Séminaire Claude Chevalley

M. Lazard

Racines

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A12_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57

Exposé n° 12

-:-:-:-

RACINES.

(Exposé de M. LAZARD, le 11.3.57)

1.- Groupes de Weyl d'ordre 2.

Dans tout ce n°, G désignera un groupe algébrique connexe dont le groupe de Weyl est d'ordre 2.

LEMME 1.- a) Si B est un groupe de Borel de G, $\Omega = G/B$ est isomorphe à une droite projective.

b) Il existe un épimorphisme rationnel de G sur le groupe projectif à 2 variables $PL(2,K)$ dont le noyau est l'intersection des groupes de Borel.

DÉMONSTRATION. Ω n'est pas réduit à un point, puisque G n'est pas résoluble ; $\dim \Omega \leqslant 1$ puisque le groupe de Weyl est d'ordre 2 (exposé 10, corollaire de la proposition 7) ; donc Ω est une courbe. Soit T un tore maximal de G. Il laisse invariants précisément 2 points de Ω, et il existe donc un tore de dim 1, $Q \subset T$, qui n'opère pas trivialement sur Ω. Si $x_1 \in \Omega$ n'est pas invariant par Q, l'ensemble Qx_1 des points sx_1 $(s \in Q)$ est épais et non réduit à un point, donc ouvert dans la courbe Ω. Le corps $K(\Omega)$ des fonctions rationnelles sur Ω coïncide avec celui des fonctions sur Qx_1, qui est un sous-corps du corps des fonctions rationnelles sur Q. D'après le théorème de Lüroth (v. d. Waerden, Moderne Algebra, 2ème éd. paragraphe 63) le corps des fonctions rationnelles sur Ω est donc une extension transcendante pure de K. Comme Ω est une courbe complète et sans singularités, il en résulte que Ω est une droite projective.

Notons x_0 et x_∞ les 2 points de Ω invariants par T, et ζ la fonction rationnelle sur Ω, bien déterminée par les conditions d'avoir un seul zéro simple en x_0, un seul pôle simple en x_∞, et d'être égale à 1 en x_1. Pour $g \in G$, $x \in \Omega$, posons $(g\zeta)(x) = \zeta(g^{-1}x)$. Alors la fonction $g\zeta$ est de la forme $(a\zeta+b)(c\zeta+d)^{-1}$, avec $a,b,c,d \in K$. Plus précisément, si l'on note $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le "birapport" des 4 quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{K}$

$(\bar{K} = K \cup \{\infty\})$, i.e. la quantité $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\ (\alpha-\delta)^{-1}(\beta-\gamma)^{-1}$, on a

$$g\zeta = (\zeta\,,\ \zeta(gx_1)\ ,\ \zeta(gx_o)\ ,\ \zeta(gx_\infty))\ ,$$

d'après l'invariance du "birapport" par les transformations homographiques. Comme $g \longrightarrow \zeta(gx)$ est une fonction rationnelle sur G pour tout $x \in \Omega$, l'homomorphisme $g \longrightarrow (\zeta \longrightarrow g\zeta)$ est un homomorphisme rationnel de G dans $PL(2,K)$.

Soient B_o et B_∞ les deux groupes de Borel de G contenant T , qui sont les stabilisateurs respectifs de x_o et de x_∞ . Pour $s \in B_\infty$, on a : $s\zeta = a(s)\zeta + b(s)$. L'application $s \to a(s)$ est un homomorphisme rationnel de B_∞ dans K^* dont le noyau contient B^u_∞ (partie unipotente de B_∞) mais non T . En effet $b(t) = 0$ pour tout $t \in T$, et T n'opère pas trivialement sur Ω . La restriction de a à T est donc un épimorphisme de T sur K^* . De même, la restriction de b à B^u_∞ est un épimorphisme de B^u_∞ sur le groupe additif K . En effet, cette restriction est un homomorphisme, et si ce n'était pas un épimorphisme $b(B^u_\infty)$ serait un sous-groupe fermé connexe de K distinct de K , dont réduit à 0 , et $B_\infty = B^u_\infty T$ laisserait x_o invariant, ce qui est impossible.

Pour tous $\alpha \in K^*$, $\beta \in K$, on peut donc trouver $t \in T$ et $s \in B^u_\infty$ tels que $a(t) = \alpha$, $b(s) = \beta$, d'où $(ts)\zeta = \alpha\zeta + \beta$. Autrement dit les opérations de B_∞ sur Ω sont tous les automorphismes algébriques qui laissent invariant x_∞ . Le même raisonnement s'applique à B_o et x_o . Comme tout automorphisme de Ω est le produit de 2 automorphismes laissant fixes respectivement x_o et x_∞ , les opérations de G sur Ω sont tous les automorphismes rationnels de Ω , autrement dit, $G \longrightarrow PL(2,K)$ est un épimorphisme rationnel.

<u>LEMME 2.- Soient</u> R <u>le radical de</u> G , R' <u>l'intersection de ses groupes de Borel,</u> T <u>un tore maximal contenu dans un groupe de Borel,</u> B, B^u, R^u, R'^u <u>les parties unipotentes de</u> B, R, R' <u>respectivement. Alors :</u>

a) $R = R'^u$ <u>est un sous-groupe fermé distingué de</u> B^u . <u>Le quotient</u> B^u/R^u <u>est isomorphe au groupe additif</u> K .

b) <u>Soit</u> f <u>un épimorphisme de</u> B^u <u>sur</u> K <u>qui, par passage au quotient, définit un isomorphisme de</u> B^u/R^u <u>sur</u> K . <u>Pour tous</u> $t \in T$, $s \in B^u$, <u>on a</u> $f(tst^{-1}) = \alpha(t)f(s)$, <u>où</u> α <u>est un caractère de</u> T <u>indépendant du choix de</u> f <u>dont le noyau est</u> $T \cap R'$.

DÉMONSTRATION. Reprenons les notations de la démonstration précédente avec $B = B_\infty$. Le radical R est par définition (exposé 9, déf. 2) la composante connexe de R'. Comme $R' \subset B$, $R'^u = B^u \cap R'$ est un sous-groupe distingué fermé de G et R^u est sa composante connexe. Le quotient R'^u/R^u est un p-groupe fini.

Nous avons introduit un épimorphisme b de B^u sur K dont le noyau est R'^u. Il en résulte que B^u/R'^u est un groupe connexe unipotent de dim 1, donc isomorphe à K (exposé 7, théorème 4) ; il en est de même de B^u/R^u, extension de B^u/R'^u par le groupe fini R'^u/R^u. Rappelons que tout endomorphisme algébrique du groupe additif K est de la forme $k \to P(k)$, où $P(X)$ est un p-polynôme (i.e. un polynôme de la forme $\sum_i c_i X^{p^i}$, $c_i \in K$). Tout automorphisme de K est de la forme $k \to ck$, avec $c \in K^*$ (exposé 9, lemme 1). Si f est un épimorphisme comme dans l'énoncé, f est donc défini à un facteur constant non nul près. De plus, l'épimorphisme b de B^u sur K de noyau R'^u peut s'écrire $P \circ f$, où $P(X)$ est un p-polynôme non nul.

L'automorphisme intérieur associé à un élément $t \in T$ laisse globalement invariants B^u et R^u. Donc $s \to f(tst^{-1})$ définit un isomorphisme de B^u/R^u sur K, d'où $f(tst^{-1}) = \alpha(t)f(s)$, $\alpha(t) \in K^*$ et α est évidemment un caractère de T indépendant du choix de f.

D'autre part, nous avons avec la définition précédente de l'homomorphisme a : $b(tst^{-1}) = a(t^{-1})b(s)$ pour $t \in T$, $s \in B^u$. Si $b(s) = \sum_i c_i f(s)^{p^i}$, nous avons : $b(tst^{-1}) = \sum_i c_i \alpha(t)^{p^i} f(s)^{p^i} = \sum_i c_i a(t^{-1}) f(s)^{p^i}$.
Il en résulte que $c_i = 0$ sauf pour une valeur j de l'indice i. Par conséquent f et b annullent les mêmes éléments de B^u, i.e. $R'^u = R^u$. D'autre part $\alpha(t)^{p^j} = a(t^{-1})$; donc le noyau de α coïncide avec celui de la restriction de a à T, i.e. $T \cap R'$.

REMARQUE. Nous avons considéré l'espace homogène $\Omega = G/B$; mais nous aurions pu considérer l'image de Ω par une application rationnelle bijective sans rien changer aux démonstrations.

2.- Racines d'un groupe algébrique.

Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal. Les racines de G associées à T sont des caractères de T dont les noyaux connexes sont les tores singuliers de codim 1, où encore des formes linéaires sur $\Gamma(T)$ ortho-

gonales aux hyperplans limitrophes des chambres de Weyl. A chaque hyperplan limitrophe correspondent deux racines opposées.

Explicitons d'abord un résultat contenu dans la proposition 1 de l'exposé 10.

LEMME 3.- Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal, Q un sous-tore de T, Z le centralisateur de Q. Alors les groupes de Borel de Z contenant T sont les intersections avec Z des groupes de Borel de G contenant T.

En particulier, si Q est semi-régulier, son centralisateur est contenu dans tout groupe de Borel de G contenant T.

Soit maintenant Q un tore singulier de codim 1. Nous avons vu (exposé 11, théorème 2) que le groupe de Weyl du centralisateur Z de Q est d'ordre 2 ; les éléments du normalisateur de T dans Z induisent (par automorphismes intérieurs) l'identité ou la symétrie par rapport à Q. Les groupes de Borel de G contenant T découpent sur Z l'un ou l'autre de ses deux groupes de Borel. Les résultats du n° précédent justifient la définition suivante.

DÉFINITION 1.- Soient G un groupe algébrique connexe non résoluble, T un tore maximal, $Q \subset T$ un tore singulier de codim 1, $B \supset T$ un groupe de Borel, B^u sa partie unipotente, Z le centralisateur de Q, R le radical de Z. Si l'on identifie $B^u \cap Z/B^u \cap R$ au groupe additif K, l'automorphisme de $B^u \cap Z/B^u \cap R$ défini par restriction et passage au quotient à partir de l'automorphisme intérieur associé à un élément $t \in T$ s'identifie à la multiplication par $\alpha(t) \in K^*$. Le caractère α de T sera dit racine associée à T, Q et B (ou encore à T, Q et au groupe de Borel $A = B \cap Z$ de Z).

Comme Q est dans le centre de Z, il est contenu dans le noyau de α ; par ailleurs, on a vu que α n'est pas une constante ; comme Q est de codim 1, c'est la composante connexe de l'élément neutre dans le noyau de α.

PROPOSITION 1.- Soient, avec les notations précédentes, τ un élément du normalisateur de T dans G, w_τ l'élément du groupe de Weyl défini par τ, α la racine associée à T, Q, A. Alors la racine $w_\tau \alpha$ associée à T, $\tau Q \tau^{-1}$, $\tau A \tau^{-1}$ est la fonction $t \to (w_\tau \alpha)(t) = \alpha(\tau^{-1} t \tau)$.

DÉMONSTRATION. Si $f : A^u \to K$ définit un isomorphisme de $A^u/A^u \cap R$ sur K, la fonction $s \to f(\tau^{-1} s \tau)$ définit un isomorphisme de

$\tau A^u \tau^{-1}/(\tau A^u \tau^{-1}) \cap (\tau R \tau^{-1})$ sur K. On obtient alors, pour $t \in T$ et $s \in \tau A^u \tau^{-1}$: $f(\tau^{-1}(tst^{-1})\tau) = f((\tau^{-1}t\tau)(\tau^{-1}s\tau)(\tau^{-1}t^{-1}\tau)) =$
$= \alpha(\tau^{-1}t\tau)f(\tau^{-1}s\tau)$.

COROLLAIRE. Les racines associées aux 2 groupes de Borel de Z contenant T sont inverses l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\tau \notin Z$ et que τ appartienne au normalisateur de T, mais non à son centralisateur. Alors $\tau A \tau^{-1}$ est le groupe de Borel de Z distinct de A qui contient T. Comme $\tau^{-1}t\tau t \in Q$ pour $t \in T$ (exposé 11, théorème 2) et que Q est contenu dans le noyau de α (car contenu dans le centre de Z, cf. lemme 2,b) on obtient $w_\tau \alpha = \alpha^{-1}$.

PROPOSITION 2.- Avec les notations de la définition 1, la racine α considérée comme forme linéaire sur $\Gamma(T)$ est négative sur la chambre de Weyl associée à B.

DÉMONSTRATION. Soit x_∞ le point de $\Omega = G/B$ invariant par B. Considérons $Zx_\infty = \Omega'$. Nous savons que Ω' est une sous-variété fermée de Ω (exposé 10, proposition 1) ; le groupe Z y opère transitivement, et, comme le stabilisateur de x_∞ dans Z est $A = Z \cap B$, groupe de Borel de Z, nous avons une application rationnelle bijective de Z/A sur Ω'. Nous pouvons alors appliquer les lemmes 1 et 2, compte tenu de la remarque qui les suit.

Ω' est donc une droite projective et contient un point $x_o \neq x_\infty$ invariant par T. Si ζ est une fonction rationnelle sur Ω' qui a un seul pôle simple en x_∞ et un seul zéro simple en x_o, nous avons pour $t \in T$ et $x \in \Omega'$, $\zeta(tx) = a(t^{-1})\zeta(x)$, avec $a(t^{-1}) = \alpha(t)^{p^j}$ pour un entier $j \geq 0$ (d'après la fin de la démonstration du lemme 2).

Soit $\gamma \in \Gamma(T)$. Alors, pour $x \in \Omega'$ et $\theta \in K^*$,
$\zeta(\gamma(\theta)x) = \alpha(\gamma(\theta))^{p^j}\zeta(x) = \theta^{p^j\langle\alpha,\gamma\rangle}\zeta(x)$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} \gamma(0)x = x_\infty & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle < 0 \text{ et } x \in \Omega' - x_o \\ \gamma(0)x = x_o & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle > 0 \text{ et } x \in \Omega' - x_\infty \\ \gamma(0)x = x & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle = 0 \text{ et } x \in \Omega'. \end{cases}$$

Or si x est dans la chambre associée à B, $\gamma(0)x = x_\infty$ pour $x \notin U$, U étant un ouvert non vide de Ω. Comme $x_\infty \in \Omega' \cap U$, $\Omega' \cap U$ est un

ouvert non vide de Ω', et il résulte du calcul précédent que $\langle \alpha , \gamma \rangle < 0$.

COROLLAIRE 1.- Soient $B \supset T$ un groupe de Borel de G, $A \supset T$ un groupe de Borel du centralisateur Z d'un tore singulier $Q \supset T$ de codim 1, α la racine associée à T, Q, A, A^u la partie unipotente de A, τ un élément du normalisateur de T. Pour que $\tau A^u \tau^{-1} \subset B$, il faut et il suffit que la fonction $w_\tau \alpha$ soit négative sur la chambre associée à B.

DÉMONSTRATION. $\tau A^u \tau^{-1} \subset B$ équivaut à $\tau A \tau^{-1} \subset B$ (puisque $A = A^u T$, $\tau T \tau^{-1} = T$ et $B \supset T$), ou encore à $\tau A \tau^{-1} = B \cap \tau Z \tau^{-1}$.

Soit A' le second groupe de Borel de Z contenant T. Alors $\tau A \tau^{-1}$ et $\tau A' \tau^{-1}$ sont les 2 groupes de Borel de $\tau Z \tau^{-1}$ contenant T. D'après la proposition 1 et son corollaire, les racines associées à T, $\tau Q \tau^{-1}$, $\tau A \tau^{-1}$ (resp. $\tau A' \tau^{-1}$) sont $w_\tau \alpha$ (resp. $-w_\tau \alpha$ en notation additive). La proposition 2 permet de déterminer quel est le groupe de Borel de $\tau Z \tau^{-1}$ qui est contenu dans B, ce qui établit le corollaire 1.

COROLLAIRE 2.- Pour chaque tore singulier $Q \subset T$ de codim 1, considérons la partition suivante de l'ensemble des groupes de Borel de G contenant T : deux groupes de Borel appartiennent à la même classe si et seulement s'ils ont même intersection avec le centralisateur de Q. Alors, si α est une des deux racines associées à Q, la partition des chambres de Weyl définie par Q est celle définie dans $\Gamma^Q(T)$ par les 2 demi-espaces complémentaires de l'hyperplan orthogonal à α. Deux tores singuliers de codim 1, $Q \neq Q'$, définissent deux partitions distinctes.

DÉMONSTRATION. La première partie de ce corollaire n'est qu'une formulation affaiblie - à tous points de vue - de la proposition 2, compte tenu du corollaire à la proposition 1. La seconde partie résulte de ce qu'un hyperplan limitrophe d'une chambre dans $\Gamma^Q(T)$ est la frontière de l'adhérence de la réunion des chambres contenues dans un même demi-espace limité par cet hyperplan.

3.- Réunion et intersection des groupes de Borel contenant un tore maximal ; application aux groupes semi-simples.

LEMME 4.- Soit G un groupe algébrique connexe. Tout sous-groupe fermé H de G contenant un groupe de Borel B est son propre normalisateur.

DÉMONSTRATION. On n'utilise que les 2 propriétés suivantes d'un groupe de Borel B : a) B est son propre normalisateur (exposé 9, théorème 1) ;

b) si B et xBx^{-1} sont tous deux contenus dans un sous-groupe fermé H de G $(x \in G)$, il existe $y \in H$ tel que $xBx^{-1} = yBy^{-1}$ (exposé 6, théorème 4 ; on peut prendre y dans la composante connexe de H).

Soient alors $H \supset B$ un sous-groupe fermé de G, $x \in G$, $xHx^{-1} = H$. Alors $xBx^{-1} \subset H$; il existe $y \in H$ tel que $xBx^{-1} = yBy^{-1}$; donc $y^{-1}x$ normalise B, $y^{-1}x \in B$, $x \in H$.

PROPOSITION 3.- Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal. La réunion des groupes de Borel de G contenant T engendre G.

DÉMONSTRATION. Soit H le sous-groupe engendré par ces groupes de Borel. Comme ils sont en nombre fini, H est fermé (exposé 3, théorème 2). Le normalisateur de H contient le normalisateur N de T, donc $H \supset N$ (lemme 4).

Considérons l'espace homogène G/H. Si $xH \in G/H$ est invariant par T, on a $TxH \subset xH$, d'où $x^{-1}Tx \subset H$. Il existe donc $h \in H$ tel que $x^{-1}Tx = h^{-1}Th$; d'où $xh^{-1} \in N$, $x \in H$. Cela signifie que T ne laisse invariant qu'un seul point de G/H.

Il en résulte que G/H est un point, i.e. $G = H$. En effet, on peut appliquer à H la proposition 5 de l'exposé 10, et faire opérer G sur un espace projectif $\underline{P}$ de telle sorte que H soit le stabilisateur d'un point $u \in \underline{P}$. Comme G/H est une variété complète (exposé 6, théorème 4) et que l'orbite de u est l'image de G/H par un morphisme bijectif, on voit comme pour la proposition 6 de l'exposé 10 que G/H est réduite à un point si elle ne contient pas au moins 2 points distincts invariants par T.

THÉORÈME 1.- Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal, S l'intersection des groupes de Borel de G contenant T, S_o la composante connexe de S, S_o^u la partie unipotente de S_o. Alors S_o^u est un sous-groupe distingué contenu dans le radical de G.

DÉMONSTRATION. La proposition 1 de l'exposé 9 montre que le sous-groupe résoluble connexe S_o est contenu dans le radical de G s'il est distingué. D'après la proposition 3 ci-dessus, il suffit de montrer que le normalisateur H de S_o^u contient tout groupe de Borel B contenant T. Nous savons déjà que $H \supset S \supset T$. Comme $B = B^uT$, il suffit de montrer que $H \supset B^u$. Or d'après le lemme 2 de l'exposé 9 (appliqué à B) B^u est engendré par ses intersections avec les centralisateurs des sous-tores de codim $\leqslant 1$ de T. Les centralisateurs des sous-tores

semi-réguliers sont contenus dans S (cf. lemme 3). Tout revient donc à démontrer que si B^u est la partie unipotente d'un groupe de Borel $B \supset T$, $Q \subset T$ un tore singulier de codim 1, Z le centralisateur de Q, on a $Z \cap B^u \subset H$.

Soit S' l'intersection de tous les groupes de Borel $B_i \supset T$ tels que $B_i \cap Z = B \cap Z$. Notons S'_o la composante connexe de S' et $\sum$ la partie unipotente de S'_o. Nous avons les inclusions : $S^u_o \subset \sum \subset B^u$. De plus, $B \cap Z = S' \cap Z = S'_o \cap Z$, puisque $B \cap Z$ est connexe ; donc $B^u \cap Z = \sum \cap Z$. Il s'agit donc de démontrer que $\sum \cap Z$ normalise S^u_o. Cela est évident si $\sum = S^u_o$. Sinon nous pouvons appliquer le lemme 2 de l'exposé 9, et introduire un sous-groupe fermé connexe $\sum$ vérifiant les propriétés suivantes : on a les inclusions

$$S^u_o \subset \sum' \subset \sum \subset B^u \quad ;$$

S^u_o est un sous-groupe distingué de $\sum'$ (i.e. $\sum' \subset H$) ; $\sum'/S^u_o$ est isomorphe à K, et $\sum'$ est engendré par S^u_o et des éléments du centralisateur Z' d'un tore $Q' \subset T$ de codim $\leqslant 1$ (i.e. $\sum' = S^u_o(\sum' \cap Z')$).

Le tore Q' est nécessairement singulier ; sinon son centralisateur Z' serait contenu dans S_o, d'où $\sum' \cap Z' \subset S^u_o$, $\sum' = S^u_o$ contrairement à l'hypothèse. Soit R le radical de Z', R^u la partie unipotente de R. D'après le lemme 3, $S \cap Z' \supset R$, d'où $S_o \supset R$ et $S^u_o \supset R^u$. Nous avons donc les inclusions

$$R^u \subset S^u_o \subset \sum' \subset \sum \subset B^u \quad , \text{ et}$$

$$R^u \subset S^u_o \cap Z' \subset \sum' \cap Z' \subset \sum \cap Z' \subset B^u \cap Z' \quad .$$

Comme $\sum'/S^u_o = S^u_o(\sum' \cap Z')/S^u_o$ est isomorphe à K et (comme groupe discret) à $(\sum' \cap Z')/(S^u_o \cap Z')$, ce dernier groupe est infini.

Donc $\dim(\sum' \cap Z') > \dim R^u$. Comme d'autre part $(B^u \cap Z')/R^u$ est isomorphe à K (lemme 2), nous avons $\dim(\sum' \cap Z') = \dim(B^u \cap Z')$; d'où

$$\sum' \cap Z' = \sum \cap Z' = B^u \cap Z' \quad .$$

Comme $S'_o = T\sum$, nous avons $S'_o \cap Z' = T(\sum \cap Z') = T(B^u \cap Z') = B \cap Z'$. A fortiori $S' \cap Z' = B \cap Z'$. D'après le corollaire 2 à la proposition 2 et la définition de S' à partir de Q et de B, la relation $S' \cap Z' = B \cap Z'$ implique $Q = Q'$ et $Z = Z'$. Nous avons donc $B^u \cap Z \subset \sum' \subset H$, ce qui achève

la démonsttration.

COROLLAIRE. Soient $Q \subset T$ un tore de G et Z le centralisateur de Q. Alors tout élément unipotent du radical de Z est contenu dans le radical de G.

En effet nous avons vu que le radical de Z est contenu dans S_o.

THÉORÈME 2.- Soit G un groupe algébrique connexe semi-simple, T un tore maximal. Alors :

a) les groupes de Cartan de G sont ses tores maximaux ;

b) tout tore semi-régulier est régulier et son centralisateur est un tore maximal ;

c) si Q est un tore singulier de codim 1 dans T, le radical du centralisateur de Q est Q ;

d) G est engendré par les centralisateurs des tores singuliers de codim 1 contenus dans T ;

e) l'intersection des tores singuliers de codim 1 contenus dans T est un groupe fini contenu dans le centre de G.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire précédent, le radical du centralisateur d'un tore est un groupe résoluble connexe sans éléments unipotents, donc un tore. Si $Q \subset T$ est semi-régulier, son centralisateur (qui est résoluble) est donc égal à T. Cela établit a) puisque les groupes de Cartan sont les centralisateurs des tores maximaux. Si $x \notin Q$ (semi-régulier) est choisi tel que son centralisateur coïncide avec celui de Q, le centralisateur de x est T, donc x et Q sont réguliers ; d'où b).

Si Q est singulier de codim 1, le radical R de son centralisateur Z est un tore contenant Q. Si $R \neq Q$, R serait un tore maximal T ; Z serait donc contenu dans le normalisateur de T, ce qui est impossible puisque la composante connexe de ce normalisateur est T ; d'où c).

Soit H le sous-groupe de G engendré par les centralisateurs Z_i des tores singuliers de codim 1 de T. Pour montrer que $H = G$, il suffit d'après la proposition 3 d'établir que $B \subset H$ pour tout groupe de Borel $B \supset T$, et même, puisque $T \subset Z_i$, que $B^u \subset H$. Or B^u est engendré par ses intersections avec les centralisateurs des sous-tores de codim $\leqslant 1$ de T (exposé 9, lemme 2). D'après b) seules interviennent les intersections de B^u avec les centralisateurs des tores singuliers ; d'où d).

L'intersection des tores singuliers de codim 1 contenus dans T est un sous-groupe central de G, d'après d). Ce sous-groupe est fini car la composante connexe du centre de G est contenue dans le radical, i.e. le centre de G est un sous-groupe fini ; d'où e).