

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les diagrammes de Dynkin

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 19, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A6_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES DIAGRAMMES DE DYNKIN.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 9.12.57)

1. Correction à l'exposé 17.

On a admis (exposé 17, p. 11) que, si R est l'ensemble des racines d'un groupe semi-simple et S une partie de R telle que S et $R - S$ soient tous deux fermés, alors, si $\alpha \in S$, $\beta \in R - S$, aucun élément de la forme $i\alpha + j\beta$, où i, j sont des entiers > 0 , n'est une racine. Voici comment on peut démontrer cette assertion. Soient w_α et w_β les symétries par rapport aux racines α et β ; on a

$$w_\alpha . \beta = \beta + k\alpha$$

$$w_\beta . \alpha = \alpha + k'\beta$$

où k, k' sont des entiers. On peut considérer les racines comme des éléments d'un espace vectoriel V sur le corps des rationnels sur lequel opère le groupe de Weyl et qui est muni d'une métrique définie positive invariante par le groupe de Weyl; désignant par $(\lambda | \mu)$ le produit scalaire de deux éléments λ, μ relativement à cette métrique, on a

$$k = -2(\alpha | \beta)(\alpha | \alpha)^{-1} \quad k' = -2(\alpha | \beta)(\beta | \beta)^{-1};$$

comme $\beta \neq \pm \alpha$, α et β sont linéairement indépendantes d'où il résulte que $kk' < 4$; k et k' étant de même signe, l'un au moins de ces entiers est ≤ 1 en valeur absolue. Or $\alpha \pm \beta$ ne peut être ni dans S ni dans $R - S$ et n'est par suite pas une racine; l'un des nombres k, k' est donc nul, ce qui entraîne $(\alpha | \beta) = 0$. Ceci montre que toute racine de S est orthogonale à toute racine de $R - S$. Si $i\alpha + j\beta$ était une racine et appartenait disons à S , on aurait $(i\alpha + j\beta | \beta) = 0$, d'où $j^2(\beta | \beta) = 0$, $j = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $j > 0$; on voit de même que $i\alpha + j\beta$ ne peut être dans $R - S$.

2. Le diagramme de Dynkin.

Soient G un groupe algébrique semi-simple connexe, T un tore maximal de G , $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T , $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T et w_i la symétrie par rapport à α_i . On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ muni d'une métrique définie positive

invariante par le groupe de Weyl, et on dénote par $(\lambda|\mu)$ le produit scalaire relativement à cette métrique. On a

$$w_i \cdot \alpha_j = \alpha_j + c(i, j)\alpha_i$$

les $c(i, j)$ étant des entiers que l'on appelle les entiers de Cartan ; on a $c(i, i) = -2$, $c(i, j) \geq 0$ si $i \neq j$,

$$c(i, j) = -2(\alpha_i | \alpha_j)(\alpha_i | \alpha_i)^{-1} ;$$

il en résulte que, si $c(i, j) \neq 0$, d'où $c(j, i) \neq 0$, on a

$$c(i, j)(c(j, i))^{-1} = (\alpha_j | \alpha_j)(\alpha_i | \alpha_i)^{-1}.$$

On appelle diagramme de Dynkin du groupe G un objet constitué par un graphe à n sommets $S_1, \dots, S_n$ et par des nombres σ_i attachés à ces sommets et qui se décrit de la manière suivante : si $i \neq j$, S_i et S_j sont joints par une arête du graphe si et seulement si $c(i, j) \neq 0$, i.e. si et seulement si $(\alpha_i | \alpha_j) \neq 0$; dans ce cas, S_i et S_j ne sont joints que par une seule arête ; il n'y a aucune arête du graphe dont les extrémités coïncident avec un même sommet ; si C est l'ensemble des sommets d'une composante du graphe, les nombres σ_i relatifs aux sommets $S_i \in C$ sont proportionnels aux $(\alpha_i | \alpha_i)$, le facteur de proportionnalité étant tel que le plus petit des σ_i pour $S_i \in C$ soit 1. Le diagramme de Dynkin est déterminé à un isomorphisme près par le groupe G . Cela résulte facilement des faits suivants : deux tores maximaux de G peuvent se déduire l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de G ; une fois T fixé, deux systèmes fondamentaux de racines peuvent se déduire l'un de l'autre par une opération du groupe de Weyl ; si S_i et S_j sont des sommets qui sont les extrémités d'une arête, on a

$$(1) \quad \sigma_j \sigma_i^{-1} = c(i, j)(c(j, i))^{-1}$$

ce qui montre que la connaissance des entiers de Cartan détermine les rapports mutuels des σ_i relatifs aux sommets S_i d'une même composante connexe du diagramme. Réciproquement, la connaissance du diagramme de Dynkin permet de calculer les entiers de Cartan. En effet, on a $c(i, i) = -2$, $c(i, j) = 0$ si S_i, S_j sont des sommets distincts qui ne sont les extrémités d'aucune arête ; enfin, si S_i et S_j sont les extrémités d'une arête, les entiers $c(i, j), c(j, i)$ sont déterminés par la formule (1) et par le fait que ce sont des entiers > 0 dont le produit est < 4 .

du diagramme de Dynkin de G détermine les expressions des racines de G et de ses poids fondamentaux comme combinaisons linéaires des racines fondamentales. Par ailleurs, la connaissance du nombre des racines de G détermine la dimension de G en vertu du

LEMME 1. - Si G est un groupe algébrique semi-simple et T un tore maximal de G , $\dim G$ est la somme de $\dim T$ et du nombre des racines.

Choisissons en effet un groupe de Borel B de G contenant T , et désignons par B^u l'ensemble des éléments unipotents de B ; la dimension de B^u est alors égale au nombre N des racines qui sont < 0 sur la chambre de Weyl associée à B (exposé 13, théorème 1). Par ailleurs, la dimension de G/B est égale à celle de B^u (exposé 13, corollaire 2 au théorème 3); comme

$$\dim B = \dim B^u + \dim T,$$

on a $\dim G = 2N + \dim T$; or $2N$ est le nombre de toutes les racines.

Nous appellerons dimension de groupe d'un diagramme admissible D la somme du nombre des sommets de D et du nombre des racines de D .

Nous donnons dans ce qui suit un certain nombre de résultats relatifs aux diagrammes admissibles connexes des divers types.

I. Type A_n . La dimension de groupe est $(n+1)^2 - 1$. Il existe $n+1$ éléments ω_i de V tels que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i = 0;$$

on a

$$\omega_k = (n+1)^{-1} \left(- \sum_{i=1}^{k-1} i \alpha_i + \sum_{i=k}^n (n-i+1) \alpha_i \right).$$

L'opération w_i échange ω_i et ω_{i+1} en laissant ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; le groupe W se compose des automorphismes de V qui permutent entre eux les éléments ω_i de toutes les manières possibles. Les racines sont les $\pm \sum_{k \leq i \leq k'} \alpha_i$ pour $1 \leq k \leq k' \leq n$; ce sont aussi les $\omega_i - \omega_j$ pour $i \neq j$. Les poids dominants fondamentaux sont les

$$\bar{\omega}_i = \omega_1 + \dots + \omega_i \quad (1 \leq i \leq n);$$

on a aussi

$$\bar{\omega}_k = (n+1)^{-1} (n+1-k) \sum_{i=1}^{k-1} i \alpha_i - (n+1)^{-1} k \sum_{i=k}^n (n-i+1) \alpha_i$$

II. Type B_n . La dimension de groupe est $n(2n + 1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \alpha_n = \omega_n ;$$

on a

$$\omega_k = \sum_{i=k}^n \alpha_i .$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse fixe ω_j si $j \neq i, i+1$; w_n change ω_n en $-\omega_n$ et laisse ω_i fixe si $i \neq n$. Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w. \omega_i = e(i) \omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont des entiers égaux à ± 1 . Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$), $\pm \omega_i$, $\pm (\omega_i + \omega_j)$ ($i \neq j$). Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad (k < n), \quad \bar{\omega}_n = (1/2) \sum_{i=1}^n \omega_i ;$$

on a

$$\bar{\omega}_k = \sum_{i=1}^k i \alpha_i + k \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \quad (k < n) ; \quad \bar{\omega}_n = (1/2) \sum_{i=1}^n i \alpha_i .$$

III. Type C_n . La dimension de groupe est $n(2n + 1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i < n) \quad \alpha_n = 2\omega_n .$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse fixe ω_j si $j \neq i, i+1$; w_n change ω_n en $-\omega_n$ et laisse ω_i fixe si $i < n$. Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w. \omega_i = e(i) \omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont égaux à ± 1 . Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$), $\pm 2\omega_i$, $\pm (\omega_i + \omega_j)$ ($i \neq j$). Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad (1 \leq k \leq n) ;$$

on a

$$\bar{\omega}_k = \sum_{i=1}^k i \alpha_i + k \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i + (1/2)k \alpha_n .$$

IV. Type D_n . La dimension de groupe est $n(2n - 1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i < n) \quad \alpha_n = \omega_{n-1} + \omega_n.$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$.

L'opération w_n transforme ω_{n-1} en $-\omega_n$, ω_n en $-\omega_{n-1}$ et laisse ω_i fixe si $i \neq n-1, n$. Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w \cdot \omega_i = e(i) \omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont égaux à ± 1 , avec $\prod_{i=1}^n e(i) = 1$. Les racines sont les

$$\omega_i - \omega_j \quad (i \neq j), \quad \pm (\omega_i + \omega_j) \quad (i \neq j).$$

Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad (k < n-1), \quad \varpi_{n-1} = (1/2) \sum_{i=1}^n \omega_i - \omega_{n-1}$$

$$\varpi_n = (1/2) \sum_{i=1}^n \omega_i;$$

on a

$$\varpi_k = \sum_{i=1}^k i \alpha_i + k \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + (1/2)k(\alpha_{n-1} + \alpha_n) \quad (k \leq n-2)$$

$$\varpi_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} i \alpha_i + (1/2)(n-1)(\alpha_{n-1} + \alpha_n)$$

$$\varpi_n = \sum_{i=1}^{n-2} i \alpha_i + (1/2)(n-2) \alpha_{n-1} + (1/2)n \alpha_n.$$

V. Type E_6 . La dimension de groupe est 78. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_6)$ de l'espace V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1 \leq i \leq 5) \quad \alpha_6 = \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 - s$$

où on a posé $s = (1/3) \sum_{i=1}^6 \omega_i$. Si $1 \leq i \leq 5$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; l'opération w_6 laisse ω_i fixe si $i \leq 3$ et change ω_4 en $s - (\omega_5 + \omega_6)$, ω_5 en $s - (\omega_6 + \omega_4)$, ω_6 en $s - (\omega_4 + \omega_5)$. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$), $\pm (\omega_i + \omega_j + \omega_k - s)$ (i, j, k distincts), $\pm s$.

On peut munir l'espace V d'une métrique invariante par W telle que l'on ait $(\omega_i | \omega_i) = 4/3$, $(\omega_i | \omega_j) = 1/3$ si $i \neq j$; on a $(\omega_i | s) = 1$, $(s | s) = 2$,

$(\alpha | \alpha) = 2$ pour toute racine α . Les racines orthogonales à s sont les

$\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$); elles forment un système isomorphe au système des racines d'un diagramme de type (A_5) . Les opérations de W qui permutent entre elles les racines $\omega_i - \omega_j$ forment un groupe W' qui contient le groupe W'' engendré par

les symétries par rapport aux $\omega_i - \omega_j$; on déduit facilement du fait qu'un diagramme de Dynkin de type A_5 n'admet que deux automorphismes que W'' est d'indice 2 ou 4 dans W' . Si cet indice était 4, W' contiendrait l'opération w' qui transforme s en s et $\omega_i - \omega_j$ en $\omega_{\sigma-j+1} - \omega_{\sigma-i+1}$; or w' permute $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ entre elles de manière non triviale et n'appartient par suite pas à W' . Donc W'' est d'indice 2 dans W' . Comme W'' est d'ordre $6!$, W' est d'ordre $2.6!$. Par ailleurs, les seules racines qui sont orthogonales à toutes les $\omega_i - \omega_j$ sont s et $-s$; on en déduit tout de suite que l'ordre de W est $(1/2).72.2.6! = 72.6!$. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 = (1/3)(4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5) + \alpha_6$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2 = (1/3)(5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5) + 2\alpha_6$$

$$\bar{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6$$

$$\bar{\omega}_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - s = (1/3)(4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 + 10\alpha_4 + 5\alpha_5) + 2\alpha_6$$

$$\bar{\omega}_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2s = (1/3)(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5) + \alpha_6$$

$$\bar{\omega}_6 = s = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6.$$

Les transformés de $\bar{\omega}_i = \omega_i$ par les opérations de W sont les

$$\omega_i, \omega_i - s, s - (\omega_i + \omega_j) (i \neq j) ;$$

le nombre de ces transformés est 27 ; parmi eux ne figure pas $-\omega_i$, ce qui montre que l'automorphisme $\omega \rightarrow -\omega$ de V n'appartient pas au groupe de Weyl.

VI. Type E_7 . La dimension de groupe est 133. Il existe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_7)$ de l'espace V telle que l'on ait

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i \leq 6) \quad \alpha_7 = \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 - s$$

où $s = (1/3) \sum_{i=1}^7 \omega_i$. Si $i \leq 6$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$. L'opération w_7 transforme ω_i en lui-même si $i \leq 4$ et en $\omega_i - \alpha_7$ si $i \geq 5$. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j (i \neq j)$, $\pm (\omega_i + \omega_j + \omega_k - s)$ (i, j, k distincts) et $\pm (s - \omega_i)$. On peut munir l'espace V d'une métrique positive invariante par W en posant $(\omega_i | \omega_i) = 3/2$, $(\omega_i | \omega_j) = 1/2$ si $i \neq j$; on a $(\omega_i | s) = 3/2$, $(s | s) = 7/2$, $(\alpha | \alpha) = 2$ pour toute racine α . Les racines α telles que $(\omega_1, \alpha) = 0$ sont toutes celles qui sont combinaisons linéaires de $\alpha_2, \dots, \alpha_7$; leur ensemble est isomorphe à l'ensemble des racines

d'un diagramme de type E_6 . Les opérations de W qui permutent ces racines entre elles forment un groupe W' qui contient le groupe W'' engendré par les symétries par rapport aux racines $\alpha_2, \dots, \alpha_7$; ce dernier est isomorphe au groupe de Weyl d'un diagramme de type E_6 . On déduit du fait qu'un diagramme de type E_6 n'admet que deux automorphismes que l'indice de W'' dans W' est 1, 2 ou 4. Par ailleurs, l'homothétie w_0 de rapport -1 de V permute entre elles les racines; on en déduit qu'il y a une opération w'_0 de W telle que $w'_0 w_0$ permute entre elles les α_i ($1 \leq i \leq 7$); comme un diagramme de type E_7 n'admet aucun automorphisme distinct de l'identité, $w'_0 w_0$ est l'identité, d'où $w_0 \in W$. Or nous avons vu dans l'étude du type E_6 que w_0 ne peut appartenir à W'' ; de plus, on voit facilement qu'il n'y a aucune opération de W qui change ω_1 en $-\omega_1$ et qui conserve $\alpha_2, \dots, \alpha_7$; W'' est donc d'indice 2 dans W' . Les transformés de ω_1 par les opérations du groupe de Weyl sont les $\pm \omega_1, \pm (s - \omega_1 - \omega_j)$ ($i \neq j$); leur nombre est 56, et, parmi eux, les seuls qui soient orthogonaux à $\alpha_2, \dots, \alpha_7$ sont $\pm \omega_1$. On en conclut que l'indice de W' dans W est $(1/2)56$ et que l'ordre de W est $56 \cdot 72 \cdot 6!$.

Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 = (1/2)(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 3\alpha_7)$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 3\alpha_7$$

$$\bar{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = (1/2)(5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 15\alpha_3 + 18\alpha_4 + 12\alpha_5 + 6\alpha_6 + 9\alpha_7)$$

$$\bar{\omega}_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6 + 6\alpha_7$$

$$\bar{\omega}_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - s = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7$$

$$\bar{\omega}_6 = s - \omega_7 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$$

$$\bar{\omega}_7 = s = (1/2)(3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6 + 7\alpha_7)$$

VII. Type E_8 . La dimension de groupe est 248. L'espace V est engendré par 9 éléments ω_i ($1 \leq i \leq 9$) dont la somme est nulle tels que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i \leq 7) \quad \alpha_8 = \omega_6 + \omega_7 + \omega_8$$

Si $i \leq 7$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$.

L'opération w_8 transforme ω_i en $\omega_i + (1/3)\alpha_8$ si $i \neq 6, 7, 8$; en

$\omega_i - (2/3)\alpha_8$ si $i = 6, 7$ ou 8 . Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$),

$\pm (\omega_i + \omega_j + \omega_k)$ (i, j, k distincts). On peut munir l'espace V d'une métrique définie positive invariante par W en posant $(\omega_i | \omega_i) = 8/9$, $(\omega_i | \omega_j) = -1/9$

si $i \neq j$; or $(\alpha | \alpha) = 2$ pour toute racine α . Les racines orthogonales à $\omega_1 - \omega_9$ sont celles qui expriment comme combinaisons linéaires de $\alpha_2, \dots, \alpha_8$; elles forment un système de racines isomorphe à l'ensemble des racines d'un diagramme de type E_7 . Les opérations de W qui permutent ces racines entre elles forment un groupe W' ; comme le groupe de Weyl d'un diagramme de type E_7 n'admet aucun automorphisme distinct de l'identité, W' contient le groupe engendré par les symétries par rapport à $\alpha_2, \dots, \alpha_8$ comme sous-groupe d'indice 2. Il en résulte que l'ordre de W est $240.56.72.6!$. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_9 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_9 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 10\alpha_4 + 12\alpha_5 + 8\alpha_6 + 4\alpha_7 + 6\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 3\omega_9 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 15\alpha_4 + 18\alpha_5 + 12\alpha_6 + 6\alpha_7 + 9\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - 4\omega_9 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 15\alpha_3 + 20\alpha_4 + 24\alpha_5 + 16\alpha_6 + 8\alpha_7 + 12\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 5\omega_9 = 6\alpha_1 + 12\alpha_2 + 18\alpha_3 + 24\alpha_4 + 30\alpha_5 + 20\alpha_6 + 10\alpha_7 + 15\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_6 = -\omega_7 - \omega_8 - 4\omega_9 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 16\alpha_4 + 20\alpha_5 + 14\alpha_6 + 7\alpha_7 + 10\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_7 = -\omega_8 - 2\omega_9 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 10\alpha_5 + 7\alpha_6 + 4\alpha_7 + 5\alpha_8$$

$$\bar{\omega}_8 = -3\omega_9 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7 + 8\alpha_8$$

VIII. Type F_4 . La dimension de groupe est 52 . L'espace V a une base $(\omega_1, \dots, \omega_4)$ telle que

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2 \quad \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3 \quad \alpha_3 = \omega_3$$

$$\alpha_4 = (1/2) (\omega_4 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) .$$

Si $i = 1$ ou 2 , w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; w_3 change ω_3 en $-\omega_3$ et laisse ω_i fixe si $i \neq 3$. L'opération w_4 change ω_i en $\omega_i + \alpha_4$ si $i = 1, 2$ ou 3 et change ω_4 en $\omega_4 - \alpha_4$. Les racines sont

les $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$) , $\pm \omega_i$, $\pm (\omega_i + \omega_j)$ ($i \neq j$) et $(1/2) \sum_{i=1}^4 e(i) \omega_i$, où les $e(i)$ sont égaux à ± 1 . On peut munir l'espace V d'une métrique définie positive invariante par W en posant $(\omega_i | \omega_i) = 1$, $(\omega_i | \omega_j) = 0$ si $i \neq j$. Les seules racines α telles que $(\alpha | \alpha) = 2$ sont les $\omega_i - \omega_j$, $\pm (\omega_i + \omega_j)$; ces racines sont donc permutées entre elles par les opérations de W . Elles forment un système de racines isomorphe à l'ensemble des racines d'un diagramme de type D_4 . Soit W' le groupe engendré par les symétries par rapport à ces racines ; comme le groupe des automorphismes d'un diagramme de type D_4 est d'ordre 6, l'indice de W'

dans W est un diviseur de 6. Or le produit des symétries par rapport à $\omega_3 - \omega_4$ et ω_3 conserve $\omega_1 - \omega_2$ et $\omega_2 - \omega_3$ et échange $\omega_3 - \omega_4$ avec $\omega_3 + \omega_4$; par ailleurs, la symétrie par rapport à la racine $(1/2)(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4)$ conserve $\omega_2 - \omega_3$ et $\omega_3 + \omega_4$ et échange $\omega_1 - \omega_2$ avec $\omega_3 - \omega_4$. Il en résulte facilement que W' est d'indice 6 dans W , donc que W est d'ordre $6 \cdot 2^3 \cdot 4!$. Les poids dominants fondamentaux sont.

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2 + 2\omega_4 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 4\alpha_4$$

$$\bar{\omega}_3 = (1/2)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 3\omega_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4$$

$$\bar{\omega}_4 = \omega_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

IX. Type G_2 . La dimension de groupe est 14. L'espace V est engendré par 3 éléments $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ de somme nulle tels que

$$\alpha_1 = \omega_0 \quad \alpha_2 = \omega_1 - \omega_0.$$

L'opération w_1 change ω_0 en $-\omega_0$ et ω_1 en $\omega_1 + \omega_0$; w_2 change ω_0 en ω_1 , ω_1 en ω_0 . Les racines sont les $\pm \omega_i, \omega_i - \omega_j$ ($i \neq j$). On définit une métrique positive invariante par le groupe de Weyl en posant $(\omega_i | \omega_i) = 1$, $(\omega_i | \omega_j) = -1/2$ si $i \neq j$. Les opérations de W sont les automorphismes w définis par $w \cdot \omega_i = e \cdot \omega_{\pi(i)}$, où π est une permutation de $\{0, 1, 2\}$ et $e = \pm 1$; W est donc d'ordre 12. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_0 = \alpha_2 + 2\alpha_1$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_1 - \omega_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_1.$$