affine connexe *résoluble* est trivialement sans torsion, et que le groupe $G\ell(n)$ est sans torsion en vertu de la détermination explicite de $A(G/B)$ donnée pour $G = G\ell(n)$ dans l'exposé précédent, corollaire 1 au théorème 1.

COROLLAIRE 1. - *Avec les notations du théorème 1, supposons que* G' *soit sans torsion* (par exemple $G' = G\ell(n)$). *Alors on a* $\operatorname{Im} c_G = \operatorname{Im} i^* = \operatorname{Im} \varphi^*$.

On en déduit :

COROLLAIRE 2. - *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe,* B *un sous-groupe de Borel de* G . *Alors le sous-anneau caractéristique de* $A(G/B)$ *est exactement l'ensemble des éléments* ξ *de* $A(G/B)$ *ayant la propriété suivante : pour tout fibré principal localement isotrivial* P *de groupe* G , *de base* X , *et tout point* $a \in P$, *si on désigne par* j *le morphisme* $G/B \to P/B$ *défini par* a , ξ *appartient à l'image de* $j^* : A(P/B) \to A(G/B)$.

La condition énoncée est manifestement nécessaire, car en procédant comme au début de ce numéro, on définit un homomorphisme naturel

$$S(\hat{B}) \to A(P/B)$$

(qu'on pourrait encore appeler l'homomorphisme caractéristique pour le fibré P), et on a commutativité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} S(\hat{B}) \arrow[rr] \arrow[dr, "c_G"'] & & A(P/B) \arrow[dl, "j^*"] \\ & A(G/B) & \end{tikzcd}$$

pour des raisons évidentes de fonctorialité (généralisant la commutativité dans (4.2)). La condition énoncée est suffisante, car immergeons G dans un groupe $G' = G\ell(n)$, et prenons $P = G'$ fibré par G , a = élément unité de G' . Donc on aura $j = i$ (où i est l'homomorphisme i de (4.3), et par suite $\xi \in \operatorname{Im} i^*$; en vertu du corollaire 1, il s'ensuit que $\xi \in \operatorname{Im} c_G$.

COROLLAIRE 3. - *Avec les notations du théorème 1, supposons que* G' *soit sans torsion, et que* G' *fibré par* G *admette une section rationnelle. Alors* G *est sans torsion.*

En effet, i est l'injection d'une fibre dans un espace fibré *localement trivial* ; par suite i^* est surjectif (proposition 3), donc en vertu du corollaire 1 il en est de même de c_G.

Il résulte en particulier du corollaire 3 q'un groupe algébrique affine spécial (donc nécessairement connexe) est sans torsion : il suffit en effet de le plonger dans un groupe $G' = G\ell(n)$ et d'appliquer le corollaire 3. Nous allons voir au numéro suivant que ceci limite de façon draconienne la catégorie des groupes algébriques spéciaux.

COROLLAIRE 4. - <u>Soit</u> G <u>un groupe algébrique affine connexe,</u> B <u>un sous-groupe de Borel de</u> G. <u>Alors le sous-anneau caractéristique de</u> $A(G/B)$ <u>est d'indice fini dans</u> $A(G/B)$.

On plonge encore G dans un groupe $G' = G\ell(n)$, et on applique le corollaire 1, qui affirme que le sous-anneau caractéristique est égal à $\operatorname{Im} i^*$. Comme i est une injection de fibre dans un fibré localement isotrivial, il résulte de la proposition 4 que le conoyau de i^* est un groupe de torsion. Pour prouver qu'il est même fini, il suffit de noter que $A(G/B)$ est un groupe ayant un nombre fini de générateurs. Ce dernier fait résulte de la décomposition cellulaire de G/B ([8] et [4] proposition 7) (impliquant que les cellules dans une décomposition cellulaire standard de G/B ont des classes dans $A(G/B)$ qui engendrent ce groupe abélien). - Notons que le corollaire 4 peut remplacer le "théorème de transgression" de Borel pour obtenir la plupart des résultats classiques dans la théorie cohomologique des espaces classifiants de groupes de Lie compacts. Nous n'insisterons pas ici sur cette application possible de la Géométrie algébrique à la Topologie.

Soient toujours G un groupe algébrique affine connexe, B un sous-groupe de Borel, N la dimension de G/B. Considérons l'homomorphisme $\chi : A^N(G/B) \to \mathbb{Z}$, (défini grâce au fait que G/B est complète), il est évidemment surjectif, et en fait il est bijectif, comme il résulte du fait que dans la décomposition cellulaire de G/B, il n'y a qu'une seule cellule de dimension 0. Considérons l'ensemble des éléments de $A^N(G/B) \in \mathbb{Z}$ qui sont dans le sous-anneau caractéristique, c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ de la forme $d.\mathbb{Z}$, et on a $d > 0$ en vertu du corollaire précédent.

DÉFINITION 3. - L'entier d précédent est appelé l'indice de torsion du groupe algébrique affine connexe G. Si ℓ est un nombre premier, on dit que G a de la ℓ-torsion si ℓ divise d.

La signification de l'indice de torsion d est explicitée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient G un groupe algébrique affine connexe, B un sous-groupe de Borel, d' un entier > 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. Pour tout espace fibré principal localement isotrivial P, de groupe structural G, quasi-projectif et non singulier, et toute injection $j : G/B \to P/B$ définie par un élément a de P, le conoyau de $j^* : A(P/B) \to A(G/B)$ est annulé par d'.

ii. Le conoyau de l'homomorphisme caractéristique c_G est annulé par d', i.e. $d'.A(G/B)$ est contenu dans le sous-anneau caractéristique de $A(G/B)$.

iii. L'entier d' est un multiple de l'indice de torsion d de G.

iv. Il existe des entiers $m_i > 0$, de plus grand commun diviseur d', et des représentations linéaires u_i de B, de degré $N = \dim(G/B)$, tels que le fibré vectoriel homogène sur G/B associé à u_i admette une section régulière, transversale à la section nulle, et ayant exactement m_i zéros.

v. Il existe des entiers $m_i > 0$ de plus grand commun diviseur d', ayant les propriétés suivantes : pour tout espace fibré principal localement isotrivial P, de groupe structural G, de base X, et pour tout point $x \in X$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x, des revêtements non ramifiés $g_i : X_i \to U$ de U, de degrés m_i, tels que l'image inverse $g_i^{-1}(P)$ de P soit un fibré trivial sur X_i.

DÉMONSTRATION. - On a (i) $\Rightarrow$ (ii), car en reprenant le raisonnement de la deuxième partie du corollaire 2 au théorème 1,(ii) apparait comme un cas particulier de(i) puisque $\mathrm{Im}\, c_G = \mathrm{Im}\, i^*$. On a(ii) $\Rightarrow$(iii) trivialement. Nous prouvons plus bas que(iii) implique(iv) D'autre part,(iv) implique(v) en vertu du corollaire à la proposition 6 (compte tenu de la remarque de la fin du numéro 3). Enfin(v) implique(i) en vertu du corollaire à la proposition 4.

Il reste donc à prouver que(iii) implique(iv), ou encore que(iv) est vérifié en prenant $d' = d$ (indice de torsion). Soit R le radical connexe de G, posons $G' = G/R$, alors $B' = B/R$ est un sous-groupe de Borel de G' et G/B est isomorphe à G'/B'. Comme G' est semi-simple, les résultats de [1] sur le groupe $A^1(G'/B')$ des classes de diviseurs sur G'/B' s'appliquent à $A^1(G/B)$. Il en résulte en particulier que ce groupe $A^1(G/B)$ est un groupe libre, ayant une base $(\xi_1 , \dots , \xi_n)$ formée des classes de diviseurs <u>positifs</u> D_i. Il en résulte facilement que tout sous-groupe M d'indice fini de $A^1(G/B)$ admet une base formée de combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs des ξ_i. (Prendre un élément de M dont toutes les coordonnées soient strictement positives et qui soit primitif dans M comme premier élément d'une base de M ; on ajoute alors aux autres éléments de la base des multiples assez grands de ce premier élément). Il en sera en particulier ainsi pour le sous-groupe $c_G(\hat{T})$ de $A^1(G/B)$ (qui est bien d'indice fini en vertu du corollaire 4 au théorème 1). Donc ce sous-groupe admet une base $(\eta_1 , \dots , \eta_n)$ formé de classes de diviseurs sur G/B dont chacun est une combinaison linéaire à coefficients tous >0 des cellules de codimension 1 de G/B. Alors le groupe des éléments de $A^N(G/B)$ qui sont dans le sous-anneau caractéristique de $A(G/B)$ est le groupe engendré par les monômes $\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}$, avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N$. Donc d est le plus grand commun diviseur des entiers $\varkappa(\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}) = m$. Or soit, pour $1 \leq i \leq n$, χ_i un caractère de B dont l'image par c_G est η_i, et considérons la représentation linéaire u de B qui est somme directe de N représentations linéaires de rang 1, le caractère χ_i y figurant α_i fois. Il suffit de montrer que l'on peut trouver une section régulière s du fibré vectoriel homogène $V(u)$ sur G/B associé à u, telle que s soit transversale à la section nulle et ait exactement m zéros. En tout état de cause, si le cycle des zéros de s existe, il est bien de degré total m, car la classe de son cycle des zéros est égale à $c^N(V(u))$ (dernière classe de Chern du fibré vectoriel $V(u)$), donc à $\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}$ en vertu de la formule d'additivité pour les classes de Chern ($V(u)$ étant une somme directe de fibrés vectoriels de rang 1, le fibré de classe η_i y figurant α_i fois). Tout revient donc à trouver une section s transversale à la section nulle, i.e. ayant exactement m zéros distincts. Or se donner une section régulière de $V(u)$ revient à se donner des sections régulières de ses composantes de rang 1, qui sont les fibrés vectoriels associés aux classes de diviseurs S_i qui sont des combinaisons linéaires à coefficients tous >0 des cellules de codimension 1 de G/B. Le cycle des zéros de s (s'il existe) est le produit des cycles des zéros des composantes de s, qui sont des diviseurs positifs équivalents aux S_i (S_i figurant α_i fois) et par ailleurs arbitraires.

Il suffirait donc de prouver l'assertion suivante : soient D_i, $1 \leq i \leq r$, des diviseurs sur G/B, combinaisons linéaires à coefficients tous >0 des cellules de codimension 1 de G/B. Alors on peut trouver des diviseurs positifs

D_i' rationnellement équivalents aux D_i tels que les D_i' se coupent partout avec la multiplicité 1. Malheureusement, cette assertion n'est pas démontrée. Cependant, il nous suffit, pour notre objet, d'utiliser une forme affaiblie de l'assertion précédente, à savoir le

LEMME 7. - On peut trouver un diviseur positif Δ sur G/B tel que, pour tout diviseur D sur G/B tel que les coefficients de l'expression de la classe de D au moyen des classes des cellules de codimension 1 soient supérieurs à ceux de Δ, et pour tout cycle $Z > 0$ sur G/B, sans composante multiple, on puisse trouver un diviseur positif D', rationnellement équivalent à D, tel que les multiplicités dans $Z.D'$ soient toutes égales à 1.

Ce lemme implique que l'assertion conjecturale faite ci-dessus est vraie dans le cas où les coefficients des D_i sont "assez grands". Elle devient donc vraie quand on remplace les D_i par $m\,D_i$, où m est un entier assez grand. Appliquant ce résultat pour $m = \ell_1$ et $m = \ell_2$, où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux nombres premiers entre eux et premiers à d, on achèvera la démonstration de l'implication (iii)$\to$(iv).

Il reste donc seulement à prouver le lemme 7. On sait que G/B est une variété projective. Soit donc Δ une section hyperplane de G/B dans une immersion projective f de G/B dans un espace projectif $P(V)$. Si D est comme dans le lemme, alors D est rationnellement équivalent à $\Delta + D_0$, avec $D_0 \geqslant 0$. Comme D_0 est rationnellement équivalent à ses translatés, le système linéaire des diviseurs $\geqslant 0$ qui sont rationnellement équivalents à D_0 n'a pas de point fixe, donc définit un morphisme g de G/B dans un espace projectif $P(W)$. Il s'ensuit que le système linéaire des diviseurs $\geqslant 0$ équivalents à $\Delta + D_0$ définit encore une immersion projective (car un sous-système linéaire convenable du système linéaire précédent définit une immersion projective dans $P(V \otimes W)$, composée de $G/B \xrightarrow{f\times g} P(V) \times P(W)$ et de l'immersion naturelle de $P(V) \times P(W)$ dans $P(V \otimes W)$). Ainsi, le système linéaire des diviseurs $\geqslant 0$ équivalents à D est le système linéaire des sections hyperplanes dans un plongement projectif convenable de G/B. Le lemme 7 résulte aussitôt de là, car il est bien connu que, pour un cycle Z sans composante multiple dans l'espace projectif P^h, il existe une section hyperplane qui coupe Z avec la multiplicité 1 partout.

COROLLAIRE 1 au théorème 2. - <u>Pour que</u> G <u>soit sans torsion</u> (définition 1) <u>il faut et il suffit que son indice de torsion</u> d <u>soit égal à 1</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> ℓ <u>un nombre premier. Pour que</u> G <u>n'ait pas de</u> ℓ<u>-torsion, il est nécessaire et suffisant que l'homomorphisme composé</u>

$$S(\hat{B}) \longrightarrow A(G/B) \longrightarrow A(G/B) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

<u>soit surjectif</u>.

REMARQUES.

1° On peut se demander si dans l'énoncé des conditions (iv) et (v) du théorème 2, on ne peut remplacer l'ensemble des entiers m_i par le seul entier d' lui-même. D'après la démonstration du théorème, il en serait ainsi si on pouvait trouver des caractères $\chi_1, \dots, \chi_n$ de B, tels que les classes de diviseurs η_i associées aux χ_i soient des classes de diviseurs positifs, et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\varkappa(\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}) = d$ (indice de torsion). Comme on connait diverses expressions explicites de $A(G/B)$ et de $\varkappa$ en termes de la structure de G (ou seulement du diagramme du groupe semi-simple G'), la question de savoir si des χ_i et des α_i comme ci-dessus peuvent être trouvés (pour un G donné) est en principe une question de pure théorie des groupes et doit pouvoir se décider par le calcul du moins dans le cas où G est simple et simplement connexe, en traitant cas après cas. Les calculs cependant semblent d'une complication décourageante ; nous indiquerons au numéro suivant une autre méthode, permettant de prouver le résultat voulu quand $d = 1$ (théorème 3). Notons seulement ici que si l'assertion faite peut se prouver pour les groupes simples simplement connexes, on en conclurait facilement qu'elle est vraie aussi pour les groupes semi-simples simplement connexes, d'où on déduirait que si G est un groupe algébrique affine connexe quelconque, on peut trouver des χ_i et des α_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que $\varkappa(\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n})$ divise une puissance de d, i.e. n'ait pas d'autres diviseurs premiers ℓ que ceux intervenant dans dans la torsion de G. C'est ainsi que nous procèderons au numéro suivant, lorsque $d = 1$.

2° Il n'est pas difficile de montrer que $A(G)$ est isomorphe au quotient de $A(G/B)$ par l'idéal engendré par $c_G(\hat{B})$ (voir remarque à la fin de l'exposé précédent). Il s'ensuit aisément, utilisant le corollaire 4 au théorème 1 et le corollaire 2 au théorème 2, que $A(G)$ <u>est un anneau fini, et les diviseurs premiers de l'ordre de</u> $A(G)$ <u>sont exactement les nombres premiers intervenant dans la torsion de</u> G.

5. Caractérisation des groupes algébriques spéciaux.

Le but de ce numéro est de prouver l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3. - Soit G un groupe algébrique. Pour que G soit spécial, il faut et il suffit que G soit affine, connexe et sans torsion. Dans le cas où G est un groupe affine semi-simple, ces conditions signifient aussi que G est isomorphe à un produit direct de groupes de la forme $S\ell(n)$ et $Sp(n)$.

On a vû dans l'exposé 1 que si G est spécial, il est affine et connexe. En vertu de corollaire 3 au théorème 1, il sera alors sans torsion. Réciproquement, supposons que G soit affine, connexe, sans torsion, prouvons qu'il est spécial. En vertu du corollaire à la proposition 6, cela va résulter du fait suivant : il existe une représentation linéaire régulière u de rang $N = \dim(G/B)$ de B, telle que le fibré vectoriel homogène $V(u)$ sur G/B associé à u admette une section régulière s ayant exactement un zéro. On prendra pour u une somme directe de représentations linéaires de rang 1 de B, associés donc à des caractères χ_i $(1 \leq i \leq N)$ de B. Soient η_i les classes de diviseurs $c_G(\chi_i)$ sur G/B associées aux χ_i, l'existence de s signifie donc qu'il existe des diviseurs positifs D_i de classe η_i, tels que le cycle produit des D_i existe et soit de degré total 1. Il revient au même de dire que les η_i sont les classes de diviseurs positifs, D_i et que $\varkappa(\eta_1, \ldots, \eta_N) = 1$ (car remplaçant les D_i par des translatés convenables, on pourra supposer que le cycle produit des D_i existe). Or G étant sans torsion, l'application $\hat{B} \to A^1(G/B)$ est surjective. Notre assertion est donc équivalente à celle du lemme suivant.

LEMME 8. - Soient G un groupe algébrique affine connexe sans torsion, B un sous-groupe de Borel de G. Alors il existe sur G/B des classes η_i $(1 \leq i \leq N = \dim(G/B))$ de diviseurs positifs telles que $\varkappa(\eta_1 \ldots \eta_N) = 1$.

Nous ne nous servirons du fait que le groupe algébrique affine connexe G est sans torsion que sous la forme suivante : $A(G/B)$ est l'anneau engendré par ses éléments de degré 1. Alors hypothèse et conclusion ne changent pas si on remplace G par $G' = G/R$, où R est le radical connexe de G (car G/B est isomorphe à G'/B'). On peut donc supposer G semi-simple. On sait qu'il existe alors un groupe algébrique affine semi-simple simplement connexe et une isogénie u de G' sur G, appliquant un tore maximal T' sur un tore maximal T avec des exposants radiciels tous égaux à 1 ([23] proposition 1). Alors u induit un morphisme $G'/B' \to G/B$, je dis que c'est un isomorphisme. Par raison d'homogénéité, il suffit de prouver que c'est un morphisme birationnel, et pour ceci il suffit de prouver qu'il induit un isomorphisme de la cellule ouverte $B'.e'$ sur la cellule ouverte $B.e$ ([8]). Or cela résulte aussitôt des résultats de [8] et de la définition des exposants radiciels [3].

On est ramené ainsi au cas où G est semi-simple simplement connexe, $A(G/B)$ étant de plus engendré par ses éléments de degré 1, ce qui signifie que G est semi-simple et sans torsion. Nous allons donner plus bas le principe de la démonstration du lemme suivant.

LEMME 9 (CHEVALLEY-BOTT). - <u>Soit G un groupe algébrique semi-simple sans torsion. Alors G est isomorphe à un produit de groupes du type.</u> $S\ell(n)$ <u>et</u> $Sp(n)$.

On est donc ramené à prouver le lemme 8 pour un tel groupe produit G . On vérifie aussitôt qu'il suffit de le prouver pour des groupes du type $S\ell(n)$ et du type $Sp(n)$. Dans le premier cas, on vérifie que l'injection $S\ell(n) \to G\ell(n)$ définit un isomorphisme de la variété de drapeaux associés à $G = S\ell(n)$ dans celle associée à $G\ell(n)$, i.e. la variété des drapeaux usuels dans l'espace vectoriel de dimension n . Soit D cette variété ; utilisant les fibrations successives de D avec des espaces projectifs en fibres, nous avons donné dans l'exposé 4, théorème 1, corollaire 1 la structure de $A(D)$, qui a une base formée d'éléments de la forme

$$\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq p - i)$$

où les ξ_i sont les classes de diviseurs qui correspondent aux facteurs de rang 1 dans le scindage naturel du fibré trivial de rang n sur D . Posons

$$\eta_i = \xi_1 + \dots + \xi_i \qquad (0 \leq i \leq p - 1)$$

alors les η_i sont des classes de diviseurs <u>positifs</u> (associés aux poids dominants fondamentaux de $G\ell(n)$, définissant les représentations dans les puissances extérieures successives de $\underset{\sim}{k}^n$). On vérifie facilement, utilisant la définition des ξ_i , et les formules (17) de l'exposé 4, qu'on a

$$\varkappa(\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}) = 0 \quad \text{si} \quad (\alpha_1 , \dots , \alpha_{p-1}) < (p - 1 , \dots , 1)$$

$$\varkappa(\xi_1^{p-1} \cdots \xi_{p-1}) = 1$$

d'où on conclut facilement, compte tenu de $\prod(1 + \xi_i) = 0$,

$$\varkappa(\eta_1^{p-1}\,\eta_2^{p-2} \cdots \eta_{p-1}) = 1$$

Cela prouve le lemme 8 pour $G = S\ell(n)$. On procède de façon analogue pour $G = Sp(n)$. Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme alternée non dégénérée f . On désignera par $D = D(V , f)$ la variété des <u>drapeaux symplectiques</u> dans V , i.e. des drapeaux $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{2n} = V$ dans V tels que pour $i < n$, V_i soit totalement isotrope de dim i et V_{2n-i} soit la variété orthogonale à V_i . Alors D est une sous-variété fermée de la variété de tous les drapeaux de V , c'est un espace homogène algébrique sous $G = Sp(V , f)$. On vérifie sans difficulté que cet espace de transformation est isomorphe à un G/B . Soit alors de façon générale D_i la variété des drapeaux $V_1 \subset \cdots \subset V_i$, avec $\dim V_i = i$, les V_i étant des sous-espaces totalement isotropes de V . Alors D_n est isomrophe à D , et D_i est isomorphe à un fibré projectif sur D_{i-1} associé à un fibré vectoriel E_i sur D_{i-1} (savoir celui dont la fibre en le point $(V_1 , \ldots , V_{i-1})$ est l'espace vectoriel $(V_{i-1})^{o}/V_{i-1}$, où le ^{o} désigne l'orhtogonal pour f). Cela donne la structure de $A(D_i)$ en termes de celle de $A(D_{i-1})$, d'où de proche en proche la structure de $A(D_n) = A(D)$. De façon précise, on a sur D un fibré vectoriel symplectique E naturel, savoir le fibré constant défini par V , muni d'un scindage par des sous-fibrés vectoriels $F_1 \subset \cdots \subset F_{2n} = E$, où pour $i \leq n$, F_i est un sous-fibré totalement isotrope de rang i dont l'othogonal est F_{2n-i} . Considérons alors, pour $1 \leq i \leq n$, le facteur F_i/F_{i-1} , et soit ξ_i la classe de diviseurs associée au fibré dual du fibré précédent. Utilisant la propriété (I.11) de l'exposé précédent, on trouve que les

$$\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq 2n - 1 - 2i)$$

forment une base du $\mathbb{Z}$-module D . De plus, comme E' est trivial et admet un scindage dont les facteurs sont de rang 1 et ont des classes ξ_i et $-\xi_i$, on obtient entre les ξ_i la relation $\prod_{1\leq i\leq n}(1 + \xi_i)(1 - \xi_i) = 0$, i.e.

$$\prod_{1\leq i\leq n}(1 - \xi_i^2) = 0$$

qui s'écrit aussi $\sum \xi_1^2 \cdots \xi_k^2 = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$.

Posons alors

$$\eta_i = \xi_1 + \dots + \xi_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

alors les η_i sont des classes de diviseurs positifs sur D, (associées aux poids dominants fondamentaux de $G = Sp(V , f)$, qui correspondent aux représentations linéaires irréductibles de G dans les puissances extérieures successives de V).

D'autre part, les formules (17) de l'exposé précédent donnent encore

$$\varkappa(\xi_1^{2n-1} \dots \xi_n) = 0 \quad \text{si} \quad (\xi_1 , \dots , \xi_n) < (2n-1 , 2n-3 , \dots , 1)$$

$$\varkappa(\xi_1^{2n-1} \xi_2^{2n-3} \dots \xi_n) = 1$$

ce qui donne facilement

$$\varkappa(\eta_1^{2n-1} \eta_2^{2n-3} \dots \eta_n) = 1$$

Cela prouve le lemme 8 dans le cas $G = Sp(n)$. Ainsi, le théorème 3 est une conséquence du lemme 9, dont nous allons esquisser maintenant une démonstration.

Soient G un groupe algébrique connexe semi-simple, T un tore maximal de G, B un sous-groupe de Borel de G contenant T, N le normalisateur de T, W le groupe de Weyl N/T, qui s'identifie aussi à un groupe d'automorphismes du groupe discret $\hat{T}$. On a vu dans [8] que l'ensemble des orbites de B opérant sur G/B est en correspondance biunivoque avec W, à l'élément w de W correspondant l'orbite X_w de g_w mod B (où g_w est un représentant de w dans N). Soit $z(w)$ la classe dans $A(G/B)$ du cycle adhérence de X_w dans G/B. Nous avons déjà remarqué, comme conséquence de la proposition 7 de l'exposé précédent et de la relation $A(k^n) = \underset{\sim}{Z}$, que les $z(w)$ engendrent le $\underset{\sim}{Z}$-module $A(G/B)$. En fait, CHEVALLEY a montré que les $z(w)$ forment même une base du $\underset{\sim}{Z}$-module $A(G/B)$, et il a donné des formules explicites qui permettent d'exprimer en principe la loi d'anneau dans $A(G/B)$ à l'aide de cette base, i.e. d'exprimer $z(w)z(w')$ comme combinaison linéaire des $z(w'')$.

Nous ne donnerons pas ici la formule de Chevalley, et nous nous bornerons à en signaler une propriété importante : les coefficients qui y interviennent ne dépendent pas du corps de base (et en particulier sont indépendants de la caractéristique de ce dernier) ; ils s'expriment directement à l'aide de la configuration formée par le système des racines dans le groupe abélien libre $\hat{T}$ (W étant considéré comme le groupe des automorphismes de cette configuration), ou même, si on préfère, à l'aide du diagramme de Dynkin de G. En particulier, pour connaître la structure de l'anneau $A(G/B)$ correspondant à un diagramme de Dynkin donné, il suffit de le faire quand on prend pour G un groupe semi-simple connexe sur le corps des complexes, correspondant à ce diagramme de Dynkin. En particulier, pour déterminer les diagrammes de Dynkin qui correspondent à des G tels que $A(G/B)$ soit engendré par ses éléments de degré 1, il suffit de déterminer les groupes semi-simples complexes G pour lesquels $A(G/B)$ a cette propriété. Cela permet d'appliquer des méthodes transcendantes (voir numéro suivant) qui montrent que ces groupes sont exactement ceux isogènes à des produits de groupes de la forme $S\ell(n)$ et $Sp(n)$, et ayant donc par suite un diagramme somme de diagrammes du type $S\ell(n)$ et $Sp(n)$. Cela prouve donc le même résultat sur un corps de base algébriquement clos arbitraire. Enfin, pour que le groupe algébrique semi-simple connexe G soit sans torsion, il faut et il suffit qu'il soit simplement connexe (i.e. $\hat{B} \longrightarrow A^1(G/B)$ est surjectif) et que $A(G/B)$ soit engendré par ses éléments de degré 1. Cela signifie donc que G est lui-même isomorphe à un groupe produit de groupes de la forme $S\ell(n)$ et $Sp(n)$.

REMARQUES.

1° La démonstration indiquée est de nature transcendante. Bien entendu, la formule de Chevalley donne en principe un moyen de vérifier le lemme 9 par voie algébrique, utilisant la classification des groupes algébriques simples simplement connexes par leurs diagrammes de Dynkin. Mais les calculs semblent inextricablement compliqués.

2° On a obtenu en passant la structure de $A(G/B)$ pour $G = S\ell(n)$, qui a une forme très voisine des résultats obtenus dans le théorème 1 de l'exposé précédent. Il est d'ailleurs facile d'obtenir l'analogue complet de ce théorème, donnant la structure des anneaux de Chow associés aux diverses variétés de drapeaux symplectiques qu'on peut associer à un fibré symplectique. Comparer exposé 4, paragraphe 3 remarque 3.

3° Il y a divers résultats qui donnent quelque plausibilité à la conjecture suivante.

Soient G un groupe algébrique (non nécessairement connexe, ni affine), B un sous-groupe de Borel (i.e. un sous-groupe fermé linéaire résoluble maximal ; il résulte des théorèmes de structure des groupes linéaires que G/B est une variété complète). Soit P un fibré principal localement isotrivial de groupe G, de base X. On suppose E et X non singuliers quasi-projectifs, et on considère le fibré associé $E = P/B$ sur X, de fibre G/B. Soit a un point de X, $F_a = f^{-1}(a)$ sa fibre dans E, $i : F_a \to E$ le morphisme d'injection. Est-il vrai que pour que P soit localement trivial en a, il faut et il suffit qu'il existe un $z \in A(E)$ tel que $\varkappa(i^*(z)) = 1$? La nécessité de la condition est triviale (cf. proposition 3). La suffisance impliquerait que si P est localement trivial en un point, il l'est partout. On peut se demander s'il est même vrai que si deux fibrés localement isotriviaux sont isomorphes au voisinage d'un point, ils le sont au voisinage de tout point. (Ceci amène encore à généraliser la conjecture ci-dessus, en remplaçant le groupe G par un fibré en groupes au-dessus de X. La conjecture envisagée est vraie si G est abélien, sous réserve que la réciproque de la proposition 5 (envisagée dans la remarque qui la suit) soit vraie. On peut montrer aussi que cette conjecture est vraie si G est un groupe quotient de $G\ell(n)$ (par exemple le groupe projectif $GP(n-1)$), en utilisant des sections de fibrés vectoriels comme dans le numéro 3.

6. Relation avec la torsion homologique.

Nous supposons dans ce numéro que le corps de base est le corps $\underset{\sim}{C}$ des complexes. Alors tout espace algébrique est aussi un espace analytique complexe (cf. SERRE [10] p. 1). A ce titre, il est muni d'une topologie qui en fait un espace localement compact, et par suite d'un anneau de cohomologie $H^*(X) = H^*(X, \underset{\sim}{Z})$. Soit maintenant X une variété analytique complexe de dimension n en tout point. Nous admettrons qu'on peut à tout cycle analytique complexe Z sur X, de codimension complexe i, associer une classe de cohomologie $p(z) \in H^{2i}(X)$, cette opération étant compatible avec les produits cartésiens, les images inverses et les images directes propres, (et par suite aussi avec le produit de cycles resp. le cup-produit) et étant donnée sur les cycles non singuliers par dualité de Poincaré. Ces faits ne semblent pas figurer actuellement dans la littérature (ni même dans quelques papiers secrets), et il est à espérer qu'il se trouvera une bonne volonté pour combler cette lacune. Nous allons nous servir de $p(z)$ lorsque X est une variété algébrique non singulière, et z un cycle algébrique sur X. Se servant des propriétés énoncées, on voit même que si X est quasi-projective, on obtient un homomorphisme p de l'anneau de Chow $A(X)$ dans $H^*(X)$, doublant les degrés (N.B. - En fait, il sera même vrai que deux cycles <u>algébriquement</u> équivalents sont homologues).

Supposons de plus que X soit muni d'une suite (X_i) de sous-espaces fermés, tels que X_i soit de dimension i et $X_i - X_{i-1}$ soit réunion de composantes connexes $V_{i,j}$ qui sont isomorphes (en tant que variété algébrique) à $\mathbb{C}^i$. Il résulte alors de la proposition 7 de l'exposé précédent que les classes dans $A(X)$ des $\overline{V}_{i,j}$ forment un système de générateurs de $A(X)$. D'autre part, les $\overline{V}_{i,j}$, considérés comme parties fermées de X muni de sa topologie "usuelle", en définissent une décomposition cellulaire, donc les classes de cohomologie des cellules forment une <u>base</u> de $H^*(X)$. Combinant ces deux faits, on trouve que l'homomorphisme canonique $A(X) \to H^*(X)$ est un isomorphisme. En particulier, comme les G/B ont une décomposition cellulaire, on trouve :

LEMME 10. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe sur $\mathbb{C}$, et soit B un sous-groupe de Borel. Alors l'homomorphisme canonique $A(G/B) \to H^*(G/B)$ est un isomorphisme d'anneaux.*

D'autre part, d'après la définition axiomatique des classes de Chern, on voit que l'homomorphisme canonique $A(X) \to H^*(X)$ est compatible avec la formation de classes de Chern de fibrés vectoriels algébriques. Par suite, avec les notations du lemme 10, l'homomorphisme composé

$$S(\hat{B}) \to A(G/B) \to H^*(G/B)$$

est <u>l'homomorphisme caractéristique</u> du fibré topologique G de groupe structural B (compte tenu que la cohomologie de l'espace classifiant de B s'identifie à $S(\hat{B})$, comme il est bien connu). Ainsi, les nombres premiers qui sont de torsion pour G considéré comme groupe algébrique (cf. définition 3 et corollaire 2 du théorème 2), sont exactement ceux qui divisent l'ordre du conoyau de l'homomorphisme caractéristique

$$S(\hat{B}) \to H^*(G/B)$$

Or il est bien connu (et d'ailleurs élémentaire à partir du fait que le conoyau en question est bien fini) que ce sont aussi les nombres premiers qui interviennent dans la torsion de l'espace classifiant pour G. Donc :

THÉORÈME 4. - *Soit G un groupe algébrique connexe affine sur le corps $\mathbb{C}$. Alors les nombres premiers ℓ intervenant dans la torsion de G considéré comme groupe algébrique* (cf. définition 3) *sont exactement ceux qui interviennent dans la torsion de l'espace classifiant du groupe topologique G.*

Supposons maintenant que G soit semi-simple. Donc G est isomorphe au groupe algébrique associé à un groupe compact semi-simple K, et l'espace classifiant de G est homotope à celui de K. Or il est connu (BOTT) que le seul cas où ce classifiant est sans torsion, est celui où K est un produit de groupes spéciaux unitaires et symplectiques unitaires, i.e. où G est un produit de groupes $S\ell(n)$ et $Sp(n)$. Cela achève de prouver le lemme 9 du n° 5, et par là le théorème 3.

REMARQUE. - En toute rigueur, il faudrait pour que cette démonstration soit complète, que les faits énoncés au début de ce numéro soient démontrés, et que le résultat de Bott soit publié. Cela devrait donner envie à certains de prouver le lemme 9 par voie directe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Les systèmes linéaires sur G/B, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 15.

[2] CHEVALLEY (Claude). - Les isogénies, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 18.

[3] CHEVALLEY (Claude). - Existence d'isogénies, I., Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 23.

[4] GROTHENDIECK (Alexandre). - Généralités sur les groupes algébriques affines, Groupes algébriques affines commutatifs, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 4.

[5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Les théorèmes de structures fondamentaux pour les groupes algébriques affines, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 6.

[6] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sous-groupes de Cartan, éléments réguliers, Groupes algébriques affines de dimension 1, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58, n° 7.

[7] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, Séminaire Cartan, t. 9, 1956/57, n° 2.

[8] LAZARD (Michel). - Groupes semi-simples : structure de B et de G/B, Séminaire Chevalley, 1956-58, t. 1, n° 13.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-12.