Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58e année, 2005-2006, nº 953, p. 33 à 53

EXPLOSION POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER AU RÉGIME DU « LOG LOG » [d'après Merle-Raphael]

par **Nicolas BURQ**

INTRODUCTION

On se propose dans cet exposé de présenter quelques résultats récents sur l'explosion pour l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\frac{\partial}{\partial t}u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}}u = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}, \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}. \tag{1}$$

Cette équation apparaît dans plusieurs modèles mathématiques de phénomènes physiques : la propagation d'ondes dans un milieu non linéaire, la propagation dans les fibres optiques ou la condensation de Bose–Einstein (équation de Gross–Pitaevskii). Elle possède (au moins formellement) trois lois de conservation :

– Conservation de la masse

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2}$$

– Conservation de l'énergie

$$E(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|\nabla_x u|^2 - \frac{d}{2d+4}|u|^{\frac{2d+4}{d}} \right) dx = E(u)(0). \tag{3}$$

– Conservation du moment cinétique

$$\mathbf{Im}\left(\int \nabla_x u\overline{u}(t,x)dx \right) = \mathbf{Im}\left(\int \nabla_x u\overline{u}(0,x)dx \right). \tag{4}$$

Ces invariants sont reliés aux invariances de l'équation dans l'espace d'énergie H^1 : si $u(t,x)$ est solution de (1) alors

– $u(t_0+t, x_0+x)$ aussi (invariance par translation),
– $u(t,x)e^{i\gamma}$ aussi (invariance de phase),
– $\lambda^{\frac{d}{2}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ aussi (invariance d'échelle),
– $u(t, x-\beta t)e^{i\frac{\beta}{2}\cdot(x-\frac{\beta}{2}t)}, \beta \in \mathbb{R}^d$ aussi (invariance galiléenne).

Une quatrième symétrie peut-être moins évidente (et qui n'agit pas sur H^1) est l'invariance conforme : si $u(t,x)$ est solution de (1) alors il en est de même de

$$v(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}}\overline{u}\Big(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\Big)e^{i\frac{x^2}{4t}}. \tag{5}$$

On peut remarquer que l'application

$$u \mapsto u_\lambda, \qquad u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2}}u(\lambda x)$$

préserve la norme L^2 : l'équation (1) est dite L^2-*critique* (un autre choix de puissance dans la non-linéarité donnerait une autre puissance de λ pour l'invariance d'échelle).

L'équation (1) est un système hamiltonien de dimension infinie. La partie *linéaire* de l'équation, $i\partial_t + \Delta$, possède des propriétés dispersives et un des points importants de l'étude de (1) consiste à comprendre l'interaction entre ces propriétés de dispersion et l'effet de focalisation dû à la non-linéarité. Dans ce contexte des équations dispersives, l'équation de Schrödinger non linéaire est, avec l'équation de Korteveg–de Vries critique (voir les travaux de Martel et Merle [MM00, MM02a, MM02b, MM04] qui ont inspiré le travail de Merle et Raphael et l'exposé au séminaire Bourbaki de Tzvetkov [Tzv05] sur le sujet), un modèle important pour lequel on est capable d'exhiber des solutions *explosives*.

Les questions auxquelles on va s'intéresser dans cet exposé sont les suivantes :

– Existe-t-il des solutions explosives autres que celles (explicites) qui sont connues depuis les années 60 ?
– Peut-on classifier les types d'explosion possibles ?
– Quels types d'explosion sont stables ?

Remerciements. — Je remercie P. Gérard pour les discussions que j'ai eues avec lui sur le sujet de cet exposé et P. Raphael qui a passé du temps à m'expliquer de nombreux points de leur preuve et dont les notes de cours sur le sujet [Rap04] ont été une source d'inspiration.

1. LE CARACTÈRE BIEN POSÉ DANS H^1, CRITÈRES D'EXPLOSION ET DE NON-EXPLOSION

1.1. Non-explosion : normes L^2 petites

Le caractère localement bien posé de (1) pour des données initiales L^2 ou H^1 (norme quelconque) est connu depuis les travaux de Ginibre et Velo [GV79] :

THÉORÈME 1.1. — *Pour tout $C > 0$ il existe $T > 0$ tel que pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\|u_0\|_{H^1} \leq C$, il existe une unique solution $u \in C([0,T[;H^1)$ de l'équation (1) vérifiant $u\,|_{t=0}= u_0$.*

On peut remarquer que le temps d'existence de la solution est minoré par une fonction de la norme H^1 de la donnée initiale. Si on note T le temps maximal d'existence on a ainsi, si $T < +\infty$

$$\lim_{t \to T-0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

On dit qu'on a *explosion* en temps fini de la solution. On peut aussi avoir explosion en temps infini si

$$T = +\infty \text{ et } \limsup_{t \to +\infty} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

Pour des données initiales petites dans L^2, la solution est globale en temps : ceci est une conséquence facile de l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg suivante :

Proposition 1.2. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{4}{d}+2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}}.$$

En effet, on déduit de l'inégalité précédente que si la norme L^2 de la donnée initiale (et donc de la solution d'après (2)) est petite, alors

$$E(u(t)) \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t)|^2 dx$$

donc notre solution reste bornée dans H^1 (compte tenu de la conservation de la norme L^2) et $T = +\infty$.

On peut préciser la condition « norme L^2 petite » (voir Weinstein [Wei83]).

Proposition 1.3. — *On considère le problème de minimisation suivant :*

$$m = \inf_{0 \neq v \in H^1} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 dx\right)^{\frac{2}{d}}}{\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{4}{d}+2} dx}.$$

Alors m est atteint pour la famille à trois paramètres de fonctions

$$\lambda^{\frac{d}{2}} Q(\lambda x + x_0) e^{i\gamma}, \qquad (\lambda, x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^{*,+} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

où Q est l'unique solution positive radiale et exponentiellement décroissante à l'infini du système

$$\Delta Q - Q + Q^{\frac{4}{d}+1} = 0, \qquad Q(r) \to 0, r \to +\infty.$$

(*On appelle Q « l'état fondamental »*).

On en déduit l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg précisée :

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 \left(1 - \left(\frac{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \right)^{\frac{4}{d}} \right).$$

On voit immédiatement que si $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, les deux quantités conservées, énergie et masse, impliquent que la norme H^1 reste bornée et donc que la solution existe globalement (en temps) :

Proposition 1.4. — *Pour tout* $u_0 \in H^1$ *telle que* $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, *la solution de* (1) *de donnée initiale* u_0 *existe pour tout temps.*

Remarque 1.5. — On peut également montrer en utilisant les estimations de Strichartz dues dans ce contexte à Ginibre et Velo [GV79] que, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2$, il existe une solution locale en temps de (1) et que la solution est globale ($T = +\infty$) si la norme de la donnée initiale est petite dans L^2. La question de savoir si la borne garantissant l'existence globale est $\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (comme au niveau H^1) est ouverte.

1.2. Ondes solitaires et explosion à masse critique

Il est remarquable de constater que non seulement Q fournit un critère de non-explosion, mais qu'il en établit aussi le caractère optimal. En effet, la fonction $e^{it}Q(x)$ (le soliton de l'équation de Schrödinger) est clairement solution de (1). En utilisant l'invariance conforme (5), on peut définir

$$S(t) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} Q(\frac{x}{t}) e^{i\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{4t}\right)},$$

qui est la solution de (1) de donnée initiale à $t = -1$ égale à $Q(x)e^{i\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)}$. Alors $S(t)$ vérifie

(1) $E(S(t)) > 0$,
(2) $\|S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$,
(3) $\|\nabla S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \frac{C}{|t|}$, $t \to 0, t > 0$,
(4) $S(t)$ se concentre en $x = 0$ quand t tend vers 0 : au sens de la convergence faible des mesures,

$$|S(t)|^2 dx \to \|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \delta_{x=0}.$$

En fait ces propriétés caractérisent la fonction $S(t)$.

Théorème 1.6 (Merle [Mer93]). — *Soit* $u_0 \in H^1$ *telle que* $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. *On suppose que la solution de* (1) *explose en temps fini. Alors aux symétries de translation, phase, dilatation et invariance conforme près,* $u(t,x) = S(t,x)$.

1.3. Explosion à énergie négative

Une question naturelle, compte tenu du théorème 1.6 est de savoir si pour $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ il existe effectivement des solutions explosives de (1) (et éventuellement de les décrire). Grâce à l'identité du viriel due à Zakharov et Shabat [ZS71],

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx\right) = 4\frac{d}{dt}\mathbf{Im}\left(\int x\nabla u\overline{u} dx\right) = 16E_0, \tag{6}$$

on a une première réponse très simple. En effet, on peut alors vérifier que si la donnée initiale est dans l'espace du viriel

$$\Sigma = \{u \in H^1 ; xu \in L^2\},$$

alors la solution reste dans cet espace tant qu'elle existe (en tant que solution dans H^1) et vérifie (6). En particulier, si $E_0 < 0$, la solution explose en temps fini (le terme de gauche dans (6) est positif mais a une dérivée seconde constante strictement négative). Cet argument a pu être généralisé au cadre de données initiales qui ne sont plus dans Σ mais seulement dans H^1 :

THÉORÈME 1.7. — *Soit $u_0 \in H^1$ telle $E_0 < 0$. Alors la solution de* (1) *de donnée initiale u_0 explose en temps fini si*

(1) $d = 1$ (*Ogawa, Tsutsumi* [OT91]) *ou*
(2) $d \geq 2$ *et u_0 est radiale* (*Nawa* [Naw99]).

Un inconvénient majeur de ce résultat est qu'il fournit juste une obstruction à l'existence globale. Il ne dit rien sur l'explosion proprement dite ni sur le comportement de la solution.

1.4. Solutions auto-similaires

Compte tenu de l'invariance par changement d'échelle de l'équation, il est naturel de chercher des solutions sous la forme

$$U_b(t,x) = \frac{1}{(2b(T-t))^{\frac{4}{d}}} Q_b\left(\frac{x}{\sqrt{2b(T-t)}}\right) e^{-i\frac{\log(T-t)}{2b}}$$

avec Q_b solution de

$$\Delta Q_b - Q_b + ib\left(\frac{d}{2}Q_b + y \cdot \nabla Q_b\right) + Q_b|Q_b|^{\frac{4}{d}} = 0.$$

De telles solutions ne sont jamais dans L^2 à cause d'une divergence de type logarithmique à l'infini :

$$|Q_b(x)| \sim \frac{C(b)}{|x|^{\frac{d}{2}}}, \qquad |x| \to +\infty.$$

Néanmoins ces solutions joueront un rôle important dans la suite.

Un autre résultat (élémentaire) relié à cette invariance par changement d'échelle est le suivant :

PROPOSITION 1.8. — *On considère u une solution de* (1) *de donnée initiale $u_0 \in H^1$ et explosant en temps fini, T. Alors il existe $C > 0$* (*ne dépendant que de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$*) *tel que*

$$\forall t \in [0,T[, \qquad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C}{\sqrt{T-t}}. \tag{7}$$

En effet, fixons $t \in [0, T[$ et considérons

$$v^t(s,y) = \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-\frac{d}{2}} u\big(t + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-2} s, \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-1} y\big).$$

La fonction v^t est la solution de (1) de donnée initiale (à $s = 0$)

$$v_0^t(y) = \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-\frac{d}{2}} u\big(t, \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-1} y\big)$$

qui vérifie

$$\|v_0^t\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \|\nabla v_0^t\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Donc d'après la théorie locale dans H^1, il existe s_0 ne dépendant que de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, tel que v^t existe pour $s \in [0, s_0]$. Par conséquent,

$$t + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-2} s_0 \leq T$$

ce qui est (7).

1.5. Dynamique à l'explosion

La plupart des résultats sur la dynamique à l'explosion concernent le régime perturbatif :

$$u_0 \in \mathcal{B}_\alpha = \big\{u_0 \in H^1; \quad \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \alpha\big\}, \quad 0 < \alpha \ll 1$$

On connaît deux différents types de comportement à l'explosion pour les solutions de (1)

(1) L'explosion en $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \frac{1}{T-t}$ dont le modèle est $S(T-t)$ (voir aussi les solutions construites par Bourgain et Wang [BW97]).

(2) Des simulations numériques (voir les travaux de Landman, Papanicolaou, Sulem et Sulem [LPSS88] et la monographie de Sulem-Sulem [SS99]) ont prédit dans les années 80 l'existence de solutions explosant au régime du « log log » :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \left(\frac{\log|\log(t)|}{T-t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ces solutions apparaissent (numériquement) beaucoup plus stables que les précédentes. Le premier résultat mathématique confirmant l'existence de telles solutions est dû à Perelman [Per01] : elle construit en dimension 1 une telle solution et démontre sa stabilité dans un certain espace strictement inclus dans H^1.

La situation a été complètement clarifiée dans une série de papiers par Merle et Raphael [MR03, MR04, MR05c, MR05a, Rap05].

Théorème 1.9. — *On suppose $d = 1$. Il existe des constantes $\alpha > 0$, $C_1, C_2, C_3 > 0$ telles que si $u_0 \in \mathcal{B}_\alpha$ et si $u(t)$ est la solution de* (1) *de donnée initiale u_0 (qui* *existe sur un intervalle maximal* $t \in [0, T[$, $T \leq +\infty)$, *alors :*

(1) *si*

$$E_0^G = E_0(u_0) - \frac{(\mathbf{Im}(\int \nabla u_0 \overline{u_0} dx))^2}{2\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}} < 0,$$

alors $u(t)$ *explose en temps fini* ($T < +\infty$) *et on a la borne suivante sur la vitesse d'explosion :*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \left(\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

(2) *Si* $E_0^G = 0$ *et si* u_0 *n'est pas un soliton* (*à translation, dilatation et changement d'échelle près*) *alors* $u(t)$ *explose en temps fini.*

(3) *L'ensemble* $\mathcal{O}$ *des données initiales* $u_0 \in \mathcal{B}_\alpha$ *telles que* $u(t)$ *explose en temps fini avec la borne supérieure* (8) *est ouvert dans* H^1.

(4) *Si* u *explose en temps fini et si* (8) *n'est pas vérifiée, alors*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C_2}{(T-t)\sqrt{E_0^G}}$$

(5) *Si* u *explose en temps fini, alors*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq C_3 \left(\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Le résultat précédent se généralise au cas des dimensions d'espace $d = 2, 3, 4$ sous l'hypothèse (conjecturale) :

Hypothèse spectrale 1.10. — *On considère les deux opérateurs de Schrödinger suivants :*

$$\mathcal{L}_1 = -\Delta + \frac{2}{d}(\frac{4}{d} + 1) Q^{\frac{4}{d}-1} y \cdot \nabla Q, \qquad \mathcal{L}_2 = -\Delta + \frac{2}{d} Q^{\frac{4}{d}-1} y \cdot \nabla Q.$$

On note

$$H(\varepsilon, \varepsilon) = (\mathcal{L}_1 \mathbf{Re}\varepsilon, \mathbf{Re}\varepsilon)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathcal{L}_2 \mathbf{Im}\varepsilon, \mathbf{Im}\varepsilon)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon \in H^1,$$

et pour toute distribution f,

$$f_1 = \frac{d}{2} f + y \cdot \nabla f, \qquad f_2 = (f_1)_1.$$

Alors il existe deux constantes $\delta > 0$ *et* $\kappa < 2$ *telles que pour toute fonction* $\varepsilon \in H^1$ *vérifiant les conditions d'orthogonalité*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{Re}\varepsilon, Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Re}\varepsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Re}\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \\ &(\mathbf{Im}\varepsilon, Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Im}\varepsilon, Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Im}\varepsilon, \nabla Q)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$H(\varepsilon, \varepsilon) \geq \delta \left(\int |\nabla \varepsilon|^2 dx + \int |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|x|} dx \right).$$

(*On peut remarquer qu'à partir de la dimension* 3, *le second terme à droite dans l'inégalité précédente est contrôlé par le premier.*)

Cette propriété spectrale des opérateurs $\mathcal{L}_j$ a été démontrée (voir [MR05a]) en dimension $d = 1$ ($\kappa = \frac{9}{5}$) et vérifiée numériquement par Fibich, Merle et Raphael [FMR04] pour $d = 2, 3, 4$. Elle est fausse pour $d = 5, 6$.

1.6. Instabilité structurelle de la loi du « log log »

Même si, compte tenu des simulations numériques de Landman, Papanicolaou, Sulem et Sulem [LPSS88] et plus récemment des résultats du théorème 1.9, et en particulier du point (3), l'explosion au régime du « log log » présente de manifestes propriétés de stabilité, ce phénomène est lié à une certaine dégénérescence de l'équation de Schrödinger non linéaire (1) et est en fait *structurellement instable* au sens suivant : Considérons en dimension $d = 2$ le système de Zakharov

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - nu = 0, \\ \frac{1}{c_0^2}\partial_t^2 n - \Delta n - \Delta |u|^2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

L'équation (1) est en fait une approximation de ce système dans la limite $c_0 \to +\infty$ (au moins au niveau formel). Le système de Zakharov possède également une loi du viriel similaire à (6) et on peut en déduire l'explosion pour une classe de données initiales (voir les travaux de Merle [Mer96a]). On peut également exhiber une famille de solutions explosives explosant comme $S(t)$ [GM94b, GM94a]. Cependant, l'analogie avec (1) s'arrête là : Merle [Mer96b] a en effet démontré que toutes les solutions explosives explosent au moins en $1/(T - t)$:

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C}{T - t}.$$

En résumé, le régime du « log log » n'existe pas pour le système de Zakharov et il est donc conséquence d'une certaine dégénérescence dans la limite $c_0 \to +\infty$.

L'objet de cet exposé est de présenter quelques-unes des idées permettant de démontrer les bornes supérieure (8) et inférieure (9) dans le cas d'énergie négative $E_0^G < 0$.

2. MODULATION AUTOUR DE L'ÉTAT FONDAMENTAL

Une première remarque est que l'hypothèse $E_0^G < 0$ implique que, quitte à faire une transformation galiléenne, on peut supposer que

$$E(u) < 0, \qquad \mathbf{Im}\left(\int \nabla u \overline{u}\right) = 0. \tag{12}$$

En effet, si u_0 vérifie $E_G(u_0) < 0$, alors si

$$(u_0)_\beta = u_0 e^{i\frac{\beta}{2}\cdot x}, \qquad \beta = -2\frac{\mathbf{Im}\left(\int \nabla u_0 \overline{u_0}\right)}{\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}},$$

un calcul direct montre que la solution de (1) de donnée initiale $(u_0)_\beta$ vérifie (12). D'autre part, l'invariance galiléenne montre que la description de l'explosion de u_β est équivalente à la description de l'explosion de u. On supposera donc dans la suite que (12) est vérifiée. L'analyse que Merle et Raphael conduisent est de type perturbative (autour de l'état fondamental). La première étape consiste donc à rendre rigoureux le fait que la solution u est proche d'une certaine modulation de cet état fondamental. Dans le contexte de l'équation de Schrödinger, cette approche remonte aux travaux de Weinstein [Wei83, Wei85] (voir aussi Buslaev et Perelman [BP93, BP95]). Le premier résultat est une propriété de stabilité orbitale de l'état fondamental.

Proposition 2.1. — *Il existe $\alpha^* > 0$ et une fonction $\delta : \alpha \in]0, \alpha^*] \to \mathbb{R}^+$ qui tend vers 0 quand α tend vers 0 et tels que pour toute fonction $v \in H^1$ vérifiant*

$$\int Q^2 dx \leq \int |v|^2 dx \leq \int Q^2 dx + \alpha, \tag{13}$$

et

$$E(v) \leq \alpha \int |\nabla v|^2 dx, \tag{14}$$

il existe $(\gamma_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+d}$ tels que

$$\|Q - e^{i\gamma_0} \lambda_0^{\frac{d}{2}} v(\lambda_0 x + x_0)\|_{H^1} \leq \delta(\alpha), \qquad \lambda_0 = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.$$

La preuve de cette proposition est assez classique : on fait un raisonnement par l'absurde, un argument de concentration-compacité [Lio84] permet d'extraire une sous-suite convergente qui est, par passage à la limite, d'énergie négative, de masse critique (égale à celle de l'état fondamental), mais n'est pas une translatée-dilatée de l'état fondamental, ce qui contredit la proposition 1.3

On peut remarquer que l'hypothèse (13) est la plus contraignante, c'est elle qui limite l'analyse à un régime de type « perturbation », tandis que l'hypothèse (14) est automatiquement vérifiée pour tout temps pour $E_0 < 0$ ou, si on sait *a priori* que la solution explose, pour t assez proche du temps d'explosion T (puisqu'alors l'hypothèse est vérifiée car le terme de gauche est constant tandis que celui de droite tend vers $+\infty$). Cette hypothèse (13) peut être relaxée (voir [MR05b]).

On va maintenant préciser cette décomposition. L'idée générale est d'utiliser un profil auto-similaire pour décrire la solution. Cependant, comme ces profils ne sont pas de norme L^2 finie, il est nécessaire de les tronquer au bon endroit. Pour cela, on introduit des profils auto-similaires proches de l'état fondamental Q : on fixe un paramètre $0 < \eta < 1$ (qui sera choisi petit par la suite) et pour $b \neq 0$ on définit

$$R_b = \frac{2}{|b|}\sqrt{1+\eta}, R_b^- = \sqrt{1-\eta}\frac{2}{|b|}.$$

On fixe aussi une troncature radiale ϕ_b égale à 0 pour $|x| \geq R_b$ et à 1 pour $|x| \leq R_b^-$.

Proposition 2.2. — *Il existe $C, \eta^* > 0$ et des fonctions $\epsilon^*(\eta) > 0, b^*(\eta) > 0$ définies pour $0 < |\eta| \leq \eta^*$ et tendant vers 0 quand η tend vers 0 tels que pour tout $b < b^*(\eta)$, il existe une unique solution radiale de l'équation*

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\Delta Q_b - Q_b + ib\left(\frac{d}{2}Q_b + y\cdot\nabla Q_b\right) + Q + b|Q_b|^{\frac{4}{d}} = 0,\\ &P_b = Q_b e^{i\frac{b|x|^2}{4}} > 0 \ si\ |x| \leq R_b,\\ &Q_b(0) \in [Q(0) - \epsilon^*(\eta), Q(0) + \epsilon^*(\eta)], \qquad Q_b(R_b) = 0. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $\widetilde{Q}_b = Q_b\phi_b(x)$ est solution de

$$(16)\qquad \Delta\widetilde{Q}_b - \widetilde{Q}_b + ib\left(\frac{d}{2}\widetilde{Q}_b + y\cdot\nabla\widetilde{Q}_b\right) + \widetilde{Q}_b + b|\widetilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}} = \Psi_b,$$

où Ψ_b vérifie

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}, \forall\beta\in\mathbb{N}^d, |\beta|\leq 1, \qquad \sup_x |x|^\alpha\partial_x^\beta|\Psi_b(x)| \leq e^{-\frac{C}{b}}.$$

On peut maintenant introduire une décomposition géométrique de la solution prenant en compte sa proximité par rapport à la variété de dimension $d+3$ des fonctions de la forme

$$e^{i\gamma}\lambda^{\frac{d}{2}}\widetilde{Q}_b(\lambda x + x_0),$$

où (γ, λ, b, x) sont dans un petit voisinage de $(\gamma_0, 0, 0, x_0)$.

Proposition 2.3. — *Il existe des fonctions C^1 :*

$$(\lambda, \gamma, x, b) : [t_0, T[\to]0, +\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$$

telles que pour tout $t_0 \leq t < T$, si on note

$$\varepsilon(t, y) = e^{i\gamma(t)}\lambda^{\frac{d}{2}}(t)u(t, \lambda(t)y + x(t)) - \widetilde{Q}_{b(t)}(y)$$

alors $\varepsilon(t)$ vérifie les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$(17)\qquad \begin{aligned} \Big(\mathbf{Re}\,\varepsilon, |y|^2\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \Big(\mathbf{Im}\,\varepsilon, |y|^2\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0\\ \Big(\mathbf{Re}\,\varepsilon, y\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \Big(\mathbf{Im}\,\varepsilon, y\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0\\ \Big(\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_1\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \Big(\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_1\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0\\ \Big(\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_2\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \Big(\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_2\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 0 \end{aligned}$$

et de plus

$$(18)\qquad \left|1 - \lambda(t)\frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\right| + \|\varepsilon(t)\|_{H^1} + |b(t)| \leq \delta(\alpha^*), \qquad \lim_{\alpha^*\to 0}\delta(\alpha^*) = 0.$$

(*On rappelle que $(f)_1 = (\frac{d}{2}f + y\cdot\nabla f$ et $(f)_2 = ((f)_1)_1$.*)

Compte tenu de la proposition 2.1, la preuve de ce résultat repose essentiellement sur le théorème des fonctions implicites. On peut remarquer que si on fait tendre b vers 0 (formellement) dans les conditions d'orthogonalités (17), en utilisant que $\widetilde{Q}_b \to Q$, on obtient

$$(\mathbf{Re}\,\varepsilon, y^2 Q) = (\mathbf{Re}\,\varepsilon, y^2 Q) = (\mathbf{Im}\,\varepsilon, Q_1) = (\mathbf{Im}\,\varepsilon, Q_2) = 0,$$

et que les trois dernières relations qu'on obtient apparaissent dans l'hypothèse spectrale.

3. LA BORNE SUPÉRIEURE

3.1. Les équations en variables dilatées

On introduit le changement de variables

$$s = \int_{t(u_0)}^{t} \frac{dt'}{\lambda^2(t')}.$$

Compte tenu de (7), $s(T) = +\infty$.

On peut maintenant écrire les lois de conservation de l'énergie et du moment linéarisées autour de $\widetilde{Q}_b$. On obtient :

Lemme 3.1

$$\begin{aligned}(19)\qquad &\left|2\left(\mathbf{Re}\,\varepsilon, \mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b\right) + 2\left(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b\right)\right| \\ &\qquad \leq C\left(\int |\nabla\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|}\right) + e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} + C\lambda^2 |E_0| \\ &\left|\left(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \nabla \mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b\right)\right| \leq C\left(\int |\nabla\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On remarquera que le facteur exponentiel dans la première équation vient du calcul explicite de l'énergie de $\widetilde{Q}_b$.

On peut également écrire les équations vérifiées par les paramètres de modulation (λ, γ, x, b) et ε. En particulier (avec $\widetilde{\gamma} = -s - \gamma)$),

$$\begin{aligned}(20)\quad &\frac{\partial}{\partial s} b\partial_b(\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b) + \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{Re}\,\varepsilon) - M_-(\varepsilon) + b\left(\frac{d}{2}\mathbf{Re}\,\varepsilon + y\cdot\nabla\mathbf{Re}\,\varepsilon\right) \\ &\qquad = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right)(\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_1 + \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\,\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b + \frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\nabla(\mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b) \\ &+ \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right)\left(\frac{d}{2}\mathbf{Re}\,\varepsilon + y\cdot\nabla\mathbf{Re}\,\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\,\mathbf{Im}\,\varepsilon + \frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\nabla(\mathbf{Re}\,\varepsilon)_1 + \mathbf{Im}\,(\Psi_b) - R_1(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} b\partial_b(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b) + \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{Im}\varepsilon) + M_+(\varepsilon) + b\left(\frac{d}{2}\mathbf{Im}\varepsilon + y\cdot\nabla\mathbf{Im}\varepsilon\right) \tag{21}$$
$$= \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right)(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_1 - \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b + \frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\nabla(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)$$
$$+\left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right)\left(\frac{d}{2}\mathbf{Im}\varepsilon + y\cdot\nabla\mathbf{Im}\varepsilon\right) - \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\mathbf{Re}\varepsilon + \frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\nabla(\mathbf{Im}\varepsilon)_1 + \mathbf{Im}(\Psi_b) - R_2(\varepsilon)$$

où

$$M_+(\varepsilon) = -\Delta\mathbf{Re}\varepsilon + \mathbf{Re}\varepsilon - \left(\frac{4(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)^2}{d|\widetilde{Q}_b|^2} + 1\right)|\widetilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}}\mathbf{Re}\varepsilon - \left(\frac{4(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)}{d|\widetilde{Q}_b|^2}\right)|\widetilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}}\mathbf{Im}\varepsilon,$$

$$M_-(\varepsilon) = -\Delta\mathbf{Im}\varepsilon + \mathbf{Im}\varepsilon - \left(\frac{4(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)^2}{d|\widetilde{Q}_b|^2} + 1\right)|\widetilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}}\mathbf{Im}\varepsilon - \left(\frac{4(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)}{d|\widetilde{Q}_b|^2}\right)|\widetilde{Q}_b|^{\frac{4}{d}}\mathbf{Re}\varepsilon,$$

et les termes $R_{1;2}(\varepsilon)$ sont des termes de reste (d'ordre supérieur en ε). Si on fait le produit scalaire de ces équations avec les diverses quantités apparaissant dans les relations d'orthogonalité (17), on obtient

LEMME 3.2

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right| + \left|\frac{\partial}{\partial s}b\right| \leq C\left(\int|\nabla\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|}\right) + e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} + C\lambda^2|E_0| \tag{22}$$

(23)
$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma} - \frac{(\mathbf{Re}\varepsilon, L_+Q_2)}{\|Q_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\right| + \left|\frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\right| \leq \delta(\alpha^*)\left(\int|\nabla\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|}\right)^{1/2}$$
$$+ \int|\nabla\varepsilon|^2 + e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} + C\lambda^2|E_0|$$

où

$$L_+ = -\Delta + 1 - (1+\frac{4}{d})Q^{\frac{4}{d}}, \qquad \lim_{\alpha^*\to 0}\delta(\alpha^*) = 0.$$

3.2. L'inégalité du viriel locale

Le point clef de l'analyse de Merle et Raphael consiste à localiser l'inégalité du viriel (6). Le point de départ est la remarque suivante : d'après (6), on a formellement (en intégrant par parties)

$$\begin{aligned} 4E_0 t + c_0 &= \mathbf{Im}\left(\int x\nabla u\overline{u}dy\right) \\ &= \mathbf{Im}\left(\int x\nabla\widetilde{Q}_b\overline{\widetilde{Q}_b}dy\right) + \mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\varepsilon\overline{\varepsilon}dy\right) \\ &\quad + 2(\mathbf{Re}\varepsilon, (\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - 2(\mathbf{Im}\varepsilon, (\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Mais le choix de conditions d'orthogonalité (17) garantit que le terme linéaire en ε disparaît. On peut par ailleurs calculer explicitement

$$\mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\widetilde{Q}_b\overline{\widetilde{Q}_b}dy\right)=-\frac{b}{2}\|y\widetilde{Q}_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\sim -Cb\,;$$

on obtient alors

$$4E_0t+c_0\sim -Cb+\mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\varepsilon\overline{\varepsilon}dy\right).$$

On repasse en variables s et on dérive l'identité obtenue par rapport à s. On obtient

$$4\lambda^2E_0+C\frac{\partial}{\partial s}b=\frac{d}{ds}\mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\varepsilon\overline{\varepsilon}dy\right).$$

En d'autres termes, pour calculer l'expression $\frac{d}{ds}\mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\varepsilon\overline{\varepsilon}dy\right)$ qui n'a aucun sens (car ε est seulement dans H^1), il suffit de calculer $4\lambda^2E_0+C\frac{\partial}{\partial s}b$. C'est exactement le calcul que Merle et Raphael font :

Proposition 3.3. — *Il existe $\delta_0, C>0$ tels que*

$$\frac{\partial}{\partial s}b\geq\delta_0\left(\int|\nabla\varepsilon|^2dy+\int|\varepsilon|^2e^{-\delta|y|}dy\right)-C\lambda^2E_0-e^{-\frac{C}{b}}. \tag{25}$$

Pour démontrer cette proposition, on écrit l'équation vérifiée par $\frac{\partial}{\partial s}b$, et après quelques calculs algébriques, on obtient

$$\begin{aligned}
(26)\quad &\frac{\partial}{\partial s}b\Big((\partial_b(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b),(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\partial_b(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b),(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\partial_b(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)))_{L^2(\mathbb{R}^d)}+(\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\partial_b(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)))_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)\\
&=H(\varepsilon,\varepsilon)-2\lambda^2E_0\\
&\qquad-\frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\Big((\mathbf{Im}\,\varepsilon,\nabla(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,\nabla(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)\\
&\qquad-\left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda}+b\right)\Big((\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\Big((\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}+(\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)\\
&\qquad-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}+R(\varepsilon)
\end{aligned}$$

où $R(\varepsilon)$ est un terme de reste contenant tous les termes d'ordre supérieur en ε qui est contrôlé par

$$|R(\varepsilon)|\leq\delta(\alpha^*)\left(\int|\nabla\varepsilon|^2dy+\int|\varepsilon|^2e^{-\delta|y|}dy\right).$$

La contribution de

$$-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

est, compte tenu des propriétés de décroissance de la fonction Ψ_b, bornée par

$$\epsilon \int |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|y|} y + C e^{-\frac{C}{b}}.$$

Les conditions d'orthogonalité (17) annulent le terme

$$-\left(\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda}+b\right)\Big((\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big).$$

On peut ensuite, en remarquant que $Q_b = Q + o(1)$ $(b \to 0)$ et en utilisant (23), remplacer le terme

$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\gamma}\Big((\mathbf{Re}\,\varepsilon,(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}+(\mathbf{Im}\,\varepsilon,(\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)$$

par

$$\frac{(\mathbf{Re}\,\varepsilon,L_+Q_2)}{\|Q_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}(\mathbf{Re}\,\varepsilon,Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{O}\left(\delta(\alpha^*)\int|\nabla\varepsilon|^2+|\varepsilon|^2e^{-\kappa|y|}+e^{-\frac{C}{b}}\right).$$

D'autre part, en réutilisant (23), on a

$$\begin{aligned}(27)\quad&\left|\frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\Big((\mathbf{Im}\,\varepsilon,\nabla(\mathbf{Re}\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,\nabla(\mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)\right|\\&\qquad\leq\delta(\alpha^*)\left(\int|\nabla\varepsilon|^2dy+\int|\varepsilon|^2e^{-\delta|y|}dy\right).\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}(28)\quad\frac{\partial}{\partial s}b\geq H(\varepsilon,\varepsilon)&-\frac{1}{\|Q_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}(\mathbf{Re}\,\varepsilon,L_+Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{Re}\,\varepsilon,Q_1)\\&-\delta(\alpha^*)\int|\nabla\varepsilon|^2+|\varepsilon|^2e^{-\kappa|y|}-e^{-\frac{C}{b}}.\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$H(\varepsilon,\varepsilon)-\frac{1}{\|Q_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}(\mathbf{Re}\,\varepsilon,L_+Q_2)_{L^2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{Re}\,\varepsilon,Q_1)=H(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon})$$

où $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon-\frac{(\mathbf{Re}\,\varepsilon,Q_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|Q_1\|^1_{L^2(\mathbb{R}^d)}}Q_1$. Mais d'après l'hypothèse spectrale,

$$\begin{aligned}(29)\quad H(\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon})&\geq\delta\left(\int|\nabla\widetilde{\varepsilon}|^2dy+\int|\widetilde{\varepsilon}|^2e^{-\kappa|y|}dy\right)-(\mathbf{Re}\,\widetilde{\varepsilon},Q)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\&-(\mathbf{Re}\,\widetilde{\varepsilon},yQ)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\widetilde{\varepsilon},Q_1)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\widetilde{\varepsilon},Q_2)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\widetilde{\varepsilon},\nabla Q)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\&\geq\frac{\delta}{2}\left(\int|\nabla\varepsilon|^2dy+\int|\varepsilon|^2e^{-\kappa|y|}dy\right)-C(\mathbf{Re}\,\varepsilon,Q)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\&-(\mathbf{Re}\,\varepsilon,yQ)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,Q_1)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,Q_2)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-(\mathbf{Im}\,\varepsilon,\nabla Q)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Il reste, pour conclure, à vérifier qu'on contrôle les termes négatifs dans le terme de droite de l'équation précédente. Les directions

$$(\mathbf{Re}\,\varepsilon, yQ)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, (\mathbf{Im}\,\varepsilon, Q_1)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ et } (\mathbf{Im}\,\varepsilon, Q_2)^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

sont traitées grâce aux conditions d'orthogonalité (17). Par exemple :

$$(30)\quad (\mathbf{Re}\,\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{Re}\,\varepsilon, y\mathbf{Re}\,(\widetilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Im}\,\varepsilon, y\mathbf{Im}\,(\widetilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)} + (\mathbf{Re}\,\varepsilon, Q_1 - \mathbf{Re}\,(\widetilde{Q}_b))^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, y\mathbf{Im}\,(\widetilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

la condition d'orthogonalité annule le premier terme tandis que (puisque $\widetilde{Q}_b$ est proche de Q) le second est contrôlé, ce qui donne

$$(31)\quad |(\mathbf{Re}\,\varepsilon, yQ)_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq \left|(\mathbf{Re}\,\varepsilon, Q_1 - \mathbf{Re}\,(\widetilde{Q}_b))^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, y\mathbf{Im}\,(\widetilde{Q}_b))_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right| \leq \delta(\alpha^*)\left(\int |\nabla\varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\kappa|x|} dy\right)$$

(rappelons que α^* petit implique b petit aussi d'après (18)).

Les deux autres termes, $(\mathbf{Re}\,\varepsilon, Q)^2_{L^2}$ et $(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \nabla Q)^2_{L^2}$, sont estimés en utilisant (19) (et le fait que Q est proche de $\widetilde{Q}_b$).

3.3. Une quasi-fonctionnelle de Lyapunov

On montre dans cette partie comment on déduit de l'inégalité différentielle (25), vérifiée par b, une information sur la dynamique. On commence par remarquer que la fonction b ne peut pas passer du signe $+$ au signe $-$. En effet s'il existait un point où $b(s_0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial s} b(s_0) \leq 0$, d'après (25), on aurait $\varepsilon = 0$ ce qui contredit l'hypothèse d'énergie négative. D'après (22) et en utilisant (25), on obtient

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial s}\lambda}{\lambda} + b\right| \leq C\frac{\partial}{\partial s} b + e^{-\frac{C}{|b|}}.$$

On intègre (et on utilise que b est petit et de signe fixe pour $s \geq s_0$ dans la dernière inégalité)

$$(32)\quad \left|\log\left(\frac{\lambda(s)}{\lambda(s_0)}\right) + \int_{s_0}^{s} b(s)ds\right| \leq C(b(s) - b(s_0)) + \int_{s_0}^{s} e^{-\frac{C}{|b|}} ds \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left|\int_{s_0}^{s} b(s)ds\right|.$$

On en déduit que $\int_{s_0}^{+\infty} b(s) = +\infty$ (et donc que b est strictement positive pour s assez grand). En effet, sinon, $|\log(\lambda(s))|$ serait borné inférieurement, donc $\lambda(s)$ serait minoré par une constante $\lambda_0 > 0$, ce qui, compte tenu de (25), impliquerait

$$\frac{\partial}{\partial s} b \geq -\lambda^2 E_0 - e^{-\frac{C}{|b|}} \geq -\frac{1}{2}\lambda^2 E_0$$

et donc contredirait que b est borné (et même petit d'après (18)).

On peut maintenant intégrer l'inéquation

$$\frac{\partial}{\partial s}b \geq e^{-\frac{C}{b}} \Rightarrow -\frac{\frac{\partial}{\partial s}b}{b^2}e^{\frac{C}{b}} \leq 1 \Rightarrow b(s) \geq \frac{C}{\log(s)}.$$

Si on revient à (32), on obtient

$$|\log(\lambda)| \geq C\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\log(s)} \geq Cs^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log|\log(\lambda)| \geq C\log(s).$$

On en déduit d'abord qu'il y a bien explosion en temps fini

$$|\lambda(s)| \leq e^{-s^{\alpha}} \Rightarrow T = \int_0^{+\infty}\lambda^2(s)ds < +\infty$$

puis en réutilisant (32)

$$\begin{aligned}\frac{T-t(s)}{\lambda^2(s)} &= \int_s^{+\infty}\frac{\lambda^2(\sigma)}{\lambda^2(s)}d\sigma \\ &\leq \int_s^{+\infty} e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\int_s^{\sigma}b(\tau)d\tau}d\sigma \\ &\leq C\log(s) \leq C\log(|\log(\lambda)|)\end{aligned} \tag{33}$$

où on a utilisé la minoration $b(\tau) \geq \frac{1}{\log(\tau)}$ pour obtenir l'avant-dernière inégalité. Finalement on a bien obtenu la majoration annoncée

$$\frac{T-t(s)}{\lambda^2(s)\log(|\log(\lambda)|} \leq C \Rightarrow \|\nabla u(t(s))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \lambda^{-1}(s) \leq C'\sqrt{\frac{\log(|\log(T-t(s))|)}{T-t(s)}}.$$

4. LA BORNE INFÉRIEURE

Nous avons obtenu dans la section précédente une inégalité

$$b(s) \geq \frac{C}{\log(s)}$$

et ceci est la clef pour obtenir la borne supérieure. Nous voulons maintenant obtenir l'inégalité inverse. Curieusement, le point de départ est toujours l'inégalité (25), qu'ici nous allons utiliser pour contrôler des termes dans un calcul de flux que nous ferons plus tard.

4.1. Inégalité du viriel précisée

La présence dans l'inégalité (25) du terme $e^{-\frac{C}{b}}$ est due à la présence dans (26) du terme induit par le fait que le profil auto-similaire Q_b a été tronqué pour donner $\widetilde{Q}_b$:

$$-(\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{34}$$

En fait, en raffinant l'analyse précédente, on peut démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s}b \geq \delta_0 \left(\int |\nabla \varepsilon|^2 dy + \int |\varepsilon|^2 e^{-\delta|y|} dy \right) - C\lambda^2 E_0 \\ - e^{-\frac{\pi(1+\epsilon)}{b}} - (\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,\Psi_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{35}$$

Pour faire disparaître le terme (34), il faut raffiner le profil de modulation : pour $|y| \leq 2/|b|$, le profil $\widetilde{Q}_b$ (un objet non linéaire) modulé modélise bien la solution, tandis que pour $2/|b| \leq |y| \leq e^{\epsilon/|b|}$ nous allons introduire la radiation pour modéliser la solution :

Lemme 4.1. — *Il existe une unique solution radiale, ζ_b de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} \Delta\zeta_b - \zeta_b + ib(\zeta_b)_1 &= \Psi_b \\ \|\nabla\zeta_b\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &< +\infty. \end{aligned} \tag{36}$$

Cette solution vérifie

$$\lim_{|y|\to+\infty} |y|^d |\zeta_b(y)|^2 = \Gamma_b, \qquad e^{-\frac{(1-C\eta)\pi}{b}} \leq \Gamma_b \leq e^{-\frac{(1+C\eta)\pi}{b}}.$$

On peut remarquer que la fonction ζ_b n'est pas dans L^2 à cause d'une divergence de type logarithmique. Il faut donc la tronquer. On fixe donc maintenant $A = e^{\frac{\epsilon}{b}}$ ($\epsilon > 0$ sera choisi petit) et pour $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 pour $|r| \leq 1$, $\chi_A(r) = \chi(r/A)$, et à 0 pour $|r| \geq 2$

$$\widetilde{\zeta}_b = \zeta_b \chi_A(r), \qquad \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon - \widetilde{\zeta}_b.$$

Proposition 4.2. — *Il existe $\delta_0, C, c > 0$ tels que*

$$\frac{\partial}{\partial s} f \geq \delta_0 \left(\int |\nabla\widetilde{\varepsilon}|^2 dy + \int |\widetilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} dy \right) + c\Gamma_b - C\lambda^2 E_0 - C\int_A^{2A} |\varepsilon|^2 \tag{37}$$

avec

$$f(s) = \frac{b}{4}\|y\widetilde{Q}_b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\mathbf{Im}\left(\int y\cdot\nabla\widetilde{\zeta}_b\overline{\widetilde{\zeta}_b}\right) \\ + (\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,\widetilde{\zeta}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,\widetilde{\zeta}_b)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Remarque 4.3. — Si on compare les diverses inégalités de viriel obtenues, on peut remarquer que, dans cette dernière , $f(s) \sim b(s)$ (car ζ est exponentiellement petit en b), et d'autre part que le terme exponentiel en b apparaît maintenant avec le bon signe, le prix à payer étant le terme $C\int_A^{2A}|\varepsilon|^2$.

La démonstration de ce résultat est assez proche de celle de la proposition 3.3. Indiquons seulement comment on s'est débarrassé du terme (34). L'introduction de la radiation $\widetilde{\zeta}_b$ l'a remplacé (modulo des termes négligeables) par un terme du type

$$-(\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{38}$$

où

$$F = [\Delta, \chi_A]\zeta_b + iby\cdot\chi_A\zeta_b$$

est supporté dans $\{A \leq |y| \leq 2A\}$, dont on déduit

$$\left|(\mathbf{Re}\,\varepsilon, (\mathbf{Re}\,F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\mathbf{Im}\,\varepsilon, (\mathbf{Im}\,F)_1)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right| \leq \epsilon\Gamma_b + \frac{1}{\epsilon}\int_A^{2A} |\varepsilon|^2.$$

4.2. Dispersion L^2 à l'infini

Pour traiter le terme $-\int_A^{2A} |\varepsilon|^2$, il est nécessaire de comprendre comment l'excès de masse de la donnée initiale u_0 est évacué et dispersé à l'infini (en d'autres termes comprendre comment croît la norme L^2 de la restriction de ε à l'ensemble $\{|y| \geq Cste\}$). On choisit ϕ une fonction positive, croissante, égale à 0 pour $r \leq 1/2$, à 1 pour $r \geq 3$ et telle que $\phi'(r) \geq 1/4$ pour $r \in [1,2]$. On définit $\phi_A(x) = \phi(|x|/A)$. On a alors

Proposition 4.4. — *Il existe $C > 0$ tel que*

$$\frac{d}{ds}\left(\int \phi_A(x)|\varepsilon|^2\right) \geq \frac{b}{C}\int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - \frac{C}{b^2}\lambda^2 E_0 - \Gamma_b^{1+\epsilon} - \Gamma_b^{\epsilon}\int |\nabla\varepsilon|^2. \tag{39}$$

Pour démontrer ce résultat, on fait le produit scalaire de (22) avec $\phi_A(x)\mathbf{Re}\,\varepsilon$ et de (23) avec $\phi_A(x)\mathbf{Im}\,\varepsilon$; et on intègre par parties. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\int \phi_A|\varepsilon|^2\right) &= \int \frac{\partial}{\partial s}(\phi_A)|\varepsilon|^2 + b\int y\cdot\nabla(\phi_A)|\varepsilon|^2 + 2\mathbf{Im}\left(\int \nabla\phi_A\cdot\nabla\varepsilon\overline{\varepsilon}\right)\\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial s}\lambda\lambda + b\right)\int y\cdot\nabla\phi_A|\varepsilon|^2 - \frac{\frac{\partial}{\partial s}x}{\lambda}\cdot\int \nabla\phi_A|\varepsilon|^2.\end{aligned} \tag{40}$$

Le terme principal est

$$b\int y\cdot\nabla(\phi_A)|\varepsilon|^2 \geq \frac{b}{C}\int \phi'(\frac{y}{A})|\varepsilon|^2 \geq \frac{b}{4C}\int_A^{2A} |\varepsilon|^2. \tag{41}$$

Les autres termes sont des termes de reste responsables des termes de reste dans la proposition.

On peut maintenant utiliser la conservation de la norme L^2 :

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \alpha\\ &= \|\phi_A^{1/2}\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|(1-\phi_A)^{1/2}\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{Q}_b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad + 2(\mathbf{Re}\,\varepsilon, \mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned} \tag{42}$$

soit

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left(\int \phi_A(x)|\varepsilon|^2\right)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\|Q_b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Re}\,\varepsilon, \mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

Le point important est que

$$\|Q_b\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Re}\,\varepsilon, \mathbf{Re}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2(\mathbf{Im}\,\varepsilon, \mathbf{Im}\,\widetilde{Q}_b)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim b^2.$$

On peut donc, en additionnant à l'inéquation que nous venons d'obtenir l'inéquation (37) multipliée par ϵb obtenir une inéquation du type (avec $C_0 > 0$)

$$\frac{d}{ds}(-C_0 b^2 + \epsilon b^2) \geq Cb \left(\Gamma_b + \int |\nabla \widetilde{\varepsilon}|^2 + |\widetilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} + \int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - 2\lambda^2 E_0 \right) ,$$

ce qui donne une inégalité différentielle sur b du type

$$\frac{d}{ds}(b^2) \leq -Cb \left(\Gamma_b + \int |\nabla \widetilde{\varepsilon}|^2 + |\widetilde{\varepsilon}|^2 e^{-\delta|y|} + \int_A^{2A} |\varepsilon|^2 - 2\lambda^2 E_0 \right)$$

qui est le point essentiel de la preuve de la borne inférieure (9).

Remarque 4.5. — Dans cette dernière étape, nous avons utilisé de manière importante la conservation de la norme L^2, ce qui *de facto* élimine la possibilité d'adopter cette approche pour une solution auto-similaire (et pour une bonne raison puisque dans ce cas la borne inférieure est fausse).

Remarque 4.6. — On remarquera aussi que nous avons utilisé le fait que l'énergie est négative, ce qui permet de ne pas se préoccuper du terme $-\lambda^2 E_0$ qui a toujours le bon signe. En fait, dans le régime du « log log », ce terme est négligeable car il a pour ordre de grandeur

$$\lambda^2 \ll e^{-\alpha s^\beta} \ll b \sim \frac{1}{\log(s)}.$$

C'est ce fait qui permet de « bootstrapper » le régime du « log log » (voir le point (3) du théorème 1.9), même pour des énergies positives.

RÉFÉRENCES

[BP93] V. Buslaev & G. Perel'man – « Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: States close to a soliton », *St. Petersbg. Math. J.* **4** (1993), no. 6, p. 1111–1142 (Russian, English).

[BP95] ———, « On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations », *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2* **164** (1995), no. 22, p. 75–98 (English).

[BW97] J. Bourgain & W. Wang – « Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity. », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* **25** (1997), no. 1-2, p. 197–215 (English).

[FMR04] G. Fibich, F. Merle & P. Raphael – « Numerical proof of a spectral property related to the singularity formation for the L^2 critical non linear Schrödinger equation », preprint, 2004.

[GM94a] L. Glangetas & F. Merle – « Concentration properties of blow-up solutions and instability results for Zakharov equation in dimension two II », *Comm. Math. Phys.* **160** (1994), no. 2, p. 349–389.

[GM94b] ______, « Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two I », *Comm. Math. Phys.* **160** (1994), no. 1, p. 173–215.

[GV79] J. Ginibre & G. Velo – « On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case », *J. Funct. Anal.* **32** (1979), no. 1, p. 1–32.

[JP93] R. Johnson & X. B. Pan – « On an elliptic equation related to the blow-up phenomenon in the nonlinear Schrödinger equation », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **123** (1993), no. 4, p. 763–782.

[Lio84] P.-L. Lions – « The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), no. 2, p. 109–145.

[LPSS88] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem & P.-L. Sulem – « Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension », *Phys. Rev. A (3)* **38** (1988), no. 8, p. 3837–3843.

[Mer93] F. Merle – « Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power », *Duke Math. J.* **69** (1993), no. 2, p. 427–454.

[Mer96a] ______, « Blow-up results of virial type for Zakharov equations », *Comm. Math. Phys.* **175** (1996), no. 2, p. 433–455.

[Mer96b] ______, « Lower bounds for the blowup rate of solutions of the Zakharov equation in dimension two », *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), no. 8, p. 765–794.

[MM00] Y. Martel & F. Merle – « A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation », *J. Math. Pures Appl. (9)* **79** (2000), no. 4, p. 339–425.

[MM02a] ______, « Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equation », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 3, p. 617–664 (electronic).

[MM02b] ______, « Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 1, p. 235–280.

[MM04] ______, « Review on blow up and asymptotic dynamics for critical and subcritical gKdV equations », in *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, Contemp. Math., vol. 350, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, p. 157–177.

[MR03] F. Merle & P. Raphael – « Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation », *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 3, p. 591–642.

[MR04] ______, « On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 3, p. 565–672.

[MR05a] ______, « The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 1, p. 157–222.

[MR05b] ______, « On one blow up point solutions to the critical nonlinear Schrödinger equation », *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **2** (2005), no. 4, p. 919–962.

[MR05c] ______, « Profiles and quantization of the blow up mass for critical nonlinear Schrödinger equation », *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), no. 3, p. 675–704.

[Naw99] H. Nawa – « Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power », *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 2, p. 193–270.

[OT91] T. Ogawa & Y. Tsutsumi – « Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation », *J. Differential Equations* **92** (1991), no. 2, p. 317–330.

[Per01] G. Perelman – « On the formation of singularities in solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation », *Ann. Inst. H. Poincaré* **2** (2001), no. 4, p. 605–673.

[Rap04] P. Raphael – « On the blow up phenomenon for the L^2 critical non linear Schrödinger equation », preprint, 2004.

[Rap05] ______, « Stability of the log-log bound for blow up solutions to the critical non linear Schrödinger equation », *Math. Ann.* **331** (2005), no. 3, p. 577–609.

[SS99] C. Sulem & P.-L. Sulem – *The nonlinear Schrödinger equation*, Applied Mathematical Sciences, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1999, Self-focusing and wave collapse.

[Tzv05] N. Tzvetkov – « On the long time behaviour of KdV type equations », in *Séminaire Bourbaki, vol. 2003/2004*, Astérisque, vol. 299, 2005, exp. no 933.

[Wei85] M. I. Weinstein – « Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations », *SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), no. 3, p. 472–491.

[Wei83] ______, « Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates », *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), no. 4, p. 567–576.

[ZS71] V. E. Zakharov & A. B. Shabat – « Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media », *Ž. Èksper. Teoret. Fiz.* **61** (1971), no. 1, p. 118–134.

Nicolas BURQ

Université Paris XI
UMR 8628 du CNRS
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F–91405 Orsay Cedex
E-mail : `nicolas.burq@math.u-psud.fr`