

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les isogénies

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 18, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A5_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

LES ISOGÉNIES

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 25.11.1957)

Rappelons que, si G et G' sont des groupes algébriques, on appelle isogénie de G sur G' un épimorphisme rationnel de noyau fini de G sur G' . Il est clair que, s'il existe une isogénie de G sur G' , on a $\dim G = \dim G'$. Si H est un sous-groupe fermé de G , $f(H)$ est un sous-groupe fermé de G' . Le noyau N de f est un sous-groupe distingué fini de G , donc contenu dans le centre de G . Si H' est un sous-groupe connexe de G' , il y a un sous-groupe connexe H et un seul de G tel que $f(H) = H'$, à savoir la composante connexe H_0 de l'élément neutre dans $f^{-1}(H')$. En effet, comme f est surjectif, on a $f(f^{-1}(H')) = H'$; $f(H_0)$ est donc un sous-groupe fermé d'indice fini de H' , d'où $f(H_0) = H'$ puisque H' est connexe. Par ailleurs, si H est un sous-groupe connexe de $f^{-1}(H')$, on a $H \subset H_0$. Comme f est de noyau fini, on a $\dim H_0 = \dim H'$, et, si $f(H) = H'$, $\dim H = \dim H' = \dim H_0$, d'où $H = H_0$.

Soit f une isogénie du groupe G sur le groupe G' ; soient Φ et Φ' les corps de fonctions numériques sur G et G' . Le cohomomorphisme φ de f est alors un isomorphisme φ de Φ' sur un sous-corps Φ_1 de Φ .

On peut montrer que la connaissance de Φ_1 détermine l'isogénie f à un isomorphisme près; d'une manière précise, si f' et f'' sont des isogénies de G sur des groupes G' et G'' dont les cohomomorphismes appliquent les corps de fonctions numériques sur G' et G'' sur le même sous-corps Φ_1 de Φ , il y a un isomorphisme h de G' sur G'' tel que $h \circ f' = f''$. On peut aussi caractériser comme suit les sous-corps Φ_1 de Φ qui correspondent à des isogénies de G . Pour tout $s \in G$, désignons par $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ les cohomomorphismes des translations à gauche et à droite par s dans G ; pour qu'un sous-corps Φ_1 de Φ (contenant K) soit associé à une isogénie de G , il faut et suffit que Φ_1 soit une extension algébrique de degré fini de Φ_1 et que Φ_1 soit transformé en lui-même par les opérations $\lambda(s)$, $\mu(s)$ pour tout $s \in G$. L'isogénie f est dite radicielle si Φ est une extension radicielle de Φ_1 ; on dit de plus que f est radicielle de hauteur 1 si on a $\Phi^p \subset \Phi_1$, où Φ^p est le corps des puissances p -ièmes des fonctions de Φ . On montre que Φ_1 est alors déterminé

par la connaissance de celles des dérivations invariantes à gauche (ou d'ailleurs à droite) qui sont nulles sur Φ_1 ; ces dérivations forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de G , qui est stable relativement à la représentation adjointe de G et à l'opération de puissance p -ième dans $\mathcal{L}$. Réciproquement, on peut montrer que tout sous-espace $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ satisfaisant à ces conditions est associé à une isogénie radicielle f de hauteur 1. Nous ne démontrerons pas ces résultats, qui ne seront pas utilisés dans la suite. Nous allons cependant montrer que, pour tout groupe algébrique G , dont nous désignerons le corps des fonctions numériques par Φ , et pour toute puissance q de l'exposant caractéristique de K , il existe une isogénie de G sur un groupe G' dont le cohomomorphisme applique le corps des fonctions numériques sur G' sur le corps Φ^q des puissances q -ièmes des éléments de Φ . Il est bien connu que l'ensemble des points de G peut être muni d'une structure de variété telle que les fonctions numériques sur cette variété soient les puissances q -ièmes des fonctions de Φ ; désignons cette variété par G' . L'application identique f de G est un morphisme de G dans G' dont le cohomomorphisme est l'isomorphisme d'inclusion de Φ^q dans Φ . Il reste à montrer que l'application $(s, t) \longrightarrow st$ est un morphisme de la variété $G' \times G'$ dans G' . Or cette application est un morphisme de $G \times G$ dans G ; son cohomomorphisme est un isomorphisme μ de Φ sur le corps des fonctions numériques sur $G \times G$, qui s'identifie au corps des fractions de $\Phi \otimes \Phi$. Il est clair que $\mu(\Phi^q)$ est contenu dans le corps des fractions de $\Phi^q \otimes \Phi^q$, donc dans le corps des fonctions numériques sur $G' \times G'$; la restriction de μ à Φ^q est le cohomomorphisme d'une fonction m' (a priori non nécessairement partout définie) sur la variété $G' \times G'$ à valeurs dans G' et que l'on a $m' \odot f = f \odot m$ en désignant par m la multiplication dans G , d'où $m'(s, t) = st$ si m' est définie en (s, t) . Par ailleurs, G et G' ont même topologie, et le graphe M de m est une sous-variété fermée de $G \times G \times G$, donc aussi de $G' \times G' \times G'$ (car $G' \times G' \times G'$ est la variété dont les points sont ceux de $G \times G \times G$ et dont les fonctions numériques sont les puissances q -ièmes des fonctions sur $G \times G \times G$). Il en résulte que M est l'adhérence du graphe de m' dans $G' \times G' \times G'$. La projection $(s, t, u) \longrightarrow (s, t)$ de $G' \times G' \times G'$ sur $G' \times G'$ induit une bijection Π de M sur $G' \times G'$ qui est aussi un morphisme birationnel. Comme G est une variété normale, il en est de même de G' ; on en déduit que Π est un isomorphisme de M sur $G' \times G'$, donc que m' est partout définie et que G' est un groupe. Nous appellerons isogénie des puissances q -ièmes l'isogénie f du groupe G que l'on vient de définir ; du point de vue ensembliste, c'est l'application identique de G .

PROPOSITION 1. - Soit f une isogénie d'un groupe algébrique connexe G sur un groupe algébrique connexe G' . Si l'un des groupes G, G' est semi-simple (resp. presque-simple), il en est de même de l'autre.

Soient H un sous-groupe fermé connexe de G et $f(H) = H'$. Si H est distingué (resp. résoluble) dans G , il est clair que H' est distingué (resp. résoluble) dans G' . Réciproquement, si H' est distingué dans G' , $\bar{f}^1(H')$ est distingué dans G , et il en est de même de H qui est la composante connexe de l'élément neutre dans G . Si H' est résoluble, il en est de même de H ; car, si N est le noyau de f , $\bar{f}^1(H)/N$ est isomorphe à H' , donc résoluble, et N est dans le centre de $\bar{f}^1(H')$, ce qui montre que $\bar{f}^1(H')$ est résoluble; la proposition 1 résulte immédiatement de là.

Soit maintenant G un groupe semi-simple, et soit T un tore maximal de G . Si α est une racine de G par rapport à T ; il existe un isomorphisme τ_α du groupe additif K dans G tel que $t \tau_\alpha(\xi) t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\xi)$ si $\xi \in K, t \in T$; nous dirons que τ_α est associé à α ; les éléments de $\tau_\alpha(K)$ sont unipotents; nous dirons que le groupe $\tau_\alpha(K)$ est un sous-groupe unipotent de G associé à α .

LEMME 1. - Soit P un sous-groupe connexe de dimension 1 de G composé d'éléments unipotents et dont le normalisateur contient T ; il y a une racine α et une seule telle que P soit associé à α .

Le groupe PT est résoluble et connexe; il est donc contenu dans un groupe de Borel B de G , et P est contenu dans l'ensemble B^u des éléments unipotents de B . Soient α_i ($1 \leq i \leq N$) les racines de G qui sont négatives sur la chambre de Weyl associée à B ; il y a alors pour chaque i un groupe P_i associé à α_i contenu dans B^u , et P est le produit semi-direct de ceux des P_i qu'il contient (exposé 13, théorème 1). Comme $\dim P = 1$, il y a un i tel que $P_i = P$. Soit τ_i un isomorphisme de K sur $P_i = P$ associé à α_i ; si P est associé à une racine α , soit τ un isomorphisme de K sur P associé à α . Comme τ et τ_i sont des isomorphismes, on a $\tau(\xi) = \tau_i(c\xi)$ avec un $c \neq 0$ de K ; il en résulte aussitôt que $\alpha = \alpha_i$.

Soit maintenant f une isogénie de G sur un groupe G' ; $T' = f(T)$ est alors un tore maximal de G' , et la restriction f_T de f à T est une isogénie de T sur T' . Elle détermine un isomorphisme $\theta' \rightarrow \theta' \circ f_T$ du groupe $X(T')$ des caractères rationnels de T' sur un sous-groupe du groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T . Comme $\dim T = \dim T'$, cet isomorphisme se prolonge en un

isomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$, que nous appellerons l'isomorphisme attaché à f . Soit α une racine de G par rapport à T , et soit P_α le groupe unipotent associé à α ; f induit une isogénie f_α de P_α sur un sous-groupe connexe P'_α de dimension 1 de G' dont les éléments sont unipotents et dont le normalisateur contient T' ; P'_α est donc le groupe unipotent associé à une racine α' bien déterminée de G' ; nous dirons que α et α' se correspondent par l'isogénie f . Réciproquement, soit α' une racine de G' et soit $P'_{\alpha'}$ le groupe unipotent qui lui est associé; c'est l'image par f d'un sous-groupe connexe P de dimension 1 de G , et d'un seul. Il est clair que le normalisateur de P contient T . Le groupe P est résoluble (cf. la démonstration de la proposition 1) et n'est pas un tore, car sinon $P'_{\alpha'} = f(P)$ serait un tore. Comme $\dim P = 1$, il en résulte que P est composé d'éléments unipotents; c'est donc le groupe unipotent associé à une racine α de G . La correspondance que nous avons établie entre racines de G et racines de G' définit donc une bijection de l'ensemble des premières sur l'ensemble des secondes. Soient de plus τ_α , $\tau'_{\alpha'}$, des isomorphismes de K sur P_α et $P'_{\alpha'}$, respectivement; on a donc, pour $\xi \in K$, $f(\tau_\alpha(\xi)) = \tau'_{\alpha'}(m(\xi))$, où m est une isogénie de K sur K ; $m(\xi)$ s'exprime comme polynôme en ξ . Si $t \in T$, $t' = f(t)$, on a

$$t' f(\tau_\alpha(\xi)) t'^{-1} = f(t \tau_\alpha(\xi) t^{-1}) = f(\tau_\alpha(\alpha(t) \xi))$$

d'où $\alpha'(t') m(\xi) = m(\alpha(t) \xi)$. Comme $m(\xi)$ est un polynôme en ξ , ce polynôme est homogène; si $q(\alpha)$ est son degré, on a $\alpha'(t') = (\alpha(t))^{q(\alpha)}$, ce qui donne, en notation additive,

$$\varphi(\alpha') = q(\alpha) \alpha.$$

De plus, comme m est un homomorphisme de K dans lui-même, $q(\alpha)$ est une puissance de l'exposant caractéristique de K .

DÉFINITION 1. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' , $X(T)$ et $X(T')$ les groupes des caractères rationnels de T et T' . Un isomorphisme φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ est dit spécial si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° on a $\varphi(X(T')) \subset X(T)$;

2° il existe une bijection ψ de l'ensemble des racines de G par rapport à T sur l'ensemble des racines de G' par rapport à T' telle que l'on ait

$\varphi(\psi(\alpha)) = q(\alpha) \alpha$ pour toute racine α de G , $q(\alpha)$ étant une puissance de l'exposant caractéristique de K ; les $q(\alpha)$ sont alors appelés les exposants

radiciels de φ .

On notera que ψ et les $q(\alpha)$ sont alors uniquement déterminés par φ , car si α_1 et α_2 sont des racines telles que $\alpha_2 = c\alpha_1$, c rationnel >0 , on a $c = 1$.

L'isomorphisme associé à une isogénie est donc toujours spécial. C'est l'un des objets essentiels de ce séminaire d'établir que réciproquement tout isomorphisme spécial est associé à une isogénie.

PROPOSITION 2. - Soient G un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal de G , q une puissance de l'exposant caractéristique de K , f l'isogénie des puissances q -ièmes de G , G' le groupe $f(G)$, T' le groupe $f(T)$. L'isomorphisme spécial φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à f applique $X(T')$ sur $qX(T)$; ses exposants radiciels sont tous égaux à q .

Soit H un sous-groupe fermé connexe de G , et soit $f(H) = H'$. Pour qu'une fonction numérique u sur G soit définie en un point $s \in H$, il faut et suffit que u^q , considéré comme fonction sur G' , soit défini en s ; il en résulte immédiatement que la restriction de f à H est l'isogénie des puissances q -ièmes pour H . Prenant $H = T$, on voit que les caractères rationnels de T' sont les puissances q -ièmes des caractères rationnels de T d'où $\varphi(X(T')) = qX(T)$. Prenant pour H le groupe $\mathcal{U}_\alpha(K)$, où $\mathcal{U}_\alpha$ est un isomorphisme associé à une racine α , on voit qu'il y a un isomorphisme $\mathcal{U}'$ de K sur H' tel que $f(\mathcal{U}_\alpha(\xi)) = \mathcal{U}'(\xi^q)$, ce qui montre que l'exposant radiciel relatif à α est q .

PROPOSITION 3. - Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K ; soit f_V l'application naturelle de $GL(V)$ sur le groupe projectif $PL(V)$. Soient G un sous-groupe fermé connexe semi-simple de $GL(V)$, G' le groupe $f_V(G)$, f la restriction de f_V à G . Les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial attaché à f sont tous égaux à 1.

Soit T un tore maximal de G . Si P est un groupe associé à une racine α de G par rapport à T , P est contenu dans l'ensemble N des éléments unipotents d'un groupe de Borel de $GL(V)$; il suffira de montrer que f_V induit un isomorphisme de N sur un sous-groupe de $PL(V)$. Or, il y a une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que l'on ait, pour $s \in N$, $s.e_i = e_i \pmod{\sum_{j>i} Ke_j}$; si on pose $s.e_i = e_i + \sum_{j>i} u_{ji}(s)e_j$, les u_{ji} ($j > i$) engendrent l'algèbre affine de N . Posons, pour $t \in GL(V)$, $t.e_i = \sum_{j=1}^n v_{ji}(t)e_j$; les fonctions $v_{ji}/v_{j,i}$ sont les images par le cohomomorphisme de f_V de fonctions numériques sur $PL(V)$. Or, si $j > i$, $s \in N$, on a $u_{ji}(s) = v_{ji}(s)$; les u_{ji} sont donc les images par le

cohomomorphisme de la restriction f_N de f_V à N de fonctions numériques partout définies sur $f_V(N)$, ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 4. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' et φ un isomorphisme spécial de $\mathbb{C} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{C} \otimes X(T)$. L'application $\varphi_w : w' \rightarrow \varphi \circ w' \circ \bar{\varphi}^{-1}$ induit alors un isomorphisme du groupe de Weyl W' de G' sur le groupe de Weyl w de G ; si w' est la symétrie par rapport à une racine α' de G' , $\varphi_w(w')$ est la symétrie par rapport à la racine α de G telle que $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, $q(\alpha) > 0$. Si α et β sont des racines de G transformées l'une de l'autre par une opération de W , les exposants radiciels correspondant à α et à β sont égaux. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des racines de G et α'_1 les racines de G' telles que $\varphi(\alpha'_1) = q_1 \alpha_1$, $q_1 > 0$; pour que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ forment un système fondamental de racines de G il faut et suffit que $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ forment un système fondamental de racines de G' . Supposons qu'il en soit ainsi; soient w_1 et w'_1 les symétries par rapport à α_1, α'_1 ; posons $w_1(\alpha_j) = \alpha_j + c(i, j)\alpha_1$, $w'_1(\alpha'_j) = \alpha'_j + c'(i, j)\alpha'_1$. On a alors $c(i, j) = c'(i, j) q_1 q_j^{-1}$.

Soit w' un élément de W' , et soit $w = \varphi \circ w' \circ \bar{\varphi}^{-1}$. Si β est une racine de G , on a $\bar{\varphi}^{-1}(\beta) = (q(\beta))^{-1} \beta'$, où β' est une racine de G' , d'où

$$(w' \circ \bar{\varphi}^{-1})(\beta) = (q(\beta))^{-1} \gamma'$$

si γ' est la racine $w'(\beta')$ et $w(\beta) = q(\gamma)(q(\beta))^{-1} \gamma$ si $\varphi(\gamma') = q(\gamma)\gamma$. Il y a donc une permutation ϖ de l'ensemble des racines de G telle que $w(\beta) = c(\beta) \varpi(\beta)$ avec un nombre rationnel $c(\beta) > 0$. Supposons maintenant que w' soit la symétrie par rapport à une racine α' ; on a alors

$$\gamma' = \beta' + a(\beta')\alpha',$$

$a(\beta')$ étant un entier; si on pose $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, on a $w(\beta) = \beta + r(\beta)\alpha$, $r(\beta)$ étant un nombre rationnel.

Par ailleurs, il est clair que $w(\alpha) = -\alpha$. Soit w_α la symétrie par rapport à α . On a donc

$$(w_\alpha w)(\beta) = c(\beta) \varpi'(\beta) = \beta + s(\beta)\alpha$$

où $c(\beta)$, $s(\beta)$ sont des nombres rationnels et ϖ' une permutation de l'ensemble des racines; de plus, $(w_\alpha w)(\alpha) = \alpha$. Soit k l'ordre de la permutation ϖ' ; on a $(w_\alpha w)^k(\beta) = c_1(\beta)\beta = \beta + ks(\beta)\alpha$ avec $c_1(\beta)$ rationnel. Or, si on prend $\beta \neq \pm \alpha$, α et β sont linéairement indépendantes, d'où $c_1(\beta) = 1$,

$s(\beta) = 0$. On a aussi $s(\frac{1}{2}\alpha) = 0$; $w_\alpha w$ est donc l'identité, d'où $w = w_\alpha$. Comme le groupe de Weyl est engendré par les symétries par rapport aux racines, il en résulte que $w' \rightarrow \varphi \circ w' \circ \bar{\varphi}^{-1}$ est un isomorphisme de W' sur W . Les notations étant les mêmes qu'au début, il résulte du fait que $w \in W$ que $w(\beta)$ est une racine, d'où $q(\beta) = q(\gamma)$, $\gamma = w(\beta)$.

Comme φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient linéairement indépendantes est qu'il en soit ainsi de $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$; de plus une condition nécessaire et suffisante pour que toute racine de G puisse s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients rationnels tous ≥ 0 ou tous ≤ 0 des α_i est que toute racine de G puisse s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients rationnels tous ≥ 0 ou tous ≤ 0 des α'_i ; l'avant dernière assertion de la proposition 4 résulte de là. On a $\varphi \circ w'_i = w_i \circ \varphi$, d'où $w_i(\varphi(\alpha'_j)) = q_j \alpha_j + c(i, j) q_i \alpha_i$ et

$$w_i(\varphi(\alpha'_j)) = q_j w_i(\alpha_j) = q_j(\alpha_j + c(i, j) \alpha_i),$$

ce qui démontre la dernière assertion.

PROPOSITION 5. - Soient G, G', G'' des groupes algébriques semi-simples, f' et f'' des isogénies de G sur G' et G'' , T un tore maximal de G , $T' = f'(T)$, $T'' = f''(T)$, φ' et φ'' les isomorphismes de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ attachés à f' et f'' . Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial γ de $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ tel que $\varphi' \circ \gamma = \varphi''$. Il existe alors une isogénie g de G' sur G'' qui applique T' sur T'' telle que γ soit l'isomorphisme associé à g et que $g \circ f' = f''$. Si γ applique $X(T'')$ sur $X(T')$ et si ses exposants radiciels sont égaux à 1, g est un isomorphisme.

La restriction de γ à $X(T'')$ est un isomorphisme de ce groupe sur un sous-groupe de $X(T')$; il y a donc un homomorphisme g_T de T' dans T'' tel que $\theta'' \circ g_T = \gamma(\theta')$ si $\theta' \in X(T')$; g_T est une isogénie, et il résulte immédiatement de la formule $\varphi' \circ \gamma = \varphi''$ que $g_T \circ f'_T = f''_T$ en désignant par f'_T, f''_T les restrictions de f' et f'' à T . Soient α une racine de G par rapport à T , τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à α , $I_\alpha = \tau_\alpha(K)$, α' et α'' les racines de G' et G'' telles que $\varphi'(\alpha') = q'(\alpha) \alpha$, $\varphi''(\alpha'') = q''(\alpha) \alpha$, avec $q'(\alpha) > 0$, $q''(\alpha) > 0$. Il résulte de la définition des exposants radiciels qu'il y a des isomorphismes $\tau'_\alpha, \tau''_\alpha$ de K sur $f'(P_\alpha)$ et $f''(P_\alpha)$ respectivement tels que

$$f'(\tau_\alpha(\xi)) = \tau'_{\alpha'}(\xi^{q'(\alpha)}) \quad f''(\tau_\alpha(\xi)) = \tau''_{\alpha''}(\xi^{q''(\alpha)})$$

Par ailleurs, γ étant spécial, $\gamma(\alpha'')$ est de la forme $\bar{q}(\alpha)\bar{\alpha}'$, où $\bar{q}(\alpha)$ est un entier >0 et $\bar{\alpha}'$ une racine de G' . Comme $\varphi' \circ \gamma = \varphi''$, on a

$$\varphi''(\alpha'') = \bar{q}(\alpha)\varphi'(\bar{\alpha}') = q''(\alpha)\alpha.$$

Il en résulte que $\bar{\alpha}' = \alpha'$, $\bar{q}(\alpha)q'(\alpha) = q''(\alpha)$; il y a par suite un homomorphisme g_α de $f'(P_\alpha)$ sur $f''(P_\alpha)$ tel que $g_\alpha(\tau'_{\alpha'}(\xi)) = \tau''_{\alpha''}(\xi^{\bar{q}(\alpha)})$ pour tout $\alpha \in K$, et on a $g_\alpha \circ f'_\alpha = f''_\alpha$ en désignant par f'_α et f''_α les restrictions de f' et f'' à P_α . Choisissons un groupe de Borel B de G contenant T ; soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les racines qui sont négatives sur la chambre de Borel associée à B ; le groupe B^u des éléments unipotents de B est alors le produit semi-direct des P_{α_i} ($1 \leq i \leq N$) (théorème 1, exposé 13). De plus, il y a un groupe de Borel C contenant T tel que le groupe C^u des éléments unipotents de C soit le produit semi-direct des $P_{-\alpha_i}$ ($1 \leq i \leq N$); l'application $(b, t, c) \rightarrow btc$ est un isomorphisme de la variété $B^u \times T \times C^u$ sur une sous-variété ouverte U de G . Les groupes $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ sont des groupes de Borel de G' contenant T . Soit α'_i la racine de G' telles que $\varphi'(\alpha'_i) = q'(\alpha_i)\alpha_i$; le groupe unipotent associé à α'_i est le sous-groupe $f(P_{\alpha_i})$ de B' , tandis que le groupe unipotent associé $-\alpha'_i$ est $f(P_{-\alpha_i}) \subset C'$. Il en résulte que les α'_i (resp. $-\alpha'_i$) sont les racines qui sont négatives sur la chambre associée à B' (resp. C'). Désignant par B'^u et C'^u les groupes d'éléments unipotents de B' et C' , B'^u (resp. C'^u) est le produit semi-direct des $f'(P_{\alpha_i})$ (resp. $f'(P_{-\alpha_i})$) et

$$(b', t', c') \rightarrow b' t' c'$$

est un isomorphisme de $B'^u \times T' \times C'^u$ sur une sous-variété ouverte U' de G' ; on a $U' = f'(U)$. Il existe donc un morphisme g_U de la variété U' dans G'' tel que l'on ait

$$g_U(\prod_{i=1}^N s'_i) t'(\prod_{i=1}^N \tilde{s}'_i) = \prod_{i=1}^N g_{\alpha_i}(s'_i) g_T(t') \prod_{i=1}^N g_{-\alpha_i}(\tilde{s}'_i)$$

si $s'_i \in f'(P_{\alpha_i})$, $\tilde{s}'_i \in f'(P_{-\alpha_i})$ ($1 \leq i \leq N$). De plus, il est clair que

$g_U \circ f'_U = f''_U$ en désignant par f'_U et f''_U les restrictions de f' et f'' à U .

L'application g_U se prolonge en une fonction g sur G' à valeurs dans G'' . Nous allons montrer que cette fonction est partout définie et est un homomorphisme. Soient s un élément de G , $s' = f'(s)$, $s'' = f''(s)$; désignons par $\lambda, \lambda', \lambda''$ les translations à gauche par s, s', s'' dans G, G', G'' . On va montrer que

$g \odot \lambda' = \lambda'' \odot g$ (on rappelle que $g \odot \lambda'$, par exemple, est l'unique fonction sur G' à valeurs dans G'' qui prolonge l'application $g \circ \lambda'$). On a évidemment $g \odot f' = f''$, d'où $\lambda'' \odot g \odot f' = \lambda'' \odot f''$; comme f' , f'' sont des homomorphismes on a

$$\lambda'' \circ f'' = f'' \circ \lambda = g \odot f' \odot \lambda = g \odot \lambda' \odot f',$$

d'où

$$\lambda'' \odot g \odot f' = g \odot \lambda' \odot f'.$$

Comme f' est surjectif, il en résulte tout de suite que $\lambda'' \odot g = g \odot \lambda'$. Si donc g est défini en un point s'_0 , il l'est aussi en $\lambda'(s'_0) = s's'_0$. Ceci étant vrai pour tout $s \in G$, g est partout défini, et on peut écrire $g \circ f' = f''$, $\lambda'' \circ g = g \circ \lambda'$, d'où $g(f'(s)s'_0) = f''(s)g(s'_0) = g(f'(s))g(s'_0)$ pour tout $s \in G$ et tout $s'_0 \in G'$. Comme f' est surjectif, g est un homomorphisme. L'image réciproque par f' du noyau de g est contenue dans le noyau de f'' et est donc finie, ce qui montre que le noyau de g est fini; $g(G') = g(f'(G))$ est $f''(G) = G''$, ce qui montre que g est surjectif; g est donc une isogénie. On a

$$g(T') = g_T(T') = T'';$$

si γ^* est l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ associé à g , il résulte immédiatement de la formule $g \circ f' = f''$ que $\varphi \circ \gamma^* = \varphi''$, d'où $\gamma^* = \gamma$.

Supposons maintenant que $\gamma(X(T'')) = X(T')$ et que les exposants radiciels de γ soient égaux à 1; γ^{-1} est alors évidemment un isomorphisme spécial, et il existe une isogénie g' de G'' sur G' telle que $g' \circ f'' = f'$. On a

$$g \circ g' \circ f'' = f'';$$

comme f'' est surjectif, $g \circ g'$ est l'application identique de G'' . De même, $g' \circ g$ est l'application identique de G' ; g est donc alors un isomorphisme, et la proposition 5 est établie.

PROPOSITION 6. - Soient G, G', G'' des groupes algébriques semi-simples, f' et f'' des isogénies de G' et G'' sur G , T un tore maximal de G , T' et T'' les tores maximaux de G' et G'' tels que $f'(T') = f''(T'') = T$, φ' et φ'' les isomorphismes de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ attachés à f' et f'' . Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial γ de $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ tel que $\gamma \circ \varphi'' = \varphi'$. Il existe alors une isogénie g de G' sur G'' qui applique T' sur T'' telle que γ soit l'isomorphisme associé à g et que $f'' \circ g = f'$. Si on suppose que $\gamma(X(T'')) = X(T')$ et que les exposants radiciels

de γ sont égaux à 1, g est un isomorphisme.

Etablissons d'abord le

LEMME 2. - Soient f' et f'' des isogénies de groupes connexes G' et G'' sur un groupe G . Il existe alors un groupe connexe H et des isogénies h' et h'' de H sur G' et G'' tels que $f' \circ h' = f'' \circ h''$.

Soit H_0 l'ensemble des $(s', s'') \in G' \times G''$ tels que $f'(s') = f''(s'')$; c'est évidemment un sous-groupe fermé de $G' \times G''$. Soit H la composante connexe de l'élément neutre dans H_0 ; les projections de $G' \times G''$ sur G' et G'' induisent des homomorphismes h' et h'' de H dans G' et G'' , et on a $f' \circ h' = f'' \circ h''$. Comme f' et f'' sont surjectifs, les projections de $G' \times G''$ sur ses deux facteurs induisent des épimorphismes h'_0 et h''_0 de H_0 sur G' et G'' ; comme H est d'indice fini dans H_0 , h' et h'' sont surjectifs; les noyaux de f' , f'' étant finis, il en est évidemment de même de ceux de h'_0 , h''_0 , donc aussi de ceux de h' , h'' .

Ceci dit, passons à la démonstration de la proposition 6; soit H un groupe connexe qui admet des isogénies h' et h'' sur G' et G'' telles que $f' \circ h' = f'' \circ h''$; soit T_H le tore maximal de H tel que

$$(f' \circ h')(T_H) = (f'' \circ h'')(T_H) = T;$$

on a évidemment $f'(T_H) = T'$, $f''(T_H) = T''$. Soient γ' , γ'' les isomorphismes de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_H)$ associés à h' , h'' ; on a donc $\gamma' \circ \varphi' = \gamma'' \circ \varphi''$, d'où $\gamma'' \circ \gamma \circ \varphi' = \gamma'' \circ \varphi''$ et par suite $\gamma' \circ \gamma = \gamma''$. Il résulte de la proposition 5 qu'il existe une isogénie $g: G' \rightarrow G''$ telle que $g \circ h' = h''$, $g(T') = T''$ et que l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T'')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ attaché à g soit γ . On a $f'' \circ g \circ h' = f'' \circ h'' = f' \circ h'$; comme h' est surjectif, on a $f'' \circ g = f'$. La seconde assertion de la proposition 6 résulte de la proposition 5.