

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les groupes de type A_n

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 20, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A7_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES GROUPES DE TYPE A_n

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 16.12.1957)

1. - Le groupe $SL(V)$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K ; nous supposons V de dimension $n + 1 > 1$. Soit $SL(V)$ le groupe des automorphismes de déterminant 1 de V . Le groupe $GL(V)$ est, comme on le voit facilement, produit semi-direct de $SL(V)$ et d'un groupe de dimension 1 ; comme $GL(V)$ est connexe, on voit que $SL(V)$ est connexe. Montrons qu'il est semi-simple. Il est bien connu que l'injection canonique $SL(V) \rightarrow GL(V)$ est une représentation simple de $SL(V)$ et que le centre de $SL(V)$ est fini ; notre assertion résultera donc du

LEMME 1. - Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur K et G un sous-groupe fermé connexe de $GL(V)$; si l'injection canonique $G \rightarrow GL(V)$ est une représentation semi-simple de G , le radical de G est un tore qui est la composante connexe de l'élément neutre dans le centre de G .

Soient R le radical de G et R^u l'ensemble des éléments unipotents de R . Représentons V comme somme directe de sous-espaces V_k stables par G qui fournissent des représentations simples de G . Pour chaque k , il existe un $x_k \neq 0$ de V_k qui est laissé fixe par les éléments de R^u (exposé 6, théorème 1). Or il est clair que R^u est un sous-groupe distingué de G ; les éléments de V_k invariants par R^u forment donc un sous-espace stable par G et par suite identique à V_k . Ceci étant vrai pour tout k , R^u se réduit à son élément neutre. Il en résulte que R est un tore (exposé 6, théorème 3) ; étant distingué dans G , il est dans le centre de G ; le lemme 1 résulte immédiatement de là.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une base de V . Les éléments s de $SL(V)$ qui admettent chacun des x_i comme vecteur propre forment un groupe T ; si on pose $t.x_i = \omega_i(t)x_i$ ($t \in T$) , on a $\prod_{i=1}^{n+1} \omega_i(t) = 1$, et, si $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont des éléments quelconques de K de produit égal à 1, il existe un élément $t \in T$ tel que $\omega_i(t) = a_i$ ($1 \leq i \leq n+1$) ; si on choisit les a_i de manière qu'ils soient tous distincts, ce qui est manifestement possible, le centralisateur de l'élément t est T . Il résulte de là que T est un tore maximal de $SL(V)$ et que le groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T est engendré par les ω_i ; on a (en notation additive) $\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i = 0$, et tout ensemble composé de n des éléments

ω_i est une base du groupe $X(T)$. Soient i et j des indices distincts entre 1 et $n+1$; si $\xi \in K$, les formules

$$\tau_{ij}(\xi) \cdot x_i = x_i + \xi x_j,$$

$$\tau_{ij}(\xi) \cdot x_k = x_k \quad \text{si } k \neq i$$

définissent un élément $\tau_{ij}(\xi)$ de $SL(V)$, et τ_{ij} est un isomorphisme du groupe additif K sur un sous-groupe de $SL(V)$; on a si $t \in T$,

$$t \tau_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau_{ij}(\omega_j(t) \omega_i^{-1}(t) \xi);$$

il s'ensuit que $\omega_j - \omega_i$ est une racine de $SL(V)$ par rapport à T . Il est clair que l'on obtient ainsi $n(n+1)$ racines distinctes de $SL(V)$; comme $SL(V)$ est de dimension $(n+1)^2 - 1$ et T de dimension n , on a obtenu toutes les racines de $SL(V)$ (exposé 19, lemme 1). Il est clair que les racines $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$) forment un système fondamental, et que le diagramme de Dynkin correspondant est de type A_n . Le normalisateur de T dans $SL(V)$ se compose des automorphismes $x_i \rightarrow b_i x_{\pi(i)}$ où π est une permutation de $\{1, \dots, n+1\}$ et où les b_i ont pour produit la signature de π . Les éléments de $SL(V)$ qui transforment en eux-mêmes tous les sous-espaces $\sum_{j=i}^{n+1} Kx_j$ de V ($1 \leq i \leq n+1$) forment un groupe de Borel.

Soit f l'application canonique de $GL(V)$ sur le groupe projectif $PL(V)$ de l'espace V . C'est une isogénie dont les exposants radiciels sont tous égaux à 1 (exposé 18, proposition 3); il résulte immédiatement de là que $PL(V)$ est aussi de type A_n . Si $T' = f(T)$, et si φ est l'isomorphisme du groupe $X(T')$ des caractères rationnels de T' sur un sous-groupe de $X(T)$ associé à f , l'image de $X(T')$ par φ est engendrée par les rapports mutuels (en notation additive, les différences mutuelles) des ω_i ; le groupe $X(T')$ est donc engendré par les racines de $PL(V)$.

Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de K ; soit H le groupe algébrique qui a les mêmes éléments que $SL(V)$ mais tel que les fonctions numériques sur H soient les puissances q -ièmes des fonctions numériques sur $SL(V)$. Pour tout $s \in SL(V)$, soit $M(s)$ la matrice qui représente s par rapport à la base $(x_1, \dots, x_{n+1})$; l'application de $SL(V)$ qui fait correspondre à tout s l'élément s' tel que les éléments de $M(s')$ soient les puissances q -ièmes de ceux de $M(s)$ est un isomorphisme de $SL(V)$ sur H .

2. - Poids dominants minimaux.

Soient G un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal de G et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T . On appelle poids dominants de G les poids dominants des représentations projectives simples de G . Désignant par $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T , on peut ordonner l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ en convenant que les éléments ≥ 0 sont les combinaisons linéaires à coefficients tous ≥ 0 des α_i ; on appelle alors poids dominants minimaux les éléments minimaux de l'ensemble des poids dominants $\neq 0$ relativement à cette relation d'ordre.

Introduisons une métrique définie positive invariante par le groupe de Weyl W sur l'espace $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Tout élément λ de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tel que l'on ait $(\lambda | \alpha_i) \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) est ≥ 0 relativement à notre relation d'ordre.

Ecrivons en effet : $\lambda = \sum_{i \in I'} c_i \alpha_i - \sum_{i \in I''} c_i \alpha_i$ où I' et I'' sont des ensembles disjoints et où les c_i sont ≥ 0 . Tenant compte des relations $(\alpha_i | \alpha_j) \geq 0$ si $i \neq j$, on voit tout de suite que $(\sum_{i \in I''} c_i \alpha_i | \alpha_j) \leq 0$ pour tout $j \in I''$; il en résulte que $(\sum_{i \in I''} c_i \alpha_i | \sum_{i \in I''} c_i \alpha_i) \leq 0$, d'où $\sum_{i \in I''} c_i \alpha_i = 0$, ce qui démontre notre assertion. Si ϖ est un poids dominant et w_i la symétrie par rapport à α_i , on a $w_i(\varpi) = \varpi - e_i \alpha_i$ avec $e_i \geq 0$; il en résulte que $(\varpi | \alpha_i) \geq 0$, donc que ϖ est > 0 . Les poids dominants minimaux sont donc nécessairement des poids dominants fondamentaux; mais, en général, les poids dominants fondamentaux ne sont pas tous minimaux.

Si λ est un élément quelconque de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$, il existe une opération w du groupe de Weyl tel que l'on ait $(w(\lambda) | \alpha_i) \geq 0$ pour tout i , d'où $w(\lambda) \geq 0$. En effet, soit λ' un élément maximal (relativement à notre relation d'ordre) dans l'ensemble des transformés de λ par les opérations de W ; comme w_i est la symétrie par rapport à α_i , on a $w_i(\lambda') = \lambda' - m_i \alpha_i$, m_i étant un nombre rationnel; il résulte du caractère maximal de λ' que les m_i sont tous ≥ 0 , d'où $(\lambda' | \alpha_i) \geq 0$, ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 1. - Soit ρ une représentation projective simple de G dont le poids dominant ϖ soit minimal. Les poids $\neq 0$ de ρ sont alors les transformés de ϖ par les opérations du groupe de Weyl W ; ils sont tous de multiplicité 1.

Soit en effet ϖ' un poids de ρ ; il existe une opération w de W telle que l'on ait $(w(\varpi') | \alpha_i) \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$); on a donc $w_i(w(\varpi')) = w(\varpi') - e_i \alpha_i$, les e_i étant des nombres rationnels ≥ 0 . Mais tout transformé de ϖ' par une opération de W est encore un poids de ρ , et les différences mutuelles des

poids de ρ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines (exposé 16, proposition 1) ; les e_i sont donc entiers.

Il en résulte que, si $\varpi \neq 0$, $w(\varpi)$ est un poids dominant ; comme $\varpi - w(\varpi)$ est ≥ 0 (exposé 16), il résulte du caractère minimal de ϖ que $w(\varpi) = \varpi$. Il est clair que deux poids de ρ qui se déduisent l'un de l'autre par une opération de W ont même multiplicité ; comme ϖ est de multiplicité 1, il en est de même de ϖ' .

COROLLAIRE. - Les notations étant celles de la proposition 1, si on suppose de plus que ϖ n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 0 n'est pas un poids de ρ et le degré de ρ est le nombre des transformés distincts de ϖ par les opérations de W .

Cela résulte de ce que la différence entre deux poids de ρ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i .

[On notera que nous appelons degré d'une représentation projective opérant dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V la dimension de l'espace V et non pas celle de l'espace $\mathbb{P}(V)$].

Appliquons ceci aux divers types de diagrammes de Dynkin connexes. Nous utiliserons les notations de l'exposé 19.

1° Type A_n . On reconnaît facilement que tous les poids dominants fondamentaux sont minimaux. Les transformés du k -ième poids dominant fondamental ϖ_k par les opérations de W sont tous les éléments $\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_k}$ où $i_1, \dots, i_k$ sont des indices distincts entre 1 et $n+1$. Aucun des poids ϖ_k n'est combinaison linéaire à coefficients entiers des racines ; si donc G est de type A_n , le degré de la représentation projective simple de poids dominant ϖ_k est le coefficient binomial $\binom{n+1}{k}$.

2° Type B_n . Les seuls poids dominants minimaux sont ϖ_1 et ϖ_n . Le poids ϖ_1 est combinaison linéaire entière des racines, mais il n'en est pas ainsi de ϖ_n . Les transformés de ϖ_n par les opérations de W sont les $(1/2) \sum_{i=1}^n e(i) \varpi_i$, $e(i) = \pm 1$. Si donc G est de type B_n , la représentation projective simple de poids dominant ϖ_n de G est de degré 2^n .

3° Type C_n . Le seul poids dominant minimal est ϖ_1 , qui n'est pas combinaison linéaire entière des racines. Ses transformés par les opérations de W sont les $\pm \varpi_i$ ($1 \leq i \leq n$). Si donc G est de type C_n , la représentation

projective simple de poids dominant ω_1 de G est de degré $2n$.

4° Type D_n . Les seuls poids dominants minimaux sont ω_1 , ω_{n-1} et ω_n ; ω_1 n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines; ses transformés par les opérations de W sont les $\pm \omega_i$ ($1 \leq i \leq n$). Donc, si G est de type D_n , la représentation projective simple de poids dominant ω_1 de G est de degré $2n$; on voit facilement de la même manière que les représentations projectives simples de poids dominants ω_{n-1} et ω_n sont de degré 2^{n-1} .

5° Type E_6 . Le poids ω_1 est minimal; il n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines et ses transformés par les opérations de W sont les ω_i , $\omega_j - s$, $s - (\omega_i + \omega_j)$ ($i \neq j$); on en conclut que, si G est de type E_6 , la représentation projective simple de poids dominant ω_1 de G est de degré 27.

6° Type E_7 . Le poids ω_1 est minimal; il n'est pas combinaison linéaire à coefficients entiers des racines; ses transformés par les opérations de W sont les $\pm \omega_i$, $\pm (s - (\omega_i + \omega_j))$ ($i \neq j$). On en conclut que, si G est de type E_7 , la représentation projective simple de poids dominant ω_1 de G est de degré 56.

Dans le cas des types E_8 , F_4 , G_2 , tous les poids dominants sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines.

3. -- Classification des groupes de type A_n .

LEMME 2. - Soit f un homomorphisme d'un groupe algébrique semi-simple G dans un groupe algébrique semi-simple G_1 ; soient T un tore maximal de G et T_1 un tore maximal de G_1 contenant $f(T)$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{Q} \otimes X(T_1)$ dans $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui fait correspondre à tout $\theta_1 \in X(T_1)$ le caractère rationnel $t \mapsto \theta_1(f(t))$ de T . Soit σ une représentation linéaire ou projective de G_1 ; les poids de la représentation $\sigma \circ f$ de G sont alors les images par φ des poids de σ .

L'homomorphisme σ (resp. $\sigma \circ f$) de G_1 (resp. G) dans $\sigma(G_1)$ définit une application linéaire ψ_1 (resp. ψ) de $\mathbb{Q} \otimes X(\sigma(T_1))$ dans $\mathbb{Q} \otimes X(T_1)$ (resp. $\mathbb{Q} \otimes X(T)$) telle que l'on ait

$$(\psi_1(\bar{\theta}_1))(t_1) = \bar{\theta}_1(\sigma(t_1)) \quad (\text{resp. } (\psi(\bar{\theta}_1))(t) = \bar{\theta}_1(\sigma(f(t)))) \quad \text{pour tout } \bar{\theta}_1 \in X(T_1)$$

et tout $t_1 \in T_1$ (resp. $t \in T$); il est clair que $\psi = \psi \circ \psi_1$. Dans le cas où

σ est linéaire (resp. projective), elle opère dans un espace vectoriel V (resp. dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V), et l'application identique de $\sigma(G_1)$ dans $GL(V)$ (resp. $PL(V)$) est une représentation linéaire (resp. projective) τ de $\sigma(G_1)$. Les poids de σ (resp. $\sigma \circ f$) sont par définition les images par ψ_1 (resp. ψ) de ceux de τ , ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE. - Les notations étant celles du lemme 2, supposons de plus que f soit une isogénie et soit une représentation (projective ou linéaire) simple de G dont le poids dominant (relativement à un système fondamental $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de racines de G par rapport à T) soit le k -ième poids dominant fondamental ω_k (i.e. celui associé à la racine α_k). La racine α_k est alors l'image par ψ d'une racine de G_1 .

En effet, il y a des racines α'_1 de G_1 telles que $\psi(\alpha'_1) = q_1 \alpha_1$, les q_1 étant des entiers > 0 ; ces racines forment un système fondamental de racines G_1 . Soient w_k et w'_k les symétries par rapport à α_k et α'_k ; soit $\bar{\omega}'_k$ l'élément de $\mathbb{Q} \otimes X(T_1)$ tel que $\psi(\bar{\omega}'_k) = \omega_k$. On a donc $w_k(\bar{\omega}'_k) = \omega_k - \alpha_k$. Par ailleurs, on a $w_k \circ \psi = \psi \circ w'_k$ (exposé 18, proposition 4); il en résulte que $w'_k(\bar{\omega}'_k) = \bar{\omega}'_k - q_k^{-1} \alpha'_k$. Par ailleurs, il résulte du lemme 2 que $\bar{\omega}'_k$ est un poids d'une représentation (linéaire ou projective) de G_1 ; l'élément $\bar{\omega}'_k - w'_k(\bar{\omega}'_k)$, différence de deux poids d'une même représentation simple de G_1 , est donc une combinaison linéaire à coefficients entiers des α'_1 . On en conclut que $q_k = 1$, ce qui démontre le corollaire.

Soit n un entier > 0 ; nous désignerons par $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1})$ la base canonique de K^{n+1} et par $\bar{T}$ le tore maximal de $PL(K^{n+1})$ composé des opérations qui laissent fixes les points $K\bar{x}_i$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(K^{n+1})$. A chaque $\bar{x}_i$ correspond un poids $\bar{\omega}_i$ de la représentation identique de $PL(K^{n+1})$ sur lui-même; si on pose $\bar{\alpha}_i = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$), les $\bar{\alpha}_i$ forment un système fondamental de racines de $PL(K^{n+1})$ par rapport à $\bar{T}$.

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type A_n , et soit T un tore maximal de G ; soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets correspondant à α_i et α_{i+1} (où $i < n$) soient liés par une arête. Soient $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ des éléments de somme nulle de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tels que $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$); ω_1 est alors le poids dominant d'une représentation projective simple ρ de G , opérant sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$

associé à un espace vectoriel V . On a vu au numéro 12 que V est de dimension $n+1$ et que les poids de ρ sont les ω_i ($1 \leq i \leq n+1$); soit x_i un point de V qui donne lieu au poids ω_i ; les éléments $x_1, \dots, x_{n+1}$ forment alors une base de V . Par ailleurs, la dimension de G est $(n+1)^2 - 1$ (exposé 19, lemme 1). Comme G est presque simple, ρ est une isogénie, d'où $\dim \rho(G) = \dim G = (n+1)^2 - 1$; comme $\rho(G) \subset \text{PL}(V)$, on a $\rho(G) = \text{PL}(V)$. Le groupe $T' = \rho(T)$ est le groupe des opérations de $\text{PL}(V)$ qui laissent fixe chacun des points Kx_i ; chaque x_i donne lieu à un poids ω'_i de la représentation de $\text{PL}(V)$ constituée par son application identique sur lui-même. Soit ψ' l'isomorphisme spécial de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ associé à l'isogénie ρ ; on a alors $\psi'(\omega'_i) = \omega_i$ (cf. la démonstration du lemme 2). Il y a un isomorphisme de V sur K^{n+1} qui applique x_i sur $\bar{x}_i$ ($1 \leq i \leq n+1$); cet isomorphisme définit un isomorphisme h de $\text{PL}(V)$ sur $\text{PL}(K^{n+1})$, et $h \circ \rho$ est une isogénie f de G sur $\text{PL}(K^{n+1})$. Si ψ est l'isomorphisme spécial de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ associé à f , il est clair que $\psi(\bar{\omega}_i) = \omega_i$ ($1 \leq i \leq n+1$), d'où $\psi(\bar{\alpha}_i) = \alpha_i$ ($1 \leq i \leq n$). Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de K ; l'isogénie des puissances q -ièmes applique G sur un groupe $\tilde{G}$. Faisant usage de l'isogénie de $\tilde{G}$ sur $\text{PL}(K^{n+1})$ qu'on vient de construire, on voit qu'il y a une isogénie de G sur $\text{PL}(K^{n+1})$ telle que l'isomorphisme de $\underline{Q} \otimes X(T)$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ associé à cette isogénie applique $\bar{\alpha}_i$ sur $q\alpha_i$ ($1 \leq i \leq n$).

THEOREME 1. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' , $X(T)$ et $X(T')$ les groupes des caractères rationnels de G et G' et ψ un isomorphisme spécial de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$. Si l'un au moins des groupes G , G' est de type A_n , il en est de même de l'autre, et ψ est associé à une isogénie de G sur G' .

Comme toutes les racines d'un groupe de type A_n se déduisent les unes des autres par les opérations du groupe de Weyl, tous les exposants radiciels de ψ sont égaux entre eux; soit q leur valeur commune. Il y a donc une bijection ψ de l'ensemble des racines de G sur l'ensemble des racines de G' telle que $\psi(\psi(\alpha)) = q\alpha$ pour toute racine α ; il en résulte immédiatement que G et G' sont de même type, donc sont tous deux de type A_n . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets relatifs à α_i et α_{i+1} soient liés par une arête ($1 < i < n$); si α'_i est la racine de G' telle que $\psi(\alpha'_i) = q\alpha_i$, les α'_i forment un système fondamental de racines

de G' par rapport à T' , et, dans le diagramme de Dynkin correspondant, les sommets relatifs à α'_i et α'_{i+1} sont liés par une arête ($1 \leq i < n$). Utilisons les mêmes notations que plus haut en ce qui concerne le groupe $PL(K^{n+1})$; il résulte de ce que nous avons dit qu'il existe une isogénie g' de G' sur $PL(K^{n+1})$ qui applique T' sur $\bar{T}$ et qui est tel que l'isomorphisme spécial γ' qui lui est associé applique $\bar{\omega}_i$ sur ω'_i ($1 \leq i \leq n+1$). Posons $\gamma = \varphi \circ \gamma'$; c'est un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui applique $\bar{\alpha}_i$ sur $q\alpha_i$; il résulte de ce qui a été dit plus haut que γ est associé à une isogénie g de G sur $PL(K^{n+1})$ qui applique T sur $\bar{T}$. L'existence des isogénies g, g' démontre le théorème 1, compte tenu de la proposition 6, exposé 18.

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type A_n , et soit T un tore maximal de G . Soient P et R respectivement le groupe des poids et le groupe des racines de G par rapport à T ; on a donc

$$R \subset X(T) \subset P.$$

Il résulte immédiatement de l'étude que nous avons faite des diagrammes de type A_n (exposé 19) que P/R est un groupe cyclique d'ordre $n+1$. Le groupe $X(T)/R$ est donc un groupe cyclique dont l'ordre d divise $n+1$; nous dirons que d est l'invariant numérique de G . Nous allons montrer qu'il existe des groupes de type A_n admettant pour invariant numérique un diviseur donné quelconque de $n+1$. Partons pour cela du groupe $SL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Si $1 \leq k \leq n$, soit V_k la puissance extérieure k -ième de l'espace V ; si $s \in SL(V)$, soit $\rho_k(s)$ la puissance extérieure k -ième de s ; ρ_k est donc une représentation rationnelle de $SL(V)$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une base de V et soit T le tore maximal de $SL(V)$ composé des opérations qui admettent chacun des x_i comme vecteur propre; soit $t.x_i = \omega_i(t)x_i$ ($t \in T$). Soit $(i_1, \dots, i_k)$ une suite strictement croissante d'indices entre 1 et $n+1$; désignons par $y(i_1, \dots, i_k)$ le produit extérieur des éléments $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. On a alors

$$\rho_k(t).y(i_1, \dots, i_k) = \omega_{i_1}(t) \dots \omega_{i_k}(t)y(i_1, \dots, i_k).$$

Les poids de la représentation ρ_k sont donc, en notation additive, les $\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_k}$ pour toutes les suites strictement croissantes de k indices. Ces poids sont tous transformés les uns des autres par les opérations du groupe

de Weyl ; il en résulte tout de suite que ρ_k est une représentation simple dont le poids dominant est le k -ième poids dominant fondamentaux $\bar{\omega}_k$ relativement au système fondamental de racines formé des $\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1}$. Soit

$$G_k = \rho_k(\mathrm{SL}(V)) , T_k = f_k(T) ;$$

soit φ_k l'isomorphisme de $\underline{Q} \otimes X(T_k)$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ associé à ρ_k . Les exposants radiciels de φ_k , qui sont tous égaux, sont égaux à 1 (corollaire au lemme 2). Il en résulte tout de suite que φ_k applique le groupe R_k des racines de G_k sur R ; il applique par ailleurs $X(T_k)$ sur le groupe engendré par les $\omega_1 + \dots + \omega_{i_k}$, donc aussi sur le groupe engendré par R et $\bar{\omega}_k$. Or, il résulte immédiatement de l'expression explicite de $\bar{\omega}_k$ donnée dans l'exposé 19 que le groupe engendré par R et $\bar{\omega}_k$ contient R comme sous-groupe d'indice $m^{-1}(n+1)$, où m est le p.g.c.d. de k et $n+1$; il en résulte que, si d est un diviseur $\neq 1$ de $n+1$, l'invariant numérique de G_k est d si on prend $k = d^{-1}(n+1)$. Par ailleurs, il résulte de ce qui a été dit plus haut que $\mathrm{PL}(V)$ est un groupe d'invariant numérique 1.

THÉOREME 2. - Soit n un entier > 0 ; si d est un diviseur de $n+1$ il existe un groupe algébrique semi-simple de type A_n et d'invariant numérique d ; tous les groupes satisfaisant à ces conditions sont isomorphes entre eux.

La première assertion a déjà été établie. Soient G et G' des groupes de type A_n ayant même invariant numérique, T et T' des toros maximaux de G et G' . Comme un groupe cyclique n'a qu'un seul sous-groupe d'ordre donné, il est clair qu'il y a un isomorphisme φ de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ qui applique les racines de G' sur celles de G et qui applique $X(T')$ sur $X(T)$; l'isomorphisme φ est associé à une isogénie f de G sur G' (théorème 1), et f est un isomorphisme en vertu de la proposition 6, exposé 18.

COROLLAIRE. - Tout groupe algébrique semi-simple de rang 1 est isomorphe soit à $\mathrm{SL}(K^2)$ soit à $\mathrm{PL}(K^2)$.

Un pareil groupe est en effet de type A_1 .

Reprenons maintenant les représentations ρ_k considérées plus haut. Elles donnent naissance à des représentations projectives $\tilde{\rho}_k$ de $\mathrm{PL}(V)$, opérant dans les espaces $\mathrm{PL}(V_k)$. Soient H un groupe algébrique et σ une représentation linéaire (resp. projective) de H opérant dans V (resp. $\mathcal{P}(V)$) ; $\rho_k \circ \sigma$ (resp. $\tilde{\rho}_k \circ \sigma$) est alors une représentation linéaire (resp. projective) de H opérant dans V_k .

(resp. $\mathcal{P}(V_k)$) et qu'on appelle la puissance extérieure k -ième de σ . Considérons en particulier le cas où $k = n$; la représentation ρ_n de $SL(V)$ est évidemment équivalente à la représentation contragrédiente de ρ_1 , qui fait correspondre à tout élément $s \in SL(V)$ l'automorphisme ${}^t s^{-1}$ du dual de V . Par ailleurs, il résulte de la formule $\omega_1 + \dots + \omega_{n+1} = 0$ que ses poids sont les $-\omega_i$ ($1 \leq i \leq n+1$). Si σ est une représentation linéaire de H , $\rho_n \circ \sigma$ est équivalente à la représentation contragrédiente de σ , qui opère dans le dual de V et associe à tout $z \in H$ l'automorphisme ${}^t \sigma(z^{-1})$. De même, si σ est projective, $\tilde{\rho}_n \circ \sigma$ est équivalente à la représentation projective contragrédiente à σ qui opère dans l'espace projectif $\mathcal{P}(V^*)$ associé au dual de V qu'on peut identifier à l'espace des hyperplans de l'espace $\mathcal{P}(V)$; si $z \in H$, la contragrédiente de σ fait correspondre à z l'automorphisme qui transforme tout hyperplan M de $\mathcal{P}(V)$ en $\sigma(M)$. Nous avons donc le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Soit σ une représentation linéaire ou projective d'un groupe algébrique G . Les poids de la représentation contragrédiente de σ sont alors les opposés des poids de σ .

COROLLAIRE. - Soit G un groupe algébrique semi-simple, et soit T un tore maximal de G . Si l'automorphisme $\theta \rightarrow -\theta$ de $Q \otimes X(T)$ appartient au groupe de Weyl de G (ce qui se produit dans le cas où G est de l'un des types B_n , C_n , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2) toute représentation linéaire ou projective simple ρ de G est équivalente à sa contragrédiente; si V est l'espace d'une représentation linéaire simple de G , il y a une forme bilinéaire β non-dégénérée sur $V \times V$ et une seule à un facteur constant près qui est invariante par $\rho(G)$; β est soit symétrique, soit alternée.

Comme les opérations du groupe de Weyl permutent entre eux les poids de ρ , on voit que l'opposé de tout poids de ρ est un poids de ρ , donc que ρ a les mêmes poids que sa contragrédiente ρ^* . En particulier, ρ a le même poids dominant que ρ^* , donc lui est équivalente. Supposons ρ linéaire; il résulte alors du fait que ρ est équivalente à sa contragrédiente que les opérations de $\rho(G)$ laissent invariante au moins une forme bilinéaire non dégénérée sur $V \times V$. Soit β une forme bilinéaire $\neq 0$ sur $V \times V$ invariante par $\rho(G)$; l'espace des vecteurs x tels que $\beta(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$ est $\neq V$ et stable par $\rho(G)$; cet espace est donc $\{0\}$ ce qui montre que β n'est pas dégénérée. Si β' est une forme bilinéaire quelconque sur $V \times V$ invariante

par $\rho(G)$, il en est de même de $c\beta + c'\beta'$ (où c, c' sont dans K) ; or, K étant algébriquement clos, on peut toujours choisir c, c' non nuls tous deux tels que $c\beta + c'\beta'$ soit dégénérée ; cette forme est alors nulle, et β' est proportionnelle à β . Appliquons ceci au cas où β' est défini par $\beta'(y, x) = \beta(x, y)$: il y a un $m \in K$ tel que $\beta' = m\beta$. Il est clair que $m^2 = 1$; β est donc symétrique ou alternée.

4. - Les représentations simples d'un groupe de rang 1.

Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur K , et soit (x, y) une base de V . Nous nous proposons de rechercher les représentations simples du groupe $SL(V)$.

Etablissons d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - Soient ρ et ρ' des représentations linéaires d'un groupe G telles que les représentations projectives déduites de ρ et ρ' soient équivalentes. Si G est son propre groupe dérivé (en particulier si G est un groupe algébrique semi-simple), ρ et ρ' sont équivalentes.

Soient V et V' les espaces de ρ et ρ' ; soient $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$ les représentations projectives déduites de ρ et ρ' ; elles opèrent sur les espaces projectifs $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ associés à V et V' . Il y a par hypothèse un isomorphisme $\tilde{\mu}$ d'espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ sur $\mathbb{P}(V')$ tel que

$$\tilde{\mu} \circ \tilde{\rho}(s) = \tilde{\rho}'(s) \circ \tilde{\mu} \text{ pour tout } s \in G.$$

L'isomorphisme $\tilde{\mu}$ provient par définition d'un isomorphisme μ de V sur V' ; si $s \in G$, $\mu \circ \rho(s)$ et $\rho'(s) \circ \mu$ sont des isomorphismes de V sur V' qui définissent le même isomorphisme de $\mathbb{P}(V)$ sur $\mathbb{P}(V')$. Or il est bien connu que les seuls automorphismes d'un espace vectoriel V qui définissent l'automorphisme identique de $\mathbb{P}(V)$ sont les homothéties de V de rapports $\neq 0$; il y a donc une application χ de G dans l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K telle que l'on ait $\mu \circ \rho(s) = \chi(s)(\rho'(s) \circ \mu)$ pour tout $s \in G$. Comme ρ et ρ' sont des représentations, il en résulte que $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ si $s, t \in G$. Si G est son propre groupe dérivé, il résulte de là que $\chi(s) = 1$ pour tout $s \in G$, donc que ρ et ρ' sont équivalentes.

On voit donc que deux représentations linéaires simples d'un groupe algébrique semi-simple G qui ont même poids dominant (relativement à un tore maximal T de G et à un système fondamental de racines de G par rapport à T) sont

équivalentes.

Ceci dit, revenons au problème de la détermination des représentations linéaires simples de $SL(V)$. Nous désignerons par T le tore maximal de $SL(V)$ composé des éléments t qui admettent x et y comme vecteurs propres ; nous posons, si $t \in T$, $t.x = \omega(t)x$; d'où $t.y = \omega^{-1}(t).y$. Les racines de G par rapport à T sont 2ω et -2ω (en notation additive) ; nous posons $2\omega = \alpha$, et nous considérons α comme racine fondamentale. Les poids dominants sont les $e\omega$, e entier ≥ 0 . Pour tout $n \geq 0$, soit V_n l'espace des éléments homogènes de degré n de l'algèbre symétrique sur V ; il se compose des formes de degré n en x et y . L'espace V_n est l'espace d'une représentation σ_n de $SL(V)$: si $s \in SL(V)$, $\sigma_n(s)$ est la puissance symétrique n -ième de s . Soit W_n le sous-espace de V engendré par les puissances n -ièmes des éléments de V ; il est manifestement stable par $\sigma_n(SL(V))$; soit ζ_n la représentation d'espace W_n induite par ζ_n ; montrons qu'elle est simple. Désignons par W'_n un sous-espace de W_n stable par ζ_n et $\neq \{0\}$. Soit B le groupe des éléments $s \in SL(V)$ qui laissent invariant le sous-espace Kx de V ; c'est un groupe de Borel. L'espace W'_n contient donc un élément $z \neq 0$ tel que l'espace Kz soit stable par les opérations de B . Si on désigne par $\tau(\xi)$ ($\xi \in K$) l'automorphisme de V qui laisse x invariant et change y en $y + \xi x$, $\tau(\xi)$ est un élément unipotent de B , de sorte que $\zeta_n(\tau(\xi))$ laisse z invariant. Ecrivant $z = F(x, y)$, où F est une forme de degré n , on voit que $F(x, y) = F(x, y + \xi x)$ pour tout $\xi \in K$, ce qui n'est pas possible que si $F(x, y) = cx^n$ ($c \in K$). On a donc $x^n \in W'_n$; si x' est un vecteur $\neq 0$ quelconque de V , il y a une opération de $SL(V)$ qui transforme x en x' , d'où $x'^n \in W'_n$ et par suite $W'_n = W_n$, ce qui démontre notre assertion. (On notera que la démonstration montre même que W_n est contenu dans tout sous-espace de V_n stable par les opérations de $\sigma_n(SL(V))$). Les poids de la représentation σ_n sont (en notation additive) les $k\omega$ pour $-n \leq k \leq n$, et $n\omega$ est un poids de ζ_n ; c'est donc le poids dominant de ζ_n . On en conclut que toute représentation linéaire simple de $SL(V)$ est équivalente à une et une seule des représentations ζ_n .

Si K est de caractéristique 0, il est bien connu que $W_n = V_n$ pour tout n . Supposons maintenant que K soit de caractéristique $p > 0$. Posons, pour $\xi, \xi' \in K$,

$$(\xi x + \xi' y)^n = \sum_{k=0}^n c_k \xi^k \xi'^{n-k} x^k y^{n-k} \quad (c_k \in K) ;$$

on voit alors facilement que W_n est engendré par les $x^k y^{n-k}$ pour les k tels que $c_k \neq 0$, i.e. pour les k tels que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ ne soit pas divisible par p . Ecrivons n dans le système de numération de base p : $n = \sum_{r=0}^h a_r p^r$ avec $0 \leq a_r < p$. On a alors

$$(\xi x + \xi' y)^n = \prod_{r=0}^h (\xi^{p^r} x^{p^r} + \xi'^{p^r} y^{p^r})^{a_r}.$$

On en conclut facilement que les nombres k sont ceux qui peuvent se mettre sous la forme $\sum_{r=0}^h b_r p^r$ avec $0 \leq b_r \leq a_r$ pour tout r .

Donc si K est de caractéristique 0, la représentation ζ_n de poids dominant $n\omega$ est de degré $n+1$; si K est de caractéristique $p > 0$, et si $n = \sum_{r=0}^h a_r p^r$, avec $0 \leq a_r < p$, ζ_n est de degré $\prod_{r=0}^h (a_r + 1)$.

De plus, on notera qu'il résulte de ce que nous avons dit que la représentation σ_n , puissance symétrique n -ième de l'application identique $SL(V) \rightarrow GL(V)$, n'est semi-simple (dans le cas où K est de caractéristique $p > 0$) que si ou bien $n < p$ ou bien n est de la forme $p^s - 1$. Enfin, supposant toujours K de caractéristique p et $n = \sum_{r=0}^h a_r p^r$, $0 \leq a_r < p$, ζ_n est équivalente au produit tensoriel des représentations simples de poids dominants $a_0 \omega$, $a_1 p \omega$, ..., $a_h p^h \omega$. La représentation simple de poids dominant n^h de $SL(V)$ est de degré 2 et admet $p^h \omega$ et $-p^h \omega$ comme seuls poids.