Séminaire Claude Chevalley

Claude Chevalley

Les classes d'équivalence rationnelle, I

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A2_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES CLASSES D'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE, I.

par Claude CHEVALLEY

1. Familles algébriques de cycles.

Dans ce numéro, toutes les variétés que l'on considérera seront supposées non singulières.

Si T et U sont des variétés, nous désignerons par $\mathfrak{Z}(T)$ et $\mathfrak{Z}(U)$ leurs groupes de cycles et par $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ le groupe de cycles de $U \times T$ engendré par les sous-variétés fermées Z qui possèdent la propriété suivante : pour tout $t \in T$, $Z.(U \times t)$ est défini. Il résulte de là que l'image de Z par la projection p de $U \times T$ sur son second facteur est dense dans T, car, si $t \in p(Z)$, $Z \cap p^{-1}(t)$ est de dimension $\dim Z - \dim T$.

DÉFINITION 1. - On appelle famille algébrique de cycles sur U, paramétrée par T, une application X de T dans $\mathfrak{Z}(u)$ qui possède la propriété suivante : il existe un cycle $Z \in \mathfrak{Z}'(U \times T)$ tel que l'on ait $Z.(U \times t) = X(t) \times t$ pour tout $t \in T$.

Nous dirons alors que X est la famille définie par Z. Il est clair que, si les $X(t)$ sont de dimension a, Z de dimension $\dim T + a$. Si Z est une sous-variété de $T \times U$, on dit que X est irréductible.

Les familles algébriques de cycles de U paramétrées par T forment manifestement un groupe $\mathfrak{X}$ dans lequel l'addition est définie par

$$(X + X')(t) = X(t) + X'(t) .$$

Les familles X pour lesquels $X(t)$ est de dimension a (pour tout $t \in T$) forment un sous-groupe $\mathfrak{X}_a$ de $\mathfrak{X}$, et $\mathfrak{X}$ est la somme directe des $\mathfrak{X}_a$. Le groupe $\mathfrak{X}$ est engendré par les familles irréductibles. Nous allons voir maintenant que la donnée d'une famille algébrique de cycles détermine entièrement le cycle Z qui définit cette famille. Cela résultera de ce qui précède et de la

PROPOSITION 1. - Soient $X_1, \ldots, X_h$ des familles algébriques irréductibles de cycles de U paramétrées par une même variété T et définies par des sous-variétés fermées $Z_1, \ldots, Z_h$ mutuellement distinctes de $U \times T$ toutes de

même dimension. Il existe alors une partie ouverte non vide T_1 de T qui possède la propriété suivante : si $t \in T_1$, les $X_i(t)$ sont >0, et, si $i \neq j$, $\operatorname{Supp} X_i(t)$ n'a aucune composante irréductible en commun avec $\operatorname{Supp} X_j(t)$.

Si $i \neq j$, Z_i et Z_j sont distinctes et ont même dimension ; on a donc $Z_i \cap Z_j \neq Z_i$. Soit E_i la réunion des $Z_i \cap Z_j$ pour $j \neq i$; c'est une partie fermée $\neq Z_i$ de Z_i. La restriction p_i de la projection $U \times T \longrightarrow T$ à Z_i est un morphisme de Z_i dans T, et $p(Z_i)$ est dense dans T ; on sait (cf. appendice) qu'il existe alors une sous-variété ouverte T_i' de T telle que, pour $t \in T_i'$, $p_i^{-1}(t)$ soit non vide et n'ait aucune composante irréductible contenue dans E_i ; il suffit alors de prendre $T_1 = \bigcap_{i=1}^{h} T_i'$.

COROLLAIRE 1. - L'application qui fait correspondre à tout cycle appartenant à $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ la famille algébrique qu'il définit est un isomorphisme de $\mathfrak{Z}'(U \times T)$ sur le groupe $\mathfrak{F}$ des familles algébriques de cycles paramétrées par T ; $\mathfrak{F}$ admet une base composée des familles irréductibles.

COROLLAIRE 2. - Soit X une famille algébrique de cycles de U paramétrée par T. Si on a $X(t) \geqslant 0$ pour tout point t d'une partie dense de T, on a $X(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in T$.

Si la condition du corollaire 2 est satisfaite, on dit que la famille X est positive. Les familles positives sont évidemment les combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ de familles irréductibles.

PROPOSITION 2. - Soit X une famille algébrique de cycles paramétrée par une variété T, et soit f un morphisme d'une variété T' dans T. Alors $X' : t' \longrightarrow X(f(t'))$ est une famille algébrique paramétrée par T'.

Il suffit de le montrer quand X est irréductible ; soit Z la sous-variété de $U \times T$ qui la définit. Soit Φ le graphe de f, ensemble des $(f(t'), t')$ pour $t' \in T'$. Montrons que l'intersection $(U \times \Phi).(Z \times T')$ est définie. Soit Z_1' une composante irréductible de $(U \times \Phi) \cap (Z \times T')$; c'est une sous-variété de $U \times \Phi$; nous désignerons par p_1' la restriction à Z_1' de la projection $U \times \Phi \longrightarrow \Phi$. Si $(f(t'), t') \in \Phi$, $p^{-1}(f(t'), t')$ est de dimension $\leqslant a$ parce que contenu dans $(f(t'), t') \times X(f(t'))$ (on désigne par a la dimension des cycles $X(t)$). On en conclut que

$$\dim Z_1' \leqslant \dim p_1'(Z_1') + a \leqslant \dim \Phi + a = \dim T' + a$$

(puisque Φ est isomorphe à T'). Or on a aussi $\dim Z_1' \geqslant \dim T' + a$ par le

théorème de dimension ; il y a donc égalité ; on en conclut que l'on a $\dim p_1'(Z_1') = \dim \Phi$; Z_1' appartient donc à $\mathcal{Z}'(U \times \Phi)$. Ceci montre que l'intersection $Z' = (U \times \Phi).(Z \times T')$ est définie et que Z' , considéré comme cycle sur $U \times \Phi$, appartient à $\mathcal{Z}'(U \times \Phi)$. Considérons l'intersection $Z'.(U \times (f(t') , t'))$, où Z' et $U \times (f(t') , t')$ sont considérés comme cycles sur $U \times \Phi$. Comme f est un morphisme, on a $\Phi.(T \times t') = (f(t') , t')$ (dans $T \times T'$) et par suite $(U.\Phi).(U \times T \times t') = U \times (f(t') , t')$ (dans $U \times T \times T'$). Tenant compte de la définition de Z' et de la formule de relativisation des intersections, il vient

$$Z'.(U \times (f(t') , t')) = (U \times f(t') \times t').(Z \times T')) = (X(f(t')) \times f(t') \times t' .$$

On en conclut que la famille paramétrée par Φ définie par Z' est $(f(t') , t') \longrightarrow X(f(t'))$. On en conclut alors en tenant compte de l'isomorphisme entre Φ et T' .

COROLLAIRE 1. - Si T' est une sous-variété de T , la restriction à T' d'une famille algébrique paramétrée par T est une famille algébrique paramétrée par T' .

COROLLAIRE 2. - Soit X une famille algébrique paramétrée par T ; si T' est une variété quelconque, $(t , t') \longrightarrow X(t)$ est une famille algébrique paramétrée par $T \times T'$.

PROPOSITION 3. - Soient T , U , V des variétés, X une famille algébrique de cycles paramétrée par T et Y une famille algébrique de cycles de V paramétrée par T ; alors $t \longrightarrow X(t) \times Y(t)$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$ paramétrée par T .

Soient Z_U et Z_V les cycles qui définissent X et Y ; on voit facilement au moyen des formules d'intersections dans le produits que

$$Z_U \times Z_V \in \mathcal{Z}'(T \times T \times U \times V)$$

et définit la famille $(t , t') \longrightarrow X(t) \times Y(t')$; il suffit alors d'appliquer le corollaire à la proposition 2 à la diagonale de $T \times T$.

PROPOSITION 4. - Soient X et Y des familles algébriques positives de cycles d'une variété U , paramétrées par une même variété T ; si, pour tout $t \in T$, l'intersection $X(t).Y(t)$ est définie, $t \longrightarrow X(t).Y(t)$ est une famille algébrique de cycles.

Ecrivons $X = \sum_{i \in I} X_i$, $Y = \sum_{j \in J} Y_j$, où les X_i , Y_j sont des familles irréductibles ; pour tout $t \in T$, toute sous-variété fermée de U qui intervient avec un coefficient > 0 dans $X_i(t)$ (resp. $Y_j(t)$) intervient avec un coefficient > 0 dans $X(t)$ (resp. $Y(t)$) ; les intersections $X_i(t).Y_j(t)$ sont donc définies. Ceci montre qu'il suffit de démontrer la proposition 4 dans le cas où X et Y sont irréductibles ; ces familles sont alors définies par des sous-variétés fermées Z_X et Z_Y de $U \times T$, dont nous désignerons les dimensions par $a + \dim T$ et $b + \dim T$. Soit Z_1' une composante irréductible de $Z_X \cap Z_Y$, et soit p_1' la restriction à Z_1' de la projection $U \times T \longrightarrow T$. Soit $t \in T$; on a $p'^{-1}(t) \subset (\mathrm{Supp}\, X(t) \cap \mathrm{Supp}\, Y(t)) \times t$, d'où

$$\dim p_1'^{-1}(t) \leq a + b - n \quad (\text{où } n = \dim U).$$

Il en résulte que l'on a

$$\dim Z_1' \leq \dim p_1'(Z_1') + a + b - n \leq \dim T + a + b - n .$$

Mais on a aussi

$$\dim Z_1' \geq (\dim T + a) + (\dim T + n) = \dim T + a + b - n \quad ;$$

il résulte immédiatement de là que $Z_X.Z_Y$ est défini, et, comme $\dim p_1'(Z_1') = \dim T$, que $Z_X.Z_Y \in \mathcal{B}'(U \times T)$. Si $t \in T$, on a

$$Z_X.Z_Y.(U \times t) = Z_X.(Y(t) \times t) = Z_X.(U \times t).(Y(t) \times T) =$$
$$(X(t) \times t).(Y(t) \times T) = X(t).Y(t) \times t \quad ,$$

ce qui démontre la proposition 4 .

REMARQUE. - L'hypothèse que X et Y sont positives est essentielle à la validité de la proposition 4 . Prenons en effet $U = K^2$, $T = K$; si $t \in K$, soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ les droites d'équations $y = tx + 1 - t(1 + t)$ et $y = tx + 1 - t(t - 1)$ respectivement ; soit $Y(t)$ la droite d'équation $y = 1$; posons $X(t) = X_1(t) - X_2(t)$. Alors, pour tout $t \in K$, $X(t).Y(t)$ est défini et est $(t + 1 , 1) - (t - 1 , 1)$ si $t \neq 0$, 0 si $t = 0$; il est facile de voir que $t \longrightarrow X(t).Y(t)$ n'est pas une famille algébrique de cycles.

Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U . Rappelons qu'on peut associer à f un homomorphisme $f_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}(V)$ dans $\mathcal{B}(U)$ et un homomorphisme $\bar{f}^1_{\mathcal{B}}$ d'un sous-groupe $\mathcal{B}^*(U)$ dans $\mathcal{B}(V)$ qui sont définis comme suit. Si Y est une sous-variété fermée de V , on a $f_{\mathcal{B}}(Y) = d\, \overline{f(Y)}$ où $\overline{f(Y)}$ est l'adhérence de $f(Y)$ et où d est un entier déterminé comme suit : $d = 0$

si $\dim Y > \dim f(Y)$; si $\dim Y = \dim f(Y)$, d est le degré du morphisme f_Y de Y dans $\overline{f(Y)}$ induit par f (i.e. le degré du corps des fonctions numériques sur Y par rapport à l'image du corps des fonctions sur $\overline{f(Y)}$ par le cohomomorphisme de f). L'homomorphisme $f_{\mathfrak{Z}}$ se définit alors par linéarité. Pour définir $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}$, on introduit le graphe Φ du morphisme f , qui est une sous-variété fermée de $U \times V$; $\mathfrak{Z}^*(U)$ est le groupe des cycles X de U tels que $\Phi.(X \times V)$ soit défini dans $U \times V$; si X est dans ce groupe, $\Phi.(X \times V)$ peut être considéré comme un cycle sur Φ ; $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ est alors le cycle sur V qui s'en déduit au moyen de l'isomorphisme naturel entre Φ et V . Pour tout cycle Y sur V , $f_{\mathfrak{Z}}(Y)$ a même dimension que Y ; si $X \in \mathfrak{Z}^*(U)$, $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ est de dimension $a + \dim V - \dim U$ si X est de dimension a . On notera que $\mathfrak{Z}^*(U)$ est engendré par les sous-variétés fermées de U qui y sont contenues. La formule des projections donne le résultat suivant : si f est un morphisme propre, si $Y \in \mathfrak{Z}(V)$, $X \in \mathfrak{Z}^*(U)$, alors $Y.\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ est défini, il en est de même de $f_{\mathfrak{Z}}(Y).X$ et on a $f_{\mathfrak{Z}}(Y.\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)) = f_{\mathfrak{Z}}(Y).X$. Il suffit d'ailleurs que la restriction de f à toute composante irréductible de $\operatorname{Supp} Y$ soit propre.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> f <u>un morphisme propre d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> U ; <u>si</u> Y <u>est une famille algébrique de cycles de</u> V <u>paramétrée par une variété</u> T , $t \to f_{\mathfrak{Z}}(Y(t))$ <u>est une famille algébrique de cycle de</u> U .

L'application $g : (y , t) \longrightarrow (f(y) , t)$ est un morphisme propre de $V \times T$ dans $U \times T$. Il suffit de démontrer la proposition 5 dans le cas où Y est irréductible ; cette famille est alors définie par une sous-variété fermée Z de $V \times T$; $g(Z) = Z'$ est alors une sous-variété fermée de $U \times T$ (puisque g est propre) ; on a $g_{\mathfrak{Z}}(Z) = dZ'$, d étant un entier $\geqslant 0$. Si $t \in T$, on vérifie immédiatement que $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(U \times t)$ est défini et égal à $V \times t$; comme $Z.(V \times t)$ est défini et égal à $Y(t) \times t$, $g_{\mathfrak{Z}}(Z).(U \times t)$ est défini et égal à $g_{\mathfrak{Z}}(Y(t) \times t)$, qui est évidemment lui-même égal à $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t)) \times t$. Si $d = 0$, on a $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t)) = 0$ pour tout t . Si $d > 0$, soit $\dim T + a$ la dimension de Z , donc aussi de Z' . Pour tout $t \in T$, $f_{\mathfrak{Z}}(Y(t))$ est de dimension a , ce qui montre que $Z' \cap (U \times t)$ est de dimension a s'il n'est pas vide. Comme Z' est de dimension $\dim T + a$, il en résulte que son image par la projection $U \times T \longrightarrow T$ est dense dans T . La proposition 5 est donc établie.

REMARQUE. - La démonstration montre que la condition que f soit propre peut être remplacée par la suivante : pour toute composante irréductible Z du support du cycle de définition de la famille Y , la restriction à Z de

l'application $(y , t) \longrightarrow (f(y) , t)$ est propre.

PROPOSITION 6. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U ; soit X une famille algébrique positive de cycles de U paramétrée par une variété T. Si, pour tout $t \in T$, $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est défini, $t \longrightarrow \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est une famille algébrique de cycles de V.

Soit Φ le graphe de f ; pour tout $t \in T$, $\Phi.(X(t) \times V)$ est défini. Il résulte de la proposition 3 que $t \longrightarrow X(t) \times V$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$; tenant compte de la proposition 4, on voit que $t \longrightarrow \Phi.(X(t) \times V)$ est une famille algébrique de cycles de $U \times V$; il est clair que c'est aussi une famille algébrique de cycles de Φ (on notera que Φ est non singulière). Tenant compte de l'isomorphisme naturel de Φ sur V, on voit que $t \longrightarrow \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ est une famille algébrique de cycles de V.

REMARQUE. - La condition que X soit positive est essentielle à la validité de la proposition 6. Montrons-le par l'exemple suivant. Prenons $U = K^2$; prenons pour V la sous-variété de K^3 définie par l'équation $xz = y$; prenons pour f l'application $(x , y , z) \longrightarrow (x , y)$; prenons $T = K$, $X(t) = (t , t) - (- t , t)$; on a alors $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(t)) = (t , t , 1) - (- t , t , - 1)$ si $t \neq 0$, $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(0)) = 0$; il est facile de voir que $t \longrightarrow \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X(t))$ n'est pas une famille algébrique.

PROPOSITION 7. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U. Il existe alors un nombre fini de sous-variétés B_j $(1 \leq j \leq m)$ (non nécessairement fermées) de U et des nombres $\beta_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq m)$ qui possèdent la propriété suivante : si X est un cycle de U, pour que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini, il faut et suffit que, pour toute sous-variété fermée A de U qui intervient avec un coefficient > 0 dans X, et pour tout j $(1 \leq j \leq m)$, $A \cap B_j$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + \dim B_j - \dim U + \beta_j$.

Pour tout $e \geq 0$, désignons par $H(e)$ l'ensemble des points $x \in U$ tels que $\bar{f}^1(x)$ soit non vide et de dimension e. On sait que $H(e)$ est un ensemble constructible ; c'est donc la réunion d'un nombre fini de sous-variétés $B(e ; i)$ de U $(1 \leq i \leq m(e))$. Si L est une sous-variété de $B(e ; i)$, on a $\dim \bar{f}^1(L) \leq \dim L + e$. Soient en effet M_k $(1 \leq k \leq r)$ les composantes irréductibles de $\bar{f}^1(L)$; ce sont des sous-variétés de V. Soit f_k la restriction de f à M_k. Pour tout $x \in L$, $\bar{f}^1_k(x)$ est vide ou de dimension $\leq e$, d'où $\dim M_k \leq \dim L + e$. Si les dimensions des M_k étaient toutes

$<$ dim L + e , il y aurait une partie relativement ouverte non vide L' de L telle que, pour tous les k et tout $x \in L'$, $\bar{f}_k^1(x)$ soit de dimension $\leq$ e (ou vide) ; mais $\bar{f}^1(x)$ serait alors de dimension $<$ e , ce qui est impossible. En particulier, on a dim B(e ; i) + e $\leq$ dim V ; posons

$$\beta(e\ ;\ i) = \dim V - \dim B(e\ ;\ i) - e\ ,$$

d'où $\beta(e\ ;\ i) \geq 0$. Soit A une sous-variété fermée de U . Si Φ est le graphe de f , l'isomorphisme naturel de Φ sur V applique $\Phi \cap (A \times V)$ sur $\bar{f}^1(A)$; pour que $\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(A)$ soit défini, il est donc nécessaire et suffisant que $\bar{f}^1(A)$ soit vide ou de dimension $\leq$ dim A + dim V - dim U . Or $\bar{f}^1(A)$ est la réunion des $\bar{f}^1(A \cap H(e))$, donc des $\bar{f}^1(A \cap B(e\ ;\ i))$; $\bar{f}^1(A \cap B(e\ ;\ i))$ est vide ou de dimension dim $(A \cap B(e\ ;\ i))$ + e . Pour que $\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(A)$ soit défini, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\dim (A \cap B(e\ ;\ i)) + e \leq \dim A + \dim V - \dim U$$

pour tout e et tout i . Cette condition s'écrit encore

$$\dim (A \cap B(e\ ;\ i)) \leq \dim A + \dim B(e\ ;\ i) - \dim U + \beta(e\ ;\ i)\ ,$$

ce qui démontre la proposition 7 .

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> f <u>un morphisme d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> U <u>et</u> g <u>un morphisme d'une variété</u> W <u>dans</u> V ; <u>soit</u> h = f o g . <u>Il existe alors un nombre fini de sous-variétés</u> C_j <u>de</u> V <u>qui possèdent les propriétés suivantes, où</u> f_j <u>désigne la restriction de</u> f <u>à</u> C_j : <u>si</u> X <u>est un cycle de</u> U <u>tel que</u> $\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(X)$ <u>et les</u> $\bar{f}_{j;\mathfrak{Z}}^1(X)$ <u>soient tous définis,</u> $\bar{g}_{\mathfrak{Z}}^1(\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(X))$ <u>et</u> $\bar{h}_{\mathfrak{Z}}^1(X)$ <u>sont définis et égaux.</u>

Il existe des sous-variétés C_j de V telles que, si Y est une sous-variété fermée de V telle que, pour tout j , $Y \cap C_j$ soit vide ou de dimension $\leq$ dim Y + dim C_j - dim V , $\bar{g}_{\mathfrak{Z}}^1(Y)$ soit défini. Soit X une sous-variété fermée de U telle que $\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(X)$ et les $\bar{f}_{j;\mathfrak{Z}}^1(X)$ soient tous définis. Si Y est une composante irréductible de $\bar{f}^1(X)$, $Y \cap C_j$ est contenu dans $\bar{f}_j^1(X)$ et est par suite vide ou de dimension $\leq$ dim X + dim C_j - dim U . Par ailleurs, comme U et V sont non singulières, Y est de dimension $\geq$ dim X + dim V - dim U et est effectivement de dimension dim X + dim V - dim U puisque $\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(X)$ est défini. Il en résulte que $Y \cap C_j$ est vide ou de dimension $\leq$ dim Y+dim C_j-dim V . on en conclut de là que $\bar{g}_{\mathfrak{Z}}^1(\bar{f}_{\mathfrak{Z}}^1(X))$ est défini et que $\bar{h}^1(X) = \bar{g}^1(\bar{f}^1(X))$ est vide ou de dimension $\leq$ dim X + dim W - dim U , donc que $\bar{h}_{\mathfrak{Z}}^1(X)$ est défini.

Soient Φ et Γ les graphes de f et de g ; l'isomorphisme naturel de Φ sur V définit un isomorphisme de $\Phi \times W$ sur $V \times W$; nous désignerons par Γ_1 l'image réciproque de Γ par cet isomorphisme ; Γ_1 se compose des points $(h(z), g(z), z)$ pour $z \in W$. Soit r la restriction à Γ_1 de la projection $\Phi \times W \to W$; $\bar{g}_3^1(\bar{f}_3^1(X))$ est alors $r_3(\Gamma_1.((\Phi.(X \times V)) \times W)$, l'intersection $\Phi.(X \times V)$ étant calculée dans la variété $U \times V$ et l'intersection $\Gamma_1.((\Phi.(X \times V)) \times W)$ dans $\Phi \times W$. Or, soit s l'application $(x, y, z) \to (x, z$ de $U \times V \times W$ sur $V \times W$; s induit un isomorphisme de Γ_1 sur le graphe Δ de h ; $\Gamma_1.((\Phi.(X \times V)) \times W) = \Gamma_1.((\Phi \times W).(X \times V \times W))$ est égal à l'intersection $\Gamma_1.(X \times V \times W)$ dans $U \times V \times W$; son image par s est donc $\Delta.(X \times W)$. Si t est la projection $U \times W \to W$, on a $r = t \circ s$, et par suite

$$\bar{g}_3^1(\bar{f}_3^1(X)) = t_3(\Delta.(X \times W)) = \bar{h}_3^1(X) .$$

Rappelons qu'un morphisme f d'une variété V dans une variété U est dit fibrant s'il existe une variété W qui possède la propriété suivante : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert U_x de U et un isomorphisme t_x de $U_x \times W$ sur $\bar{f}^1(U_x)$ tels que $f(t_x(x', z)) = x'$ pour tout $x' \in U_x$ et tout $z \in W$. Supposons cette condition satisfaite. Pour tout $x \in U$, $\bar{f}^1(x)$ est de dimension $\dim W$; il en résulte que, pour toute sous-variété fermée A de U, $\bar{f}^1(A)$ est de dimension $\dim A + \dim W = \dim A + \dim V - \dim U$, ce qui montre que $\bar{f}_3^1(A)$ est défini. Par ailleurs, $\bar{f}^1(A)$ est une sous-variété de V. Soient en effet B et B' des composantes irréductibles de cet ensemble, x un point de $f(B)$ et x' un point de $f(B')$. Il est clair qu'il existe des voisinages ouverts U_x de x et $U_{x'}$ de x' tels que $\bar{f}^1(A \cap U_x)$ et $\bar{f}^1(A \cap U_{x'})$ soient homéomorphes à $(A \cap U_x) \times W$ et $(A \cap U_{x'}) \times W$ respectivement, donc irréductibles ; on en conclut que $\bar{f}^1(A \cap U_x)$ et $\bar{f}^1(A \cap U_{x'})$ sont des parties denses de composantes irréductibles B_1 et B_1' de $\bar{f}^1(A)$; on a $B \cap \bar{f}^1(U_x) \subset B_1$, $B' \cap \bar{f}^1(U_{x'}) \subset B_1'$, d'où $B \subset B_1$, et par suite $B = B_1$, et $B' = B_1'$. Or $\bar{f}^1(A \cap U_x \cap U_x')$ est dense dans B et dans B', d'où $B = B'$. Montrons maintenant que $\bar{f}_3^1(A) = \bar{f}^1(A)$. Soient x un point de A, U_x un voisinage ouvert de x et t_x un isomorphisme de $U_x \times W$ sur $V_x = \bar{f}^1(U_x)$ tels que $f(t_x(x', z)) = x'$ si $x' \in U_x$, $z \in W$. Soient Φ le graphe de f et Φ_x son intersection avec $U_x \times V_x$. Si on pose $A_x = A \cap U_x$, le coefficient de $\bar{f}^1(A_x)$ dans l'intersection $\Phi_x.(A_x \times V_x)$ dans la variété $U_x \times V_x$ est égal à celui de $\bar{f}^1(A)$ dans l'intersection

$\Phi.(A \times V)$ dans la variété $U \times V$. On se ramène donc au cas où $V = U \times W$, f étant la projection $U \times W \longrightarrow U$. Dans ce cas, Φ est $\Delta \times W$, où Δ est la diagonale de $U \times U$. Si Δ_A est l'ensemble des (x, x), $x \in A$, il est clair que $(\Delta \times W).(A \times U \times W) = \Delta_A \times W$ (avec le coefficient 1), ce qui démontre notre assertion.

2. Equivalence rationnelle des cycles.

Les variétés qui seront considérées dans ce numéro seront encore supposées non singulières.

DÉFINITION 2. - On dit qu'un cycle X sur une variété U est rationnellement équivalent à 0 s'il existe une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de cycles de U paramétrée par K telle que $\mathfrak{X}(X) = 0$, $\mathfrak{X}(1) = X$.

Il est clair que les cycles rationnellement équivalents à 0 forment un sous-groupe $\mathcal{B}_r(U)$ du groupe de tous les cycles, et que $\mathcal{B}_r(U)$ est un groupe gradué (par la dimension). Les éléments de $\mathcal{B}(U)/\mathcal{B}_r(U)$ s'appellent les classes d'équivalence rationnelles sur U.

PROPOSITION 8. - Soit f un morphisme propre d'une variété V dans une variété U ; si Y est un cycle rationnellement équivalent à 0 sur V, $f_{\mathcal{B}}(Y)$ est rationnellement équivalent à 0 sur U.

Cela résulte immédiatement de la proposition 5.

Nous démontrerons plus tard (c'est l'objet essentiel de ces exposés) que, si f est un morphisme de V dans U, et X un cycle de U rationnellement équivalent à 0 tel que $\bar{f}^1_{\mathcal{B}}(X)$ soit défini, ce dernier cycle est rationnellement équivalent à 0, tout au moins dans le cas où U est une variété quasi-projective.

Nous appellerons spéciale une variété T qui possède la propriété suivante : pour tout point $t \in T$, il existe un voisinage ouvert de t qui est isomorphe à une sous-variété ouverte d'un espace numérique K^r. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit f un morphisme d'une variété V dans une variété U ; soient T une variété spéciale et $\mathfrak{X}$ une famille algébrique positive de cycles de U paramétrée par T. Soit T' l'ensemble des $t \in T$ tels que $\bar{f}^1_{\mathcal{B}}(\mathfrak{X}(t))$ soit défini ; supposons que T' soit dense dans T. Les cycles $\bar{f}^1_{\mathcal{B}}(\mathfrak{X}(t))$,

<u>pour tous les</u> $t \in T'$, <u>sont alors rationnellement équivalents les uns aux autres.</u>

Soit $\mathfrak{X} = \sum_{i \in I} c_i \mathfrak{X}_i$, les $\mathfrak{X}_i$ étant des familles irréductibles et les c_i des entiers > 0 ; si $t \in T'$, les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}_i(t))$ sont tous définis. Il suffit donc de démontrer le lemme dans le cas où $\mathfrak{X}$ est irréductible, donc défini par une sous-variété fermée Z de $U \times T$. Soit Z_1 l'ensemble des $(x , y , t) \in U \times V \times T$ tels que $(x , t) \in Z$. Soit Φ le graphe de f . Désignons par $A_1 , \dots , A_m$ les composantes irréductibles de $Z_1 \cap (\Phi \times T)$, et par p_i la restriction à A_i de la projection $\Phi \times T \longrightarrow T$. Pour que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ soit défini, il faut et suffit que les ensembles $\bar{p}^1_i(t)$ soient tous vides ou de dimension $a + \dim V - \dim U$ (en désignant par a la dimension des cycles $\mathfrak{X}(t)$). Il en résulte que T' est un ensemble constructible, donc qu'il contient une partie ouverte non vide T_o de T ; comme la restriction de $\mathfrak{X}$ à T_o est une famille algébrique positive, la restriction à T_o de l'application $t \longrightarrow \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique (proposition 6). Ceci dit, considérons d'abord le cas où $T = K$; l'ensemble T' , qui contient un ouvert non vide, donc le complémentaire d'une partie finie, est alors lui-même ouvert et on peut prendre $T' = T_o$. Posant $\mathfrak{Y}(t) = \bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ pour $t \in T'$, nous allons voir que $\mathfrak{Y}$ peut se prolonger en une famille algébrique définie sur K tout entier. La famille $\mathfrak{Y}$ est définie par un cycle $E = \sum_{i=1}^{s} a_i E_i$ de $V \times T'$, où les E_i sont des sous-variétés fermées de $V \times T'$. Soit $\bar{E}_i$ l'adhérence de E_i dans $V \times K$. L'image de $\bar{E}_i$ par la projection de $V \times K$ dans K est dense dans K , puisqu'il en est ainsi de celle de E_i ; on en déduit que, si t est un point quelconque de K , et si $1 + e_i = \dim E_i$, $\bar{E}_i \cap (V \times t)$ est de dimension e_i . Il en résulte que le cycle $\bar{E} = \sum a_i \bar{E}_i$ définit une famille $\bar{\mathfrak{Y}}$ paramétrée par K ; cette famille prolonge $\mathfrak{Y}$, car, E_i étant fermé dans $V \times T'$, on a $E_i = \bar{E}_i \cap (V \times T')$. Si t , t' sont des points distincts quelconques de K , il y a un automorphisme de la variété K qui transforme t' en 0 et t en 1 ; il en résulte que $\bar{\mathfrak{Y}}(t) - \bar{\mathfrak{Y}}(t')$ est rationnellement équivalent à 0 , ce qui démontre le lemme dans le cas où $T = K$. Passons maintenant au cas général. On peut supposer que T_o est isomorphe à une sous-variété ouverte de K^r ; deux points quelconques de T_o appartiennent alors toujours à une sous-variété de T_o qui est isomorphe à une sous-variété ouverte de K , ce qui montre que les $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ pour tous les $t \in T_o$ sont rationnellement équivalents entre eux. Soit maintenant t' un point de T' ; il admet un voisinage ouvert T_1 qui est isomorphe à une sous-variété ouverte

de K^r. L'ensemble T_1 rencontre T_o ; soit t_o un point commun à ces deux ensembles. Les points t' et t_o appartiennent alors à une sous-variété de T_1 qui est isomorphe à une sous-variété ouverte de K. On en conclut que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t'))$ est rationnellement équivalent à $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t_o))$, ce qui achève la démonstration du lemme.

On notera que toute sous-variété ouverte d'une variété spéciale est spéciale, que tout produit de variétés spéciales est une variété spéciale, et que les variétés suivantes sont spéciales : les espaces projectifs ; le groupe projectif d'un espace projectif ; les grassmanniennes d'un espace projectif.

3. Les diviseurs des fonctions.

Il nous sera commode dans ce qui suit de modifier quelque peu la notion de diviseur d'une fonction $\neq 0$ sur une variété U, de manière à prendre en considération les hypersurfaces singulières de U. Soit S une hypersurface de U ; désignons par $\mathcal{O}(S)$ son anneau local. Si $t \in \mathcal{O}(S)$, $t \neq 0$, posons $e(t\,;S) = \ell(\mathcal{O}(S)/t\mathcal{O}(S))$ où $\ell(\mathfrak{M})$ désigne la longueur d'un module $\mathfrak{M}$. Il est clair que l'on a

$$e(t_1\, t_2\,;S) = e(t_1\,;S) + e(t_2\,;S)$$

quels que soient les éléments t_1, $t_2 \neq 0$ de $\mathcal{O}(S)$; l'application $t \longrightarrow e(t\,;S)$ se prolonge donc en un homomorphisme $t \longrightarrow e(t\,;S)$ du groupe multiplicatif des fonctions numériques $\neq 0$ sur U dans Z. Si S est non singulière sur U, $e(t\,;S)$ n'est autre que la multiplicité avec laquelle S figure dans le diviseur de la fonction t. Il suffit de le montrer dans le cas où $t \in \mathcal{O}(S)$. Remplaçant U par une sous-variété ouverte, on peut supposer t partout définie sur U. Soit alors U' le graphe de t ; soit S' l'hypersurface de U' qui correspond à S par l'isomorphisme naturel de U sur U'. Désignons par $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$ l'anneau local de S' sur $K \times U$ et par θ la projection de $K \times U$ sur K, qui est une fonction numérique sur $K \times U$. La multiplicité e' avec laquelle S intervient dans le diviseur (t) de t est le coefficient de S' dans l'intersection de U' et de $0 \times U$. Or l'idéal de définition de la variété $0 \times U$ dans $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$ est l'idéal engendré par θ. Soit par ailleurs $\mathfrak{a}'$ l'idéal de définition de U' dans $\mathcal{O}_{K\times U}(S')$; posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{K\times U}(S')$. Comme $\mathcal{O}\theta$ est idéal principal, on a $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{O}/\mathfrak{a}', \mathcal{O}/\mathcal{O}\theta) = \{0\}$ si $i > 0$, et e' est la longueur de $\mathrm{Tor}_o(\mathcal{O}/\mathfrak{a}', \mathcal{O}/\mathcal{O}\theta)$, c'est-à-dire de $(\mathcal{O}/\mathfrak{a}') \otimes (\mathcal{O}/\mathcal{O}\theta)$, ou encore de $\mathcal{O}/(\mathfrak{a}' + \mathcal{O}\theta)$. Or $\mathcal{O}/\mathfrak{a}'$ est l'anneau local

$\mathfrak{o}(S')$ de S' sur U', et la classe de θ modulo $\mathfrak{u}'$ est la fonction t' induite par θ sur U' ; on voit donc que e' est la longueur du module $\mathfrak{o}(S')/\mathfrak{o}(S')t'$ sur $\mathfrak{o}(S')$, donc est égal à $e(t\,;\,S)$ puisque t' est la fonction qui correspond à t par l'isomorphisme naturel de U' sur U.

Ceci étant, nous appellerons maintenant diviseur de t la somme formelle $\sum_S e(t\,;\,S)S$, étendue à toutes les hypersurfaces S singulières ou non de U. Nous désignerons ce diviseur par (t).

Soient maintenant U et V des variétés et f un morphisme propre de degré fini de V dans U. Soient $F(U)$ et $F(V)$ les corps de fonctions numériques sur U et V ; le cohomomorphisme φ de f est alors un isomorphisme de $F(U)$ sur un sous-corps de $F(V)$; si t est une fonction numérique sur V, nous désignerons par $N_{V/U}(t)$ la fonction numérique sur U dont l'image par φ est la norme relative de v par rapport au sous-corps $\varphi(F(U))$ de $F(V)$. Nous nous proposons de montrer que, si $t \neq 0$, on a

$$(N_{V/U}(t)) = f_{\mathfrak{Z}}((t)) .$$

(On notera que la définition de l'opération $f_{\mathfrak{Z}}$ s'étend immédiatement au cas des cycles qui font intervenir des variétés singulières). On voit tout de suite qu'il suffit de démontrer cette formule dans les cas suivants :

a. U et V sont normales ;

b. V est la variété dérivée normale de $F(U)$ relative au corps $F(U)$ lui-même.

Soit S une hypersurface de U ; nous désignerons par $\mathfrak{o}$ l'image par φ de son anneau local et par $\mathfrak{O}$ la fermeture entière de $\mathfrak{o}$ dans $F(V)$, qui est un $\mathfrak{o}$-module de type fini. Les anneaux locaux des hypersurfaces de V dont les images par f sont denses dans S sont les anneaux locaux des idéaux premiers maximaux de $\mathfrak{O}$. Pour établir que les coefficients de S dans les cycles qui figurent aux deux membres de la formule à établir sont égaux, il suffira de considérer le cas où $t \in \mathfrak{O}$, et même, dans le cas b., où $t \in \mathfrak{o}$; on peut même supposer, en multipliant t par un élément convenable de $\mathfrak{o}$, que, dans le cas b., t appartient à l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$. Soit u la norme relative de t par rapport à $\varphi(F(U))$. Le coefficient de S dans $(N_{V/U}(t))$ est $\ell(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}u)$. Dans le cas a., $\mathfrak{o}$ est un anneau à idéaux principaux, et il résulte immédiatement de la théorie des diviseurs élémentaires et du fait que u est le déterminant de l'endomorphisme $a \rightarrow at$ de $\mathfrak{O}$ que $\ell(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}u)$ est la longueur de $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t$ considéré comme $\mathfrak{o}$-module. Dans tous les cas, $\mathfrak{O}$ est un

anneau à idéaux principaux puisque $\mathfrak{o}$ est de dimension 1 ; si $S_1, \ldots, S_h$ sont les hypersurfaces distinctes de V dont les images par f sont denses dans S, $\mathfrak{O}$ admet h idéaux premiers $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_h$ dont les anneaux locaux sont les anneaux locaux des S_i ; soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}$ et d_i le degré du corps $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i$ par rapport à $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; on a alors $f_{\mathfrak{Z}}(S_i) = d_i S$. Soit $\mathfrak{O}t = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_h^{e_h}$; alors le coefficient de S dans $f_{\mathfrak{Z}}((t))$ est $\sum_{i=1}^h d_i e_i$. Le module $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t$ admet une suite de composition de longueur $\sum_{i=1}^h e_i$; parmi les quotients de cette suite, il y en a e_i qui sont isomorphes à $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i$; comme $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i$ est un $\mathfrak{o}$-module de longueur d_i, on voit que $\sum_{i=1}^h d_i e_i$ est égal à la longueur de $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t$ considéré comme $\mathfrak{o}$-module. Ceci démontre la formule dans le cas a. Pour traiter le cas b., il faut encore montrer que, dans ce cas, $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t$ et $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t$ ont même longueur en tant que $\mathfrak{o}$-modules. Or, il y a un $a > 0$ tel que $\mathfrak{O}t^a \subset \mathfrak{o}$; en désignant par $\ell_{\mathfrak{o}}$ la longueur en tant que $\mathfrak{o}$-module, et par n un entier > 0, $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{O}t^a/\mathfrak{O}t^{a+n}) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t^{a+n})$, puisque $\mathfrak{O}t^a \subset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}t^{a+n} \supset \mathfrak{o}t^{a+n}$. Il en résulte que $n\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t) \leq (a+n)\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t)$, d'où $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t)$. De même, comme $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{O}$, $\mathfrak{o}t^n \supset \mathfrak{O}t^{a+n}$, on a $n\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t) \leq (n+a)\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t)$, d'où $\ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}t) \leq \ell_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}t)$, ce qui achève la démonstration de la formule.

Nous allons appliquer ceci à la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 9. - <u>Soit U une variété non singulière. Pour qu'un diviseur X de U soit rationnellement équivalent à 0, il faut et suffit que ce soit le diviseur d'une fonction numérique sur U.</u>

Soit t une fonction numérique $\neq 0$ sur U. Elle se prolonge en une fonction sur U à valeurs dans la droite projective D ; soit Z l'adhérence dans $D \times U$ du graphe de cette fonction. Si t est constante, on a $(t) = 0$. Supposons t non constante ; alors $Z.(a \times U)$ est défini pour tout $a \in D$; soit $Z.(a \times U) = X(a) \times U$. Il est clair que $a \longrightarrow X(a)$ est une famille algébrique de cycles paramétrée par D, qui est une variété spéciale ; comme $(t) = X(0) - X(\infty)$ (t) est rationnellement équivalent à 0. Soit réciproquement X un diviseur rationnellement équivalent à 0 sur U. Utisant un raisonnement analogue à celui qui nous a permis de prolonger à K une famille algébrique de cycles définie sur une partie ouverte non vide de K (cf. la démonstration du lemme 1), on voit facilement qu'il existe une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de diviseurs de U, paramétrée par D, telle que $\mathfrak{X}(0) = 0$, $\mathfrak{X}(\infty) = X$. Soit Z le cycle de

définition de cette famille ; soit $Z = \sum_{i=1}^{h} c_i Z_i$, les Z_i étant des sous-variétés fermées de $U \times D$. Pour chaque i , la projection de $U \times D$ sur U induit un morphisme propre f_i de Z_i sur U , et f_i est de degré fini. Par ailleurs, la projection de $U \times D$ sur D définit une fonction numérique t_i sur Z_i . Si S est une hypersurface contenue dans $Z_i \cap (U \times 0)$, le coefficient de S dans $Z_i.(U \times 0)$ est la longueur de $\mathcal{O}(S)/\mathcal{O}(S)t_i$, où $\mathcal{O}(S)$ est l'anneau local de S sur Z_i ; appliquant un résultat analogue à $1/t_i$, on voit que le diviseur de t_i sur Z_i , considéré comme cycle dans $U \times D$, est $Z_i.((U \times 0) - (U \times \infty))$. Si $\mathfrak{X}_i$ est la famille algébrique de cycles définie par Z_i , on voit que le diviseur de t_i sur Z_i est $\mathfrak{X}_i(0) \times 0 - \mathfrak{X}_i(\infty) \times \infty$. Or il est clair que $f_{i;\mathcal{B}}(\mathfrak{X}_i(0) \times 0) = \mathfrak{X}_i(0)$, $f_{i;\mathcal{B}}(\mathfrak{X}_i(\infty) \times \infty) = \mathfrak{X}_i(\infty)$. Il en résulte, en vertu de la formule précédemment démontrée, que $\mathfrak{X}_i(0) - \mathfrak{X}_i(\infty)$ est le diviseur d'une fonction sur U (à savoir de $N_{Z_i/U}\, t_i$). Or on a

$$X = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i(\infty) \qquad 0 = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i(0) \quad ;$$

Il en résulte que X est le diviseur d'une fonction.

APPENDICE.

Nous avons utilisé le résultat suivant : <u>soit</u> f <u>un morphisme dominant d'une variété</u> V <u>dans une variété</u> U , <u>et soit</u> E <u>une partie fermée</u> $\neq V$ <u>de</u> V ; <u>il existe alors une partie ouverte non vide</u> U_o <u>de</u> U <u>telle que, si</u> $x \in U_o$, <u>aucune composante irréductible de l'ensemble</u> $\bar{f}^1(x)$ <u>ne soit contenue dans</u> E .

Soient $E_1, \ldots, E_h$ celles des composantes irréductibles de E dont les images par f sont denses dans U . Il y a d'abord une partie ouverte non vide U_1 de U qui ne rencontre pas l'ensemble $f(E - \bigcup_{i=1}^{h} E_i)$. Soit f_i la restriction de f à E_i ; il y a une partie ouverte non vide U_o de U_1 telle que, pour tout $x \in U_o$, et pour tout i $(1 \leq i \leq h)$, $\bar{f}_i^1(x)$ soit vide ou de dimension $\leq \dim E_i - \dim U < \dim V - \dim U$. Soit x un point de U_o , et soit Z une composante irréductible de $\bar{f}^1(x)$; il est bien connu que $\dim Z \geq \dim V - \dim U$; Z n'est donc contenu dans aucun des ensembles E_i ; comme les E_i sont fermés, Z n'est pas contenu dans leur réunion ; comme $x \in U_1$, Z ne rencontre pas $E - \bigcup_{i=1}^{h} E_i$; Z n'est donc pas contenu dans E .