Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57e année, 2004-2005, nO 949, p. 379 à 413

ALGÈBRES SIMPLES CENTRALES SUR LES CORPS DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES [d'après A. J. de Jong]

par **Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE**

1. INTRODUCTION

À toute algèbre simple centrale A de dimension finie sur un corps F sont associés deux entiers, l'indice et l'exposant. L'indice de A est le minimum des degrés $[E:F]$, où E parcourt les corps, extensions finies de F, pour lesquels la E-algèbre $A \otimes_F E$ est isomorphe à une algèbre de matrices. L'exposant de A est l'ordre de la classe de A dans le groupe de Brauer du corps F. L'exposant divise l'indice, mais ne lui est pas nécessairement égal. Lorsque F est un corps de nombres, c'est un théorème des années 1930 qu'exposant et indice coïncident ([BHN]). A. J. de Jong [**?**] montre qu'ils coïncident aussi lorsque F est un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes.

Au § 1 de cet exposé, on trouvera des rappels sur les algèbres simples centrales sur un corps, le groupe de Brauer, les extensions de ces notions au-dessus d'un schéma. On passe en revue les propriétés connues des corps de déploiement des algèbres simples centrales et on cite plusieurs problèmes ouverts dans cette direction, particulièrement en ce qui concerne la relation entre exposant et indice.

Le § 2 décrit l'essentiel de la démonstration de de Jong, qui passe par des déformations d'algèbres d'Azumaya sur une surface, rendues possibles par des transformations élémentaires. On décrit la démonstration « simplifiée » évoquée à la fin de l'article de de Jong. Cette démonstration requiert un bon théorème de type Bertini pour démarrer, mais elle évite les études fines de variétés singulières de [**?**].

Le manque de temps, de place, et de compétence nous ont fait renoncer à décrire la nouvelle et très intéressante preuve, par Lieblich [Lie], du théorème de de Jong dans le cas non ramifié. Cette preuve, qui se place dans le cadre des champs algébriques, s'appuie sur le théorème de Graber, Harris, Starr et de Jong ([GHS], [dJS1]) selon lequel une variété (séparablement) rationnellement connexe sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos a un point rationnel. Il est par ailleurs trop tôt pour parler d'une troisième démonstration, annoncée par de Jong et Starr, et qui s'inscrit dans l'étude toute nouvelle des variétés 1-rationnellement connexes.

Au § 3, on donne une liste de propriétés des groupes algébriques linéaires sur un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes que la coïncidence entre exposant et indice permet d'obtenir.

Les corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes sont de dimension cohomologique 2. Au § 4, on discute divers résultats récents sur des corps qui sont de dimension cohomologique 3, à savoir les corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique.

Pour de nombreuses discussions sur le travail de de Jong, je remercie M. Ojanguren et R. Parimala. Je me suis en particulier fortement inspiré d'un cours donné par cette dernière à Lens en juin 2004. Je remercie O. Gabber, P. Gille, B. Kahn, T. Szamuely et tout particulièrement L. Moret-Bailly pour leurs critiques d'une première version du présent texte.

2. LA THÉORIE CLASSIQUE

2.1. Algèbres simples centrales sur un corps ([A], [D], [Bki], [Bld], [GSz])

Soient k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. La k-algèbre $\mathrm{End}(V)$ satisfait les propriétés suivantes :

(a) Elle est de dimension finie, n^2, sur k.

(b) Son centre est k.

(c) Elle ne possède pas d'idéal bilatère non trivial.

Par le choix d'une base de V, $\mathrm{End}_k(V)$ s'identifie à l'algèbre $M_n(k)$ des matrices carrées de dimension n sur le corps k.

Une k-algèbre simple centrale est une forme tordue d'une telle algèbre. Plus précisément :

DÉFINITION 2.1. — *Une k-algèbre simple centrale est une k-algèbre de dimension finie, de centre réduit à k, sans idéal bilatère non trivial.*

Pour une k-algèbre A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est une k-algèbre simple centrale.

(ii) Il existe un corps K contenant k tel que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit simple centrale.

(iii) Pour tout corps K contenant k, la K-algèbre $A \otimes_k K$ est simple centrale.

(iv) Il existe un corps K contenant k et un entier $n \geqslant 1$ tels que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit K-isomorphe à une K-algèbre $M_n(K)$.

(v) Il existe un corps K extension finie séparable de k et un entier $n \geqslant 1$ tels que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit K-isomorphe à une K-algèbre $M_n(K)$.

Ceci implique en particulier que la dimension de A sur k est un carré, soit n^2. L'entier n est appelé le *degré* de A (sur k).

Un corps K comme en (iv) est dit *corps de déploiement* de l'algèbre A. D'après (v), une clôture séparable de k est un corps de déploiement de A.

D'après Wedderburn, toute k-algèbre simple centrale A est isomorphe à une k-algèbre de matrices $M_r(D)$, où D est simple centrale à division, c'est-à-dire que c'est un corps gauche de centre k (on emploiera indifféremment l'une ou l'autre terminologie). Un tel corps gauche D est déterminé, comme k-algèbre, à isomorphisme non unique près.

Le degré de D sur k est appelé l'*indice* de A (sur k). Il est noté $\mathrm{ind}_k(A) = \mathrm{ind}_k(D)$.

Soit A une k-algèbre simple centrale de degré n. Pour tout entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$ on peut considérer la k-variété algébrique dont les points sur une clôture séparable k_s de k sont les idéaux à droite de $A \otimes_k k_s$ de k_s-dimension mn. On note cette variété $SB(A, m)$. La k-variété $SB(A, 1)$ est la variété de Severi-Brauer associée par F. Châtelet à la k-algèbre simple centrale A. On a les faits suivants ([Blt]). La k-variété $SB(A, m)$ est une forme de la grassmannienne $\mathrm{Grass}(m, n)$. La k-variété $SB(A, m)$ possède un k-point si et seulement $\mathrm{ind}_k(A)$ divise m. Ainsi l'indice $\mathrm{ind}_k(A)$ est le plus petit entier m tel que la k-variété $SB(A, m)$ possède un k-point. C'est aussi le p.g.c.d. des entiers m satisfaisant cette propriété.

Pour $A = M_r(D)$ comme ci-dessus, et K un corps contenant k, de degré fini sur k, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Être k-isomorphe à un sous-corps commutatif maximal de D.

(ii) Être de degré minimal sur k parmi toutes les extensions finies de k déployant A.

Les sous-corps commutatifs maximaux de D sont tous de degré $\mathrm{ind}_k(D)$. Il existe de tels sous-corps qui sont séparables sur k.

L'indice $\mathrm{ind}_k(A)$ d'une k-algèbre simple centrale A peut donc aussi se définir comme le degré commun des corps satisfaisant l'une des propriétés ci-dessus. C'est aussi le p.g.c.d. des degrés $[K : k]$ des extensions finies de corps K/k déployant D.

Une k-algèbre simple centrale à division D/k de degré $n = \prod_i p_i^{n_i}$ avec les p_i premiers distincts s'écrit comme un produit tensoriel $D = D_1 \otimes_k \cdots \otimes_k D_n$, chaque D_i étant un corps gauche de degré $p_i^{n_i}$.

Rappelons la notion d'algèbre cyclique. Soit K/k une extension finie cyclique du corps k, de degré n, soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K/k)$ et soit $b \in k^*$. On munit le k-vectoriel $\oplus_{i=0}^{n-1} K.Y^i$ d'une structure de k-algèbre simple centrale par les relations $Y^n = b$ et $Yx = \sigma(x)Y$ pour $x \in K$. On note $A = (K/k, \sigma, b)$ cette k-algèbre. Lorsque k contient une racine n-ième de 1, soit ζ_n, on peut écrire $K = k(\alpha)$ avec $\alpha^n = a \in k^*$. Soit σ tel que $\sigma(\alpha) = \zeta_n \alpha$. On note alors $A = (a, b)_{\zeta_n}$. Cette k-algèbre, considérée par Dickson, est engendrée par deux éléments X et Y soumis aux relations $X^n = a$, $Y^n = b$, $YX = \zeta_n XY$.

Pour $n = 2$, on retrouve la définition des algèbres de quaternions (a, b).

2.2. Groupe de Brauer d'un corps ([A], [Bki], [GSz], [S2])

Soient A et B deux k-algèbres simples centrales. Le produit tensoriel $A \otimes_k B$ est une k-algèbre simple centrale. Étant donnée une k-algèbre simple centrale A, on dispose de l'algèbre opposée A^{op}, et l'homomorphisme $A \otimes_k A^{op} \to \mathrm{End}_{k-\mathrm{vect}}(A)$ qui à $a \otimes b$ associe $x \mapsto axb$ est un isomorphisme de k-algèbres. Considérons l'ensemble des classes d'isomorphie de k-algèbres simples centrales. Si l'on introduit la relation d'équivalence « L'algèbre A est équivalente à l'algèbre B s'il existe des entiers r, s avec $M_r(A) \simeq M_s(B)$ », on voit que le produit tensoriel induit sur les classes d'équivalence une structure de groupe abélien, dont l'élément neutre est la classe des algèbres $M_n(k)$ (n arbitraire). C'est le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ du corps k.

Notons $\mathrm{Az}_n(k)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de k-algèbres simples centrales de degré n. On dispose d'une application naturelle $\mathrm{Az}_n(k) \to \mathrm{Br}(k)$. Cette application est une injection : si deux k-algèbres simples centrales A et B de même degré ont même classe dans le groupe de Brauer, elles sont isomorphes. On a donc :

$$\mathrm{Br}(k) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Az}_n(k),$$

la loi de groupe étant induite par les produits tensoriels

$$\mathrm{Az}_n(k) \times \mathrm{Az}_m(k) \longrightarrow \mathrm{Az}_{nm}(k).$$

On a une seconde définition du groupe de Brauer du corps k ([S1]). On note k_s une clôture séparable de k, g le groupe de Galois de k_s sur k. Alors

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(g, k_s^*).$$

On passe de l'une à l'autre définition en utilisant la cohomologie galoisienne de la suite exacte de k-groupes lisses :

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow GL_{n,k} \longrightarrow PGL_{n,k} \longrightarrow 1.$$

L'ensemble pointé de cohomologie galoisienne $H^1(k, PGL_n) = H^1(g, PGL_n(k_s))$ est en bijection avec $\mathrm{Az}_n(k)$ ([S1], Chap. X, § 4 et § 5).

Une k-algèbre simple centrale A est déployée, c'est-à-dire k-isomorphe à une algèbre de matrices sur k, si et seulement si sa classe $\alpha = [A] \in \mathrm{Br}(k)$ est nulle. Ainsi la K-algèbre $A \otimes_k K$ est déployée si et seulement si $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

L'*indice* $\mathrm{ind}_k(A)$ d'une k-algèbre simple centrale A ne dépend que de la classe $\alpha = [A]$ de A dans $\mathrm{Br}(k)$. Cet entier qu'on peut donc noter $\mathrm{ind}_k(\alpha)$ est donc

(i) le plus petit degré d'une extension finie (séparable) de corps K/k telle que l'on ait $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$;

(ii) le p.g.c.d. des degrés des extensions finies de corps K/k (séparables) telles que l'on ait $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

On définit par ailleurs l'*exposant* d'une k-algèbre simple centrale A comme l'exposant de $\alpha = [A]$ dans le groupe de Brauer de k.

On utilise traditionnellement le mot « exposant » (ou parfois « période ») plutôt que le mot « ordre » pour éviter la confusion avec les ordres (maximaux ou autres) lorsque le corps k est le corps des fractions d'un anneau.

Proposition 2.2 (R. Brauer)

(i) *L'exposant divise l'indice.*

(ii) *Les nombres premiers qui divisent l'indice divisent l'exposant.*

Preuve. — Le premier énoncé résulte de l'existence, pour une extension finie de corps K/k, d'un homomorphisme de corestriction $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(k)$ pour lequel la composition avec la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)$ est la multiplication par le degré $[K : k]$.

Montrons le second énoncé. Soit l premier ne divisant pas l'exposant de A. Soit K/k une extension finie galoisienne déployant A. Soit $F \subset K$ le corps fixe d'un l-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(K/k)$. L'exposant de $[A \otimes_k F] \in \mathrm{Br}(F)$ divise celui de $[A] \in \mathrm{Br}(k)$, il est donc premier à l. Par ailleurs la restriction de $A \otimes_k F$ à K est triviale, l'argument de corestriction montre que la classe $[A \otimes_k F] \in \mathrm{Br}(F)$ est annulée par $[K : F]$ qui est une puissance de l. Ainsi $[A \otimes_k F] = 0 \in \mathrm{Br}(F)$, la k-algèbre A est déployée par l'extension F/k qui est de degré premier à l. Ainsi l ne divise pas l'indice. □

2.3. Algèbres d'Azumaya, cohomologie étale, ramification ([Gr], [Mi])

Nous nous contenterons ici de rappeler quelques résultats. Pour les démonstrations, on renvoie aux trois exposés de Grothendieck [Gr] et au chapitre IV du livre de Milne [Mi].

Soit X un schéma. Une algèbre d'Azumaya sur X de degré n est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres localement libres de rang fini qui localement pour la topologie étale sur X est isomorphe à $M_n(\mathcal{O}_X)$.

Soit A une telle algèbre. À tout entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$ on associe un X-schéma $SB(A, m)$. C'est le schéma des $\mathcal{O}_X$-idéaux à droite de A qui sont localement libres de rang mn sur X et qui sont localement facteurs directs dans A. C'est un X-schéma projectif, lisse, à fibres connexes. Pour $m = 1$, c'est le schéma de Severi-Brauer ([Gr]) associé à A.

On notera $\mathrm{Az}_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'algèbres d'Azumaya sur X de degré n. Le produit tensoriel de telles $\mathcal{O}_X$-algèbres induit un produit

$$\mathrm{Az}_n(X) \times \mathrm{Az}_m(X) \longrightarrow \mathrm{Az}_{n+m}(X).$$

Si l'on considère l'application induite sur les classes d'isomorphie, et que de plus on considère comme triviales les algèbres de la forme $\mathcal{E}nd(V)$ pour V un fibré vectoriel sur X, on obtient un groupe abélien $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ (ce groupe est noté $\mathrm{Br}(X)$ dans [Gr]). Pour X quasi-compact, ce groupe est de torsion.

On dispose par ailleurs du groupe de Brauer défini par Grothendieck. C'est le deuxième groupe de cohomologie étale $\mathrm{Br}(X) = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ (ce groupe est noté $\mathrm{Br}'(X)$ dans [Gr]).

Si le schéma X est régulier, ou plus généralement si tout ouvert étale de X a ses anneaux locaux factoriels, le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est de torsion : ceci résulte du théorème 2.4 ci-dessous.

Pour tout schéma X, il y a un plongement naturel

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(X).$$

Un théorème de Gabber, dont de Jong [dJ2] a donné une démonstration, assure que si X est quasi-compact et quasi-séparé, et possède un fibré inversible ample, alors le plongement ci-dessus induit un isomorphisme entre $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ et le sous-groupe de torsion de $\mathrm{Br}(X)$.

Soit R un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, de corps résiduel κ. Soit n un entier inversible sur R. On dispose alors d'une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow {}_n\mathrm{Br}(R) \longrightarrow {}_n\mathrm{Br}(K) \longrightarrow H^1(\kappa, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow 0.$$

(Pour un groupe abélien M et un entier $n > 0$, on note ${}_nM = \{x \in M, nx = 0.\}$.)

On note ∂_R l'homomorphisme ${}_n\mathrm{Br}(K) \to H^1(\kappa, \mathbf{Z}/n)$, qu'on appelle l'application résidu. Un élément de $\alpha \in {}_n\mathrm{Br}(K)$ est dit *ramifié* (par rapport à l'anneau de valuation discrète R) si $\partial_R(\alpha) \neq 0$.

Soit $R \subset S$ une inclusion locale d'anneaux de valuation discrète induisant une extension finie $K \subset L$ des corps des fractions et une extension finie $\kappa_R \subset \kappa_S$ des corps résiduels. Soit $e = e_{S/R}$ l'indice de ramification de S sur R. Soit $n > 0$ premier aux caractéristiques résiduelles. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
{}_n\mathrm{Br}(K) & \xrightarrow{\partial_R} & H^1(\kappa_R, \mathbf{Z}/n) \\
{\scriptstyle \mathrm{Res}_{K,L}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times e_{S/R}.\mathrm{Res}_{\kappa_R,\kappa_S}} \\
{}_n\mathrm{Br}(L) & \xrightarrow{\partial_S} & H^1(\kappa_S, \mathbf{Z}/n).
\end{array}$$

Soit X un schéma noethérien intègre. Soit K le corps des fonctions rationnelles de X. On note $X^{(i)}$ l'ensemble des points de codimension i de X. On note κ_x le corps résiduel d'un point $x \in X$. On note μ_l le faisceau étale des racines l-ièmes de 1, et $\mu_l^{\otimes 2} = \mu_l \otimes \mu_l$.

Proposition 2.3. — *Soit X un schéma noethérien intègre, excellent, de dimension 2. Soit l un nombre premier inversible sur X.*

(i) *Il existe un complexe naturel de groupes de cohomologie étale*

$$0 \longrightarrow H^2(X,\mu_l^{\otimes 2}) \longrightarrow H^2(K,\mu_l^{\otimes 2}) \\ \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(1)}} H^1(\kappa_x,\mu_l) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(2)}} H^0(\kappa_x,\mathbf{Z}/l) \longrightarrow 0.$$

(ii) *Si X est régulier, ce complexe est exact en le terme $H^2(K,\mu_l^{\otimes 2})$.*

(iii) *Si X est un schéma local régulier, le complexe est aussi exact en $H^2(X,\mu_l^{\otimes 2})$.*

Quelques références. — Pour une description du complexe, et en particulier des flèches dans le complexe, je renvoie à l'article de Kato [Kt] (qui décrit de tels complexes dans un cadre bien plus large que celui utile pour le présent exposé). Pour établir les autres énoncés on peut adjoindre les racines l-ièmes de 1, on est alors ramené à deux théorèmes sur le groupe de Brauer, dus à Auslander-Goldman et Grothendieck. Pour X local, soit $X = \mathrm{Spec}(R)$, on a $H^2(R,\mu_l) = {}_lH^2(R,\mathbb{G}_m)$. L'énoncé (ii) est alors une conséquence du théorème 2.5 ci-après, et l'énoncé (iii) une conséquence du théorème 2.4 ci-après. (Dans le cas local régulier, on conjecture que tout le complexe est exact, ce n'est pas utile pour notre propos.)

Théorème 2.4 ([AG], [Gr]). — *Soit X un schéma noethérien intègre, et soit K son corps des fonctions. Si X est géométriquement localement factoriel, par exemple si X est régulier, l'homomorphisme $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K)$ est injectif.* □

Théorème 2.5. — *Soit X un schéma régulier intègre de dimension au plus 2, et soit K son corps des fonctions. Tout élément de $\mathrm{Az}_n(K)$ dont l'image dans $\mathrm{Br}(K)$ est dans $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(K)$ est dans l'image de l'application de restriction $\mathrm{Az}_n(X) \to \mathrm{Az}_n(K)$.*

Soit $n > 0$ un entier inversible sur X. Si un élément de $\mathrm{Az}_n(K)$ a une image dans ${}_n\mathrm{Br}(K)$ dont les résidus en tous les points de codimension 1 de X sont nuls, alors il provient d'un élément de $\mathrm{Az}_n(X)$.

Ce théorème combine un énoncé sur les anneaux de valuation discrète ([R]) et le théorème que tout module réflexif sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre. On renvoie le lecteur à [AG], [Gr] (II, Thm. 2.1), [CTS] (Cor. 6.14), [OP] (§ 1). □

Soient X et K comme dans la proposition 2.3. À tout élément $\alpha \in H^2(K,\mu_l^{\otimes 2})$ on associe son lieu de ramification : c'est l'adhérence dans X de l'ensemble des points x de codimension 1 de X en lesquels α a un résidu non nul dans $H^1(\kappa_x,\mu_l)$.

À tout couple d'éléments $u, v \in K^*$ on associe le symbole $(u,v) \in H^2(K,\mu_l^{\otimes 2})$: c'est le cup-produit des classes de u et v dans $K^*/K^{*l} = H^1(K,\mu_l)$. Lorsque les racines l-ièmes de 1 sont dans K, après avoir fait un choix d'une racine primitive, on trouve ainsi les classes des algèbres cycliques dans $H^2(K,\mu_l) = {}_l\mathrm{Br}(K)$.

Proposition 2.6 (Saltman [Sa1], [CTOP]). — *Soit R un anneau local régulier excellent de dimension 2, d'idéal maximal m, de corps des fractions K. Soit $\alpha \in H^2(K, \mu_l^{\otimes 2})$ un élément dont le lieu de ramification sur $X = \mathrm{Spec}(R)$ est un diviseur strictement à croisements normaux.*

(i) *Si ce lieu est vide, alors α est dans l'image de $H^2(R, \mu_l^{\otimes 2})$.*

(ii) *Si ce lieu est de la forme $s = 0$, où $s \in m$ est un paramètre régulier de R (i.e. R/s régulier), alors il existe $u \in R^*$ tel que $\alpha - (u, s)$ soit dans l'image de $H^2(R, \mu_l^{\otimes 2})$.*

(iii) *Si ce lieu est de la forme $st = 0$, où s et t engendrent l'idéal m, alors il existe $u, v \in R^*$ et $r \in \mathbf{Z}/l$ tels que $\alpha - (u, s) - (v, t) - r(s, t) \in H^2(K, \mu_l^{\otimes 2})$ soit dans l'image de $H^2(R, \mu_l^{\otimes 2})$.*

Preuve. — Le (i) résulte de la proposition 2.3 (ii).

Notons κ_s le corps des fractions de R/s. Le seul résidu non trivial de α est en $s = 0$, c'est une classe $\partial_s(\alpha) = \xi_s \in \kappa_s^*/\kappa_s^{*l}$ dont l'image dans $\mathbf{Z}/l$ par l'application valuation est zéro (2.3 (i)). On a la suite exacte évidente

$$1 \longrightarrow (R/s)^*/(R/s)^{*l} \longrightarrow \kappa_s^*/\kappa_s^{*l} \longrightarrow \mathbf{Z}/l \longrightarrow 0.$$

Il existe donc un élément $u_s \in (R/s)^*$ qui a pour image ξ_s via l'application de réduction $(R/s)^*/(R/s)^{*l} \to \kappa_s^*/\kappa_s^{*l}$. L'application de réduction $R^* \to (R/s)^*$ est surjective (R est un anneau local), on peut donc relever u_s en $u \in R^*$. Les formules usuelles pour le résidu d'un cup-produit montrent que le résidu de (u, s) en $s = 0$ est ξ_s, et il est zéro partout ailleurs, comme celui de α. La proposition 2.3 (ii) donne alors l'énoncé (ii).

Montrons (iii). Notons κ_s, resp. κ_t, le corps des fractions de R/s, resp. R/t, et κ le corps résiduel en l'idéal maximal m de R. Notons $\partial_s : H^1(\kappa_s, \mu_l) \to H^0(\kappa, \mathbf{Z}/l)$ et de même $\partial_t : H^1(\kappa_t, \mu_l) \to H^0(\kappa, \mathbf{Z}/l)$ les homomorphismes apparaissant dans la proposition 2.3. Soient ξ_s et ξ_t les résidus de α en $s = 0$ et $t = 0$. Comme la proposition 2.3 donne un complexe de groupes abéliens, on a $\partial_s(\xi_s) + \partial_t(\xi_t) = 0 \in \mathbf{Z}/l$. Soit $r \in \mathbf{Z}$ avec $\partial_s(\xi_s) = r \in \mathbf{Z}/l$ et $\partial_t(\xi_t) = -r \in \mathbf{Z}/l$. Procédant comme ci-dessus, on trouve $u, v \in R^*$ tels que l'image de $ut^r \in R[1/t]^*$ dans κ_s^*/κ_s^{*l} soit ξ_s et que l'image de $vs^{-r} \in R[1/s]^*$ dans κ_t^*/κ_t^{*l} soit ξ_t. On vérifie que tous les résidus de

$$\alpha + (s, u) + (t, v) + r(s, t) \in H^2(K, \mu_l^{\otimes 2})$$

aux points de codimension 1 de X sont nuls, la proposition 2.3 (ii) donne alors que cet élément de $H^2(K, \mu_l^{\otimes 2})$ est l'image d'un (unique) élément de $H^2(R, \mu_l^{\otimes 2})$. $\square$

2.4. Questions sur les corps de déploiement

Sauf mention explicite du contraire, on suppose ici que les corps considérés sont de caractéristique zéro, ou du moins que l'indice des algèbres considérées est premier à la caractéristique du corps de base. Étant donnés un corps k et une k-algèbre simple centrale A, que peut-on dire sur les extensions finies de corps K/k qui déploient A ?

Il existe des k-algèbres simples centrales qui ne sont pas déployées par une extension cyclique du corps de base (Tignol-Amitsur, Tignol-Wadsworth [TW] Exemples 3.6 et Thm. 4.7 (v)). Un exemple simple est le produit tensoriel $(x,y)\otimes_k(z,t)$ des algèbres de quaternions (x,y) et (z,t) sur le corps $k=\mathbf{C}(x,y,z,t)$ et même déjà sur le corps de séries formelles itérées $k=\mathbf{C}((x))((y))((z))((t))$.

Toute k-algèbre simple centrale A d'exposant n sur un corps k contenant une racine primitive n-ième de 1, soit ζ_n, est semblable à un produit d'algèbres cycliques $(a,b)_{\zeta_n}$, elle est en particulier déployée par une extension multicyclique de k (conséquence immédiate du théorème de Merkur'ev et Suslin [MS]). Il en résulte que toute k-algèbre simple centrale A est déployée par une extension résoluble de k.

Étant donnés un corps K et une k-algèbre simple centrale *à division* D, on dit qu'elle est un produit croisé si elle admet un sous-corps commutatif maximal $K\subset D$ galoisien sur k. On dit qu'elle est cyclique si elle admet un sous-corps commutatif maximal $K\subset D$ cyclique sur k.

Amitsur (1972) montra qu'il existe des algèbres à division qui ne sont pas des produits croisés : elles ne possèdent pas de sous-corps commutatif maximal galoisien sur le corps de base. Les indices de ses exemples ainsi que de ceux qui ont été construits par la suite sont de la forme $2^r\prod_i p_i^{n_i}$ avec les $p_i\geqslant 3$ premiers, $r\geqslant 3$, et $n_i\geqslant 2$ pour tout i. Lorsque l'indice est premier, la question suivante est ouverte :

Problème. — Sur tout corps k, toute algèbre à division d'indice premier l est-elle cyclique ?

C'est le cas de façon triviale pour $l=2$, c'est un résultat de Wedderburn pour $l=3$, la question est ouverte déjà pour $l=5$.

Dès les années 1930, des exemples furent donnés (par Albert, Brauer, Köthe, Nakayama, voir les références dans [CTG]) pour montrer qu'indice et exposant d'une algèbre ne coïncident pas nécessairement.

Un énoncé général permettant de fabriquer de tels exemples est le suivant :

PROPOSITION 2.7 (Tignol [T]). — *Soient K/k une extension cyclique de corps, σ un générateur du groupe de Galois de K sur k et t une variable. Soit A une k-algèbre simple centrale. On a les formules*

$$\mathrm{ind}_{k(t)}(A_{k(t)}\otimes_{k(t)}(K(t)/k(t),\sigma,t))=\mathrm{ind}(A_K).[K:k]$$

et

$$\mathrm{ind}_{k((t))}(A_{k((t))}\otimes_{k((t))}(K((t))/k((t)),\sigma,t))=\mathrm{ind}(A_K).[K:k].$$

En particulier, si A est un corps gauche, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *La K-algèbre A_K est un corps gauche.*

(ii) *La $k(t)$-algèbre $A_{k(t)}\otimes_{k(t)}(K(t)/k(t),\sigma,t)$ est un corps gauche.*

(iii) *La $k((t))$-algèbre $A_{k((t))}\otimes_{k((t))}(K((t))/k((t)),\sigma,t)$ est un corps gauche.* □

Donnons deux exemples. Sur le corps $K = \mathbf{C}(x_1, \dots, x_d)$ des fonctions rationnelles en d variables sur le corps des complexes, le produit tensoriel d'algèbres de quaternions $A = (x_1 + 2, x_2) \otimes_K \cdots \otimes_K (x_1 + d, x_d)$ est un corps gauche, d'exposant 2 et d'indice 2^{d-1}. Il en est ainsi déjà sur le corps $K = \mathbf{C}(x_1)((x_2)) \dots ((x_d))$. Par ailleurs soit $\mathbf{F}$ un corps fini de caractéristique différente de 2, et soit $a \in \mathbf{F}$ non carré. Sur le corps de fonctions rationnelles $K = \mathbf{F}(x, y)$, l'algèbre $(x, a) \otimes_K (x + 1, y)$ est un corps gauche, d'exposant 2 et d'indice 4. Ces exemples font intervenir la ramification des algèbres considérées en des valuations convenables du corps de base.

Dans [Kr] et [CTG] on trouvera diverses constructions d'algèbres d'Azumaya A (donc sans ramification) sur des variétés projectives, lisses, connexes X sur les complexes (de dimension au moins 3) telles que l'exposant divise proprement l'indice de la $\mathbf{C}(X)$-algèbre obtenue par évaluation de A au point générique de X. Pour tout $d \geqslant 2$, et tout nombre premier l, O. Gabber donne des exemples de variétés projectives, lisses, connexes X de dimension d, en fait des produits de courbes, qui possèdent une algèbre d'Azumaya d'exposant l et d'indice (générique) l^{d-1}.

Les exemples obtenus de cette façon sont définis sur des corps dont la dimension cohomologique [S2] est au moins 3. Par d'autres méthodes, pour tout entier n, Merkur'ev [M2] construit un (très gros) corps K_n de dimension cohomologique 2 sur lequel il existe un produit tensoriel de n algèbres de quaternions qui est un corps gauche, et donc définit un élément de $\mathrm{Br}(K_n)$ d'exposant 2 et d'indice 2^n.

Il existe néanmoins plusieurs classes de corps de dimension cohomologique 2 ([S2]) (ou de dimension cohomologique virtuelle 2) pour lesquels on sait que l'indice coïncide avec l'exposant. Pour chacune des classes suivantes, on sait en outre que toute algèbre à division est cyclique :

- les corps globaux et les corps locaux (Brauer-Hasse-Noether, Albert) ([BHN], [D], [Ro])
- les corps de la forme $k = F((t))$ avec F corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1
- les corps de fractions d'anneaux locaux normaux henséliens excellents de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique zéro (Artin [Ar3], Ford-Saltman [FS], [CTOP]).

Soit $r \geqslant 0$ un entier. Un corps k satisfait la propriété C_r si pour toute extension finie de corps K/k, toute forme homogène à coefficients dans K de degré d en $n > d^r$ variables a un zéro non trivial dans K. Les corps de fonctions de r variables sur un corps algébriquement clos sont des corps C_r (S. Lang). C'est une conséquence du théorème de Merkur'ev et Suslin [MS] que tout corps C_2 est de dimension cohomologique au plus 2.

Problème ((M. Artin [Ar2], Appendix)). — Soit k un corps C_2. Pour toute algèbre simple centrale sur k, l'indice est-il égal à l'exposant ?

Lorsque l'on se limite aux algèbres d'indice 2-primaire ou 3-primaire, la réponse est affirmative[(1)]. Cette conséquence du théorème de Merkur'ev et Suslin [MS] a été remarquée par plusieurs auteurs ([Ar2], [MS]). Le cas particulier des corps de fonctions de deux variables sur les complexes avait été établi plus tôt, par M. Artin et J. Tate ([Ar2], Appendix), qui utilisaient un résultat de S. Bloch (1974).

Pour les corps de fonctions de deux variables sur les complexes, et les algèbres d'indice arbitraire sur de tels corps, la réponse affirmative à cette question est le théorème de de Jong [**?**] qui fait l'objet de cet exposé. Pour $r \leqslant 2$, on a donc une réponse affirmative à la question suivante (voir [CT]), où la borne suggérée est, d'après les exemples mentionnés ci-dessus, la meilleure possible.

Problème[(2)]. — Pour toute algèbre simple centrale sur un corps de fonctions de r variables sur le corps des complexes, l'indice divise-t-il l'exposant à la puissance $r-1$?

Les corps de fonctions de r variables sur le corps des complexes sont des corps C_r. On peut se poser la question ci-dessus pour tout corps C_r. Les corps de fonctions de r variables sur un corps fini sont des corps C_{r+1}.

Problème. — Pour toute algèbre simple centrale sur un corps de fonctions de r variables sur un corps fini, l'indice divise-t-il l'exposant à la puissance r ?

Lorsque $r = 1$, c'est un résultat classique (Hasse).

Lorsque $r = 2$, c'est un résultat récent de Lieblich [Lie] que pour les algèbres non ramifiées, d'indice premier à la caractéristique, l'indice est égal à l'exposant[(3)]. Pour une algèbre ramifiée, la technique évoquée au début du § 4 ci-dessous (méthode de Saltman) permet alors de montrer que l'indice divise l'exposant au cube. Comme on a vu ci-dessus, dans ce cas le mieux que l'on puisse espérer en général est que l'indice divise l'exposant au carré.

[(1)]Quitte à remplacer l'hypothèse C_2 par sa variante C_2', cf. [CTG] (Prop. 7).

[(2)]Soit X une variété de dimension r sur le corps $\mathbf{R}$ des réels, géométriquement intègre et sans point réel. Le corps des fonctions $K = \mathbf{R}(X)$ est de dimension cohomologique r mais on ne sait pas s'il est C_r. On peut pour un tel corps poser le même problème que ci-dessus. Pour les surfaces, i.e. pour $r = 2$, le problème se ramène à l'une quelconque des questions suivantes (Pfister, 1982) :
(a) Toute forme quadratique en au moins 5 variables sur un tel corps admet-elle un zéro non trivial ?
(b) Le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions sur un tel corps est-il semblable à une algèbre de quaternions ?

[(3)]Pour obtenir ce résultat, outre des techniques de champs algébriques il utilise les propriétés des espaces de modules de fibrés vectoriels sur les surfaces projectives et lisses [HL].

3. LE THÉORÈME DE DE JONG

3.1. Deux invariants cohomologiques des algèbres d'Azumaya de degré n

Soient X un schéma et $n > 0$ un entier. L'ensemble $\mathrm{Az}_n(X)$ des classes d'isomorphie d'algèbres d'Azumaya de degré n sur X s'identifie à l'ensemble de cohomologie de Čech étale $H^1(X, PGL_n)$.

On a le diagramme commutatif de suites exactes de X-schémas en groupes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d] & SL_n \arrow[r] \arrow[d] & PGL_n \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "x\mapsto x^n"'] & GL_n \arrow[r] \arrow[d, "\det"] & PGL_n \arrow[r] & 1 \\
 & \mathbb{G}_m \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathbb{G}_m \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & . &
\end{tikzcd}$$

Supposons n inversible sur X. Les suites exactes ci-dessus définissent alors des suites exactes de faisceaux pour la topologie étale sur X. De la suite horizontale médiane on tire la suite exacte d'ensembles pointés de cohomologie de Čech étale ([Mi], Chapitre IV, Thm. 2.5) :

$$H^1(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(X, GL_n) \longrightarrow H^1(X, PGL_n) \longrightarrow {}_nH^2(X, \mathbb{G}_m). \tag{3.1.1}$$

L'application composée $\mathrm{Az}_n(X) = H^1(X, PGL_n) \to H^2(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(X)$ associe à une algèbre d'Azumaya A sa classe $[A]$ dans le groupe de Brauer cohomologique $\mathrm{Br}(X)$, classe qui est annulée par n.

La suite exacte supérieure donne naissance à une application

$$\mathrm{cl} : \mathrm{Az}_n(X) = H^1(X, PGL_n) \longrightarrow H^2(X, \mu_n).$$

La suite exacte verticale de gauche (suite de Kummer) donne naissance à la suite exacte bien connue

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)/n \longrightarrow H^2(X, \mu_n) \longrightarrow {}_n\mathrm{Br}(X) \longrightarrow 0.$$

Pour $A \in \mathrm{Az}_n(X)$, la flèche de droite envoie $\mathrm{cl}(A) \in H^2(X, \mu_n)$ sur $[A] \in {}_n\mathrm{Br}(X)$.

Lemme 3.1. — *Soit X un schéma.*

(a) *Soit $A \in \mathrm{Az}_n(X)$. Si l'on a $[A] = 0 \in \mathrm{Br}(X)$, alors il existe un fibré vectoriel V sur X de rang n tel que $A = \mathcal{E}nd_X(V)$.*

(b) *Soient V_1 et V_2 deux fibrés vectoriels de rang n sur X ; si l'on a un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{E}nd(V_1) \simeq \mathcal{E}nd(V_2)$, alors il existe un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur X et un isomorphisme $V_1 \simeq V_2 \otimes \mathcal{L}$.*

(c) *Soit V un fibré vectoriel sur X de rang n, $A = \mathcal{E}nd(V) \in \mathrm{Az}_n(X)$. Supposons n inversible sur X. L'image de la classe de* $\det(V) = \Lambda^n V$ *dans* $\mathrm{Pic}(X)$ *par la flèche de Kummer* $\mathrm{Pic}(X)/n \to H^2(X, \mu_n)$ *coïncide avec l'opposé de* $\mathrm{cl}(A) \in H^2(X, \mu_n)$. □

Preuve. — Les points (a) et (b) sont des conséquences de la suite exacte (3.1.1). Le point (c) s'établit en considérant les suites exactes de cohomologie de Čech étales déduites du diagramme commutatif de suites exactes de X-schémas en groupes lisses :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & SL_n \arrow[r] & PGL_n \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r, "x\mapsto(x,x^{-1})"] \arrow[u, "x\mapsto x"] \arrow[d, "x\mapsto x^{-1}"'] & SL_n \times \mathbb{G}_m \arrow[r, "(u,v)\mapsto uv"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & GL_n \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, "\det"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r, "x\mapsto x^n"] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$
□

3.2. Transformations élémentaires d'algèbres d'Azumaya sur une surface

Soient X un schéma, $A \in \mathrm{Az}_n(X)$ et $D \subset X$ un diviseur de Cartier effectif, $I_D \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal inversible le définissant. Supposons que la restriction A_D de A à D s'écrive $\mathcal{E}nd(\overline{V})$, avec $\overline{V}$ un fibré vectoriel sur D, et que l'on dispose d'un sous-fibré vectoriel $\overline{F} \subset \overline{V}$ sur D localement facteur direct. On construit alors une autre algèbre d'Azumaya $A' \in \mathrm{Az}_n(X)$, appelée transformée élémentaire de A par rapport à $\overline{F} \subset \overline{V}$, de la façon suivante.

On considère la sous-algèbre B des sections de A qui préservent la filtration $\overline{F} \subset \overline{V}$. Notons $i : D \hookrightarrow X$ l'immersion fermée naturelle. On a la suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow i_*\mathcal{H}om_D(\overline{F}, \overline{Q}) \longrightarrow 0, \tag{3.2.1}$$

où $\overline{Q} = \overline{V}/\overline{F}$. Notons que B contient $\mathcal{O}_X \subset A$.

Pour tout point x de X, il existe un schéma affine U et un morphisme étale $U \to X$ d'image contenant x tel qu'après restriction à U on puisse écrire $A = \mathcal{E}nd(V)$ avec $V_D \simeq \overline{V}$ et que de plus il existe un scindage $V = F \oplus Q$ avec $F_D = \overline{F}$. Sur U, A_U se lit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}nd(F) & \mathcal{H}om(Q,F) \\ \mathcal{H}om(F,Q) & \mathcal{E}nd(Q) \end{pmatrix}$$

On définit une algèbre d'Azumaya A'_U sur U par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}nd(F) & I_D^{-1} \otimes \mathcal{H}om(Q,F) \\ I_D \otimes \mathcal{H}om(F,Q) & \mathcal{E}nd(Q) \end{pmatrix}$$

On vérifie que les algèbres A'_U pour divers U se recollent et définissent une algèbre d'Azumaya $A' \in \mathrm{Az}_n(X)$, que l'on appelle la transformée élémentaire de A le long de $\overline{F} \subset \overline{V}$. On vérifie sur la description locale ci-dessus que l'on a la suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A' \longrightarrow i_*\mathcal{H}om_D((I_D/I_D^2)\otimes \overline{Q}, \overline{F}) \longrightarrow 0. \tag{3.2.2}$$

Ici encore, l'inclusion $B \subset A'$ induit l'identité de $\mathcal{O}_X \subset B$ vers $\mathcal{O}_X \subset A'$.

(C'est une variante de constructions que l'on trouve dans d'autres contextes : transformations élémentaires entre ordres maximaux d'une algèbre simple centrale sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète [R], transformations élémentaires sur les fibrés vectoriels ([HL]).)

Lemme 3.2. — *Soient X un schéma connexe, D un diviseur de Cartier effectif sur X, et $i : D \subset X$ l'inclusion naturelle. Supposons donnée une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents*

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow i_*Q \longrightarrow 0$$

où V' et V sont des fibrés vectoriels sur X et Q est un fibré vectoriel de rang s sur D. L'application déterminant : $\det(V') \to \det(V)$ *identifie le fibré inversible* $\det(V')$ *avec le sous-fibré inversible* $\det(V)\otimes \mathcal{O}_X(-sD) \subset \det(V)$.

Preuve. — On dispose de l'inclusion naturelle de fibrés inversibles $\det(V') \to \det(V)$. Pour établir l'énoncé, on peut supposer le schéma X local, soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ et D défini par un élément non inversible $\pi \in R$. On a une surjection de R/π-modules libres $V/\pi \to Q$. En scindant celle-ci on trouve une base $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ du R-module libre V/π telle que $\overline{e}_{s+1}, \dots, \overline{e}_n$ soit une base du noyau. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ des relevés de $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ dans V. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base du R-module libre V et $(\pi e_1, \dots, \pi e_s, e_{s+1}, \dots, e_n)$ une base du R-module libre V'. L'application $\Lambda^n V' \to \Lambda^n V$ envoie le générateur évident de $\Lambda^n V'$ sur $\pi^s.(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$ qui est une base de $\det(V)\otimes \mathcal{O}_X(-sD)$. □

Proposition 3.3. — *Soient X un schéma connexe, $A \in \mathrm{Az}_n(X)$, avec n inversible sur X, et $D \subset X$ un diviseur de Cartier effectif. Supposons qu'il existe un fibré vectoriel $\overline{V}$ sur D tel que $A_D = \mathcal{E}nd(\overline{V})$, et supposons donné un sous-fibré vectoriel $\overline{F} \subset \overline{V}$ sur D localement facteur direct, de rang constant r. Soit A' le transformé élémentaire de A le long de $\overline{F} \subset \overline{V}$.*

On a alors

$$\mathrm{cl}(A') = \mathrm{cl}(A) - r.[D] \in H^2(X, \mu_n),$$

où $[D]$ désigne l'image de D par l'application composée

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)/n \hookrightarrow H^2(X, \mu_n).$$

Preuve (P. Gille). — Soit $p : Y \to X$ le schéma de Severi-Brauer associé à A. Soit $i : D_Y = D \times_X Y \to Y$ l'immersion naturelle. Sur Y, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow i_*\overline{Q} \longrightarrow 0,$$

avec V' et V fibrés vectoriels sur Y et $\overline{Q}$ le fibré vectoriel de rang $n-r$ sur D_Y image réciproque de $\overline{V}/\overline{F}$ par p. On a $A_Y = \mathcal{E}nd(V)$ et $A'_Y = \mathcal{E}nd(V')$. On a donc (Lemme 3.1 (c)) $\mathrm{cl}(A_Y) = -\det(V) \in H^2(Y, \mu_n)$ et $\mathrm{cl}(A'_Y) = -\det(V') \in H^2(Y, \mu_n)$, où l'on utilise tacitement l'inclusion $\mathrm{Pic}(Y)/n \hookrightarrow H^2(Y, \mu_n)$. D'après le lemme 3.2 on a donc $\mathrm{cl}(A'_Y) = \mathrm{cl}(A_Y) + (n-r).[D]_Y = \mathrm{cl}(A_Y) - r[D]_Y \in H^2(Y, \mu_n)$. En analysant la suite spectrale de Leray pour le morphisme $p : Y \to X$ on montre que la flèche naturelle $H^2(X, \mu_n) \to H^2(Y, \mu_n)$ est injective. Ainsi $\mathrm{cl}(A') = \mathrm{cl}(A) - r.[D] \in H^2(X, \mu_n)$. $\square$

On peut aussi établir cette formule par un calcul local via des cocycles de Čech ([?]).

Lemme 3.4. — *Soit k un corps infini. Soient D/k une courbe projective lisse géométriquement connexe et V un fibré vectoriel de rang n sur D. Supposons donné pour chaque point t dans un ensemble fini T de points de $D(k)$ un sous-espace vectoriel $F_t \subset V_t$ de dimension 1. Pour tout $m > 0$ suffisamment grand il existe un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_D(-m) \to V$ dont l'image est localement facteur direct dans V et tel que l'image de $\mathcal{O}_D(-m)_t$ dans V_t coïncide avec F_t.*

Preuve. — Soit $W \subset V$ le sous-$\mathcal{O}_D$-module (localement libre) de V dont les sections après évaluation en t donnent des éléments de F_t. Pour $m \gg 0$, le fibré vectoriel $W(m)$ est engendré par ses sections. Soit E le k-vectoriel $H^0(D, W(m))$. Notons encore E l'espace affine défini par E. Soit $Z \subset D \times_k E$ le fermé dont les points géométriques sont les couples (x, e) avec $e \in E$ tel que $e_x = 0 \in W(m)_x$. Comme W est de rang au moins 2, et que $W(m)$ est engendré par ses sections globales, pour x point géométrique fixé, l'ensemble des $e \in E$ satisfaisant $e_x = 0$ est de codimension au moins 2 dans E. La codimension de Z dans $D \times_k E$ est donc au moins 2, et le fermé $Z_1 \subset E$ qui est l'adhérence de la projection de Z dans E est donc de codimension au moins 1. Choisissons un k-point de E dans le complémentaire de Z_1. Ceci définit un homomorphisme $\mathcal{O}_X \to W(m)$ et donc un homomorphisme $\mathcal{O}_X(-m) \to W \subset V$ satisfaisant les propriétés annoncées. $\square$

3.3. Relèvement des algèbres

Soient X un schéma et $A \in \mathrm{Az}_n(X)$. La trace réduite $\mathrm{Tr}_{\mathrm{red}} : A \to \mathcal{O}_X$ est une application $\mathcal{O}_X$-linéaire qui induit sur $\mathcal{O}_X \subset A$ la multiplication par n. On note $A^0 \subset A$ le noyau de la trace réduite. Lorsque n est inversible sur X, l'injection $\mathcal{O}_X \subset A$ est scindée, et le quotient $A/\mathcal{O}_X$ est isomorphe à A^0.

THÉORÈME 3.5. — *Soit X une surface connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos. Soit $A \in \mathrm{Az}_n(X)$ avec $n > 1$ premier à la caractéristique de k. Il existe une algèbre d'Azumaya $A' \in \mathrm{Az}_n(X)$, obtenue par transformation élémentaire de A, telle que* $\mathrm{cl}(A') = \mathrm{cl}(A) \in H^2(X, \mu_n)$ *et que* $H^2(X, A'/\mathcal{O}_X) = 0$.

Preuve. — Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. L'inclusion $\mathcal{O}_X \subset A$ induit une inclusion $\mathcal{L} \subset A \otimes \mathcal{L}$ et donc une inclusion $H^0(X, \mathcal{L}) \subset H^0(X, A \otimes \mathcal{L})$.

1) Pour tout élément s de $H^0(X, A \otimes \mathcal{L})$ n'appartenant pas à $H^0(X, \mathcal{L})$ il existe une infinité de $t \in X(k)$ tels que s_t ne soit pas « scalaire », et donc tels qu'après choix d'un isomorphisme $A_t \simeq End(V_t)$ il existe un sous-espace vectoriel $F_t \subset V_t$ de dimension 1 tel que $s(F_t)$ ne soit pas contenu dans $F_t \otimes \mathcal{L}_t$. Comme $H^0(X, A \otimes \mathcal{L})$ est de dimension finie, on en déduit :

Il existe un ensemble fini $T \subset X(k)$ et pour chaque $t \in T$ un k-espace vectoriel V_t de dimension n, un sous-espace vectoriel $F_t \subset V_t$ de dimension 1 et un isomorphisme d'algèbres $A_t \simeq End(V_t)$ tels que l'inclusion $\mathcal{L} \subset A \otimes \mathcal{L}$ induise une égalité

$$H^0(X, \mathcal{L}) = \{s \in H^0(X, A \otimes \mathcal{L}),\ s_t(F_t) \subset F_t \otimes \mathcal{L}_t \ \text{ pour tout } t\}.$$

2) Soit $T \subset X(k)$ un ensemble fini de points. Une variante du théorème de Bertini montre : Il existe une courbe lisse connexe $D \subset X$ d'image nulle dans $\mathrm{Pic}(X)/n\mathrm{Pic}(X)$ telle que $T \subset D$. (Il suffit de prendre une section convenable du faisceau $\mathcal{O}_X(nq)$ pour $q > 0$ assez grand.)

3) Choisissons T comme en 1) et $D \subset X$ comme en 2). D'après le théorème de Tsen, *le groupe de Brauer du corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps algébriquement clos est nul. Le théorème 2.4 donne alors* $\mathrm{Br}(D) = 0$[(4)]. D'après le lemme 3.1 il existe donc un fibré vectoriel $\overline{V}$ de rang n sur D tel que $A_D \simeq \mathcal{E}nd_D(\overline{V})$. Pour $t \in T$, on a deux isomorphismes $A_t \simeq End(V_t)$ et $A_{D,t} \simeq End_D(\overline{V}_t)$. Ces deux isomorphismes sont déduits l'un de l'autre via des isomorphismes $\eta_t : V_t \simeq \overline{V}_t$. Pour tout $m > 0$ assez grand, le lemme 3.4 assure l'existence d'un homomorphisme $\varphi : \overline{F} \to \overline{V}$, avec $\overline{F} = \mathcal{O}_D(-m)$, tel qu'en tout $t \in T$ l'image de φ_t soit égale à $\eta_t(F_t)$. Soit $A' \in \mathrm{Az}_n(X)$ le transformé élémentaire de A le long de $\varphi : \overline{F} \to \overline{V}$.

4) Le choix de D, de classe nulle dans $\mathrm{Pic}(X)/n\mathrm{Pic}(X)$, et la proposition 3.3 impliquent

$$\mathrm{cl}(A') = \mathrm{cl}(A) \in H^2(X, \mu_n).$$

5) La suite exacte (3.2.1) donne après tensorisation avec $\mathcal{L}$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow B \otimes \mathcal{L} \longrightarrow A \otimes \mathcal{L} \longrightarrow i_* \mathcal{H}om_D(\overline{F}, \overline{Q}) \otimes \mathcal{L}_D \longrightarrow 0. \tag{3.4.1}$$

(4) Dans la démonstration du théorème de de Jong, cet argument n'est pas utilisé, car on déforme une algèbre de classe triviale dans le groupe de Brauer, voir le début de la démonstration de la proposition 3.12.

La flèche composée

$$H^0(X, B\otimes\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X, A\otimes\mathcal{L}) \longrightarrow$$
$$H^0(D, i_*\mathcal{H}om_D(\overline{F},\overline{Q})\otimes\mathcal{L}_D) \longrightarrow \prod_{t\in T} Hom(\overline{F}_t,\overline{Q}_t)\otimes\mathcal{L}_t$$

est nulle. La première flèche est clairement injective. Le noyau de la deuxième s'identifie par construction à $H^0(X,\mathcal{L}) \subset H^0(X, A\otimes\mathcal{L})$. On en conclut $H^0(X,\mathcal{L}) = H^0(X, B\otimes\mathcal{L})$. En tensorisant la suite exacte (3.2.2) par le fibré inversible $\mathcal{L}$ on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow B\otimes\mathcal{L} \longrightarrow A'\otimes\mathcal{L} \longrightarrow i_*\mathcal{H}om_D((I_D/I_D^2)\otimes\overline{Q},\overline{F})\otimes\mathcal{L}_D \longrightarrow 0. \tag{3.4.2}$$

On voit maintenant que le noyau de

$$H^0(X, A'\otimes\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{H}om_D((I_D/I_D^2)\otimes\overline{Q},\overline{F})\otimes_D\mathcal{L}_D)$$

s'identifie à $H^0(X,\mathcal{L}) \subset H^0(X, A'\otimes\mathcal{L})$. Notons $\mathcal{N}_{X/D}$ le faisceau normal de D dans X et E^* le dual d'un $\mathcal{O}_D$-faisceau localement libre E. Le $\mathcal{O}_D$-faisceau localement libre $\mathcal{H}om_D((I_D/I_D^2)\otimes\overline{Q},\overline{F})\otimes_D\mathcal{L}_D$ peut encore s'écrire $\mathcal{N}_{X/D}\otimes\overline{Q}^*\otimes\overline{F}\otimes\mathcal{L}_D$. Il s'injecte dans le faisceau $\mathcal{N}_{X/D}\otimes\overline{V}^*\otimes\overline{F}\otimes\mathcal{L}_D$. On a donc aussi une injection

$$H^0(D, \mathcal{H}om_D((I_D/I_D^2)\otimes\overline{Q},\overline{F})\otimes_D\mathcal{L}_D) \hookrightarrow H^0(D, \mathcal{N}_{X/D}\otimes\overline{V}^*\otimes\mathcal{L}_D\otimes\overline{F}).$$

Observons alors qu'une fois fixés $T, D, \overline{V}$ on peut choisir m au point 3) aussi grand que l'on veut pour définir $\varphi : \mathcal{O}_D(-m) = \overline{F} \subset \overline{V}$, et donc pour définir A'. Si l'on choisit m tel que

$$H^0(D, \mathcal{N}_{X/D}\otimes\overline{V}^*\otimes\mathcal{L}_D\otimes\mathcal{O}_D(-m)) = 0$$

et φ et donc A' avec un tel m, alors $H^0(X,\mathcal{L}) = H^0(X, A'\otimes\mathcal{L})$. Comme n est inversible sur X, ceci implique $H^0(X, A'^0\otimes\mathcal{L}) = 0$.

6) Appliquons le résultat obtenu au faisceau inversible canonique $\mathcal{L} = \omega_{X/k} = \Lambda^2(\Omega^1_X)$. Cela donne une algèbre d'Azumaya $A' \in \mathrm{Az}_n(X)$ qui est transformée élémentaire de A, qui satisfait $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A') \in H^2(X,\mu_n)$ et telle que $H^0(X, A'^0\otimes\omega_{X/k}) = 0$. L'application $A'\times A' \to \mathcal{O}_X$ définie par $(x,y)\mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{red}}(xy)$ induit une dualité parfaite entre les $\mathcal{O}_X$-modules A'^0 et $A'/\mathcal{O}_X$. Par dualité de Serre sur la surface projective et lisse X, le k-espace vectoriel $H^2(X, A'/\mathcal{O}_X)$ est dual de $H^0(X, A'^0\otimes\omega_{X/k})$. Ainsi $H^2(X, A'/\mathcal{O}_X) = 0$. □

Le théorème 3.5 va permettre d'utiliser les théorèmes de relèvement suivants.

Proposition 3.6. — *Soit $X \to X'$ une immersion fermée de schémas définie par un idéal $I \subset \mathcal{O}_{X'}$ tel que $I^2 = 0$. L'idéal I est un $\mathcal{O}_X$-module. Soit A une algèbre d'Azumaya sur X. Si l'on a $H^2(X, (A/\mathcal{O}_X)\otimes I) = 0$, alors il existe une algèbre d'Azumaya A' sur X' induisant A sur X.* □

C'est un cas particulier d'un résultat général de Giraud ([Gi], Chap. VII, Théorème 1.3.1 et Remarque 1.3.1.2). □

THÉORÈME 3.7. — *Soit R un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. Soit $X/\mathrm{Spec}(R)$ un schéma propre et plat. Soit X_0/k la fibre spéciale. Si $A_0 \in \mathrm{Az}_n(X_0)$ satisfait $H^2(X_0, A_0/\mathcal{O}_{X_0}) = 0$, alors il existe une algèbre d'Azumaya $A \in \mathrm{Az}_n(X)$ qui induit A_0 sur X_0.*

Cela résulte de la proposition 3.6 et du théorème d'algébrisation des modules formels de Grothendieck (FGA, SGA 1, [EGA] III.5 Théorème 5.1.4, [Gr], III, § 3, [I]). □

THÉORÈME 3.8. — *Soit R un anneau local hensélien de corps résiduel k. Soit $X/\mathrm{Spec}(R)$ un schéma propre et plat. Soient X_0/k la fibre spéciale et $A_0 \in \mathrm{Az}_n(X_0)$. Si l'on a $H^2(X_0, A_0/\mathcal{O}_{X_0}) = 0$, alors il existe une algèbre d'Azumaya $A \in \mathrm{Az}_n(X)$ qui induit A_0 sur X_0.*

C'est une conséquence formelle du théorème précédent et du théorème d'approximation d'Artin [Ar1]. Pour une situation similaire et quelques détails de plus, voir [CTOP], Theorem 1.8. On commence par se réduire au cas où R est l'hensélisé d'une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini en un idéal premier. Le foncteur $S \to H^1(X \times_R S, PGL_n)$ de la catégorie des R-algèbres commutatives vers la catégorie des ensembles est de présentation finie. Le théorème précédent donne une classe $\widehat{\xi} \in H^1(X \times_R \widehat{R}, PGL_n)$ d'image $\xi_0 \in H^1(X_0, PGL_n)$. Le théorème d'Artin assure l'existence de $\xi \in H^1(X, PGL_n)$ de même image que $\widehat{\xi}$ dans $H^1(X_0, PGL_n)$, c'est-à-dire d'image ξ_0. □

3.4. Scindage des algèbres d'Azumaya sur une surface et mise en famille

Soit k un corps. Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement intègre et soit $A \in \mathrm{Az}_m(X)$ une algèbre d'Azumaya sur X. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Notons $L = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{L}^{-1})) \to X$ le fibré en droites correspondant. À toute section $\sigma \in H^0(X, A \otimes \mathcal{L})$ on associe un idéal caractéristique $I_\sigma \subset \mathcal{O}_L$ ([OP], Lemma 2.10). Localement sur X il est défini de la façon suivante. Soit $U = \mathrm{Spec}(R)$ un ouvert affine de X sur lequel on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{O}_U \simeq \mathcal{L}_U$. Soit $f \in \mathcal{L}(U)$ l'image de 1. On a alors $L_U \simeq U[T] = \mathrm{Spec}(R[T])$ et l'idéal I_σ est engendré par le polynôme caractéristique réduit $P_{f,U}[T]$ de $\sigma.f^{-1}$ qui est un élément de l'algèbre d'Azumaya $A(U) \in \mathrm{Az}_m(U)$. Ce polynôme est de degré n et unitaire. Ainsi le fermé $Y_\sigma \subset L$ défini par I_σ est fini et plat sur X, de degré m.

THÉORÈME 3.9 (M. Artin). — *Soient k un corps algébriquement clos, n un entier premier à la caractéristique de k, X une k-surface projective, lisse connexe, $A \in \mathrm{Az}_m(X)$ telle que $A_{k(X)}$ est à division et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible. Si $\mathcal{L}$ est suffisamment ample et σ est une section suffisamment générale du fibré vectoriel $A \otimes \mathcal{L}$, alors la surface Y_σ définie ci-dessus est lisse et connexe. Pour tout tel σ, l'image réciproque de A sur Y_σ a une classe triviale dans $\mathrm{Br}(Y_\sigma)$.*

Ce théorème est annoncé par de Jong ([**?**], § 8). Une démonstration en caractéristique nulle est donnée par Ojanguren et Parimala ([OP]). Ceux-ci apportent de multiples précisions sur le type de ramification auquel on peut de plus restreindre $Y_\sigma \to X$. Je ne donnerai pas la démonstration de ce théorème. La première assertion est un énoncé de type Bertini, qui utilise de façon essentielle le fait que la dimension de X est 2. La seconde est une conséquence du théorème 2.4. □

En utilisant ce théorème Ojanguren et Parimala montrent ([OP]) :

Proposition 3.10. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, X une k-surface projective, lisse, connexe, $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$. Il existe une k-variété lisse connexe W de dimension 3, et des morphismes*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathbb{A}^1 & & \end{array}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) *Le morphisme f est lisse à fibres connexes.*

(ii) *Le morphisme $(g, f) : W \to X \times_k \mathbb{A}^1_k$ est quasi-fini et plat.*

(iii) *Il existe un voisinage de $0 \in \mathbb{A}^1_k$ au-dessus duquel f est propre. En particulier la surface $Y = f^{-1}(0)$ est projective, lisse, connexe.*

(iv) *On a $g^*(\alpha) = 0 \in \mathrm{Br}(Y)$.*

(v) *La fibre $W_1 = f^{-1}(1)$ est non vide, et la restriction de $g : W \to X$ à W_1 est une immersion ouverte.*

Preuve (esquisse). — D'après le théorème 2.5, il existe une algèbre d'Azumaya $A \in \mathrm{Az}_m(X)$, avec m convenable, de classe $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, telle que $A_{k(X)}$ est à division. Soient $\mathcal{L}, L$ et $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L})$ comme au théorème 3.9. On choisit des sections globales distinctes $w_1, \ldots, w_m$ de L. On considère le fibré en droites $L \times_k \mathbb{A}^1_k \to X \times_k \mathbb{A}^1_k$, où $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$. Pour $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ et $f \in \mathcal{L}(U)$ comme ci-dessus, on considère l'idéal de de $R[T, t]$ engendré par

$$Q_{f,U}(t, T) = (1 - t)P_{f,U}(T) + t(T - w_1/f) \ldots (T - w_m/f).$$

On vérifie que ces différents idéaux se recollent en un idéal sur le schéma $L \times_k \mathbb{A}^1_k$. Soit $Z \subset L \times_k \mathbb{A}^1_k$ le fermé défini par cet idéal. La projection $Z \to X \times_k \mathbb{A}^1_k$ est finie et plate de degré m. L'application composée $f : Z \to X \times_k \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ est donc propre et plate. Sa fibre en $t = 0$ est la surface projective, lisse, connexe Y_σ. La fibre générique de f est donc lisse et géométriquement intègre. Comme $Z \to X$ est plat, ceci implique que Z est intègre. La fibre au-dessus de $t = 1$ contient n composantes fermées distinctes chacune birationnellement isomorphe à X via la projection sur X.

En enlevant un fermé convenable dans Z, on obtient W comme annoncé dans la proposition. $\square$

Remarque 3.11. — Dans [?], le théorème 3.9 n'est pas utilisé. L'idée de base, qui est de déformer un polynôme en une variable, unitaire, de degré m, qui définit l'extension $k(Y)/k(X)$, en un polynôme unitaire séparable de même degré avec toutes ses racines dans $k(X)$, est la même, mais la construction d'une bonne famille satisfaisant des propriétés plus faibles que celles de la proposition 3.10, est alors plus délicate ([?], § 4). De Jong y a en particulier recours au « théorème de la fibre réduite » ([BLR], [dJS2]), qui avait déjà été utilisé dans [dJS1].

3.5. Le théorème de de Jong dans le cas non ramifié

PROPOSITION 3.12. — *Soit X une surface projective, lisse, connexe sur un corps k algébriquement clos, $n > 0$ entier inversible dans k. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(k(X))$, d'exposant n.*

Supposons qu'il existe une variété intègre W de dimension 3 et des morphismes

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathbb{A}^1 & & \end{array}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) *Le morphisme f est lisse à fibres connexes.*

(ii) *Le morphisme f est propre au voisinage du point $0 \in \mathbb{A}^1$, de fibre $W_0 = f^{-1}(0)$, et g induit un morphisme fini et plat $g_{W_0} : W_0 \to X$ de surfaces lisses.*

(iii) *La restriction de g à la fibre $W_1 = f^{-1}(1)$ est une immersion ouverte $W_1 \hookrightarrow X$.*

(iv) *$g^*(\alpha)_{W_0} = 0 \in \mathrm{Br}(W_0)$.*

Alors l'indice de $\alpha_{k(X)} \in \mathrm{Br}(k(X))$ est égal à n.

Preuve. — Soit $\eta \in H^2(X, \mu_n)$ d'image $\alpha \in {}_n\mathrm{Br}(X)$. Notons $Y = W_0$. Soit $\mathcal{L}_Y$ un faisceau inversible sur Y dont la classe par l'application composée $\delta\colon \mathrm{Pic}(Y)/n \to H^2(Y, \mu_n)$ est l'opposé de $g^*(\eta)_Y$. Qu'un tel faisceau inversible existe résulte de la suite exacte de Kummer et de l'hypothèse (iv). Considérons l'algèbre d'Azumaya

$$B_0 = \mathcal{E}nd(\mathcal{L}_Y \oplus (\mathcal{O}_Y)^{n-1}).$$

Elle est de degré n. D'après le lemme 3.1 (c) on a $\mathrm{cl}(B_0) = -\delta(\mathcal{L}_Y) = g^*(\eta)_Y$. D'après le théorème 3.5, une transformation élémentaire convenable de B_0 produit une algèbre $A_0 \in \mathrm{Az}_n(Y)$ satisfaisant $\mathrm{cl}(A_0) = \mathrm{cl}(B_0) = g^*(\eta)_Y \in H^2(Y, \mu_n)$ et $H^2(Y, A_0/\mathcal{O}_Y) = 0$. *C'est un point-clé de la démonstration.* Cette nullité permet de déformer l'algèbre $A_0 \in \mathrm{Az}_n(Y)$. En utilisant le *théorème d'algébrisation* 3.7 puis le *théorème d'approximation* 3.8, on voit qu'il existe un voisinage étale connexe $h : (C', 0) \to (C, 0)$ du point $0 \in C = \mathbb{A}^1_k$, tel que $W' = W \times_C C' \to C'$ soit propre et lisse, et une algèbre d'Azumaya $A \in \mathrm{Az}_n(W')$ telle que la fibre de A au-dessus de $0 \in C'$ soit isomorphe à l'algèbre A_0 sur Y. (Notons que l'algèbre A n'a pas de raison d'avoir une classe triviale dans le groupe de Brauer de W', même après complétion en $0 \in C'$.)

La réduction de $\mathrm{cl}(A) \in H^2(W', \mu_n)$ au-dessus de $0 \in C'$ s'identifie à $\mathrm{cl}(A_0) = g^*(\eta)_Y$, c'est-à-dire à la réduction de l'image au-dessus de $0 \in C'$ de la classe globale obtenue à partir de $\eta \in H^2(X, \mu_n)$ en prenant l'image réciproque par le morphisme composé $g' : W' \to W \to X$.

En appliquant le *théorème de changement de base propre en cohomologie étale* ([Mi], VI.2.7) au morphisme $W' \to C'$, on voit qu'en remplaçant $(C', 0)$ par un autre voisinage étale, encore noté $(C', 0)$, on peut assurer $\mathrm{cl}(A) = g'^*(\eta) \in H^2(W', \mu_n)$.

On peut étendre le morphisme $C' \to C$ en un morphisme *fini* de courbes lisses $D \to C = \mathbb{A}^1_k$. Le morphisme $W \times_C D \to D$ est lisse, et *comme k est algébriquement clos* il existe un point $1 \in D$ au-dessus de 1, la fibre W'_1 en ce point est lisse, connexe, et la projection composée $W \times_C D \to W \to X$ induit sur W'_1 une immersion ouverte $W'_1 \subset X$.

Soit R l'anneau local de $W \times_C D$ au point générique de W'_1. C'est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K le corps des fonctions de W', de corps résiduel isomorphe à $k(X)$. De plus, la projection $W \times_C D \to W \to X$ induit une inclusion $k(X) \hookrightarrow R$ qui composée avec l'application de réduction modulo l'idéal maximal de R, soit $R \to k(X)$, est l'identité de $k(X)$. Soit $A_K \in \mathrm{Az}_n(K)$ l'image de $A \in \mathrm{Az}_n(W')$. L'égalité $\mathrm{cl}(A) = g'^*(\eta) \in H^2(W', \mu_n)$ implique que la classe $[A_K] \in \mathrm{Br}(K)$ coïncide avec l'image de $\alpha_{k(X)} \in \mathrm{Br}(k(X))$ via la flèche composée $k(X) \to R \to K$. En particulier, $[A_K]$ appartient à $\mathrm{Br}(R) \subset \mathrm{Br}(K)$. L'algèbre A_K est de degré n. La combinaison de ces deux derniers faits et du théorème 2.5 (dans le cas particulier d'un anneau de valuation discrète) assure que la spécialisation $\mathrm{Br}(R) \to \mathrm{Br}(k(X))$ envoie A_K sur la classe d'une algèbre d'indice divisant n. Comme cette spécialisation est égale à $\alpha_{k(X)}$, et que cette dernière est d'exposant n, on voit que l'indice de $\alpha_{k(X)}$ est n. □

Combinant les propositions 3.10 et 3.12, on obtient une démonstration en caractéristique nulle du théorème :

THÉORÈME 3.13 (de Jong). — *Soit k un corps algébriquement clos. Soit X/k une surface connexe, projective et lisse sur k. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ d'exposant $n > 0$ premier à la caractéristique de k. Alors l'indice de $\alpha_{k(X)}$ est égal à n, et α est représenté par une algèbre d'Azumaya A sur X de degré n.*

La dernière assertion est une conséquence du reste du théorème et du théorème 2.5. Une démonstration de la proposition 3.10 en caractéristique positive première à l'exposant de l'algèbre A permettrait d'étendre la démonstration ici décrite. De Jong quant à lui établit le résultat dans cette généralité en utilisant la mise en famille évoquée à la remarque 3.11 ci-dessus.

3.6. Le cas ramifié résulte du cas non ramifié

THÉORÈME 3.14 (de Jong). — *Soit k un corps algébriquement clos. Soit X/k une surface connexe, projective et lisse sur k. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(k(X))$ d'exposant $n > 0$ premier à la caractéristique de k. Alors* $\mathrm{ind}_{k(X)}(\alpha) = n$.

Preuve. — La décomposition des corps gauches en produits tensoriels de corps gauches d'indices premiers entre eux permet de se ramener au cas où $n = l^r$ avec l premier. Montrons le résultat par récurrence sur r, en supposant le résultat connu pour $r = 1$. L'exposant de $\beta = l.\alpha \in \mathrm{Br}(k(X))$ est l^{r-1}. Il existe donc une extension de corps $E/k(X)$ de degré l^{r-1} telle que $l.\alpha_E = \beta_E = 0 \in \mathrm{Br}(E)$. La résolution des singularités des surfaces algébriques donne l'existence d'une surface projective lisse connexe Y sur k telle que $E = k(Y)$. Le résultat pour $n = l$ premier appliqué à la surface Y assure l'existence d'une extension de corps F/E de degré l telle que $(\alpha_E)_F = 0 \in \mathrm{Br}(F)$. Ainsi $\alpha_F = 0$, et l'extension de corps $F/k(X)$ est de degré l^r. Ce type de réduction est classique ([A], p. 175 ; [CTG], p. 132).

On suppose désormais $n = l$ premier, distinct de la caractéristique de k.

On va construire des morphismes

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X \\ \mathbb{A}^1 & \end{tikzcd}$$

de variétés lisses connexes satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) Le morphisme $f : W \to \mathbb{A}^1_k$ est lisse.

(ii) La fibre générique géométrique $W_{\overline{\eta}}$ de $f : W \to \mathbb{A}^1_k$ est projective et connexe.

(iii) La fibre $W_0 \subset W$ de f en $0 \in \mathbb{A}^1_k$ est non vide et la restriction de $g : W \to X$ à $W_0 \subset W$ est un morphisme birationnel $W_0 \to X$.

(iv) L'image réciproque $r^*(\alpha)$ de α par l'application composée $r\colon W_{\overline{\eta}} \to W_\eta \to W \to X$, où la dernière flèche est g, est non ramifiée sur la surface $W_{\overline{\eta}}$ (on note η le point générique de $\mathbb{A}^1_k$ et $\overline{\eta}$ un point générique géométrique).

Supposons ces morphismes construits. De la propriété (iv) et du théorème 3.13 on déduit qu'il existe une extension finie de corps $K = k(\mathbb{A}^1) \hookrightarrow L$ telle que la restriction de α à $W_\eta \times_K L$ soit de degré l. Le corps L est le corps des fonctions d'une courbe affine lisse C munie d'un k-morphisme fini $C \to \mathbb{A}^1_k$. *Comme k est algébriquement clos*, il existe un k-point $M \in C$ au-dessus de $0 \in \mathbb{A}^1_k$. La variété $Z = W \times_{\mathbb{A}^1} C$ est lisse, la fibre générique de $Z \to C$ est géométriquement intègre, la variété Z est donc connexe. La fibre de Z_M de $Z \to C$ au-dessus du point M est lisse, connexe, la restriction de la projection $Z \to X$ à la fibre Z_M est un morphisme birationnel $Z_M \to X$.

Soit R l'anneau local de Z au point générique ξ de Z_M. Le corps des fractions de R est le corps des fonctions de Z, le corps résiduel κ est isomorphe à $k(X)$, plus précisément le composé $\mathrm{Spec}(\kappa) \to \mathrm{Spec}(R) \to W \to X$ s'identifie à l'inclusion du point générique de X dans X. L'image réciproque sur le corps des fonctions de Z de la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(k(X))$, via la projection $Z \to X$, est une classe dans $\mathrm{Br}(k(Z))$ non ramifiée au point générique ξ de Z_M, dont la réduction sur κ s'identifie à α. Pour établir le théorème 3.14, il suffit alors d'appliquer le théorème 2.5 dans le cas particulier du spectre d'un anneau de valuation discrète.

Il reste donc à construire un morphisme $h = (g, f) : W \to X \times \mathbb{A}^1_k$ satisfaisant les propriétés (i) à (iv). Quitte à remplacer la surface X par un éclaté, on peut supposer ([Li]) que le lieu de ramification de la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(k(X))$ est un diviseur D strictement à croisements normaux (composantes lisses, par tout point il passe au plus deux composantes, et dans ce cas elles se coupent transversalement).

Soit $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[t])$. On cherche un revêtement génériquement cyclique $h = (g, f)$: $W \to X \times \mathbb{A}^1_k$ de degré l, donné par la racine l-ième d'une fonction rationnelle f_t sur $X \times \mathbb{A}^1$, de telle sorte qu'au-dessus du point générique géométrique de $\mathbb{A}^1$, on ait détruit la ramification de α, et de telle sorte qu'au-dessus du point $0 \in \mathbb{A}^1_k$ la fibre de f contienne une composante de multiplicité 1 birationnelle à X. En bref, on veut que la spécialisation f_0 de f soit une puissance l-ième, et on veut que le diviseur de f contienne le diviseur D à l'ordre 1 (dans le cas modéré, « la ramification avale la ramification » – lemme d'Abhyankar).

Lemme 3.15. — *Étant donné un diviseur $D \subset X$ strictement à croisements normaux, il existe des diviseurs E et E' effectifs lisses tels que $D + E$ soit linéairement équivalent à $l(D + E')$, que deux de D,E et E' n'aient pas de composante commune, et que $D + E + E'$ soit à croisements normaux.*

Preuve. — Soit $\mathcal{M}$ un fibré inversible ample sur X. Pour r entier suffisamment grand, le faisceau $\mathcal{O}_X((l-1)D) \otimes \mathcal{M}^{\otimes rl}$ est très ample, il existe une section de ce faisceau qui définit sur X un diviseur lisse E qui coupe D transversalement (noter que les supports de D et de E se rencontrent nécessairement, le diviseur $D + E$ n'est pas lisse). En outre il existe une section de $\mathcal{M}^{\otimes r}$ dont le lieu des zéros est un diviseur E' lisse transverse à $D + E$. $\square$

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-D - E')$. Soit s_0 une section de $\mathcal{L}^{\otimes -l}$ de lieu des zéros $D + E$. Soit s_1 une section de $\mathcal{L}^{-1}$ de lieu des zéros $D + E'$. On dispose alors de la section $s_1^l = s_1^{\otimes l}$ de $\mathcal{L}^{\otimes -l}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{L}}$ l'image inverse de $\mathcal{L}$ sur $Y = X \times \mathbb{A}^1$. Soit s_t la section de $\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes -l}$ définie par

$$s_t = t^l s_1^l + (1-t)^l s_0,$$

où, par abus de notation, s_0 et s_1 sont les images réciproques sur $X \times \mathbb{A}_1$ de s_0 et s_1.

On définit alors, de façon classique, un revêtement génériquement cyclique Y de $X \times \mathbb{A}^1$ de la façon suivante. On définit une structure de $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}$-algèbre sur le fibré vectoriel

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \oplus_{i=0}^{i=l-1} \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes i}$$

en utilisant la flèche $\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes l} \to \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}$ donnée par la section s_t de $\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes -l}$.

Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X sur lequel $\mathcal{L}$ admet une trivialisation $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_U$. Au-dessus de U, le revêtement décrit ci-dessus est isomorphe à

$$\mathrm{Spec}(A[t][x]/(x^l - (t^l f_1^l + (1-t)^l f_0))),$$

pour f_0 et f_1 dans A convenables.

On vérifie alors facilement :

(a) La variété Y est intègre.

(b) La fibre générique Y_η du morphisme composé $Y \to X \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ est géométriquement intègre.

(c) La fibre Y_1 du morphisme $Y \to X \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ au-dessus du point $t = 1$ a l composantes, chacune de multiplicité 1, chacune isomorphe à X, l'isomorphisme étant induit par le morphisme composé $Y_1 \subset Y \to X$.

La K-variété Y_η ne saurait être lisse, car le lieu des zéros de la section s_t n'est pas lisse : il est somme de $D \times_k K$ et d'un diviseur effectif non nul E_t. Le lieu des zéros de s_0 sur $Y_0 = X$ est $D + E$, qui est strictement à croisements normaux. Pour t général, ceci implique (Bertini) la même propriété pour la décomposition $D + E_t$ du lieu des zéros de s_t. Ceci assure que pour tout tel t, la variété Y_t est normale et n'a que des singularités de type A_{l-1} : une équation locale en un point singulier est analytiquement du type $A[x]/x^l - uv$, où u, v sont des éléments d'un système régulier de paramètres. On considère alors la résolution minimale des singularités de la fibre générique Y_η/K, soit Z_η/K. Cette résolution est lisse. La résolution $Z_\eta \to Y_\eta$ est donnée par l'éclatement d'un certain idéal cohérent I_η sur Y_η de support les points singuliers. On peut trouver un idéal cohérent I sur Y dont le lieu des zéros est de dimension au plus 1 et dont la restriction à la fibre générique est I_η. Soit $Z \to Y$ l'éclaté de Y au moyen de l'idéal I. Il existe alors un ouvert W de Z qui satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) de l'énoncé (pour la propriété (iii), il suffit d'observer qu'au-dessus des points génériques des composantes des fibres de $Y \to \mathbb{A}^1$, l'éclatement via I ne modifie rien ; on utilise alors le résultat pour $Y \to \mathbb{A}^1$).

Il reste à établir le point (iv). La technique ici est standard ([Ar3], [FS], [CTOP]). Revenons à la situation envisagée dans la démonstration principale. Soit L une clôture algébrique de $K = k(t)$. Le morphisme de L-surfaces projectives, lisses, connexes $Z_L \to X_L$ est donné au point générique de X_L par l'extraction de la racine l-ième de la fonction rationnelle $f_t = s_t/s_1^l$, dont le diviseur est $D + E_t - l(D + E')$. Le lieu de ramification de $\alpha_K \in \mathrm{Br}(X_K)$ est contenu dans D_K. Le diviseur $D + E_t$ est réduit, strictement à croisements normaux.

Soit M un point de codimension 1 de Z_L. Si son image par $Z_L \to X_L$ n'est pas contenue dans D_L, alors $\alpha_{L(Z)}$ est non ramifié en M. Si l'image de M est un point générique N d'une composante de D_K, alors $\alpha_{L(Z)}$ est non ramifié en M. On a en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(L(Z)) & \longrightarrow & H^1(\kappa_M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}(L(X)) & \longrightarrow & H^1(\kappa_N, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \end{array}$$

où la flèche $H^1(\kappa_N, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(\kappa_M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est la multiplication par l'indice de ramification en N, qui est l.

Supposons maintenant que l'image de M soit un point fermé N de X_L. Si le point N n'appartient pas à D, alors $\alpha_{L(X)}$ s'étend en une algèbre d'Azumaya au voisinage de N donc $\alpha_{L(Z)}$ est non ramifié en M. Supposons que le point N appartienne à D mais soit sur une unique composante de D. Alors (proposition 2.6) il existe un voisinage affine $\mathrm{Spec}(R)$ de N dans X_L, $u \in R^*$ et $s \in R$ tels que $s = 0$ définisse exactement D sur $\mathrm{Spec}(R)$ et que $\alpha_{L(X)} - (u, s)$ appartienne à $\mathrm{Br}(R)$ (on omet ici l'indice ζ_l dans la notation d'une algèbre cyclique). On a donc $\partial_M(\alpha_{L(Z)}) = \partial_M((u, s)) = \overline{u}^{v_M(s)} \in \kappa_M^*/\kappa_M^{*l}$. La classe de u dans κ_M^*/κ_M^{*l} est l'image de la classe de u dans $\mathcal{O}_{X_L,N}^*/\mathcal{O}_{X_L,N}^{*l}$, et l'application naturelle $\mathcal{O}_{X_L,N}^*/\mathcal{O}_{X_L,N}^{*l} \to \kappa_M^*/\kappa_M^{*l}$ se factorise par $\kappa_N^*/\kappa_N^{*l} = 1$ (le corps résiduel κ_N est séparablement clos de caractéristique différente de l.) Supposons maintenant que le point N soit l'intersection de deux composantes de D. Il n'est donc pas sur E_t. Il existe un voisinage affine $\mathrm{Spec}(R)$ de N dans X_L, $s, t \in R$ engendrant l'idéal maximal de N, tels que $st = 0$ définisse exactement D sur $\mathrm{Spec}(R)$ et que E_t ne rencontre pas $\mathrm{Spec}(R)$. Sur $\mathrm{Spec}(R)$ on a donc $f_t = csth^l \in L(X)^*$ avec $c \in R^*$ et $h \in L(X)^*$.

D'après la proposition 2.6, quitte à restreindre $\mathrm{Spec}(R)$, il existe des unités $u, v \in R^*$ et $r \in \mathbf{Z}$ tels que $\alpha + (s, u) + (t, v) + r(s, t)$ appartienne à $\mathrm{Br}(R)$. On a

$$(s, t) = (s, f_t c^{-1} s^{-1} h^{-l}) = (s, f_t) + (s, -c^{-1}) \in \mathrm{Br}(L(X)),$$

où l'on a utilisé la formule $(s, -s) = 0$. On peut donc écrire $\alpha \in \mathrm{Br}(L(X))$ comme la somme d'éléments du type : non ramifié, (s, f_t), (s, u) et (t, v) avec u et v unités. On a $L(Z) = L(X)(f_t^{1/l})$, donc $(s, f_t)_{L(Z)} = 0$. Le même argument que ci-dessus montre que $(s, u)_{L(Z)}$ et $(t, v)_{L(Z)}$ ont des résidus triviaux en M. Ainsi $\alpha_{L(Z)}$ est non ramifié en M.

Ceci établit le point (iv) et achève la démonstration du théorème de de Jong. □

Remarque 3.16. — Le théorème de de Jong peut se reformuler ainsi :

Soit K un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. Soit A une algèbre simple centrale sur K de degré nm et d'exposant n premiers à *la caractéristique de K. Alors la K-variété de Severi-Brauer généralisée $SB(A, n)$ possède un K-point.*

On peut se demander ce qui fait que la K-variété $SB(A, n)$ a automatiquement un point rationnel. Dans un travail en préparation, de Jong et Starr étudient la notion de 1-connexité rationnelle et donnent des conditions suffisantes pour qu'une K-variété projective et lisse possède automatiquement un point rationnel sur K, corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. Leur résultat est un analogue du résultat de Graber, Harris, Starr, de Jong sur l'existence de points rationnels sur les variétés (séparablement) rationnellement connexes définies sur un corps de fonctions d'une variable. Les hypothèses mises par de Jong et Starr dans le cas d'un corps de fonctions de deux variables sont assez contraignantes, mais elles s'appliquent aux variétés $SB(A, n)$.

4. CONSÉQUENCES POUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

Soit K un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Pour un tel corps, les deux propriétés générales suivantes sont donc satisfaites :

(1) *C'est un corps de dimension cohomologique* $\mathrm{cd}(K) \leqslant 2$ *(*[S2]*).*

(2) *Sur tout corps extension finie de K, indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident.*

Ces deux propriétés sont satisfaites par les corps mentionnés au paragraphe 2.4, du moins par ceux qui ne sont pas formellement réels :

• les corps p-adiques

• les corps de nombres totalement imaginaires

• les corps de la forme $F((t))$, où F est un corps de caractéristique zéro de dimension cohomologique 1

• le corps des fractions d'un anneau local intègre, excellent, hensélien, de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique zéro ([Ar3], [FS], [CTOP]).

Un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, est un corps C_2' (théorème de Tsen-Lang), ce qui, d'après Merkur'ev et Suslin est une propriété plus forte que la propriété (1). Comme mentionné au § 2, une autre application du théorème de Merkur'ev et Suslin montre que la propriété C_2' implique qu'exposant et indice coïncident pour les algèbres 2-primaires et 3-primaires. Introduisons la condition suivante, plus faible que (2).

(2') *Sur tout corps L extension finie de K, indice et exposant des L-algèbres simples centrales 2-primaires ou 3-primaires coïncident.*

Dans [CTGP], qui repose sur les travaux antérieurs de nombreux auteurs, on a étudié de façon systématique les propriétés des corps de caractéristique zéro satisfaisant les hypothèses (1) et (2), ou (1) et (2'). Les énoncés généraux suivants, extraits de [CTGP], s'appliquent donc aux corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

L'énoncé suivant (cf. [CTGP], Thm. 1.2) est un cas particulier de la conjecture II de Serre ([S2], [S3]). Il rassemble des travaux successifs de Merkur'ev-Suslin, Suslin, Bayer-Fluckiger et Parimala, P. Gille, Chernousov.

THÉORÈME 4.1. — *Soit K un corps de caractéristique zéro satisfaisant* (1) *et* (2$'$). *Soit G un K-groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Si G contient un facteur de type E_8, supposons en outre* $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \leqslant 1$. *Alors $H^1(K,G)=0$.*

On note ici K^{ab} l'extension abélienne maximale de K. La question de savoir si l'on a $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \leqslant 1$ pour un corps K de fonctions de deux variables sur les complexes est ouverte.

Dire que sur un corps K (de caractéristique zéro) exposant et indice coïncident pour les K-algèbres simples centrales équivaut à dire que pour tout entier $n \geqslant 2$ l'application bord

$$H^1(K, PGL_n) \longrightarrow H^2(K, \mu_n)$$

déduite de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow SL_n \longrightarrow PGL_n \longrightarrow 1$$

est surjective. On peut donc se poser des questions analogues avec d'autres isogénies. Une longue analyse par type de groupe (le cas ${}^2A_n$ étant particulièrement délicat) mène au résultat suivant, qui requiert toute l'hypothèse (2), et vaut donc pour les corps de fonctions de deux variables sur les complexes.

THÉORÈME 4.2 ([CTGP], Thm. 2.1). — *Soit K un corps de caractéristique zéro satisfaisant* (1) *et* (2). *Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe, de centre μ, de groupe adjoint G^{ad}. Si G contient un facteur de type E_8, supposons en outre* $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \leqslant 1$.

(i) *L'application bord $H^1(K, G^{\mathrm{ad}}) \to H^2(K,\mu)$ associée à la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow G \longrightarrow G^{\mathrm{ad}} \longrightarrow 1$$

est une bijection.

(ii) *Si le groupe G n'est pas purement de type A, alors il est isotrope.*

(Ce théorème généralise des résultats classiques de Kneser sur les corps locaux et sur les corps globaux.)

THÉORÈME 4.3 (cf. [CTGP], Thm. 4.5). — *Soit K un corps de caractéristique zéro satisfaisant* (1) *et* (2′)*. Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe. Si G ne contient pas de facteur de type E_8, ou si l'on a en outre* $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \leqslant 1$*, alors* $G(K)/R = 1$.

(Pour la notion de R-équivalence, voir [G1].)

La démonstration se fait en discutant chaque type simple. Il y a une différence marquée entre le cas des groupes de type A_n et les autres types simples. Pour les autres types simples, la K-variété sous-jacente au K-groupe G est K-birationnelle à un espace affine (défini sur K), ce qui n'est pas le cas en général pour les groupes de type A_n, comme le montre un exemple de Merkur'ev.

Le théorème 4.3 est utilisé dans la démonstration du théorème suivant, analogue d'un résultat de P. Gille ([G1], [G2]).

THÉORÈME 4.4 ([CTGP], Thm. 4.12). — *Soient K un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et G un K-groupe linéaire connexe sans facteur de type E_8. Le groupe $G(K)/R$ est un groupe abélien fini.*

(Ici encore la condition sur E_8 pourrait être omise si l'on savait établir $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \leqslant 1$.)

La technique des résolutions flasques de groupes linéaires connexes permet de donner une formule pour le groupe abélien fini $G(K)/R$. Je renvoie pour cela à [CTGP], § 4.

5. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES CORPS DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE SUR UN CORPS p-ADIQUE

THÉORÈME 5.1 (Saltman [Sa1]). — *Soient k un corps p-adique et K un corps de fonctions d'une variable sur k. Soit l premier, $l \neq p$. Supposons $\mu_l \subset k$. Étant donné un ensemble fini d'algèbres simples centrales $A_i, i \in I$, chacune d'exposant l dans le groupe de Brauer de K, il existe f et g dans K^* tels que l'extension $K(f^{1/l}, g^{1/l})$ déploie chacune des algèbres $A_i, i \in I$.*

L'outil de base de la démonstration est le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2 (Tate, Lichtenbaum, Grothendieck). — *Soit O l'anneau des entiers d'un corps p-adique et soit $Y/\mathrm{Spec}(O)$ un schéma connexe, régulier, propre et plat sur* $\mathrm{Spec}(O)$*, de dimension relative* 1*. Alors le groupe de Brauer de Y est trivial.*

En utilisant la proposition 2.3 on voit alors que le « groupe de Brauer non ramifié » du corps des fonctions K d'une telle surface arithmétique Y est trivial. En particulier si un élément $A \in {}_l\mathrm{Br}(K)$ a la propriété que pour tout anneau de valuation discrète R de corps des fractions K, de corps résiduel κ, le résidu $\delta(A) \in \kappa^*/\kappa^{*l}$ est trivial, alors $A = 0 \in \mathrm{Br}(K)$. On notera que l'image du point fermé s_R de $\mathrm{Spec}(R)$ dans Y peut être soit le point générique d'une courbe soit un point fermé de Y.

La démonstration du théorème 5.1 est analogue dans son principe à celle de [Ar3], [FS], [CTOP] (où là on n'extrait qu'une seule racine l-ième). On commence par écrire le corps K comme le corps des fonctions d'un schéma X connexe, régulier, propre et plat sur $\mathrm{Spec}(O)$, de dimension relative 1, choisi de telle sorte que la réunion des supports des diviseurs de ramification des A_i soit à croisements normaux stricts sur X ; par éclatements convenables, on peut assurer cela sur un schéma régulier excellent de dimension 2 (Lipman [Li]). On détermine ensuite des fonctions $f, g \in K^*$ telles que les classes A_i deviennent non ramifiées sur le corps $L = K(f^{1/l}, g^{1/l})$, qui est le corps des fonctions d'un schéma Y connexe, régulier, propre et plat sur $\mathrm{Spec}(O)$, de dimension relative 1, muni d'un morphisme génériquement fini $Y \to X$. Le théorème 5.2 assure alors la nullité de ces classes dans $\mathrm{Br}(L)$. Pour choisir les fonctions f et g, on discute les images possibles dans X des morphismes composés $s_R \to \mathrm{Spec}(R) \to Y \to X$, pour R comme ci-dessus. Pour le choix (délicat) des fonctions f et g, je renvoie à [Sa1] et à [HVG].

Un argument algébrique simple permet de déduire du théorème 5.1 l'énoncé suivant :

Corollaire 5.3 (Saltman [Sa1]). — *Étant donnés un corps K comme ci-dessus et une algèbre simple centrale A d'exposant n premier à p, l'indice de A divise n^2.*

Des exemples dus à Jacob et Tignol ([Sa1], voir aussi [KRTY]) montrent que cette borne est en général la meilleure. Sur le corps $K = \mathbf{Q}_p(x)$, avec $p \neq 2$, si $a \in \mathbf{Z}_p$ est une unité qui n'est pas un carré, alors le produit tensoriel d'algèbres de quaternions $(x, a) \otimes_K (x + 1, p)$ est une algèbre à division, donc d'indice 4 mais d'exposant 2 (comparer avec l'exemple donné après la proposition 2.7).

Saltman vient récemment d'analyser ce type d'exemple. Cela lui a permis de montrer :

Théorème 5.4 (Saltman [Sa2]). — *Soient k un corps p-adique et K un corps de fonctions d'une variable sur k. Soit D une algèbre à division sur K d'indice l premier, $l \neq p$. Une telle algèbre est cyclique : D contient un sous-corps commutatif maximal cyclique sur K.*

La démonstration passe par une caractérisation des algèbres de degré l en termes de leur ramification, sur un modèle régulier propre convenable de K sur l'anneau des entiers du corps p-adique k. Elle utilise le théorème 5.2.

Un corps de fonctions d'une variable sur un corps local d'égale caractéristique $\mathbf{F}_l((t))$ est un corps C_3. En particulier, toute forme quadratique en au moins 9 variables sur un tel corps possède un zéro non trivial. Il est donc naturel de poser la question : si K est un corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique, toute forme quadratique en au moins 9 variables possède-t-elle un zéro non trivial ?

Merkur'ev remarqua le premier qu'en combinant le théorème 5.1 (pour $l = 2$) sur les corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique (avec $p \neq 2$) avec les résultats généraux sur les formes quadratiques obtenus grâce à la K-théorie algébrique (en fait uniquement le théorème de Merkur'ev [M1]), on obtient au moins une borne supérieure pour la dimension d'une forme quadratique anisotrope définie sur un tel corps. Son résultat fut amélioré par Hoffmann et Van Geel [HVG] puis par Parimala et Suresh :

THÉORÈME 5.5 (Parimala/Suresh [PS1]). — *Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique, avec $p \neq 2$. Toute forme quadratique en au moins* 11 *variables sur K possède un zéro non trivial.*

Avant d'indiquer le principe de la démonstration, commençons par quelques rappels. Le groupe de Witt WK d'un corps K de caractéristique différente de 2 est par définition l'ensemble des classes d'isomorphie de formes quadratiques non dégénérées, muni de la somme directe orthogonale et quotienté par la classe du plan hyperbolique standard $x^2 - y^2$. Le produit tensoriel des formes quadratiques lui donne une structure d'anneau. L'idéal des classes de formes de rang pair est noté $IK \subset WK$. L'idéal I^nK est engendré additivement par les n-formes de Pfister. L'intersection de tous les I^nK est réduit à zéro. Plus précisément, toute forme anisotrope appartenant à I^nK a une dimension au moins égale à 2^n (Arason-Pfister). La conjecture de Milnor établie par Voevodsky implique (Orlov-Vishik-Voevodsky) l'existence d'isomorphismes $I^nK/I^{n+1}K \simeq H^n(K, \mathbf{Z}/2)$. Dans ces isomorphismes, une n-forme de Pfister correspond à un n-symbole.

On peut alors facilement établir l'énoncé général suivant.

PROPOSITION 5.6 ([Kh], [PS2]). — *Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit $N > 0$ un entier tel que $H^{N+1}(K, \mathbf{Z}/2) = 0$; on suppose que pour tout entier n avec $1 \leqslant n \leqslant N$ il existe un entier $\lambda_n(K)$ tel que tout élément de $H^n(K, \mathbf{Z}/2)$ soit somme d'au plus $\lambda_n(K)$ symboles. Alors il existe un entier positif $u(K)$ tel que toute forme quadratique en strictement plus de $u(K)$ variables ait un zéro non trivial.*

Preuve. — L'hypothèse et les rappels ci-dessus impliquent d'une part que $I^{N+1}K = 0$ (et $H^m(K, \mathbf{Z}/2) = 0$ pour tout $m > N$), d'autre part que tout élément de I^nK peut s'écrire comme une somme orthogonale de $\lambda_n(K)$ n-formes de Pfister et d'une forme appartenant à $I^{n+1}K$. Ainsi dans WK toute forme quadratique est représentée par une forme de rang au plus $1 + \sum_{n=1}^{N} 2^n \lambda_n(K)$. Ceci implique que toute forme quadratique de rang strictement plus grand que $1 + \sum_{n=1}^{N} 2^n \lambda_n(K)$ est isotrope. $\square$

La majoration obtenue peut être améliorée ([Kh] Prop. 1.2.d) :

$$u(K) \leqslant 2 + \sum_{n=2}^{N} (2^n - 2)\lambda_n(K).$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, le corps K est de dimension cohomologique 3 par des arguments généraux, en particulier $H^4(K, \mathbf{Z}/2) = 0$. On a la borne évidente $\lambda_1(K) = 1$ (valable sur tout corps). Le théorème 5.1 pour $l = 2$ et un résultat d'Albert ([A], Chap. XI, Thm. 2 ; [Ar2], Thm. 5.5) impliquent que tout élément de $H^2(K, \mathbf{Z}/2)$ est la classe d'un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions, i.e. est la somme de deux symboles. On a donc $\lambda_2(K) = 2$. Il reste à majorer $\lambda_3(K)$. Partant du résultat de Saltman, par des manipulations algébriques, Hoffmann et Van Geel [HVG] établissent $\lambda_3(K) \leqslant 4$, puis $u(K) \leqslant 22$. Par un argument de géométrie arithmétique, Parimala et Suresh montrent $\lambda_3(K) = 1$:

Théorème 5.7 ([PS1]). — *Pour K comme ci-dessus, toute classe dans $H^3(K, \mathbf{Z}/2)$ est représentable par un seul symbole $(a) \cup (b) \cup (c)$.*

La majoration générale ci-dessus donne alors immédiatement $u(K) \leqslant 12$. Un travail arithmétique plus fin permet à Parimala et Suresh d'obtenir la borne $u(K) \leqslant 10$. L'outil fondamental pour la démonstration de 5.7 est le résultat suivant (analogue pour le groupe H^3 du résultat 5.2), qui est un cas particulier d'un théorème de K. Kato :

Théorème 5.8 ([Kt]). — *Soient k un corps p-adique avec $p \neq 2$ et K un corps de fonctions d'une variable sur k. Le groupe de cohomologie non ramifié $H^3_{\mathrm{nr}}(K, \mathbf{Z}/2)$ est nul.*

Parimala et Suresh partent d'un élément quelconque $\alpha \in H^3(K, \mathbf{Z}/2)$. En considérant un modèle régulier propre de K au-dessus de l'anneau des entiers de k, ils montrent comment trouver un élément $f \in K^*$ tel que α devienne non ramifié dans $H^3(K(\sqrt{f}), \mathbf{Z}/2)$, donc nul dans $H^3(K(\sqrt{f}), \mathbf{Z}/2)$ par le théorème de Kato appliqué à $K(\sqrt{f})$. Le théorème de Saltman assure alors que α est une somme d'au plus 2 symboles. Un travail arithmétique plus précis montre que α est représenté par un seul symbole. Le théorème 5.7 répond à une question de Serre [S3] : pour K comme ci-dessus et G le K-groupe simple déployé de type G_2, la flèche naturelle $H^1(K, G) \to H^3(K, \mathbf{Z}/2)$ est une bijection.

RÉFÉRENCES

[A] A. A. Albert – *Structure of Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 24, American Mathematical Society, New York, 1939.

[Ar1] M. Artin – « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), no. 36, p. 23–58.

[Ar2] ———, « Brauer-Severi varieties », in *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 917, Springer, Berlin, 1982, p. 194–210.

[Ar3] ———, « Two-dimensional orders of finite representation type », *Manuscripta Math.* **58** (1987), no. 4, p. 445–471.

[AG] M. Auslander & O. Goldman – « Maximal orders », *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), p. 1–24.

[Bld] A. Blanchard – *Les corps non commutatifs*, Presses Universitaires de France, Vendôme, 1972, Collection Sup : Le Mathématicien, No. 9.

[Blt] A. Blanchet – « Function fields of generalized Brauer-Severi varieties », *Comm. Algebra* **19** (1991), no. 1, p. 97–118.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – « Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem », *Invent. Math.* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.

[Bki] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. 23. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples*, Actualités Sci. Ind. no. 1261, Hermann, Paris, 1958.

[BHN] R. Brauer, H. Hasse & E. Noether – « Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. », *J. reine angew. Math.* **167** (1932), p. 399–404.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène – « Die Brauersche Gruppe ; ihre Verallgemeinerungen und Anwendungen in der arithmetischen Geometrie », (Vortragsnotizen, Brauer Tagung, Stuttgart, 22.-24. März 2001), tapuscrit.

[CTG] ———, « Exposant et indice d'algèbres simples centrales non ramifiées », *Enseign. Math. (2)* **48** (2002), no. 1-2, p. 127–146, avec un appendice d'Ofer Gabber.

[CTGP] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille & R. Parimala – « Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields », *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 2, p. 285–341.

[CTOP] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren & R. Parimala – « Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional Henselian rings and Brauer groups of related schemes », in *Algebra, arithmetic and geometry (Mumbai, 2000)*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 16, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2002, Part II, p. 185–217.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc – « Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles », *Math. Ann.* **244** (1979), no. 2, p. 105–134.

[D] M. Deuring – *Algebren*, Zweite, korrigierte Auflage. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 41, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[FS] T. J. Ford & D. J. Saltman – « Division algebras over Henselian surfaces », in *Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989)*, Israel Math. Conf. Proc., vol. 1, Weizmann, Jerusalem, 1989, p. 320–336.

[G1] P. Gille – « La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1997), no. 86, p. 199–235 (1998).

[G2] ———, « Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique $\leqslant 2$ », *Compositio Math.* **125** (2001), no. 3, p. 283–325.

[GSz] P. Gille & T. Szamuely – « Central simple algebras and Galois cohomology », Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, 2006.

[Gi] J. Giraud – *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[GHS] T. Graber, J. Harris & J. Starr – « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 57–67.

[Gr] A. Grothendieck – « Le groupe de Brauer. I, II, III. », in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[EGA] A. Grothendieck & J. Dieudonné – « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 11.

[HVG] D. W. Hoffmann & J. Van Geel – « Zeros and norm groups of quadratic forms over function fields in one variable over a local non-dyadic field », *J. Ramanujan Math. Soc.* **13** (1998), no. 2, p. 85–110.

[HL] D. Huybrechts & M. Lehn – *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[I] L. Illusie – « Grothendieck's existence theorem in formal geometry (with a letter of J-P. Serre) », in *Advanced School in Basic Algebraic Geometry, ICTP Trieste*, 2003, soumis à *Contemporary Math.*

[dJ1] A. J. de Jong – « The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface », *Duke Math. J.* **123** (2004), no. 1, p. 71–94.

[dJ2] ———,« A result of Gabber », tapuscrit.

[dJS1] A. J. de Jong & J. Starr – « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », *Amer. J. Math.* **125** (2003), no. 3, p. 567–580.

[dJS2] ———, « Obtaining reduced fibres after normalized base change », addendum to [dJS1], tapuscrit.

[Kh] B. Kahn – « On "horizontal" invariants attached to quadratic forms », in *Algebra and number theory*, p. 21–33, Hindustan Book Agency, Delhi, 2005.

[Kt] K. Kato – « A Hasse principle for two-dimensional global fields », *J. reine angew. Math.* **366** (1986), p. 142–181.

[Kr] A. Kresch – « Hodge-theoretic obstruction to the existence of quaternion algebras », *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), no. 1, p. 109–116.

[KRTY] B. È. Kunyavskiĭ, L. H. Rowen, S. V. Tikhonov & V. I. Yanchevskiĭ – « Bicyclic algebras of prime exponent over function fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 6, p. 2579–2610.

[Lie] M. Lieblich – « Twisted sheaves and the period-index problem », tapuscrit.

[Li] J. Lipman – « Introduction to resolution of singularities », in *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 187–230.

[M1] A. S. Merkur′ev – « Sur le symbole de norme résiduelle de degré 2 », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **261** (1981), no. 3, p. 542–547, en russe.

[M2] ———, « Algèbres simples centrales et formes quadratiques », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **55** (1991), no. 1, p. 218–224, en russe.

[MS] A. S. Merkur′ev & A. A. Suslin – « K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de norme résiduelle », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), no. 5, p. 1011–1046, 1135–1136, en russe.

[Mi] J. S. Milne – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[OP] M. Ojanguren & R. Parimala – « Algebras of prime degree on function fields of surfaces », tapuscrit.

[PS1] R. Parimala & V. Suresh – « Isotropy of quadratic forms over function fields of p-adic curves », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1998), no. 88, p. 129–150.

[PS2] ———, « On the length of a quadratic form », in *Algebra and Number Theory*, p. 147–157, Hindustan Book Agency, Delhi, 2005.

[R] I. Reiner – *Maximal orders*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 28, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003, corrected reprint of the 1975 original. With a foreword by M. J. Taylor.

[Ro] P. Roquette – « The Brauer-Hasse-Noether theorem in historical perspective », Schriften der Math.-Phys. Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, vol. 15, 2004.

[Sa2] D. J. Saltman – « Cyclic algebras over p-adic surfaces », tapuscrit.

[Sa1] ———, « Division algebras over p-adic curves », *J. Ramanujan Math. Soc.* **12** (1997), p. 25–47, Corrections : Zentralblatt für Mathematik, 0902.16021 et *J. Ramanujan Math. Soc.*, **13**, p. 125–129.

[S1] J-P. Serre – *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.

[S2] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lect. Notes in Math., vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994, cinquième édition.

[S3] ———, *Cohomologie galoisienne : progrès et problèmes, Séminaire Bourbaki, Exposé* **783**, Astérisque, vol. 227, 1995, p. 229-257.

[T] J.-P. Tignol – « Algèbres indécomposables d'exposant premier », *Adv. in Math.* **65** (1987), no. 3, p. 205–228.

[TW] J.-P. Tignol & A. R. Wadsworth – « Totally ramified valuations on finite-dimensional division algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* **302** (1987), no. 1, p. 223–250.

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE
CNRS
Université Paris XI
UMR 8628 du CNRS
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F–91405 ORSAY Cédex
E-mail : colliot@math.u-psud.fr