

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Existence d'isogénies, I

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 23, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A10_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE D'ISOGÉNIES, I

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 20.1.1958)

1. Existence de groupes simplement connexes.

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe algébrique semi-simple. Il existe alors une isogénie h d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe G' sur G . De plus, T étant un tore maximal de G et T' le tore maximal de G' tel que $h(T') = T$, on peut supposer que les exposants radiciels de l'isomorphisme η de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ attaché à h sont tous égaux à 1.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T ; soit $\tilde{\omega}_i$ le poids dominant fondamental relatif à α_i et soit ρ_i une représentation projective simple de poids dominant $\tilde{\omega}_i$ de G . Nous désignerons par G_i le groupe linéaire associé à la représentation ρ_i et par f_i l'application naturelle de G_i sur $\rho_i(G)$. Soit G' la composante algébrique de l'élément neutre dans le groupe des $(s_1, \dots, s_n, s) \in G_1 \times \dots \times G_n \times G$ tels que l'on ait $\rho_i(s) = f_i(s_i)$ ($1 \leq i \leq n$); les projections de $G_1 \times \dots \times G_n \times G$ sur ses différents facteurs définissent des homomorphismes $h_1, \dots, h_n, h$ de G' dans $G_1, \dots, G_n, G$; on a $f_i \circ h_i = \rho_i \circ h$. Les noyaux des f_i étant finis, il en est de même de celui de h . Pour tout $s \in G$, il existe des $s_i \in G_i$ tels que $f_i(s_i) = \rho_i(s)$, d'où on déduit que $\dim G' \geq \dim G$; h est par suite une isogénie. Soit T' le tore maximal de G' tel que $h(T') = T$, et soit η l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ attaché à h . Posons $\eta(\alpha_i) = q_i \alpha'_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K et α'_i une racine de G' . Soit τ'_i un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G' associé à la racine α'_i ; si $\eta(\alpha_i) = q_i \alpha'_i$, on a $h(\tau'_i(\xi)) = \tau_i(\xi^{q_i})$, où τ_i est un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à la racine α_i ; nous voulons montrer que $q_i = 1$. Or $\rho_i \circ \tau_i$ est un homomorphisme de K sur un sous-groupe de $\rho_i(G)$ formé d'éléments unipotents. Il en résulte (exp. 18, proposition 3) qu'il existe un homomorphisme $\tilde{\tau}_i$ de K dans G_i tel que $f_i \circ \tilde{\tau}_i = \rho_i \circ \tau_i$. On a donc

$$(f_i \circ \tilde{\tau}_i)(\xi^{q_i}) = \rho_i(\tau_i(\xi^{q_i})) = (\rho_i \circ h)(\tau'_i(\xi)) = f_i((h_i \circ \tau'_i)(\xi)) ;$$

il en résulte immédiatement (le noyau de f_i étant composé d'éléments semi-simples) que $h_i(\tau'_i(\xi)) = \tilde{\tau}_i(\xi^{q_i})$. Or on a

$$\tilde{\tau}'_i(\xi) = (h_1(\tau'_1(\xi)), \dots, h_n(\tau'_n(\xi)), h(\tau'_i(\xi))) ;$$

il en résulte immédiatement que $q_i = 1$. Nous avons donc montré que les exposants radiciels de γ sont tous égaux à 1 (ce qui montre incidemment que G' est du même type que G). Il en résulte que les $\tilde{\omega}'_i = \gamma(\tilde{\omega}_i)$ sont les poids dominants fondamentaux de G' relatifs au système fondamental $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Pour chaque i , $\rho_i \circ h$ est une représentation projective simple de poids dominant $\tilde{\omega}'_i$ de G' . Comme cette représentation s'écrit $f_i \circ h_i$, on voit que h_i est une représentation linéaire simple de poids dominant $\tilde{\omega}'_i$ de G' , d'où $\tilde{\omega}'_i \in X(T')$. Ceci étant vrai pour tout i , G' est simplement connexe.

PROPOSITION 2. - Soient G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe et T un tore maximal de G . Pour toute racine α de G par rapport à T , soit Z_α le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G associé à la racine α . Les groupes Z_α sont alors tous isomorphes à $SL(K^2)$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines. Comme toute racine peut être transformée en l'une des α_i par une opération du groupe de Weyl, il suffit de faire la démonstration dans le cas où α est une racine fondamentale, soit $\alpha = \alpha_i$. Soit $\tilde{\omega}$ le poids dominant fondamental relatif à la racine α , et soit ρ une représentation linéaire simple de G de poids dominant $\tilde{\omega}$ (il en existe une puisque G est simplement connexe). La représentation ρ induit une représentation linéaire ρ^* de Z_α ; si T_α est le tore maximal de Z_α contenu dans T , la restriction $\tilde{\omega}^*$ de $\tilde{\omega}$ à T_α est un poids de ρ^* . Or, si w est la symétrie par rapport à α , on a $w(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} - \alpha$. Soit α^* la restriction de α à T_α , qui est l'une des racines de Z_α , et soit w^* la symétrie par rapport à cette racine, opérant dans $X(T_\alpha)$; on a $w^*(\tilde{\omega}^*) = \tilde{\omega}^* - \alpha^*$, mais aussi $w^*(\tilde{\omega}^*) = -\tilde{\omega}^*$; il en résulte que $\tilde{\omega}^* = (1/2)\alpha^*$. Puisque $(1/2)\alpha^*$ appartient à $X(T_\alpha)$, Z_α est isomorphe à $SL(K^2)$.

2. Isogénies attachées à un même isomorphisme spécial.

PROPOSITION 3. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' , f et f' des isogénies de G sur G' telles que $f(T) = f'(T) = T'$. Si les isomorphismes spéciaux de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(T)$ associés à f et f' sont identiques, on a $f' = f \circ g$, où g est

un automorphisme intérieur de G produit par un élément de T .

Faisant usage de la proposition 6, exp. 18, on voit qu'il y a une isogénie g de G sur lui-même qui applique T sur lui-même, et qui possède les propriétés suivantes : on a $f' = f \circ g$, et l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q}_\lambda \otimes X(T)$ sur lui-même attaché à h est l'automorphisme identique ; de plus, g est un automorphisme de G . Il est clair que g coïncide avec l'identité sur T . Il en résulte que h est un automorphisme intérieur produit par un élément de T (cf. la démonstration de la proposition 1, exp. 17).

PROPOSITION 4. - Les notations étant celles de la proposition 3, soit de plus $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T ; pour chaque i , soient Z_i le sous-groupe presque simple de G associé à α_i , T_i le tore maximal de Z_i contenu dans T et s_i un élément du normalisateur de T_i dans Z_i n'appartenant pas à T_i . Supposons que G et G' soient simplement connexes, que les isomorphismes spéciaux associés à f et f' soient identiques et que $f'(s_i) = f(s_i)$ pour tout i . On a alors $f' = f$.

Comme $Z_1, \dots, Z_n$ engendrent G , il suffit de montrer que, pour tout i , les restrictions f_i et f'_i de f et f' à Z_i sont égales. Comme $f' = f \circ h$, où h est un automorphisme intérieur de G produit par un élément de T , d'où $h(Z_i) = Z_i$ pour tout i , on a $f_i(Z_i) = f'_i(Z_i)$. Soit $T'_i = f_i(T_i) = f'_i(T_i)$; comme f_i et f'_i coïncident sur T_i , les isomorphismes spéciaux de $\mathbb{Q}_\lambda \otimes X(T'_i)$ sur $\mathbb{Q}_\lambda \otimes X(T_i)$ associés à f_i et f'_i sont identiques ; il en résulte que $f'_i = f_i \circ h_i$, où h_i est un automorphisme intérieur de Z_i produit par un élément t_i de T_i . Par ailleurs, f_i est bijective. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le centre de Z_i serait d'ordre 2, de sorte que la caractéristique de K serait $\neq 2$, et $Z'_i = f_i(Z_i)$ serait isomorphe à $PL(K^2)$; mais Z'_i est le sous-groupe de dimension 3 de G' associé à une racine de G' par rapport à T' et est par suite isomorphe à $SL(K^2)$ puisque G' est simplement connexe. L'égalité $f_i(s_i) = f'_i(s_i)$ entraîne donc $h_i(s_i) = s_i$. Il nous suffira de montrer que ceci entraîne que h_i est l'identité. Or on a $s_i^{-1} t_i s_i = t_i^{-1}$, d'où $s_i = t_i s_i t_i^{-1} = s_i t_i^{-2}$ et par suite $t_i^{-2} = e$ (l'élément neutre). Or, T_i est isomorphe au groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K . Si K est de caractéristique 2, la relation $t_i^2 = e$ entraîne $t_i = e$. Sinon, T_i n'a qu'un seul élément d'ordre 2, et cet élément appartient au centre de Z_i , car Z_i , étant isomorphe à $SL(K^2)$, a un centre d'ordre 2. Donc, dans tous les cas, t_i appartient au centre de Z_i , ce qui montre que h_i est l'identité.

PROPOSITION 5. - Soient G un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal de G , $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T . Pour chaque i , soit Z_i le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G associé à α_i , T_i le tore maximal de Z_i contenu dans T et s_i, s'_i des éléments du normalisateur de T_i dans Z_i n'appartenant pas à T_i . Il existe alors un élément t de T tel que $ts_i t^{-1} = s'_i$ ($1 \leq i \leq n$).

On a $s'_i = t_i s_i$, où t_i est un élément de T_i . Observons maintenant que, pour tout $t \in T$, on a $tZ_i t^{-1} = Z_i$, $tT_i t^{-1} = T_i$; il en résulte que $ts_i t^{-1} s_i^{-1} \in T_i$. Soit f l'application

$$t \rightarrow (ts_1 t^{-1} s_1^{-1}, \dots, ts_n t^{-1} s_n^{-1})$$

de T dans $T_1 \times \dots \times T_n$. Comme T est commutatif, f est un homomorphisme. Montrons qu'il est de noyau fini. Soit t un élément de ce noyau. L'opération du groupe de Weyl qui correspond à s_i est la symétrie par rapport à α_i ; on a donc $\alpha_i(s_i t' s_i^{-1}) = (\alpha_i(t'))^{-1}$ pour tout $t' \in T$, d'où $\alpha_i(t) = \pm 1$ ($1 \leq i \leq n$) d'où notre assertion résulte immédiatement. On en conclut que

$$\dim f(T) = \dim T = n = \dim T_1 \times \dots \times T_n,$$

d'où $f(T) = T_1 \times \dots \times T_n$, ce qui démontre la proposition 5.

3. Énoncé du théorème. Notations.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' et φ un isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Il existe alors une isogénie f de G sur G' telle que φ soit l'isomorphisme spécial attaché à f .

Nous utiliserons les notations suivantes. Pour chaque racine α de G par rapport à T , nous désignerons par γ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à α et par Z_α le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G associé à α ; si α' est la racine de G' telle que $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, $q(\alpha)$ étant une puissance de l'exposant caractéristique de K , nous désignerons par $\gamma'_{\alpha'}$ un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G' associé à α' et par $Z'_{\alpha'}$ le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G' associé à α' . Si α et β sont des racines de G , nous désignerons par $Z_{\alpha\beta}$ le sous-groupe radiciel de G

défini par l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de α et β et par $Z'_{\alpha\beta}$ le sous-groupe radiciel de G' défini par l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de α' , β' ; $Z_{\alpha\beta}$ et $Z'_{\alpha\beta}$ sont donc des groupes semi-simples de rang 1 ou 2. Nous désignerons par T_α (resp. T'_α , $T_{\alpha\beta}$, $T'_{\alpha\beta}$) le tore maximal de Z_α (resp. Z'_α , $Z_{\alpha\beta}$, $Z'_{\alpha\beta}$) contenu dans T (resp. T' , T , T'). Nous désignerons par $\mathcal{N}(T)$ et $\mathcal{N}(T')$ les normalisateurs de T et T' ; pour toute racine α , nous désignerons par s_α (resp. s'_α) un élément de $\mathcal{N}(T) \cap Z_\alpha$ (resp. $\mathcal{N}(T') \cap Z'_\alpha$) non contenu dans T (resp. T'). Nous désignerons par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G ; pour chaque i , nous désignerons par α'_i la racine de G' telle que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K ; $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ forment donc un système fondamental de racines de G' . Si $\alpha = \alpha_i$, nous écrirons $\tau_i, Z_i, T_i, s_i, \tau'_i, Z'_i, T'_i, s'_i$ au lieu de $\tau_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha, s_\alpha, \tau'_\alpha, Z'_\alpha, T'_\alpha, s'_\alpha$. Si $\alpha = \alpha_i, \beta = \alpha_j$, nous écrirons $T_{ij}, Z_{ij}, T'_{ij}, Z'_{ij}$ au lieu de $T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}, T'_{\alpha\beta}, Z'_{\alpha\beta}$.

Il est clair qu'il existe un homomorphisme f_T de T sur T' tel que $\chi'(f_T(t)) = (\varphi(\chi))(t)$ pour tout $t \in T$ et tout caractère rationnel χ' de T' ; si φ est attaché à une isogénie f de G sur G' , f prolonge f_T . Si α, β sont des racines, f_T applique $T_{\alpha\beta}$ sur $T'_{\alpha\beta}$.

PROPOSITION 6. - Si φ est attaché à une isogénie f de G sur G' , φ est aussi attaché à une isogénie f' de G sur G' telle que l'on ait $f'(s_i) = s'_i$ ($1 \leq i \leq n$).

On a évidemment $f(Z_{\alpha\beta}) = Z'_{\alpha\beta}$, $f(\mathcal{N}(T)) \subset \mathcal{N}(T')$; $f(s_\alpha)$ est donc un élément de $Z'_\alpha \cap \mathcal{N}(T')$. Comme on a $s_\alpha t s_\alpha^{-1} = t^{-1}$ pour tout $t \in T'_\alpha$, on a $f(s_\alpha) t' f(s_\alpha^{-1}) = t'^{-1}$ pour tout $t' \in T'_\alpha$. Il résulte de là qu'on a

$$f(s_i) = t'_i s'_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

avec des $t'_i \in T'_i$. Il y a un automorphisme intérieur h' de G' , produit par un élément de T' , qui transforme $f(s_i)$ en s'_i ($1 \leq i \leq n$) (proposition 5); posons $f' = h' \circ f$. L'application f' est encore une isogénie de G sur G' ; comme h' laisse fixes les éléments de T' , on a $f'(T) = T'$ et l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ attaché à f' est encore φ , ce qui démontre la proposition 6.

Soient α et β des racines de G ; la restriction de f_T à $T_{\alpha\beta}$ est une isogénie de ce groupe sur $T'_{\alpha\beta}$; elle définit un isomorphisme $\varphi_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(T'_{\alpha\beta})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_{\alpha\beta})$ qui applique $X(T'_{\alpha\beta})$ sur un sous-groupe de $X(T_{\alpha\beta})$. Considérant $T_{\alpha\beta}$ et $T'_{\alpha\beta}$ comme des tores maximaux des groupes $Z_{\alpha\beta}$ et $Z'_{\alpha\beta}$, montrons que $\varphi_{\alpha\beta}$ est spécial. Les racines de $Z'_{\alpha\beta}$ sont les restrictions à $T'_{\alpha\beta}$ de celles des racines de G' qui sont combinaisons linéaires rationnelles de α' et β' . Si γ' est l'une de ces racines, on a $\varphi(\gamma') = q(\gamma)\gamma$, où γ est une racine de G qui est combinaison linéaire rationnelle de α et β , et on obtient de cette manière toutes les racines de G qui sont combinaisons linéaires rationnelles de α et β ; de plus, il est clair que $\varphi_{\alpha\beta}$ applique la restriction de γ' à $T'_{\alpha\beta}$ sur le produit par $q(\gamma)$ de la restriction de γ à $T_{\alpha\beta}$; ceci établit bien que $\varphi_{\alpha\beta}$ est spécial. Or $Z_{\alpha\beta}$ est de rang 1 ou 2 ; s'il est de rang 1, il est de type A_1 ; s'il est de rang 2, il est de l'un des types A_2 , C_2 , G_2 ou $A_1 + A_1$. Faisant usage des théorèmes 1 (exposé 20), 2 (exposé 22), 3 (exposé 22) et 2 (exposé 21), on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 7. - La restriction de f_T à $T_{\alpha\beta}$ peut se prolonger en une isogénie de $Z_{\alpha\beta}$ sur $Z'_{\alpha\beta}$.

Démontrons maintenant la

PROPOSITION 8. - L'application f_T peut se prolonger en un épimorphisme de $\mathfrak{M}(T)$ sur $\mathfrak{M}(T')$ qui applique s_i sur s'_i ($1 \leq i \leq n$).

Désignons par W le groupe de Weyl de G et par w_i la symétrie par rapport à α_i . Introduisons un groupe libre W^* à n générateurs w_i^* ($1 \leq i \leq n$) ; il y a un homomorphisme a^* de W^* dans le groupe des automorphismes de T qui associe à tout w_i^* l'automorphisme $t \rightarrow s_i t s_i^{-1}$ de T ; formons le produit semi-direct $\mathfrak{M}^*(T)$ de T et W^* relativement aux opérateurs $a^*(w^*)$; nous considérerons T comme un sous-groupe distingué de ce groupe. Il est clair qu'il y a un homomorphisme u^* de $\mathfrak{M}^*(T)$ dans $\mathfrak{M}(T)$ qui coïncide avec l'identité sur T et qui applique w_i^* sur s_i ($1 \leq i \leq n$). Déterminons le noyau U^* de u^* . Si i et j sont des indices entre 1 et n , soit $m(i, j)$ l'ordre de l'élément $w_i w_j$ de W ; posons $(s_i s_j)^{m(i, j)} = t_{ij} \in T$. Il est clair que U^* contient le plus petit sous-groupe distingué U_0^* de $\mathfrak{M}^*(T)$ qui contienne les éléments

$$z_{ij}^* = t_{ij}^{-1} (w_i^* w_j^*)^{m(i, j)}.$$

Nous allons montrer que l'on a $U_0^* = U^*$. L'homomorphisme u^* définit par passage

aux quotients un homomorphisme u_0^* de $\mathfrak{N}^*(T)/U_0^*$ dans $\mathfrak{N}(T)$ dont il suffira de montrer que c'est un monomorphisme. Il est clair que u_0^* induit un isomorphisme de TU_0^*/U_0^* sur T ; il suffira donc de montrer que l'homomorphisme u_1^* de $\mathfrak{N}^*(T)/TU_0^*$ dans $\mathfrak{N}(T)/T$ déduit de u_0^* par passage aux quotients est un monomorphisme. Or $\mathfrak{N}^*(T)/T$ est canoniquement isomorphe à W^* et le groupe qui correspond à TU_0^*/T dans cet isomorphisme est le plus petit sous-groupe distingué de W^* contenant les $(w_i^* w_j^*)^{m(i,j)}$. On sait que ce groupe n'est autre que le noyau de l'homomorphisme de W^* sur W qui applique w_i^* sur w_i ($1 \leq i \leq n$) (exposé 14, théorème 1). On en conclut que l'ordre de $\mathfrak{N}^*(T)/TU_0^*$ est égal à celui de W , donc à celui de $\mathfrak{N}(T)/T$. Par ailleurs, $u_1^*(\mathfrak{N}^*(T)/TU_0^*)$ contient les classes des s_i modulo T et est par suite $\mathfrak{N}(T)/T$ tout entier, ce qui montre bien que u_1^* est un monomorphisme, et même que u_0^* est un isomorphisme de $\mathfrak{N}^*(T)/U_0^*$ sur $\mathfrak{N}(T)/T$.

Ceci étant, montrons que f_T se prolonge en un homomorphisme f^* de $\mathfrak{N}^*(T)$ dans $\mathfrak{N}(T')$ qui applique w_i^* sur s_i' ($1 \leq i \leq n$). Il suffit pour cela de montrer que l'on a $s_i' f_T(t) s_i'^{-1} = f_T(s_i t s_i^{-1})$ si $t \in T$. Or, désignons par χ' un caractère rationnel quelconque de T' et par w_i' la symétrie par rapport à α_i' ; on a

$$\chi'(s_i' f_T(t) s_i'^{-1}) = (w_i'(\chi'))(f_T(t)) = (\varphi(w_i'(\chi')))(t) ;$$

mais on sait que l'on a $\varphi \circ w_i' = w_i \circ \varphi$ (exposé 18, proposition 4) ; la formule à démontrer résulte immédiatement de là.

Montrons maintenant que U^* est contenu dans le noyau de f^* . Il suffit de montrer que, si i et j sont des indices entre 1 et n , z_{ij}^* appartient au noyau de f^* . Or la restriction de f_T à T_{ij} peut se prolonger en une isogénie f_{ij} de Z_{ij} sur Z_{ij}' (proposition 7), et on peut même supposer en vertu de la proposition 6 que $f_{ij}(s_i) = s_i'$, $f_{ij}(s_j) = s_j'$. Il en résulte que l'on a

$$f_T(t_{ij}) = (s_i' s_j')^{m(i,j)} ,$$

d'où il résulte immédiatement que l'on a $f^*(z_{ij}^*) = 1$. Il résulte de là que f^* définit par passage aux quotients un homomorphisme $f_{\mathfrak{N}}(T)$ de $\mathfrak{N}(T)$ dans $\mathfrak{N}(T')$ qui prolonge f_T et applique s_i sur s_i' ($1 \leq i \leq n$). Cet homomorphisme est un épimorphisme car $\mathfrak{N}(T')$ est engendré par T' et par les s_i' .

Nous désignerons dans ce qui suit par $f_{\mathfrak{N}(T)}$ l'homomorphisme (évidemment unique) de $\mathfrak{N}(T)$ sur $\mathfrak{N}(T')$ qui prolonge f_T et applique s_i sur s'_i ($1 \leq i \leq n$). Soient s un élément quelconque de $\mathfrak{N}(T)$ et w l'opération correspondante du groupe de Weyl ; posons $f_{\mathfrak{N}(T)}(s) = s'$ et soit w' l'opération du groupe de Weyl de G' définie par s' ; w et w' sont alors liés par la relation $\varphi \circ w' = w \circ \varphi$. Soit en effet χ' un caractère rationnel de T' . On a, pour $t \in T$, $\chi'(f_{\mathfrak{N}(T)}(s^{-1}ts)) = (\varphi(\chi'))(s^{-1}ts) = ((w \circ \varphi)(\chi'))(t)$; mais le premier membre est aussi égal à $\chi'(s'^{-1}f_T(t)s')$, donc à

$$(w'(\chi'))(f_T(t)) = ((\varphi \circ w')(\chi'))(t),$$

ce qui démontre notre assertion.

Montrons que l'on a $f(s_\alpha) \in Z'_\alpha$ pour toute racine α . Il y a une racine fondamentale α_i et une opération w du groupe de Weyl telles que $\alpha = w.\alpha_i$; soit s un élément de $\mathfrak{N}(T)$ qui produise l'opération w . Il est clair que l'on a alors $sZ_i s^{-1} = Z_\alpha$, de sorte que l'on peut écrire $s_\alpha = s\bar{s}_i s^{-1}$, où $\bar{s}_i$ est un élément de Z_i qui ne diffère de s_i que par un élément de T_i . Il en résulte que l'on a $f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha) = s'f_{\mathfrak{N}(T)}(\bar{s}_i)s'^{-1}$, en posant $s' = f_{\mathfrak{N}(T)}(s)$. Si w' est l'opération du groupe de Weyl de G' qui correspond à s' , il résulte de la relation $f_{\mathfrak{N}(T)}(\bar{s}_i) \in T'_i s'_i \subset Z'_i$ que $f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha)$ appartient au groupe $Z'_{\beta'}$ avec $\beta' = w'(\alpha'_i)$. Or on a

$$\varphi(\beta') = w(\varphi(\alpha'_i)) = q(\alpha'_i) w(\alpha'_i) = q(\alpha'_i)\alpha,$$

ce qui montre bien que β' n'est autre que la racine α' de G' qui correspond à α . Nous pouvons donc supposer les s'_α choisis de telle manière que l'on ait

$$f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha) = s'_\alpha$$

pour tout α ; c'est ce que nous ferons désormais.

PROPOSITION 9. - Soient G^* un groupe abstrait et h un homomorphisme de G^* dans G ; supposons les conditions suivantes satisfaites :

1° G^* contient un sous-groupe $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que h induise une bijection de ce groupe sur $\mathfrak{N}(T)$; si α est une racine de G , on désigne par s_α^* l'élément de $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que $h(s_\alpha^*) = s_\alpha$; on désigne par T_α^* le sous-groupe de $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que $h(T_\alpha^*) = T_\alpha$; si α, β sont des racines, on désigne par $T_{\alpha\beta}^*$ le sous-groupe de $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que $h(T_{\alpha\beta}^*) = T_{\alpha\beta}$;

- 2° pour chaque racine α , G^* contient un sous-groupe Z_α^* tel que h induise une bijection de Z_α^* sur Z_α et que $T_\alpha^* \subset Z_\alpha^*$, $s_\alpha^* \in Z_\alpha^*$;
- 3° si α et β sont des racines de G , G^* contient un sous-groupe $Z_{\alpha\beta}^*$ tel que h induise une bijection de $Z_{\alpha\beta}^*$ sur $Z_{\alpha\beta}$ et que l'on ait $Z_\gamma^* \subset Z_{\alpha\beta}^*$ pour toute combinaison linéaire rationnelle γ de α et β qui est une racine;
- 4° G^* est engendré par les Z_α^* pour toutes les racines α . L'homomorphisme h est alors un isomorphisme.

Nous choisirons un groupe de Borel B de G contenant T . Rappelons que, si $\Gamma(T)$ est le groupe des groupes à un paramètre de T , l'espace vectoriel $Q \otimes \Gamma(T)$ est en dualité avec $Q \otimes X(T)$. Nous choisirons un élément λ de la chambre de Weyl C qui correspond à B tel que les valeurs prises en λ par deux racines distinctes soient toujours distinctes. Nous désignerons par $\delta_1, \dots, \delta_N$ les racines qui sont négatives sur C arrangées dans un ordre tel que l'on ait $\delta_1(\lambda) < \delta_2(\lambda) < \dots < \delta_N(\lambda)$; les $\delta_i(\lambda)$ étant < 0 , on voit que, si δ_k est combinaison linéaire à coefficients entiers > 0 de δ_i et δ_j , on a $k < \min(i, j)$. Soit B^u le groupe des éléments unipotents de B ; si $1 \leq i \leq N$, $B^u \cap Z_{\delta_i}$ est un groupe P_i isomorphe à K ; nous désignerons par P_i^* le sous-groupe de $Z_{\delta_i}^*$ tel que $h(P_i^*) = P_i$. Si $1 \leq k \leq N$, nous désignerons par B_k^u l'ensemble $P_1 \dots P_k$ (i.e. l'ensemble des $u_1 \dots u_k$, $u_i \in P_i$) et par B_k^{*u} l'ensemble $P_1^* \dots P_k^*$. Il résulte du corollaire au lemme 1, exposé 17, que les B_k sont des sous-groupes de B . Montrons que ce sont des sous-groupes distingués de B . Comme chaque P_i est transformé en lui-même par les automorphismes intérieurs produits par les éléments de T , il suffira de montrer que, si $u \in P_i$, i étant un indice quelconque entre 1 et N , on a

$$u B_k^u u^{-1} = B_k^u ;$$

or il résulte encore du corollaire au lemme 1, exposé 17 que $B_k^u P_i$ est un sous-groupe de B^u , puis du lemme 1, b., exposé 13, que B_k^u est un sous-groupe distingué de $B_k^u P_i$. Montrons maintenant que B_k^{*u} est un sous-groupe distingué du groupe B^{*u} engendré par les P_i^* . Nous procédons par récurrence sur k ; désignant par B_0^{*u} le groupe réduit à son élément neutre, supposons que $k > 0$ et que notre assertion soit vraie pour $k-1$. Il résulte immédiatement de l'hypothèse inductive que B_k^{*u} est un groupe; pour montrer qu'il est distingué, il suffira de montrer que, si $i > k$, $u^* \in P_i^*$, on a

$$u^* P_k^* u^{*-1} \subset B_k^{*u} .$$

Nous utiliserons pour cela le groupe $Z_{\delta_i \delta_k}^*$. Posons $u = h(u^*)$; soit v^* un élément de P_k^* et soit $v = h(v^*)$. L'élément uvu^{-1} est dans le groupe engendré par les P_j pour les $j \geq k$ tels que δ_j soit combinaison linéaire à coefficients entiers ≥ 0 de δ_i et δ_k , le coefficient de δ_k étant $\neq 0$. Les groupes P_j^* correspondants sont dans $Z_{\delta_i \delta_k}^*$; comme h induit un isomorphisme de $Z_{\delta_i \delta_k}^*$ sur $Z_{\delta_i \delta_k}$, $u^* v^* u^{*-1}$ est dans le groupe engendré par les P_j^* pour les j possédant les propriétés indiquées, donc est dans B_k^{*u} , ce qui montre que B_k^{*u} est distingué. On conclut de là que $B^{*u} = B_N^{*u}$. Comme un élément de B^u ne se met que d'une seule manière sous la forme $u_1 \dots u_N$, avec $u_i \in P_i$ ($1 \leq i \leq N$), on voit que h induit un isomorphisme de B^{*u} sur B^* .

Nous désignerons par T^* le sous-groupe de $\mathcal{N}^*(T)$ tel que $h(T^*) = T$. Ce groupe est engendré par les T_α^* pour toutes les racines $\alpha = \delta_i$. Si $\alpha = \delta_i$ et si β est une racine quelconque, l'existence de l'isomorphisme induit par h de $Z_{\alpha\beta}^*$ sur $Z_{\alpha\beta}$ montre que le normalisateur de P_i^* contient T_β^* ; ceci étant vrai pour toute racine β , on voit que le normalisateur de P_i^* contient T^* . Ceci étant vrai pour tout i , le normalisateur de B^{*u} contient T^* . On en conclut que $B^* = B^{*u} T^*$ est un sous-groupe de G^* ; comme B est produit semi-direct de B^u et T , h induit un isomorphisme de B^* sur B .

Pour chaque opération w du groupe de Weyl W de G , nous choisirons un élément $s(w)$ de $\mathcal{N}(T)$ dont la classe modulo T soit w (en identifiant W à $\mathcal{N}(T)/T$) ; nous désignerons par $s^*(w)$ l'élément de $\mathcal{N}^*(T)$ tel que $h(s^*(w)) = s(w)$; on peut supposer que $s(w) = s_\alpha$, $s^*(w) = s_\alpha^*$ si w est la symétrie w_α par rapport à une racine α . Nous supposerons de plus que B est le groupe de Borel qui correspond au système fondamental $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Pour toute racine α , nous désignerons par P_α le sous-groupe unipotent de G associé à la racine α ; on a donc $P_\alpha = P_i$ si $\alpha = \delta_i$, $P_\alpha \subset Z_\alpha = Z_{-\alpha}$; nous désignerons par P_α^* le sous-groupe de Z_α^* tel que $h(P_\alpha^*) = P_\alpha$. Montrons que l'on a $s^*(w) P_\alpha^* (s^*(w))^{-1} = P_{w(\alpha)}^*$. Il suffit évidemment de le montrer quand w est la symétrie par rapport à une racine β (car, pour toute racine α , le normalisateur de P_α^* contient T^*). Or, dans ce cas, $s^*(w)$ et P_α^* sont dans $Z_{\alpha\beta}^*$ et l'assertion résulte de ce que h induit un isomorphisme de $Z_{\alpha\beta}^*$ sur $Z_{\alpha\beta}$.

Si $w \in W$, nous désignerons par B_w^u (resp. B_w^{*u}) le groupe engendré par les P_i pour lesquels $w^{-1}(\delta_i)$ est la forme $-\delta_j$ (resp. δ_j) ; on sait que

$B^u = B_W^u B_W'^u$ (exposé 13). Nous désignerons par B_W^{*u} et $B_W'^{*u}$ les sous-groupes de B^{*u} qui sont appliqués sur B_W^u et $B_W'^u$ par h ; on a donc $B^{*u} = B_W^{*u} B_W'^{*u}$. Si $w^{-1}(\delta_i) = \delta_j$, on a $P_i^* s^*(w) = s^*(w) P_j^*$; il en résulte que l'on a

$$B^* s^*(w) B^* = B_W^{*u} s^*(w) B^* .$$

Si α est une racine fondamentale, le groupe $B_W'^{*u}$ est engendré par les P_i^* pour tous les i tels que $\delta_i \neq \alpha$; nous le désignerons par D_α^* . Si $w(\alpha)$ est la symétrie par rapport à α , $w(\alpha)$ permute entre elles les racines δ_i qui sont $\neq \alpha$; il en résulte que s_α^* appartient au normalisateur de D_α^* . Soit $i(\alpha)$ l'indice tel que $\alpha = \delta_{i(\alpha)}$; le groupe $h(D_\alpha^*)$ est un sous-groupe distingué de B , d'où il résulte que D_α^* est un sous-groupe distingué de B^* . Le normalisateur de D_α^* contient donc $P_{i(\alpha)}^*$ et T_α^* ; contenant aussi S_α^* , il contient les groupes $P_{i(\alpha)}^*$, T^* et le transformé de $P_{i(\alpha)}^*$ par s_α^* , groupes qui engendrent le groupe Z_α^* (en vertu du fait que h induit un isomorphisme de Z_α^* sur Z_α). Désignons par G_O^* la réunion des ensembles $B^* s^*(w) B^* = B_W^{*u} s^*(w) B^*$ pour tous les $w \in W$. Nous allons montrer que l'on a $Z_\alpha^* G_O^* \subset G_O^*$ pour toute racine fondamentale α . Il suffit de montrer que l'on a $Z_\alpha^* B^* s^*(w) B^* \subset G_O^*$. Comme $B^* = D^* P_{i(\alpha)}^* T^*$, et comme Z_α^* est contenu dans le normalisateur de D_α^* et contient $P_{i(\alpha)}^*$, il suffit de montrer que l'on a $Z_\alpha^* T^* s^*(w) B^* \subset G_O^*$, ou encore que $Z_\alpha^* s^*(w) \subset G_O^*$ puisque le normalisateur de Z_α^* contient T^* . On a $Z_\alpha^* = Z_\alpha^* s_\alpha^*$ et $s_\alpha^* s^*(w) = \theta^* s^*(w(\alpha)w)$, où θ^* est un élément de T_α^* ; on en conclut que l'on peut se ramener au cas où $w^{-1}(\alpha)$ est l'une des δ_i , c'est-à-dire où $P_{i(\alpha)}^* s^*(w) \subset s^*(w) B^*$; supposons donc qu'il en soit ainsi. Le groupe Z_α^* est la réunion des ensembles $P_{i(\alpha)}^* T_\alpha^*$ et $P_{i(\alpha)}^* s_\alpha^* T_\alpha^* P_{i(\alpha)}^*$ (corollaire 1 au théorème 3, exposé 13) ; Z_α^* est donc la réunion de $P_{i(\alpha)}^* T_\alpha^*$ et de $P_{i(\alpha)}^* s_\alpha^* T_\alpha^* P_{i(\alpha)}^*$. Comme $P_{i(\alpha)}^* s^*(w) \subset s^*(w) B^*$, $T^* s^*(w) = s^*(w) T^*$, il en résulte bien que $Z_\alpha^* s^*(w) \subset G_O^*$.

L'ensemble G_O^* contient donc les Z_α^* pour toutes les racines fondamentales α ; de plus, si w est une opération quelconque du groupe de Weyl, on a

$$(s^*(w) Z_\alpha^* (s^*(w))^{-1}) G_O^* \subset G_O^* .$$

Mais on a

$$s^*(w) Z_\alpha^* (s^*(w))^{-1} = Z_{w(\alpha)}^* .$$

Comme toute racine peut être transformée en une racine fondamentale par opération du groupe de Weyl, on voit que $Z_{\alpha}^* G_0^* \subset G_0^*$ pour toute racine α . Comme G^* est engendré par les Z_{α}^* , on a $G_0^* = G^*$.

Par ailleurs, on sait que les ensembles $h(B_W^{*u} s^*(w)B^*) = B_W^u s(w)B$ sont mutuellement disjoints et qu'un élément de $B_W^u s(w)B$ ne se met que d'une seule manière sous la forme $bs(w)b'$, avec $b \in B_W^u$, $b' \in B$. Il en résulte immédiatement que h est une bijection de $G^* = G_0^*$ sur G , ce qui démontre la proposition 9.

COROLLAIRE. - Soit f une application de G dans un groupe H . Supposons les conditions suivantes satisfaites : f induit un homomorphisme de $\mathfrak{N}(T)$ dans H ; pour tout couple (α, β) de racines de G , f induit un homomorphisme de $Z_{\alpha\beta}$ dans H . Alors f est un homomorphisme de G dans H .

Pour tout $s \in G$, soit $f^*(s)$ l'élément $(s, f(s))$ de $G \times H$; soit G^* le sous-groupe de $G \times H$ engendré par les ensembles $f^*(Z_{\alpha}) = Z_{\alpha}^*$ pour toutes les racines α ; la projection de $G \times H$ sur G induit un homomorphisme h de G^* dans G . Pour montrer que f est un homomorphisme, il suffit évidemment de montrer que h est un isomorphisme de G^* sur G . Or cela résulte immédiatement de la proposition 9.