

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les groupes de type C_2

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 22, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A9_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

--:--:--

LES GROUPES DE TYPE C_2

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 13.1.1958)

1. Le groupe $Sp\ n$.

Soit β la forme bilinéaire sur $K^{2n} \times K^{2n}$ définie par

$$\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n (\xi_i \eta_{i+n} - \xi_{i+n} \eta_i)$$

si $x = (\xi_1, \dots, \xi_{2n})$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_{2n})$. Nous désignerons par $Sp\ n$ le groupe des automorphismes de K^{2n} qui laissent la forme β invariante. On montre facilement que, si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $K^{2n} \times K^{2n}$ tels que $\beta(x, y) = \beta(x', y') = 1$, il existe une opération de $Sp\ n$ qui transforme x en x' et y en y' (cela résulte immédiatement de la théorie de la réduction des formes bilinéaires alternées). Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de K^{2n} . Les opérations de $Sp\ n$ qui laissent fixes les points e_n, e_{2n} forment un sous-groupe G isomorphe à $Sp(n-1)$, et on a une bijection naturelle de l'espace homogène $Sp\ n/G$ sur l'ensemble des points (x, y) de $K^{2n} \times K^{2n}$ tels que $\beta(x, y) = 1$, ensemble qui est évidemment une hypersurface quadrique irréductible. Comme $Sp\ 1 = SL(K^2)$ est connexe, on en déduit par récurrence sur n que $Sp\ n$ est connexe. Comme $Sp\ n$ opère transitivement sur l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K^{2n} , son application identique dans $GL\ K^{2n}$ est une représentation simple. Soit T l'ensemble des matrices diagonales appartenant à $Sp\ n$; pour qu'une matrice diagonale $\text{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$ appartienne à T , il faut et il suffit que l'on ait $a_i a_{i+n} = 1$ ($1 \leq i \leq n$). Il en résulte que T contient une matrice $t_0 = \text{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$ telle que les a_i soient tous distincts; le centralisateur de t_0 dans $GL\ K^{2n}$ étant le groupe des matrices inversibles diagonales, on voit que T est son propre centralisateur dans $Sp\ n$, donc est un tore maximal de $Sp\ n$. Il résulte du lemme de Schur qu'une matrice z_0 du centre de $Sp\ n$ est de la forme cI , $c \in K$, I étant la matrice unité; exprimant que $cI \in Sp\ n$, il vient $c = \pm 1$; le centre de $Sp\ n$ est donc d'ordre 2 ou 1 suivant que la caractéristique de K est $\neq 2$ ou $= 2$. Ce centre étant fini, $Sp\ n$ est semi-simple (exp. 20, lemme 1). Posons, pour $t \in T$, $t.e_i = \omega_i(t)e_i$; il est clair que l'on a (en

notation additive) $\omega_{i+n} = -\omega_i$ et que $\omega_1, \dots, \omega_n$ forment une base du groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T .

Soient i et j des indices distincts entre 1 et n ; si $\xi \in K$, les formules

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(\xi) \cdot e_i &= e_i + \xi e_j \\ \tau_{ij}(\xi) \cdot e_{j+n} &= e_{j+n} - \xi e_{i+n} \\ \tau_{ij}(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i, j+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_{ij}(\xi) \cdot e_{i+n} &= e_{i+n} + \xi e_j \\ \tau'_{ij}(\xi) \cdot e_{j+n} &= e_{j+n} + \xi e_i \\ \tau'_{ij}(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i+n, j+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau''_{ij}(\xi) \cdot e_i &= e_i + \xi e_{j+n} \\ \tau''_{ij}(\xi) \cdot e_j &= e_j + \xi e_{i+n} \\ \tau''_{ij}(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i, j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_i(\xi) \cdot e_{i+n} &= e_{i+n} + \xi e_i \\ \tau_i(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_i(\xi) \cdot e_i &= e_i + \xi e_{i+n} \\ \tau'_i(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i\end{aligned}$$

définissent des automorphismes $\tau_{ij}(\xi)$, $\tau'_{ij}(\xi)$, $\tau''_{ij}(\xi)$, $\tau_i(\xi)$, $\tau'_i(\xi)$ de K^{2n} . On vérifie facilement que ces automorphismes appartiennent à $Sp\ n$, et que les applications $\xi \rightarrow \tau_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau'_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau''_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau_i(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau'_i(\xi)$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $Sp\ n$. De plus, on a, si $t \in T$,

$$t \tau_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau_{ij}(\omega_i(t) (\omega_j(t))^{-1} \xi)$$

$$t \tau'_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau'_{ij}(\omega_i(t) \omega_j(t) \xi)$$

$$t \tau''_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau'_{ij}((\omega_i(t) \omega_j(t))^{-1} \xi)$$

$$t \tau_i(\xi) t^{-1} = \tau_i((\omega_i(t))^2 \xi)$$

$$t \tau'_i(\xi) t^{-1} = \tau'_i((\omega_i(t))^{-2} \xi) .$$

Il en résulte que $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j)$, $\pm 2\omega_i$ sont des racines de $\text{Sp } n$. Or il résulte de ce qui a été dit plus haut que l'on a, pour $n > 1$,

$$\dim \text{Sp } n = \dim \text{Sp } (n - 1) + 4n - 1 ;$$

comme $\dim \text{Sp } 1 = 3$, on a $\dim \text{Sp } n = n(2n + 1)$. Comme $\dim T = n$, il en résulte que le nombre des racines de $\text{Sp } n$ est $2n^2 = 2n(n - 1) + 2n$, donc que les racines que nous avons déjà trouvées sont toutes les racines. Il est clair que $\omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{n-1} - \omega_n, 2\omega_n$ forment un système fondamental de racines et que le diagramme de Dynkin correspondant est de type C_n . De plus, on sait que le groupe des poids est engendré par les ω_i ; le groupe $\text{Sp } n$ est donc un groupe simplement connexe de type C_n (si $n > 1$).

Le groupe projectif associé à $\text{Sp } n$ s'appelle le groupe symplectique projectif, et se note $\text{PSp } n$. Soit f l'application canonique de $\text{Sp } n$ sur $\text{PSp } n$, et soit $f(T) = T'$. L'isogénie f définit un isomorphisme spécial φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$; on sait que les exposants radiciels de φ sont tous égaux à 1, d'où il résulte que $\text{PSp } n$ est encore de type C_n . De plus, $\varphi(X(T'))$ est engendré par les différences mutuelles des éléments $\pm \omega_i$ de $X(T)$; ce groupe n'est donc autre que le groupe des racines. Il en résulte que, dans le cas de $\text{PSp } n$, $X(T')$ est engendré par les racines.

2. Le groupe $\text{SO}(2n + 1)$.

Désignons par $e_0, \dots, e_{2n}$ la base canonique de K^{2n+1} et par $\text{SO}(2n + 1)$ le groupe des automorphismes de déterminant 1 de K^{2n+1} qui conservent la forme quadratique Q définie par

$$Q(\sum_{i=0}^n \xi_i e_i) = \xi_0^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{i+n} .$$

Supposons d'abord que K ne soit pas de caractéristique 2. Dans ce cas, la forme quadratique Q est non dégénérée; désignons par β la forme bilinéaire associée à cette forme quadratique. Il résulte du théorème de Witt que, si $n > 0$, les opérations de $\text{SO}(2n + 1)$ permutent transitivement entre eux les couples (x, y) de points de K^{2n+1} tels que $Q(x) = 1$, $Q(y) = -1$, $\beta(x, y) = 0$;

ces couples forment une variété irréductible de dimension $4n - 1$ dans $K^{2n+1} \times K^{2n+1}$. Par ailleurs, les opérations de $SO(2n + 1)$ qui laissent fixes les deux points $x_0 = e_n + e_{2n}$, $y_0 = e_n - e_{2n}$ forment un groupe qui est manifestement isomorphe à $SO(2n - 1)$. On en conclut, en procédant par récurrence sur n , que $SO(2n + 1)$ est un groupe connexe de dimension $n(2n + 1)$. Procédant comme dans le cas de $Sp\ n$, on voit que les matrices diagonales

$$t = (a_0, a_1, \dots, a_{2n})$$

contenues dans $SO(2n + 1)$ sont celles pour lesquelles on a $a_0 = 1$, $a_i a_{i+n} = 1$ ($1 \leq i \leq n$) ; elles forment un tore maximal T , et le groupe des caractères rationnels de T est engendré par $\omega_1, \dots, \omega_n$ si $t.e_i = \omega_i(t)e_i$ ($0 \leq i \leq 2n$). Montrons que l'application identique de $SO(2n + 1)$ dans $GL(K^{2n+1})$ est une représentation simple. Soit V un sous-espace $\neq \{0\}$ de K^{2n+1} stable par les opérations de $SO(2n + 1)$; V est stable par les opérations de T ; comme les fonctions $1, \omega_i, \omega_i^{-1}$ sur T sont toutes distinctes, il en résulte que V est engendré par ceux des vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_{2n}$ qu'il contient. Or, si $n > 0$, les opérations de $SO(2n + 1)$ permutent transitivement les vecteurs x tels que $Q(x) = 1$; si donc $e_0 \in V$, V contient aussi les vecteurs $e_0 + e_i$ ($1 \leq i \leq 2n$), d'où $V = K^{2n+1}$. Par ailleurs, les opérations de $SO(2n + 1)$ permutent aussi transitivement entre eux les vecteurs x tels que $Q(x) = 0$; si donc $e_i \in V$ pour un $i > 0$, V contient aussi e_{i+n} , donc contient $e_i + e_{i+n}$ et par suite aussi e_0 , ce qui achève de montrer que $V = K^{2n+1}$. Comme tout élément du centre de $SO(2n + 1)$ est une matrice scalaire, on voit tout de suite que le centre de $SO(2n + 1)$ se réduit à son élément neutre. Il en résulte que $SO(2n + 1)$ est un groupe semi-simple.

Si K est de caractéristique 2, la forme bilinéaire β associée à Q est dégénérée ; l'espace des vecteurs x tels que $\beta(x, y) = 0$ pour tout $y \in K^{2n+1}$ est Ke_0 . On en déduit l'existence d'une représentation linéaire ω de $SO(2n+1)$ opérant dans K^{2n+1}/Ke_0 . Cette représentation est injective. Soit en effet s un élément de $SO(2n+1)$ tel que $\omega(s)$ soit l'identité ; on a donc

$$s.x = x + u(x)e_0$$

pour tout $x \in K^{2n+1}$; on a $Q(x) = Q(s.x) = Q(x) + u^2(x)$, d'où $u(x) = 0$, ce qui démontre notre assertion. Par ailleurs, $\beta(x, y)$ ne dépend que des classes de x, y modulo Ke_0 , de sorte que β définit une forme bilinéaire $\bar{\beta}$ sur $(K^{2n+1}/Ke_0) \times (K^{2n+1}/Ke_0)$, évidemment invariante par les opérations de

$\omega(\mathrm{SO}(2n+1))$. On a $\beta(x, x) = Q(x) = 0$, ce qui montre que $\bar{\beta}$ est alternée. La restriction de Q à l'espace engendré par $e_1, \dots, e_{2n}$ étant une forme quadratique non dégénérée sur cet espace, la forme bilinéaire $\bar{\beta}$ est non dégénérée. Montrons que tout automorphisme $\bar{s}$ de K^{2n+1}/Ke_0 qui laisse la forme $\bar{\beta}$ invariante appartient à $\omega(\mathrm{SO}(2n+1))$. Soit r l'application canonique de K^{2n+1} sur K^{2n+1}/Ke_0 , et soit W l'espace engendré par $e_1, \dots, e_{2n}$; il y a un automorphisme s^* de K^{2n+1} qui laisse e_0 fixe, qui transforme W en lui-même et qui est tel que $r \circ s^* = \bar{s} \circ r$. Il est clair que s^* laisse invariante la forme bilinéaire β ; si donc on pose $Q_1(x) = Q(s^*.x) - Q(x)$, Q_1 est une forme quadratique dont la forme bilinéaire associée est nulle. Comme K est algébriquement clos, Q_1 est le carré d'une forme linéaire u ; on a $u(e_0) = 0$. Posons $s.x = s^*.x + u(x)e_0$; on a encore $r \circ s = \bar{s} \circ r$, $s(e_0) = e_0$, de sorte que s est un automorphisme; son déterminant est égal à celui de $\bar{s}$, donc à 1. On a $Q(s.x) = Q(s^*.x) + u^2(x)$, ce qui montre que $s \in \mathrm{SO}(2n+1)$; il est clair que $\omega(s) = \bar{s}$. Le groupe $\omega(\mathrm{SO}(2n+1))$ est donc isomorphe à $\mathrm{Sp} n$; ω étant une isogénie, on voit que $\mathrm{SO}(2n+1)$ est encore semi-simple dans ce cas. De plus, le groupe T des matrices diagonales contenues dans $\mathrm{SO}(2n+1)$ est encore un tore maximal; nous définirons les ω_i comme plus haut. On notera que $\dim \mathrm{SO}(2n+1) = \dim \mathrm{Sp} n = n(2n+1)$.

Si i et j sont des indices distincts entre 1 et n , les formules

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(\xi).e_i &= e_i + \xi e_j \\ \tau_{ij}(\xi).e_{j+n} &= e_{j+n} - \xi e_{i+n} \\ \tau_{ij}(\xi).e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i, j+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_{ij}(\xi).e_{i+n} &= e_{i+n} + \xi e_j \\ \tau'_{ij}(\xi).e_{j+n} &= e_{j+n} - \xi e_i \\ \tau'_{ij}(\xi).e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i+n, j+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau''_{ij}(\xi).e_i &= e_i + \xi e_{j+n} \\ \tau''_{ij}(\xi).e_j &= e_j - \xi e_{i+n} \\ \tau''_{ij}(\xi).e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq i, j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_i(\xi) \cdot e_{i+n} &= e_{i+n} + \xi e_0 - \xi^2 e_i \\ \tau_i(\xi) \cdot e_0 &= e_0 - 2\xi e_i \\ \tau_i(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq 0, i+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_i(\xi) \cdot e_i &= e_i + \xi e_0 - \xi^2 e_{i+n} \\ \tau'_i(\xi) \cdot e_0 &= e_0 - 2\xi e_{i+n} \\ \tau'_i(\xi) \cdot e_k &= e_k \quad \text{si } k \neq 0, i\end{aligned}$$

définissent des automorphismes de K^{2n+1} ; on vérifie facilement que ces automorphismes appartiennent à $SO(2n+1)$ et que les applications $\xi \rightarrow \tau_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau'_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau''_{ij}(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau_i(\xi)$, $\xi \rightarrow \tau'_i(\xi)$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $SO(2n+1)$. De plus on a, si $t \in T$,

$$\begin{aligned}t \tau_{ij}(\xi) t^{-1} &= \tau_{ij}(\omega_i(t) (\omega_j(t))^{-1} \xi) \\ t \tau'_{ij}(\xi) t^{-1} &= \tau'_{ij}(\omega_i(t) \omega_j(t) \xi) \\ t \tau''_{ij}(\xi) t^{-1} &= \tau''_{ij}((\omega_i(t) \omega_j(t))^{-1} \xi) \\ t \tau_i(\xi) t^{-1} &= \tau_i(\omega_i(t) \xi) \\ t \tau'_i(\xi) t^{-1} &= \tau'_i((\omega_i(t))^{-1} \xi) .\end{aligned}$$

Procédant comme dans le cas de $Sp\ n$, on voit que $SO(2n+1)$ est de type B_n (en convenant que $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$).

On notera que, si K est de caractéristique 2, et si ω désigne l'isogénie construite ci-dessus, $\omega \circ \tau_{ij}$, $\omega \circ \tau'_{ij}$, $\omega \circ \tau''_{ij}$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $\omega(SO(2n+1))$, tandis que $(\omega \circ \tau_i)(\xi) = \bar{\tau}_i(\xi^2)$, $(\omega \circ \tau'_i)(\xi) = \bar{\tau}'_i(\xi^2)$, $\bar{\tau}_i$ et $\bar{\tau}'_i$ étant des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $\omega(SO(2n+1))$.

3. Les groupes de type C_n .

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type C_n . Soient T un tore maximal de G et $\omega_1, \dots, \omega_n$ des éléments de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tels que les racines soient les $\pm(\omega_i \pm \omega_j)$ ($i \neq j$), $\pm 2\omega_i$. Posons

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2, \dots, \alpha_{n-1} = \omega_{n-1} - \omega_n, \alpha_n = 2\omega_n;$$

les α_i forment alors un système fondamental de racines. Le poids dominant fondamental ω_1 qui correspond à α_1 est ω_1 ; soit ρ une représentation projective simple admettant ω_1 comme poids dominant. Le poids ω_1 est un poids dominant minimal et n'est pas combinaison linéaire entière des racines; les poids de ρ sont donc les transformés $\pm \omega_i$ ($1 \leq i \leq n$) de ω_1 par les opérations du groupe de Weyl et sont de multiplicité 1 (exp. 20, proposition 1 et son corollaire). La représentation ρ est donc de degré $2n$; elle opère sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V de dimension $2n$. De plus, l'automorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui change tout élément en son opposé appartient au groupe de Weyl; toute représentation projective de G est donc équivalente à sa contragrédiente. On en conclut que, si G' est le groupe linéaire associé à ρ , les opérations de G' laissent invariante une forme bilinéaire non dégénérée β sur $V \times V$, symétrique ou alternée. Nous allons montrer que β est alternée. Posons $Q(x) = \beta(x, x)$; c'est une forme quadratique sur V , invariante par les opérations de G' ; les opérations de G' laissent invariante la forme bilinéaire β' associée à Q . Comme l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation simple, β' est ou bien nulle ou bien non dégénérée; dans le second cas, Q est non dégénérée. Or, on a

$$\dim G' = \dim \rho(G) = \dim G = n(2n + 1),$$

et on sait que le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur un espace de dimension $2n$ est $n(2n - 1)$. Il est donc impossible que $\beta' \neq 0$. Si K est de caractéristique $\neq 2$, il en résulte que $Q = 0$; si K est de caractéristique 2, il en résulte que Q est le carré d'une forme linéaire; mais cette dernière, étant invariante par G' , est nulle. On a donc bien $Q = 0$ dans tous les cas, et β est alternée. Or le groupe de tous les automorphismes de V qui invarient la forme β est de dimension $n(2n + 1)$ égale à celle de G' , et lui est par suite identique; il en résulte que ce groupe est G' , donc que G' est isomorphe à $Sp\ n$ et que $\rho(G)$ est isomorphe à $PSp\ n$. Nous allons maintenant déterminer les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial attaché à ρ .

Soit plus généralement f une isogénie quelconque de G sur un groupe $\bar{G}$; posons $\bar{T} = f(T)$, et soit φ l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à f . Soit $\bar{\alpha}_i$ la racine de $\bar{G}$ telle que $\varphi(\bar{\alpha}_i) = q_i \alpha_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K . Les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont transformées les unes des autres par des opérations du

groupe de Weyl ; les nombres $q_1, \dots, q_{n-1}$ sont donc égaux entre eux (exp. 18, proposition 4) ; soit q' leur valeur commune, et soit $q'' = q_n$. Soient $c(i, j)$ (resp. $\bar{c}(i, j)$) les entiers de Cartan du système fondamental $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (resp. du système fondamental $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$) ; on sait que l'on a

$$c(i, j) = \bar{c}(i, j) q_i q_j^{-1}$$

(exp. 18, proposition 4). On en conclut que $c(i, i+1) = 1$ si $1 \leq i \leq n-2$, $2 = \bar{c}(n-1, n) q' q''^{-1}$. Comme $\bar{c}(n-1, n)$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3, on a ou bien $\bar{c}(n-1, n) = 1$, $q' = 2q''$ ou bien $\bar{c}(n-1, n) = 2$, $q' = q''$. Dans le premier cas, K est nécessairement de caractéristique 2 et on a $\bar{c}(n, n-1) = 2$, de sorte que $\bar{G}$ est de type B_n . Dans le second cas, $\bar{G}$ est de type C_n .

Revenons maintenant au cas où f est la représentation projective ρ considérée ci-dessus ; on sait que l'on a alors $q_1 = 1$ (exp. 20, corollaire au lemme 2), de sorte qu'on se trouve dans le second cas (cela résulte d'ailleurs aussi de ce que $\rho(G)$, étant isomorphe à $\text{PSp } n$, est de type C_n). Les exposants radiciels de ρ sont donc tous égaux à 1. Nous avons donc montré que tout groupe G de type C_n admet une isogénie sur $\text{PSp } n$ dont tous les exposants radiciels sont égaux à 1.

Soit G^* un autre groupe de type C_n , et soit T^* un tore maximal de G^* . Soit $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ un système fondamental de racines de G^* tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & - & 1 & - & \dots & - & 1 & - & 2 \\ & & & & & & & & \end{array}$$

Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T^*)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui applique α_i^* sur α_i ($1 \leq i \leq n$). Si cet isomorphisme applique $X(T^*)$ sur $X(T)$, les groupes G et G^* sont isomorphes (exp. 18, proposition 5). Par ailleurs, dans le cas d'un groupe de type C_n , le groupe des poids contient le groupe des racines comme sous-groupe d'indice 2. On en conclut que, si l'indice dans $X(T^*)$ du groupe des racines de G^* est égal à l'indice dans $X(T)$ du groupe des racines de G , G et G^* sont isomorphes. Nous arrivons donc au résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Tout groupe algébrique semi-simple de type C_n est isomorphe à l'un ou l'autre des groupes $\text{Sp } n$ ou $\text{PSp } n$.

4. Isogénies d'un groupe de type C_2 .

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 2. - Soit G un groupe algébrique semi-simple de type C_2 ; soit T un tore maximal de G . Soient G' un groupe algébrique et T' un tore maximal de G' . Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial ψ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$; ψ est alors attaché à une isogénie de G sur G' .

On sait déjà qu'il existe un groupe simplement connexe G_0 de type C_2 et une isogénie f_0 de G_0 sur G ; si T_0 est le tore maximal de G_0 tel que $f(T_0) = T$, f_0 définit un isomorphisme spécial φ_0 de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_0)$. L'application $\varphi_0 \circ \psi$ est un isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_0)$; s'il est associé à une isogénie de G_0 sur G' , le théorème sera établi en vertu de la proposition 5, exp. 18. On peut donc supposer G simplement connexe. Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 2 \\ | \quad \quad | \end{array}$$

Soient q_1 et q_2 les exposants radiciels de ψ relativement à α_1 et α_2 ; on a ou bien $q_1 = q_2$ ou bien $q_1 = 2q_2$. L'isogénie des puissances q_2 -ièmes applique G sur un groupe $\bar{G}$ et T sur un tore $\bar{T}$; il lui correspond un isomorphisme spécial $\bar{\psi}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ dont les exposants radiciels sont égaux à q_2 . Comme $\bar{\psi}$ applique $X(\bar{T})$ sur $q_2 X(T)$, il est clair que $\bar{G}$ est encore simplement connexe. L'isomorphisme ψ se met sous la forme $\bar{\psi} \circ \varphi_1$, où φ_1 est un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$, qui applique le groupe des racines de G' dans celui de $\bar{G}$. Comme $\bar{G}$ est simplement connexe, φ_1 est spécial. Si φ_1 est attaché à une isogénie de $\bar{G}$ sur G' , ψ est attaché à une isogénie de G sur G' . Nous pouvons donc nous ramener au cas où G est simplement connexe et $q_2 = 1$. Supposons désormais qu'il en soit ainsi.

Considérons d'abord le cas où on a aussi $q_1 = 1$. Soit T'' un tore maximal de $\mathrm{PSp} 2$ et soit (α''_1, α''_2) un système fondamental de racines de $\mathrm{PSp} 2$ par rapport à T'' tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 2 \\ | \quad \quad | \end{array}$$

Nous savons qu'il existe des isogénies g et g' de G et G' sur $\mathrm{PSp} 2$ telles que $g(T) = g'(T') = T''$ et que les isomorphismes spéciaux γ , γ' attachés à g et g' appliquent α''_i sur α_i et α'_i respectivement, α'_i étant

la racine de G' telle que $\varphi(\alpha'_1) = \alpha_1$. On a $\gamma = \varphi \circ \gamma'$; il en résulte que φ est attaché à une isogénie de G sur G' (exp. 18, proposition 6).

Considérons maintenant le cas où $q_1 = 2$; K est alors de caractéristique 2. Posons $G^* = SO(5)$, $G^{**} = Sp\ 2$; nous avons vu plus haut qu'il existe une isogénie ω de G^* sur G^{**} , des tores maximaux T^* et T^{**} de G^* sur G^{**} tels que $\omega(T^*) = T^{**}$ et des systèmes fondamentaux de racines (α_1^*, α_2^*) et $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**})$ de G^* et G^{**} qui possèdent les propriétés suivantes: les diagrammes de Dynkin associés à ces systèmes fondamentaux sont tous deux le diagramme

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \cdot \quad \cdot \end{array}$$

et les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial θ de $\mathbb{Q} \otimes X(T^{**})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T^*)$ attaché à ω sont 2 et 1 respectivement. Par ailleurs, $SO(5)$ est de type $B_2 = C_2$ et $Sp\ 2$ est simplement connexe de type C_2 ; il existe donc des isogénies g de G sur $SO(5)$ et g' de $Sp\ 2$ sur G' telles que $g(T) = T^*$, $g'(T^{**}) = T'$ et que les exposants radiciels des isomorphismes spéciaux γ et γ' attachés à g et g' soient égaux à 1. On a alors $\varphi = \gamma \circ \theta \circ \gamma'$; il en résulte que φ est attaché à l'isogénie $g' \circ \omega \circ g$ de G sur G' , ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Isogénies d'un groupe de type $A_1 + A_1$.

THÉORÈME 3. - Soient G un groupe algébrique semi-simple de type $A_1 + A_1$ et T un tore maximal de G . Soient G' un groupe algébrique semi-simple et T' un tore maximal de G' . Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial ψ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$; G' est alors de type $A_1 + A_1$ et ψ est attaché à une isogénie de G sur G' .

Il résulte immédiatement de la proposition 4, exp. 18 que G' est de type $A_1 + A_1$. Soit $\bar{G}$ le groupe $SL(K^2) \times SL(K^2)$, et soit $\bar{T}$ un tore maximal de $\bar{G}$. Le groupe $\bar{G}$ est manifestement simplement connexe. On voit facilement qu'il existe des isomorphismes spéciaux γ et γ' de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ tels que $\gamma' = \gamma \circ \varphi$. Tenant compte de la proposition 5, exp. 18, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 3 dans le cas où $G = SL(K^2) \times SL(K^2)$. Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T ; soient α'_1 et α'_2 les racines de G' par rapport à T' telles que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$ ($i = 1, 2$), les q_i étant des puissances de l'exposant caractéristique de K .

Si $i = 1$ ou 2 , les racines $\alpha_i, -\alpha_i$ (resp. $\alpha'_i, -\alpha'_i$) forment un système fermé de racines de G (resp. G'); il lui correspond un sous-groupe G_i (resp. G'_i) de G (resp. G'); G_i est isomorphe à $SL(K^2)$; on a $G = G_1 G_2$, $G' = G'_1 G'_2$ et tout élément de G_i (resp. G'_i) commute à tout élément de G_2 (resp. G'_2). Le groupe G_i (resp. G'_i) a un tore maximal T_i (resp. T'_i) contenu dans T (resp. T') et on a $T = T_1 T_2$, $T' = T'_1 T'_2$. La restriction $\bar{\alpha}_i$ (resp. $\bar{\alpha}'_i$) de α_i (resp. α'_i) à T_i (resp. T'_i) est une racine de G_i (resp. G'_i). Comme G_i est isomorphe à $SL(K^2)$, il y a une isogénie f_i de G_i sur G'_i qui applique T_i sur T'_i telle que l'isomorphisme spécial φ_i de $\mathbb{Q} \otimes X(T'_i)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_i)$ associé à f_i applique α'_i sur α_i . Comme l'application $(s_1, s_2) \rightarrow s_1 s_2$ est un isomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G , il y a une isogénie f de G sur G' telle que $f(s_1 s_2) = f_1(s_1) f_2(s_2)$ si $s_i \in G_i$ ($i = 1, 2$). Il est clair que f applique T sur T' et que l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à f est φ , ce qui démontre le théorème.