Séminaire BOURBAKI Juin 2004
56^e année, 2003-2004, n^o 937, p. 329 à 350

ÉTATS QUASI-LIBRES LIBRES ET FACTEURS DE TYPE III
[d'après D. Shlyakhtenko]

par **Stefaan VAES**

Le but de cet exposé est de présenter une famille d'algèbres de von Neumann introduite par Shlyakhtenko et de donner un aperçu des résultats de classification des algèbres de cette famille. Ces algèbres de von Neumann sont construites dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu.

Murray et von Neumann ont initié la classification des algèbres de von Neumann. Ils ont démontré que chaque algèbre de von Neumann s'écrit comme intégrale directe de facteurs (algèbres de von Neumann de centre trivial) et ils ont classifié les facteurs en différents types : I, II et III. Dans sa thèse [5], Connes a raffiné cette classification en introduisant les sous-types III_λ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). La construction de Shlyakhtenko donne tout un monde d'exemples de facteurs de type III_1, c'est-à-dire le plus haut dans la « hiérarchie » des facteurs.

L'idée de Shlyakhtenko est de donner dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu une version du foncteur CAR (relations d'anticommutation canoniques) et des états quasi-libres associés. Le foncteur CAR associe à chaque espace de Hilbert H la C*-algèbre unifère universelle $\mathrm{CAR}(H)$ engendrée par la famille $\{a(\xi) \mid \xi \in H\}$ telle que

(1) $\xi \mapsto a(\xi)$ est linéaire,
(2) les relations d'anticommutation canoniques sont vérifiées

$$a(\eta)a(\xi)^* + a(\xi)^*a(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle 1,$$
$$a(\xi)a(\eta) + a(\eta)a(\xi) = 0.$$

Les relations d'anticommutation canoniques peuvent être réalisées par les opérateurs de création sur *l'espace de Fock antisymétrique*. Tout opérateur S agissant sur H tel que $0 \leqslant S \leqslant 1$ donne lieu à un état ω_S de la C*-algèbre $\mathrm{CAR}(H)$, qu'on appelle *état quasi-libre de covariance S*. Les représentations GNS [8] associées aux états quasi-libres ont été beaucoup étudiées [18, 14, 1]. Dans une telle représentation, le bicommutant $\mathrm{CAR}(H)''$ est une algèbre de von Neumann. Chaque état quasi-libre sur $\mathrm{CAR}(H)$ donne donc une algèbre de von Neumann qui s'avère être un facteur.

Les travaux d'Araki & Woods [2] et de Powers & Størmer [14] permettent de déterminer le type de ces *facteurs d'Araki-Woods*[1]. Plus précisément, si $0 < \lambda \leqslant 1$, il existe exactement une classe d'isomorphisme de facteurs d'Araki-Woods de type III_λ et il existe une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods de type III_0 et mutuellement non-isomorphes.

Remarquons que les facteurs d'Araki-Woods sont des *facteurs moyennables*. Dans [7] Connes a réussi à donner une classification complète des facteurs moyennables. C'est un des résultats les plus profonds de la théorie des algèbres de von Neumann. Pour chacun des types II_1, II_∞, III_λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ il existe un unique facteur moyennable. Les facteurs moyennables de type III_0 sont classifiés par un invariant en théorie ergodique qu'on appelle *flot des poids*. L'unicité du facteur moyennable de type III_1 est dû à Haagerup [10]. Dans le cadre des probabilités libres, nous allons obtenir des facteurs non-moyennables. En particulier Shlyakhtenko construit une famille non-dénombrable de facteurs de type III_1, non-moyennables et mutuellement non-isomorphes.

L'analogue en probabilités libres du foncteur CAR associe à un espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$, la C*-algèbre universelle $\Gamma(H_\mathbb{R})$ engendrée par la famille $\{s(\xi) \mid \xi \in H_\mathbb{R}\}$ telle que

- $s(\xi)$ soit auto-adjoint pour tout $\xi \in H_\mathbb{R}$,
- $\xi \mapsto s(\xi)$ soit $\mathbb{R}$-linéaire,
- $\|s(\xi)\| \leqslant \|\xi\|$ pour tout $\xi \in H_\mathbb{R}$.

Pour chaque plongement isométrique $H_\mathbb{R} \hookrightarrow H$ de $H_\mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert H, on obtient une représentation de $\Gamma(H_\mathbb{R})$ sur *l'espace de Fock plein*

$$\mathcal{F}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n},$$

en posant $s(\xi) = (\ell(\xi) + \ell(\xi)^*)/2$ où $\ell(\xi)$ est l'opérateur de création.

La construction des facteurs d'Araki-Woods libres suppose la donnée d'un groupe à un paramètre (U_t) de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$ qui induit un plongement isométrique $H_\mathbb{R} \hookrightarrow H$ de $H_\mathbb{R}$ dans le complexifié H. On obtient une représentation de $\Gamma(H_\mathbb{R})$ dont l'image est notée $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)$. Le facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)$. La restriction de l'état du vide au facteur $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est *l'état quasi-libre libre* noté φ_U. Alors, $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est un facteur de type III, sauf si $U_t = \mathrm{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous commençons cet exposé par rappeler la classification des facteurs de Connes et les probabilités libres de Voiculescu et par une présentation de plusieurs points de vue sur nos données essentielles, les représentations orthogonales de $\mathbb{R}$. Au § 2 nous

[1] Il découle des travaux de Powers & Størmer que les facteurs associés aux états quasi-libres sont des produits tensoriels infinis de matrices 2 fois 2 (des facteurs ITPFI_2). Plus généralement, Araki & Woods étudient et déterminent le type des produits tensoriels infinis de facteurs de type I (les ITPFI) et il y a des ITPFI qui ne sont pas ITPFI_2.

définissons l'algèbre de von Neumann $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ avec l'état quasi-libre libre φ_U. Nous étudions en détail le cas $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ muni de la représentation de $\mathbb{R}$ par rotations. Au § 3 nous présentons les principaux résultats de classification et de non-isomorphisme des facteurs d'Araki-Woods libres obtenus par Shlyakhtenko :

– Classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres associés à une représentation (U_t) *presque-périodique*.

– Construction d'une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods libres non-presque-périodiques et mutuellement non-isomorphes. Ces facteurs sont distingués par leur invariant τ de Connes.

– Construction de deux facteurs d'Araki-Woods libres non-isomorphes et ayant le même invariant τ de Connes. Ceci est une application de la notion de *dimension entropique libre* introduite par Voiculescu [29, 28].

– Démonstration que la classe d'isomorphisme d'un facteur Araki-Woods libre peut dépendre de la multiplicité de la représentation (U_t). Ce résultat est démontré à l'aide de la notion *d'algèbre de von Neumann solide* due à Ozawa [12].

La classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres reste un problème ouvert. Les résultats de non-isomorphisme présentés au § 3 montrent qu'un facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ dépend fortement de la classe de la mesure spectrale de la représentation (U_t). Ce problème de classification est beaucoup plus difficile que la classification des facteurs d'Araki-Woods, pour la raison suivante. Powers et Størmer [14] démontrent essentiellement que deux facteurs d'Araki-Woods associés à des états quasi-libres sont isomorphes si leurs opérateurs de covariance diffèrent d'un opérateur d'Hilbert-Schmidt. En particulier, d'après un résultat de von Neumann, il suffit de considérer le cas d'un opérateur de covariance diagonalisable. Ceci n'est plus le cas pour les facteurs d'Araki-Woods libres. Une grande partie des facteurs d'Araki-Woods libres ne peut être obtenue par des représentations orthogonales presque-périodiques.

Dans le dernier § 4 nous présentons un nouveau résultat sur les produits libres, ce qui permet au § 2.3 de démontrer un résultat un peu plus général que dans l'article [22].

Il y a un certain nombre de résultats et d'applications dans la théorie des facteurs d'Araki-Woods libres dont on ne parlera pas en détail dans cet exposé. Notons que Shlyakhtenko a démontré dans [23] que les facteurs d'Araki-Woods libres T_λ de type III_λ $(0 < \lambda < 1)$ sont des *facteurs premiers* : ils ne peuvent être écrits comme produit tensoriel de deux facteurs diffus (sans projecteurs minimaux). Dans [13] Pisier et Shlyakhtenko utilisent des facteurs d'Araki-Woods libres comme modèles pour démontrer une *inégalité de Grothendieck* pour les espaces d'opérateurs. Dans [27] les facteurs d'Araki-Woods libres sont utilisés pour construire des *actions extérieures* de groupes quantiques localement compacts.

Je remercie S. Baaj, E. Germain, D. Shlyakhtenko et G. Skandalis pour leur aide pendant la préparation de cet exposé.

1. RAPPELS

1.1. Algèbres de von Neumann. Type des facteurs

On rappelle que pour un ensemble X d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H, $X \subset \mathrm{B}(H)$, on appelle *commutant* de X et on note X' l'ensemble de tous les opérateurs $T \in \mathrm{B}(H)$ qui commutent à X. Si $A \subset \mathrm{B}(H)$ est une sous-algèbre involutive qui agit d'une façon non-dégénérée sur H, le *bicommutant* A'' coïncide avec l'adhérence de A dans $\mathrm{B}(H)$ pour la topologie faible, c'est-à-dire la topologie donnée par les semi-normes $T \mapsto |\langle T\xi, \eta\rangle|$, où $\xi, \eta \in H$.

On appelle *algèbre de von Neumann* toute sous-algèbre involutive $M \subset \mathrm{B}(H)$ qui est égale à son bicommutant : $M = M''$, ce qui équivaut à dire que M est faiblement fermé et $1 \in M$. Un *facteur* est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires. Si G est un groupe localement compact, l'algèbre de von Neumann du groupe G notée $L(G)$ est le bicommutant $\{\lambda_g \mid g \in G\}''$ où (λ_g) est la représentation régulière du groupe G sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$.

Murray et von Neumann ont classifié les facteurs en types I, II et III. Les *facteurs de type I* sont ceux qui possèdent des projecteurs minimaux. Ils sont isomorphes à $M_n(\mathbb{C})$ (type I_n) ou $\mathrm{B}(\ell^2)$ (type I_∞). Les *facteurs de type II_1* sont ceux qui admettent une trace finie et qui sont de dimension infinie (pour exclure le cas I_n). L'exemple type d'un facteur II_1 est donné par l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret G dont $\{e\}$ est la seule classe de conjugaison finie (on dit que G est CCI). Les groupes libres $\mathbb{F}_n$ à n générateurs sont des exemples de groupes CCI (n peut être ∞). Les *facteurs de type II_∞* sont ceux qui sont de la forme $N \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$ avec N un facteur II_1. Ce sont exactement les facteurs qui admettent une trace infinie semi-finie et qui ne sont pas de type I. Un facteur de type I ou II est dit *semi-fini*. Il admet toujours une trace semi-finie. Finalement les *facteurs de type III* sont ceux qui n'admettent pas de trace non-nulle.

Remarque 1.1. — Dans tout l'exposé les espaces de Hilbert sont supposés *séparables* et les algèbres de von Neumann *à prédual séparable*, i.e. admettant une représentation fidèle sur un espace de Hilbert séparable.

1.2. Classification des facteurs de type III d'après Connes

Un *état normal* d'une algèbre de von Neumann M est une forme linéaire faiblement continue $\omega : M \to \mathbb{C}$ positive ($\omega(x) \geqslant 0$ quand $x \geqslant 0$) qui satisfait $\omega(1) = 1$. Un état est dit *fidèle* si $x = 0$ dès que $\omega(x) = 0$ et $x \geqslant 0$. Toute algèbre de von Neumann à prédual séparable admet un état fidèle.

La théorie de Tomita-Takesaki associe à tout état fidèle ω un groupe à un paramètre (σ_t^ω) d'automorphismes de M appelé *groupe modulaire* et caractérisé par

– $\omega\sigma_t^\omega = \omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

– ω satisfait la condition KMS par rapport à (σ_t^ω) : pour tout $x, y \in M$, il existe une fonction continue $f : \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\} \to \mathbb{C}$ qui est analytique à l'intérieur de la bande et qui satisfait

$$f(t) = \omega(x\sigma_t^\omega(y)) \quad \text{et} \quad f(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(y)x) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Une bonne introduction à la *théorie modulaire de Tomita-Takesaki* se trouve dans [26].

Le *théorème de Radon-Nikodym* de Connes [5] permet de comparer les groupes modulaires de deux états fidèles ω, μ sur M. En effet, il existe une application faiblement continue $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de M telle que

– $u_{t+s} = u_t \sigma_t^\omega(u_s)$,
– $\sigma_t^\mu(x) = u_t \sigma_t^\omega(x) u_t^*$.

Les groupes modulaires de deux états fidèles diffèrent donc par une perturbation intérieure. Il s'en suit qu'une algèbre de von Neumann a une dynamique intrinsèque donnée par les groupes modulaires des états fidèles et déterminée à perturbation intérieure près.

Définissons le groupe polonais $\operatorname{Aut} M$ des automorphismes de M muni de la topologie induite par les distances $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha - \omega\beta\|$ et $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha^{-1} - \omega\beta^{-1}\|$, où ω parcourt les états de M. À chaque unitaire $u \in M$, on associe *l'automorphisme intérieur* $\operatorname{Ad} u$ défini par $(\operatorname{Ad} u)(x) = uxu^*$. Les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe distingué $\operatorname{Int} M$ de $\operatorname{Aut} M$. Le groupe quotient est noté $\operatorname{Out} M$. Le théorème de Radon-Nikodym permet de définir un homomorphisme $\delta : \mathbb{R} \to \operatorname{Out} M$ qui envoie t à la classe de σ_t^ω et qui ne dépend pas du choix de ω.

Invariant T. — Soit ω un état fidèle sur un facteur M avec groupe modulaire (σ_t). Dans [5] Connes a introduit le sous-groupe $T(M)$ de $\mathbb{R}$:

$$T(M) = \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma_t^\omega \in \operatorname{Int} M\}.$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym, l'invariant $T(M)$ ne dépend pas du choix de l'état ω. C'est donc un invariant de l'algèbre de von Neumann M.

Flot des poids. — À chaque facteur M est associée une algèbre de von Neumann semi-finie : c'est le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ de M par le groupe modulaire (σ_t) d'un état fidèle sur M. Sur le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$, il existe une trace semi-finie canonique. Le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ admet une *action duale* (θ_s) de $\mathbb{R}_+^*$ par automorphismes. La restriction de l'action (θ_s) au centre du produit croisé s'appelle le *flot des poids* de M. Grâce au théorème de Radon-Nikodym, le flot des poids ne dépend pas du choix de l'état fidèle.

Facteurs de type III_λ. — Notons que le flot des poids est une action ergodique de $\mathbb{R}_+^*$ sur un espace mesuré. Or une telle action est ou bien transitive ou bien proprement ergodique, d'où la classification suivante :

- M est semi-fini si c'est l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
- M est de type III_λ avec $0 < \lambda < 1$ si c'est l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$,
- M est de type III_1 si c'est l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur un point,
- M est de type III_0 si c'est une action proprement ergodique.

Combes a donné un aperçu des résultats de classification de Connes dans [4].

Murray et von Neumann ont construit deux facteurs de type II_1 non-isomorphes : le facteur hyperfini $\mathcal{R}$ et le facteur $L(\mathbb{F}_2)$ du groupe libre à 2 générateurs. Ils sont non-isomorphes car $\mathrm{Int}\, L(\mathbb{F}_2)$ est fermé dans $\mathrm{Aut}\, L(\mathbb{F}_2)$ tandis que $\mathrm{Int}\, \mathcal{R}$ est un sous-groupe dense non-trivial de $\mathrm{Aut}\, \mathcal{R}$.

Facteurs pleins et invariant τ. — Un facteur M est dit *plein* si $\mathrm{Int}\, M$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}\, M$. Pour un facteur plein, le groupe quotient $\mathrm{Out}\, M$ est un groupe polonais. Pour un tel facteur plein Connes [6] introduit un nouvel invariant :

$$\tau(M) = \text{la topologie la plus faible sur } \mathbb{R} \text{ qui rend continue l'application } \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Out}\, M.$$

Les facteurs d'Araki-Woods libres sont des facteurs pleins. Nous remarquons qu'un facteur plein ne peut être de type III_0.

1.3. Probabilités libres d'après Voiculescu

Une introduction plus complète aux probabilités libres de Voiculescu se trouve dans le livre [30] ou dans [25].

Un *espace de probabilités non-commutatif* est une paire (A, φ) où A est une algèbre unifère et φ est une forme linéaire vérifiant $\varphi(1) = 1$. Dans cet exposé on s'intéresse surtout aux algèbres de von Neumann : A est une algèbre de von Neumann et φ un état normal. Les éléments de A s'appellent toujours variables aléatoires. La *distribution* d'un élément $x \in A$ est l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $\varphi(P(x))$. Si A est une algèbre de von Neumann et x un élément auto-adjoint, la distribution de x est une mesure de probabilités dont le support est contenu dans $[-\|x\|, \|x\|]$.

NOTATION 1.2. — *Si* (M, φ) *et* (N, μ) *sont des algèbres de von Neumann munies d'états* φ *et* μ, *la notation* $(M, \varphi) \cong (N, \mu)$ *signifie qu'il existe un* **-isomorphisme* $\alpha : M \to N$ *tel que* $\mu\alpha = \varphi$.

DÉFINITION 1.3. — *Soit* (A, φ) *un espace de probabilités non-commutatif. Une famille* $(A_i)_{i \in I}$ *de sous-algèbres est dite* libre *si pour tout* k *et toute suite d'éléments* $a_j \in A_{i_j}$ $(j = 1, \dots, k)$ *satisfaisant* $\varphi(a_j) = 0$ *et* $i_j \neq i_{j+1}$, *on a* $\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0$.

Une famille d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ *est dite* libre (*resp.* *-libre) *si les algèbres* (*resp.* **-algèbres*) A_i *engendrées par* x_i *forment une famille libre de sous-algèbres de* A.

Les produits libres fournissent des exemples de familles libres.

Proposition 1.4. — *Soit* (M_i, φ_i) *une famille d'algèbres de von Neumann munies d'un état fidèle. Alors, il existe, à isomorphisme près, une unique paire* (M, φ) *d'une algèbre von Neumann munie d'un état fidèle, telle que*

– (M_i, φ_i) *se plonge dans* (M, φ) *en préservant l'état,*

– M *est engendrée par la famille de sous-algèbres* (M_i) *qui est une famille libre dans* (M, φ).

On appelle (M, φ) *le* produit libre des (M_i, φ_i) *et on note* $(M, \varphi) = \mathop{*}_{i\in I}(M_i, \varphi_i)$.

1.4. Représentations orthogonales de $\mathbb{R}$

La donnée de la construction des états quasi-libres libres et des facteurs d'Araki-Woods libres associés est une représentation de $\mathbb{R}$ par transformations orthogonales.

Terminologie 1.5. — *On appelle* représentation orthogonale de $\mathbb{R}$ *tout groupe à un paramètre de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel* $H_{\mathbb{R}}$.

Soit (U_t) une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Le complexifié $H = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ admet une involution anti-unitaire J (l'opérateur de conjugaison complexe) et les transformations orthogonales (U_t) s'étendent en un groupe à un paramètre d'unitaires sur H, qu'on notera toujours (U_t).

Il existe alors un unique opérateur auto-adjoint strictement positif A sur H tel que $U_t = A^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a $JAJ = A^{-1}$. L'opérateur A permet de définir un nouveau plongement isométrique

$$H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H : \xi \longmapsto \Big(\frac{2}{A^{-1}+1}\Big)^{1/2}\xi.$$

En effet, si $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, on a $J\xi = \xi$ et donc

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\frac{2}{A^{-1}+1}\Big)^{1/2}\xi\Big\|^2 &= \Big\langle \frac{1}{A^{-1}+1}\xi, \xi\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{A^{-1}+1}J\xi, J\xi\Big\rangle \\ &= \Big\langle \frac{A}{A+1}\xi, \xi\Big\rangle + \Big\langle J\frac{1}{A+1}\xi, J\xi\Big\rangle \\ &= \Big\langle \frac{A+1}{A+1}\xi, \xi\Big\rangle = \|\xi\|^2.\end{aligned}$$

On notera $K_{\mathbb{R}}$ l'image de $H_{\mathbb{R}}$ par ce plongement. Alors, $K_{\mathbb{R}}$ est un espace de Hilbert réel, isométriquement plongé dans un espace de Hilbert complexe H vérifiant la propriété suivante :

$$(\star) \qquad K_{\mathbb{R}} \cap iK_{\mathbb{R}} = \{0\} \text{ et } K_{\mathbb{R}} + iK_{\mathbb{R}} \text{ est dense dans } H.$$

Dans [17] on démontre que chaque plongement isométrique $K_{\mathbb{R}} \subset H$ satisfaisant la condition $(\star)$ provient d'une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$ sur un espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$ par la construction présentée ci-dessus.

Écrivons $T = JA^{-1/2}$. Alors T est un opérateur anti-linéaire fermé et inversible sur H qui satisfait $T = T^{-1}$. Un tel opérateur s'appelle une *involution sur* H. Réciproquement une telle involution T admet une décomposition polaire $T = JA^{-1/2}$ dans laquelle J est une involution anti-unitaire sur H et A est un opérateur auto-adjoint strictement positif satisfaisant $JAJ = A^{-1}$. Posons $H_{\mathbb{R}} = \{\xi \in H \mid J\xi = \xi\}$ et $U_t = A^{it}$. On obtient ainsi une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$. On remarquera que l'espace $K_{\mathbb{R}}$ correspondant consiste en les vecteurs ξ dans le domaine de T qui satisfont $T\xi = \xi$.

On a alors obtenu plusieurs points de vue différents sur les représentations orthogonales de $\mathbb{R}$.

(1) Un groupe à un paramètre de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel.

(2) Un plongement isométrique d'un espace de Hilbert réel dans un espace de Hilbert complexe vérifiant $(\star)$.

(3) Une involution T sur un espace de Hilbert.

Finalement on peut considérer la décomposition spectrale de l'opérateur $\log A$. Comme $J(\log A)J = -\log A$, la classe de la mesure spectrale de $\log A$ est symétrique. Les représentations orthogonales de $\mathbb{R}$ sont donc classifiées par une classe de mesure symétrique sur $\mathbb{R}$ et une fonction de multiplicité symétrique.

2. FACTEURS D'ARAKI-WOODS LIBRES

Le foncteur CAR associe à tout espace de Hilbert H la C*-algèbre $\mathrm{CAR}(H)$ (voir introduction). Oubliant la structure complexe de H on peut écrire $\mathrm{CAR}(H)$ comme une algèbre de Clifford. Soit $H_{\mathbb{R}}$ un espace de Hilbert réel. On note $\mathrm{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ et on appelle *algèbre de Clifford* la C*-algèbre universelle engendrée par la famille $\{s(\xi) \mid \xi \in H_{\mathbb{R}}\}$ telle que $s(\xi)$ est auto-adjoint pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, $\xi \mapsto s(\xi)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et

$$s(\xi)s(\eta) + s(\eta)s(\xi) = 2\langle \xi, \eta \rangle 1.$$

Cette dernière condition étant équivalente à $s(\xi)^2 = \|\xi\|^2 1$ pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, on voit comment le foncteur $H_{\mathbb{R}} \mapsto \Gamma(H_{\mathbb{R}})$ est une version libre du foncteur Cliff.

À chaque plongement isométrique $H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow H$ de $H_{\mathbb{R}}$ dans un espace de Hilbert complexe H est associée une représentation de $\mathrm{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ sur *l'espace de Fock anti-symétrique* (*ou fermionique*) :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\wedge n}$$

posant $s(\xi) = a(\xi)^* + a(\xi)$ où $a(\xi)$ est l'opérateur de création à gauche. Remarquons que cette représentation de $\mathrm{Cliff}(H_{\mathbb{R}})$ est en fait la représentation GNS d'un état quasi-libre. L'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $s(\xi), \xi \in H_{\mathbb{R}}$ est un *facteur d'Araki-Woods*.

Shlyakhtenko donne une version libre de la construction précédente et appelle le facteur engendré *facteur d'Araki-Woods libre*.

2.1. États quasi-libres libres

Donnons-nous une représentation orthogonale (U_t) de $\mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert réel $H_{\mathbb{R}}$. Comme au § 1.4, nous regardons le complexifié H de $H_{\mathbb{R}}$ avec l'involution anti-unitaire J et l'opérateur auto-adjoint strictement positif A tel que $U_t = A^{it}$. Introduisons *l'espace de Fock plein* de H :

$$\mathcal{F}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n}.$$

Le vecteur unité Ω s'appelle *vecteur du vide*. Pour chaque vecteur $\xi \in H$, nous disposons de *l'opérateur de création à gauche*

$$\ell(\xi) : \mathcal{F}(H) \longrightarrow \mathcal{F}(H) : \begin{cases} \ell(\xi)\Omega = \xi, \\ \ell(\xi)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \xi \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n. \end{cases}$$

L'adjoint $\ell(\xi)^*$ s'appelle *opérateur d'annihilation*.

Pour chaque vecteur $\xi \in H$, notons $s(\xi)$ la partie réelle de $\ell(\xi)$ donnée par

$$s(\xi) = \frac{\ell(\xi) + \ell(\xi)^*}{2}.$$

Un résultat crucial de Voiculescu [30] dit que la distribution de l'opérateur $s(\xi)$ par rapport à l'état vectoriel du vide donné par $\varphi(x) = \langle x\Omega, \Omega\rangle$ est la loi semi-circulaire de Wigner supportée par l'intervalle $[-\|\xi\|, \|\xi\|]$.

Rappelons que l'opérateur A permet de définir un plongement de $H_{\mathbb{R}}$ dans H dont l'image est notée $K_{\mathbb{R}}$. On peut alors formuler la définition centrale de cet exposé [20].

DÉFINITION 2.1. — *Soit* (U_t) *une représentation orthogonale de* $\mathbb{R}$ *sur l'espace de Hilbert réel* $H_{\mathbb{R}}$. *Le* facteur d'Araki-Woods libre(2) *noté* $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ *est défini par*

$$\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'' = \{s(\xi) \mid \xi \in K_{\mathbb{R}}\}''.$$

L'état vectoriel $\varphi_U(x) = \langle x\Omega, \Omega\rangle$ *est appelé* état quasi-libre libre.

Rappelons que $T = JA^{-1/2}$ est l'involution sur H associée à (U_t). Pour $\xi, \eta \in K_{\mathbb{R}}$, on vérifie que

$$2s(\xi) + 2is(\eta) = \ell(\zeta) + \ell(T\zeta)^*$$

où $\zeta = \xi + i\eta$. On conclut que $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est également l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\ell(\zeta) + \ell(T\zeta)^*$ où ζ appartient au domaine de T.

Le résultat suivant est facile à démontrer.

(2)Nous verrons que $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est effectivement un facteur dès que $\dim H_{\mathbb{R}} \geqslant 2$.

Proposition 2.2. — *L'état quasi-libre libre φ_U sur $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est fidèle. Le groupe modulaire (σ_t) de l'état φ_U est donné par*

$$\sigma_t(s(\xi)) = s(U_t \xi) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}, \xi \in K_{\mathbb{R}}.$$

La construction des facteurs d'Araki-Woods libres est fonctorielle dans un sens précis. En effet on considère la catégorie dont les objets sont les paires $(H_{\mathbb{R}}, U_t)$ et les morphismes sont les contractions entre espaces de Hilbert qui entrelacent les représentations. À chaque morphisme $(H_{\mathbb{R}}^{(1)}, U_t^{(1)}) \to (H_{\mathbb{R}}^{(2)}, U_t^{(2)})$ correspond une application complètement positive $\Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(1)}, U_t^{(1)})'' \to \Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(2)}, U_t^{(2)})''$ normale et unifère, préservant les états quasi-libres libres. On notera Γ'' ce foncteur.

La catégorie des paires $(H_{\mathbb{R}}, U_t)$ admet une structure additive : la somme directe. Shlyakhtenko démontre que le foncteur Γ'' entrelace les opérations somme directe et produit libre.

Proposition 2.3. — *Soit $(H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})_{i \in I}$ une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$. Posons $(H_{\mathbb{R}}, U_t) = \oplus_i (H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})$. Alors,*

$$(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U) \cong \mathop{*}_{i \in I} \big(\Gamma(H_{\mathbb{R}}^{(i)}, U_t^{(i)})'', \varphi_{U^{(i)}}\big).$$

2.2. Variables circulaires généralisées

Pour comprendre la structure des algèbres de von Neumann $(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)'', \varphi_U)$ il est naturel de considérer d'abord les représentations orthogonales irréductibles de $\mathbb{R}$. Le cas $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $U_t = \mathrm{id}$ est facile : l'algèbre est engendré par un seul opérateur dont la distribution par rapport à φ_U est la loi semi-circulaire, d'après le résultat de Voiculescu. On trouve donc

$$(\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{id})'', \varphi_U) \cong (L^\infty[-1,1], \mu)$$

où μ est la mesure semi-circulaire sur $[-1,1]$. Si on combine ce résultat avec la proposition 2.3, on obtient

$$(\Gamma(H_{\mathbb{R}}, \mathrm{id})'', \varphi_U) \cong (L(\mathbb{F}_n), \mathrm{tr}) \tag{1}$$

où $L(\mathbb{F}_n)$ est l'algèbre de von Neumann du groupe libre à $n = \dim H_{\mathbb{R}}$ générateurs.

Prenons maintenant $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et $0 < \lambda < 1$. Posons

$$U_t = \begin{pmatrix} \cos(t \log \lambda) & -\sin(t \log \lambda) \\ \sin(t \log \lambda) & \cos(t \log \lambda) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

En prenant la base orthonormale $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$ du complexifié $H = \mathbb{C}^2$, on voit que l'algèbre de von Neumann $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ est engendrée par l'opérateur $\ell(\xi_2) + \sqrt{\lambda}\ell(\xi_1)^*$ sur l'espace de Fock plein $\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$.

Notation 2.4. — *On notera $(T_\lambda, \varphi_\lambda) := \Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ où $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et U_t est donné par l'égalité* (2).

Pour comprendre l'algèbre T_λ, il faut étudier la *-distribution de l'élément $\ell(\xi_2) + \sqrt{\lambda}\ell(\xi_1)^*$ par rapport à l'état vectoriel du vide. Un tel élément s'appelle *élément circulaire généralisé*. Dans le cas $\lambda = 1$, on retrouve l'élément circulaire y de Voiculescu [30]. Voiculescu a démontré que la décomposition polaire $y = ub$ d'un élément circulaire donne un *unitaire de Haar* u et un opérateur b *quart-circulaire*. Ceci veut dire que la distribution de u est la distribution uniforme sur le cercle et que la distribution de b suit la loi quart-circulaire supportée par l'intervalle $[0, 1]$. Shlyakthenko a démontré dans [20] un résultat analogue pour les éléments circulaires généralisés. Ce résultat permet de donner une description alternative de $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$.

Théorème 2.5. — *Soit* $0 < \lambda < 1$ *et soit* $y = \ell(\xi_1) + \sqrt{\lambda}\ell(\xi_2)^*$ *l'élément circulaire généralisé associé dans* $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$. *Notons* $y = vb$ *la décomposition polaire de* y. *Alors* v *est une isométrie non-unitaire qui satisfait* $\varphi_\lambda(v^k(v^*)^l) = \delta_{kl}\lambda^k$. *La distribution de l'opérateur* b *est sans atomes. Les éléments* u *et* b *sont* **-libres.*

Un corollaire immédiat de ce résultat est que

$$(T_\lambda, \varphi_\lambda) \cong (\mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N})), \omega_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu) \tag{3}$$

où $\omega_\lambda(e_{ij}) = \delta_{ij}\lambda^j(1 - \lambda)$ et μ est la loi semi-circulaire sur $[-1, 1]$. Bien évidemment, au lieu de μ on pourrait prendre n'importe quelle autre mesure de probabilités sans atomes.

L'isomorphisme (3) est crucial. Il permet de réaliser $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ en représentant d'une manière libre $(\mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N})), \omega_\lambda)$ et $(L^\infty[-1, 1], \mu)$ dans un espace de probabilité non-commutatif. Shlyakhtenko trouve dans [20] de telles représentations qui permettent de comprendre la réduction de l'algèbre T_λ par un projecteur minimal de $\mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On les appelle *modèles matriciels*. C'est un outil puissant qui permet de démontrer des résultats *d'absorption libre*.

Théorème 2.6. — *On a*

$$(T_\lambda, \varphi_\lambda) \cong (T_\lambda, \varphi_\lambda) * (L^\infty[-1, 1], \mu) \cong (T_\lambda, \varphi_\lambda) * (L(\mathbb{F}_\infty), \mathrm{tr}),$$

où μ *est la mesure semi-circulaire et* tr *est la trace sur le facteur* $L(\mathbb{F}_\infty)$ *du groupe libre à une infinité de générateurs.*

2.3. Type des facteurs d'Araki-Woods libres

À l'aide du théorème 2.6, on peut finalement démontrer que $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est toujours un facteur quand la dimension de $H_\mathbb{R}$ est au moins 2. On peut en même temps déterminer le type de ce facteur et son invariant τ.

Théorème 2.7. — *Soit* (U_t) *une représentation orthogonale de* $\mathbb{R}$ *sur l'espace de Hilbert réel* $H_\mathbb{R}$ *de dimension au moins* 2. *Notons* $M = \Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$.

(1) M *est un facteur plein.*
(2) M *est de type* II_1 *ssi* $U_t = id$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(3) *M est de type III$_\lambda$ $(0<\lambda<1)$ ssi (U_t) est périodique de période $\frac{2\pi}{|\log\lambda|}$.*

(4) *M est de type III$_1$ dans les autres cas.*

(5) *L'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible sur $\mathbb{R}$ qui rend continue l'application $t\mapsto U_t$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe orthogonal de $H_{\mathbb{R}}$ muni de la topologie faible.*

(6) *Le facteur M admet des états presque-périodiques ssi (U_t) est presque-périodique.*

Nous donnons ici plus de détails pour la démonstration de ce théorème. Shlyakhtenko détermine l'invariant $\tau(M)$ dans [22], mais en supposant que la représentation orthogonale (U_t) contient ou bien une représentation périodique ou bien une représentation triviale de dimension 2. Nous suivons la même méthode que Shlyakhtenko, mais utilisons le nouveau lemme 4.1 qui est plus fort que le lemme des 14ε de Barnett [3] utilisé par Shlyakhtenko. Shlyakhtenko démontre (1)–(4) dans [20] pour les représentations presque-périodiques et dans [21] pour le cas général, mais par d'autres méthodes que nous.

Preuve du théorème 2.7. — Il suffit de démontrer (1) et (5). En effet, un facteur plein est semi-fini (c'est-à-dire, de type I ou II) ssi $\tau(M)$ est la topologie grossière. Dans ce cas-là, on conclut de (5) que $U_t=\mathrm{id}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et d'après l'isomorphisme (1), M est un facteur II$_1$. Ceci démontre (2). Un facteur plein n'est jamais de type III$_0$. Comme $\tau(M)$ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $\delta:\mathbb{R}\to\mathrm{Out}(M)$, on conclut de (5) que $\delta(t)=1$ ssi $U_t=\mathrm{id}$. Ceci démontre (3) et (4). Finalement, démontrons (6). Si M admet un état presque-périodique, le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\tau(M)$ peut être complété en un groupe compact. Il existe donc un groupe compact G, un plongement $\mathbb{R}\subset G$ et une extension de $t\mapsto U_t$ en un homomorphisme continu $G\to O(H_{\mathbb{R}})$. Ceci veut dire que (U_t) est presque-périodique [8]. Réciproquement, si (U_t) est presque-périodique, l'état quasi-libre libre est un état presque-périodique.

Il nous reste à démontrer (1) et (5). Ceci est évident quand $U_t=\mathrm{id}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Le deuxième cas qu'on considère est celui où (U_t) contient la représentation donnée par l'égalité (2) avec $0<\lambda<1$. Notons son complément par (U'_t) agissant sur $H'_{\mathbb{R}}$. D'après le théorème 2.6 on a

$$\begin{aligned}(M,\varphi)&\cong(T_\lambda,\varphi_\lambda)*(\Gamma(H'_{\mathbb{R}},U'_t)'',\varphi_{U'})\\&\cong\big((T_\lambda,\varphi_\lambda)*(L^\infty[-1,1],\mu)\big)*\big(L^\infty([-1,1],\mu)*(\Gamma(H'_{\mathbb{R}},U'_t)'',\varphi_{U'})\big).\end{aligned}$$

Comme $(L^\infty[-1,1],\mu)$ contient un unitaire de Haar, on peut appliquer la proposition 4.2. On conclut que M est un facteur plein et que l'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible sur $\mathbb{R}$ qui rend continues les deux applications $t\mapsto\sigma_t^{\varphi_\lambda}$ et $t\mapsto\sigma_t^{\varphi_{U'}}$. Par la proposition 2.2 ceci est exactement la topologie la plus faible sur $\mathbb{R}$ qui rend continue l'application $t\mapsto U_t$.

Finalement, nous considérons le cas où la représentation (U_t) ne contient pas de représentation périodique et n'est pas triviale. Il est alors clair qu'on peut décomposer

U_t en trois composantes non-triviales $U_t = U_t^{(1)} \oplus U_t^{(2)} \oplus U_t^{(3)}$. Les énoncés (1) et (5) découlent des propositions 2.3 et 4.2 ainsi que du lemme 4.3. $\square$

Pour chaque représentation orthogonale non-périodique (U_t) de $\mathbb{R}$, le facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est donc un facteur de type III_1 dont l'invariant τ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$.

Remarque 2.8. — Dans [6] Connes part d'une mesure finie μ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\int \lambda \, d\mu(\lambda) < \infty$. On y associe la représentation unitaire (U_t) de $\mathbb{R}$ sur $L^2(\mathbb{R}_+^*, \mu)$, défini par $(U_t\xi)(\lambda) = \lambda^{it}\xi(\lambda)$. On suppose que (U_t) est non-périodique.

Connes définit $P = M_2(L^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mu))$ muni de l'état φ proportionnel à la forme positive

$$\omega \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \int f_{11}(\lambda) \, d\mu(\lambda) + \int \lambda f_{22}(\lambda) \, d\mu(\lambda).$$

Prenons un groupe discret infini G et définissons le produit tensoriel infini

$$P_\infty = \bigotimes_{g \in G} (P, \varphi).$$

Alors G agit sur P_∞ par automorphismes de décalage des facteurs tensoriels et on considère le produit croisé $M = P_\infty \rtimes G$. De cette manière M est un facteur de type III_1. Connes démontre que pour $G = \mathbb{F}_n$ $(n = 2, \dots, +\infty)$, M est un facteur plein et l'invariant $\tau(M)$ est la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$. Les facteurs de type III_1 de Connes et ceux de Shlyakhtenko peuvent-ils être isomorphes ?

3. CLASSIFICATION DES FACTEURS D'ARAKI-WOODS LIBRES

3.1. Le cas presque-périodique

Supposons d'abord que (U_t) est une représentation orthogonale *presque-périodique*. Ceci veut dire que l'opérateur A, qui était défini sur le complexifié H de $H_\mathbb{R}$ par $U_t = A^{it}$, a un spectre purement ponctuel. Soit $G \subset \mathbb{R}_+^*$ le sous-groupe engendré par le spectre ponctuel de A. Shlyakhtenko [20] démontre que ce sous-groupe *classifie les facteurs d'Araki-Woods libres presque-périodiques.*

THÉORÈME 3.1. — *Soit (U_t) une représentation orthogonale presque-périodique et non-triviale. Soit G le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par le spectre ponctuel de A. Alors, $(\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)'', \varphi_U)$ ne dépend que de G à des isomorphismes qui préservent l'état quasi-libre libre près.*

Réciproquement, le groupe G coïncide avec l'invariant S_{discret} du facteur $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ [6]*, qui classifie donc les facteurs d'Araki-Woods libres presque-périodiques et non-triviales.*

En particulier, il découle de ce théorème et du théorème 2.7 que $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ est le seul facteur d'Araki-Woods libre de type III_λ $(0 < \lambda < 1)$.

Remarquons que le cas où $U_t = \mathrm{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ reste ouvert. En effet, d'après l'isomorphisme (1), on sait qu'on obtient le facteur du groupe libre à n générateurs : décider si ces facteurs dépendent de n est un des problèmes ouverts en algèbres d'opérateurs.

3.2. Le facteur de type II_∞ associé

Au § 1 nous avons vu qu'on associe, à chaque algèbre de von Neumann M, une algèbre de von Neumann semi-finie $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ où (σ_t) est le groupe modulaire d'un état fidèle sur M. On sait que M est un facteur de type III_1 ssi le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ est un facteur de type II_∞. On l'appelle le facteur II_∞ associé au facteur M de type III_1.

Si M est un facteur de type III_λ $(0 < \lambda < 1)$, on peut prendre un état fidèle sur M tel que le groupe modulaire correspondant (σ_t) admette $2\pi/|\log \lambda|$ comme période. Le groupe modulaire donne donc une action du cercle $\mathbb{T}$ sur M. Le produit croisé $M \rtimes \mathbb{T}$ est un facteur de type II_∞ et on a un isomorphisme canonique

$$M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R} \cong (M \rtimes \mathbb{T}) \otimes L^\infty(\mathbb{T}).$$

Le facteur $M \rtimes \mathbb{T}$ de type II_∞ s'appelle également le facteur II_∞ associé à M.

Les facteurs II_∞ associés aux facteurs de type III_λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ retiennent une certaine partie de la structure de M. Dans ce paragraphe on s'en sert pour démontrer certains résultats de *non-isomorphisme* entre les facteurs d'Araki-Woods libre.

Dans [20] Shlyakhtenko calcule le facteur II_∞ associé au facteur d'Araki-Woods libre $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ de type III_λ. Il identifie, grâce aux modèles matriciels, le facteur T_λ au facteur suivant étudié par Rădulescu [16].

$$D_\lambda := (M_2(\mathbb{C}), \omega_\lambda) * (L^\infty[-1,1], \mu),$$

où $\omega_\lambda(e_{ij}) = \delta_{ij}\lambda^j/(1+\lambda)$ pour $i, j = 0, 1$, et μ est la mesure semi-circulaire. Dans [16] Rădulescu démontre que le facteur II_∞ associé à D_λ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$. On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 3.2. — *Le facteur II_∞ associé au facteur d'Araki-Woods libre $(T_\lambda, \varphi_\lambda)$ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$.*

Dans [22, 21] une description plus systématique des facteurs II_∞ associés aux facteurs d'Araki-Woods libres est donnée. L'idée est la suivante : dans l'isomorphisme (1) nous avons vu que le facteur d'un groupe libre est engendré par une famille libre d'opérateurs semi-circulaires. Une telle famille peut être obtenue par des opérateurs de création sur un espace de Fock plein.

Shlyakhtenko généralise ceci et considère dans [22] une famille libre d'opérateurs semi-circulaires *à coefficients dans une algèbre de von Neumann A*. On retrouve le cas précédent quand $A = \mathbb{C}$. On peut construire une telle famille à coefficients dans A en remplaçant, dans la construction de l'espace de Fock plein, les espaces de Hilbert par des A-modules hilbertiens. Ceci permet d'engendrer le facteur II_∞ associé à un facteur d'Araki-Woods libre par une famille libre à coefficients dans $A = L^\infty(\mathbb{R})$.

De cette manière Shlyakhtenko démontre dans [24, 21] le résultat suivant.

Théorème 3.3. — *Soit $(H_\mathbb{R}, U_t)$ un multiple fini ou infini de la représentation régulière de $\mathbb{R}$ donnée par $(L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \lambda_t)$. Alors, le facteur II_∞ associé à $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$.*

Dans [21] Shlyakhtenko identifie l'action duale sur le facteur $L(\mathbb{F}_\infty)\otimes\mathrm{B}(\ell^2)$ de type II_∞ associé à $\Gamma(L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \lambda_t)''$ avec l'action construite par Rădulescu dans [15].

3.3. Des résultats de non-isomorphisme

Comme on a vu au § 1.4, on peut associer à chaque mesure symétrique μ sur $\mathbb{R}$, une représentation orthogonale (U_t) de $\mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$ défini par

$$H_\mathbb{R} = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \mid \xi(-x) = \overline{\xi(x)}\} \quad \text{et} \quad (U_t\xi)(x) = e^{itx}\xi(x).$$

On notera $\tau(\mu)$ la topologie la plus faible sur $\mathbb{R}$ qui rend continue l'application $t \to U_t$ de $\mathbb{R}$ dans $O(H_\mathbb{R})$ muni de la topologie faible. D'après le théorème 2.7, $\tau(\mu)$ est exactement l'invariant τ du facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$. Dans [24] Shlyakhtenko démontre qu'il existe une famille non-dénombrable de mesures μ sans atomes telles que les topologies $\tau(\mu)$ soient distinctes. On obtient le résultat suivant.

Proposition 3.4. — *Il existe une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods libres mutuellement non-isomorphes et sans états presque-périodiques.*

Les algèbres de cette famille peuvent être distinguées par l'invariant τ. Néanmoins, on verra plus tard que l'invariant τ ne suffit pas pour distinguer tous les facteurs d'Araki-Woods libres.

Voiculescu a introduit [28] la notion *d'entropie libre* $\chi(x_1, \dots, x_n)$ pour des éléments auto-adjoints $x_1, \dots, x_n$ dans une algèbre de von Neumann finie M munie d'une trace. Ceci est utilisé pour définir la *dimension entropique libre* $\delta(x_1, \dots, x_n)$. Une application spectaculaire de l'entropie libre a été donnée par Voiculescu dans [29] où il démontre que les facteurs des groupes libres n'admettent pas de sous-algèbre de Cartan.

Dans [24, 22] Shlyakhtenko utilise la dimension entropique libre pour démontrer que, dans certains cas, le facteur II_∞ associé à un facteur d'Araki-Woods libre ne peut être isomorphe à $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$.

Théorème 3.5. — *Soit* (U_t) *une représentation orthogonale non-périodique de* $\mathbb{R}$ *sur un espace de Hilbert réel* $H_{\mathbb{R}}$. *Supposons que la mesure spectrale de* $\oplus_{n\geqslant 1} U_t^{\otimes n}$ *est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, le facteur* II_∞ *associé à* $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ *n'est pas isomorphe à* $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$.

En particulier, $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ *n'est pas isomorphe à* $\Gamma(L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \lambda_t)''$, *où* (λ_t) *est la représentation régulière de* $\mathbb{R}$.

La condition du théorème précédent est satisfaite si la topologie la plus faible qui rend continue l'application $t \mapsto U_t$ est strictement plus faible que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Dans [24] Shlyakhtenko construit une mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que toutes les mesures $\mu * \cdots * \mu$ sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, mais néanmoins $\tau(\mu)$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Le théorème précédent admet donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.6. — *Il existe des facteurs d'Araki-Woods libres non-isomorphes ayant le même invariant* τ.

Comme l'invariant τ ne distingue pas tous les facteurs d'Araki-Woods libres, Shlyakhtenko propose dans [24] un *nouvel invariant* $\mathcal{S}$ pour les facteurs pleins de type III. Introduisons quelques notations. Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}$, notons $\mathcal{C}_\mu$ l'ensemble de toutes les mesures qui sont absolument continues par rapport à la mesure μ. Dans le cas où μ est la mesure spectrale d'un opérateur auto-adjoint et strictement positif A, on pose $\mathcal{C}_A := \mathcal{C}_\mu$. Ceci permet de définir

$$\mathcal{S}(M) := \bigcap_{\varphi \text{ état fidèle sur } M} \mathcal{C}_{\oplus_n \Delta_\varphi^{\otimes n}},$$

où Δ_φ est l'opérateur modulaire de l'état φ. On remarque que les mesures dans $\mathcal{S}(M)$ sont supportées par $\mathbb{R}_+^*$ et que la mesure de Dirac δ_1 est toujours dans $\mathcal{S}(M)$.

Shlyakhtenko démontre dans [24] que cet invariant $\mathcal{S}$ distingue certains facteurs d'Araki-Woods libres (non-isomorphes) qui ont le même invariant τ.

3.4. Le facteur d'Araki-Woods libre dépend-il de la multiplicité ?

À chaque mesure symétrique μ sur $\mathbb{R}$ est associée une représentation orthogonale (voir § 3.3). Notons $\Gamma(\mu, n)$, où $n \in \{1, \ldots, +\infty\}$, le facteur d'Araki-Woods libre associé à la somme directe de n copies de cette représentation.

Il découle du théorème de classification 3.1 que, dans le cas où μ est une mesure atomique non-concentrée en $\{0\}$, le facteur $\Gamma(\mu, n)$ ne dépend pas de n. D'après le théorème 2.7, l'invariant τ d'un facteur $\Gamma(\mu, n)$ quelconque ne dépend pas de n. Néanmoins, Shlyakhtenko démontre dans [19] un résultat très surprenant.

Théorème 3.7. — *Soient* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ *et* δ_0 *la mesure de Dirac en* 0. *Alors,* $\Gamma(\lambda + \delta_0, 1)$ *et* $\Gamma(\lambda + \delta_0, 2)$ *ne sont pas isomorphes.*

Dans sa preuve Shlyakhtenko utilise la notion *d'algèbre de von Neumann solide* due à Ozawa [12] : une algèbre de von Neumann est dite solide si le commutant relatif de n'importe quelle sous-algèbre diffuse et unifère est injectif. Rappelons qu'une algèbre de von Neumann est dite diffuse si elle n'admet pas de projecteurs minimaux. Une algèbre de von Neumann solide est nécessairement finie.

Ozawa démontre dans [12] que l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret hyperbolique G (voir [9]) est solide. En particulier, les facteurs des groupes libres sont solides.

Notons N_n le facteur II_∞ associé à $\Gamma(\lambda+\delta_0, n)$. Shlyakhtenko démontre que $N_1 \cong L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(\ell^2)$. Ceci implique que pN_1p est une algèbre de von Neumann solide pour tout projecteur fini $p \in N_1$. Par contre, il construit également un projecteur fini $q \in N_2$ tel que qN_2q ne soit pas solide.

Remarquons qu'il découle des résultats de [24] que l'invariant $\mathcal{S}$ ne distingue pas $\Gamma(\lambda+\delta_0, 1)$ et $\Gamma(\lambda+\delta_0, 2)$.

Soit (U_t) une représentation orthogonale qui contient une représentation périodique non-triviale. D'après le théorème 2.6 (et la proposition 2.3), on sait que le facteur d'Araki-Woods libre associé absorbe $(L(\mathbb{F}_\infty), \mathrm{tr})$:

$$(\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)'', \varphi_U) \cong (\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)'', \varphi_U) * (L(\mathbb{F}_\infty), \mathrm{tr}).$$

Le deuxième résultat surprenant de [19] est qu'il existe des facteurs d'Araki-Woods libres qui n'absorbent pas $(L(\mathbb{F}_\infty), \mathrm{tr})$.

THÉORÈME 3.8. — *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\Gamma(\lambda, 1) \ncong (\Gamma(\lambda, 1), \varphi_{\lambda,1}) * (L(\mathbb{F}_\infty), \mathrm{tr}).$$

4. APPENDICE : SUR LE LEMME DES 14ε

Dans 4.1 nous démontrons une généralisation du lemme technique 4.1 de [27], qui était à son tour une généralisation du lemme des 14ε dû à Murray & von Neumann [11] (voir [3] pour une version adaptée aux produits libres de type III). On exploite le fait que le produit libre $G_1 * G_2$ de deux groupes non-triviaux G_1, G_2 est très non-moyennable(3), sauf si $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci explique le lemme 4.1 : il nous faut un élément non-trivial dans N_1 et deux éléments non-triviaux dans N_2.

Le lemme 4.1 permet de calculer l'invariant τ d'un certain nombre de produits libres, voir proposition 4.2.

(3) Plus précisément $G_1 * G_2$ n'est pas intérieurement moyennable. On construit également une décomposition paradoxale explicite de G.

Lemme 4.1. — *Soit N_i une algèbre de von Neumann munie d'un état fidèle ω_i, $(i = 1,2)$. Posons $(N,\omega) = (N_1,\omega_1) * (N_2,\omega_2)$. Soient $a \in N_1$ et $b,c \in N_2$. Supposons que les éléments a,b et c appartiennent au domaine de $\sigma^\omega_{i/2}$, où (σ^ω_t) est le groupe modulaire de l'état ω. Soit α_i un automorphisme de N_i qui satisfait $\omega_i\alpha_i = \omega_i$, $(i = 1,2)$. Notons $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$. Alors, pour tout $x \in N$,*

$$\|x - \omega(x)1\|_2 \leqslant \mathcal{E}(a,b,c)\ \max\bigl\{\|xa - \alpha(a)x\|_2, \|xb - \alpha(b)x\|_2, \|xc - \alpha(c)x\|_2\bigr\} + \mathcal{F}(a,b,c)\,\|x\|_2$$

$$\begin{aligned} \text{où}\quad \mathcal{E}(a,b,c) &= 6\|a\|^3 + 4\|b\|^3 + 4\|c\|^3, \\ \mathcal{F}(a,b,c) &= 3\mathcal{C}(a) + 2\mathcal{C}(b) + 2\mathcal{C}(c) + 12|\omega(cb^*)|\,\|cb^*\|, \\ \mathcal{C}(a) &= 2\|a\|^3\,\|\sigma^\omega_{i/2}(a) - a\| + 2\|a\|^2\,\|a^*a - 1\| \\ &\qquad + 3(1 + \|a\|^2)\,\|aa^* - 1\| + 6|\omega(a)|\,\|a\|. \end{aligned}$$

Démonstration. — Représentons N_i sur l'espace de Hilbert H_i de la représentation GNS de ω_i et soit ξ_i le vecteur cyclique associé. Posons $(H,\xi) = (H_1,\xi_1) * (H_2,\xi_2)$. On rappelle [30] que

$$H = \mathbb{C}\xi \oplus (\mathring{H}_1 \otimes H(2,l)) \oplus (\mathring{H}_2 \otimes H(1,l)),$$

où $\mathring{H}_i = H_i \ominus \mathbb{C}\xi_i$,

$$\begin{aligned} H(2,l) &= \mathbb{C}\xi \oplus \mathring{H}_2 \oplus (\mathring{H}_2 \otimes \mathring{H}_1) \oplus (\mathring{H}_2 \otimes \mathring{H}_1 \otimes \mathring{H}_2) \oplus \cdots, \\ H(1,l) &= \mathbb{C}\xi \oplus \mathring{H}_1 \oplus (\mathring{H}_1 \otimes \mathring{H}_2) \oplus (\mathring{H}_1 \otimes \mathring{H}_2 \otimes \mathring{H}_1) \oplus \cdots. \end{aligned}$$

Pour $\zeta \in H$ et $y \in N$, on définit l'action à droite de y sur ζ par $\zeta \cdot y := Jy^*J\zeta$ où J est la conjugaison modulaire de l'état ω.

Choisissons $x \in N$ et définissons $\eta = x\xi$. On écrit $\eta = \omega(x)\xi + \mu + \gamma$ avec $\mu \in \mathring{H}_1 \otimes H(2,l)$ et $\gamma \in \mathring{H}_2 \otimes H(1,l)$. Posons alors $\mathring{x} = x - \omega(x)1$, $\eta_0 = \mu + \gamma$, $\widetilde{\eta} = \alpha(a^*)\cdot\eta\cdot a$, $\widetilde{\gamma} = \alpha(a^*)\cdot\gamma\cdot a$ et $\widetilde{\zeta} = \eta_0 - \gamma - \widetilde{\gamma}$. Bien évidemment

$$\begin{aligned} \|\mu\|^2 + \|\gamma\|^2 = \|\widetilde{\zeta} + \gamma + \widetilde{\gamma}\|^2 &\geqslant \|\widetilde{\zeta}\|^2 + \|\gamma\|^2 + \|\widetilde{\gamma}\|^2 - 2|\langle\widetilde{\zeta},\gamma\rangle| - 2|\langle\widetilde{\zeta},\widetilde{\gamma}\rangle| - 2|\langle\gamma,\widetilde{\gamma}\rangle| \\ &\geqslant 2\|\gamma\|^2 - \bigl|\|\gamma\|^2 - \|\widetilde{\gamma}\|^2\bigr| - 2|\langle\widetilde{\zeta},\gamma\rangle| - 2|\langle\widetilde{\zeta},\widetilde{\gamma}\rangle| - 2|\langle\gamma,\widetilde{\gamma}\rangle|. \end{aligned}$$

Exactement de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.1 de [27], on sait estimer tous les termes négatifs. On conclut que

$$\|\gamma\|^2 \leqslant \|\mu\|^2 + 2\|a\|^3\,\|xa - \alpha(a)x\|_2\,\|\mathring{x}\|_2 + \mathcal{C}(a)\,\|x\|_2\,\|\mathring{x}\|_2. \tag{4}$$

On obtient une estimation analogue à l'aide des éléments b et c. En effet on pose $\eta' = \alpha(b^*)\cdot\eta\cdot b$, $\eta'' = \alpha(c^*)\cdot\eta\cdot c$, $\mu' = \alpha(b^*)\cdot\mu\cdot b$ et $\mu'' = \alpha(c^*)\cdot\mu\cdot c$. On définit

$\zeta' = \eta_0 - \mu - \mu' - \mu''$. On trouve que

$$\|\mu\|^2 + \|\gamma\|^2 \geqslant 3\|\mu\|^2 - \big|\|\mu\|^2 - \|\mu'\|^2\big| - \big|\|\mu\|^2 - \|\mu''\|^2\big| - 2|\langle\zeta',\mu\rangle| - 2|\langle\zeta',\mu'\rangle| \\ - 2|\langle\zeta',\mu''\rangle| - 2|\langle\mu,\mu'\rangle| - 2|\langle\mu,\mu''\rangle| - 2|\langle\mu',\mu''\rangle|.$$

On estime de nouveau tous les termes négatifs et on obtient

$$\begin{aligned}2\|\mu\|^2 \leqslant \|\gamma\|^2 &+ 2\|b\|^3\,\|xb-\alpha(b)x\|_2\,\|\mathring{x}\|_2 + 2\|c\|^3\,\|xc-\alpha(c)x\|_2\,\|\mathring{x}\|_2 \\ &+ \big(\mathcal{C}(b)+\mathcal{C}(c)+6\|cb^*\|\,|\omega(cb^*)|\big)\,\|x\|_2\,\|\mathring{x}\|_2.\end{aligned} \tag{5}$$

Comme $\|\mu\|^2+\|\gamma\|^2 = \|\mathring{x}\|_2^2$, une combinaison des inégalités (4) et (5) donne l'inégalité du lemme. □

A priori l'invariant τ d'un facteur plein est difficile à calculer car on munit $\mathbb{R}$ de la topologie induite d'une topologie quotient. L'intérêt de la proposition suivante est de donner une formule pour l'invariant τ en termes du groupe modulaire d'un seul état fidèle, sans qu'il faille connaître $\operatorname{Out} N$. De la même manière que Shlyakhtenko déduit du lemme des 14ε de Barnett son corollaire 8.4 dans [22], nous déduisons du lemme 4.1 le résultat suivant, utilisé dans le § 2.2.

PROPOSITION 4.2. — *Soit N_i des algèbres de von Neumann munies d'un état fidèle ω_i, $(i = 1, 2)$. Soit $(N,\omega) = (N_1,\omega_1) * (N_2,\omega_2)$. On suppose que N_1 contient une suite (a_n) d'éléments qui sont analytiques par rapport à l'état ω et satisfont*

$$\|\sigma^{\omega}_{i/2}(a_n) - a_n\| \longrightarrow 0, \quad \|a_n^*a_n - 1\|, \|a_na_n^* - 1\| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \omega(a_n) \longrightarrow 0. \tag{6}$$

On suppose que N_2 contient des suites $(b_n), (c_n)$ qui satisfont les mêmes conditions que (a_n) ainsi que la condition $\omega(c_nb_n^*) \to 0$. Alors,

a) *N est un facteur plein.*

b) *Notons $\operatorname{Aut}(N_i,\omega_i)$ le groupe d'automorphismes de N_i préservant l'état ω_i et $\pi : \operatorname{Aut}(N) \to \operatorname{Out}(N)$ l'application quotient. Alors, l'homomorphisme*

$$\operatorname{Aut}(N_1,\omega_1) \times \operatorname{Aut}(N_2,\omega_2) \longrightarrow \operatorname{Out}(N) : (\alpha_1,\alpha_2) \longmapsto \pi(\alpha_1 * \alpha_2) \tag{7}$$

est un homéomorphisme à image fermé.

c) *L'invariant $\tau(N)$ est la topologie la plus faible qui rend continues les applications $t \mapsto \sigma_t^{\omega_i}$ de $\mathbb{R}$ dans $\operatorname{Aut} N_i$ $(i = 1, 2)$.*

Démonstration. — Soient (x_k) une suite d'unitaires dans N et $\alpha_k \in \operatorname{Aut}(N_1,\omega_1)$, $\beta_k \in \operatorname{Aut}(N_2,\omega_2)$ des suites d'automorphismes. Supposons que $\operatorname{Ad}(x_k^*)\circ(\alpha_k*\beta_k) \to \mathrm{id}$ dans $\operatorname{Aut}(N)$. Il suffit de démontrer que $\|x_k - \omega(x_k)1\|_2 \to 0$. En effet, prenant $\alpha_k = \mathrm{id}$ et $\beta_k = \mathrm{id}$ pour tout k, on aura démontré que N est un facteur plein. On aura également démontré que l'homomorphisme (7) est un homéomorphisme. Finalement c) résulte de b).

Choisissons $\varepsilon > 0$. Prenons n tel que $\mathcal{F}(a_n,b_n,c_n) < \varepsilon/2$. Si $k \to \infty$, on a

$$\|x_ka_n - (\alpha_k*\beta_k)(a_n)x_k\|_2 = \|(\mathrm{id} - \operatorname{Ad}(x_k^*)\circ(\alpha_k*\beta_k))(a_n)\|_2 \longrightarrow 0$$

et on a le même résultat en remplaçant (a_n) par (b_n) ou (c_n). Il découle du lemme 4.1 qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $\|x_n - \omega(x_n)1\|_2 < \varepsilon$. $\square$

On peut appliquer la proposition 4.2 à un produit libre $(N_1, \omega_1) * \big((N_2, \omega_2) * (N_3, \omega_3)\big)$ si chacune des algèbres (N_i, ω_i) contient une suite (a_n) qui satisfait les conditions (6). En effet, comme b_n et c_n sont *-libres dans ce cas-là, on a automatiquement que $\omega(c_n b_n^*) \to 0$. En particulier, il découle de la proposition 2.3 qu'on peut appliquer la proposition 4.2 à un facteur d'Araki-Woods libre associé à une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$ qui est une somme directe de trois représentations, pourvu qu'on démontre que chaque facteur d'Araki-Woods libre contient une suite (a_n) qui satisfait les conditions (6).

Lemme 4.3. — *Soit (U_t) une représentation orthogonale de $\mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$. Soit $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ l'algèbre de von Neumann associée à l'état quasi-libre libre φ_U. Soit (σ_t) le groupe modulaire de l'état φ_U. Alors il existe une suite d'unitaires (u_n) dans $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ qui sont analytiques par rapport à (σ_t) et satisfont*

$$\|\sigma_z(u_n) - u_n\| \longrightarrow 0 \text{ uniformément sur des compacts de } \mathbb{C}, \text{ et } \quad \varphi_U(u_n) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Si $U_t = \mathrm{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le lemme est trivial. On suppose donc que (U_t) est non-trivial. Soit A l'opérateur auto-adjoint strictement positif sur le complexifié H de $H_\mathbb{R}$ tel que $U_t = A^{it}$. Soit J l'anti-unitaire canonique de H et $T = JA^{-1/2}$ l'involution sur H associée à (U_t). Comme $A \neq 1$ et $JAJ = A^{-1}$, on peut prendre $\lambda > 1$ dans le spectre de A. Notons χ_n la fonction indicatrice de l'intervalle $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]$ et prenons des vecteurs unité ξ_n dans l'image de $\chi_n(A)$. Comme $JAJ = A^{-1}$, les vecteurs ξ_n et $J\xi_n$ seront orthonormaux pour n suffisamment grand. On définit les éléments $x_n \in \Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ par $x_n = \ell(\xi_n) + \ell(T\xi_n)^*$. Il est clair que x_n est analytique par rapport à (σ_t) et que $\|\sigma_z^\omega(x_n) - \lambda^{iz} x_n\| \to 0$ uniformément sur des compacts de $\mathbb{C}$.

Définissons l'opérateur $y_n = \ell(\xi_n) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ell(J\xi_n)^*$ dans $\mathrm{B}(\mathcal{F}(H))$. Alors $\|x_n - y_n\| \to 0$ et d'après le théorème 2.5, l'opérateur $y_n^* y_n$ a une distribution sans atomes par rapport à l'état vectoriel du vide qui ne dépend pas de n. Il existe donc une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\langle \exp(ig(y_n^* y_n))\Omega, \Omega\rangle = 0$ pour tout n.

Choisissons $\varepsilon > 0$ et $K \subset \mathbb{C}$ compact. Comme g peut être approximée par des polynômes uniformément sur le spectre de $y_n^* y_n$, on peut prendre un polynôme P avec des coefficients réels tel que $|\langle \exp(ip(y_n^* y_n))\Omega, \Omega\rangle| < \varepsilon/2$ pour tout n. On sait que $\|\sigma_z^\omega(x_n^* x_n) - x_n^* x_n\| \to 0$ uniformément sur des compacts de $\mathbb{C}$ et que $\|x_n - y_n\| \to 0$. Pour n suffisamment grand $u := \exp(iP(x_n^* x_n))$ est alors un unitaire dans $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ qui satisfait $\|\sigma_z^\omega(u) - u\| < \varepsilon$ pour tout $z \in K$ et $|\varphi_U(u)| < \varepsilon$. $\square$

RÉFÉRENCES

[1] H. Araki – « On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **6** (1970), p. 385–442.

[2] H. Araki & E.J. Woods – « A classification of factors », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **4** (1968), p. 51–130.

[3] L. Barnett – « Free product von Neumann algebras of type III », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 2, p. 543–553.

[4] F. Combes – « Les facteurs de von Neumann de type III (d'après A. Connes) », in *Sém. Bourbaki*, Lect. Notes in Math., vol. 514, Springer, Berlin, 1976, Exp. n^{o} 461, p. 124–137.

[5] A. Connes – « Une classification des facteurs de type III », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^{e} *série* **6** (1973), p. 133–252.

[6] ———, « Almost periodic states and factors of type III$_1$ », *J. Funct. Anal.* **16** (1974), p. 415–445.

[7] ———, « Classification of injective factors », *Ann. of Math.* **104** (1976), p. 73–115.

[8] J. Dixmier – *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[9] É. Ghys & P. de la Harpe – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, Boston, 1990.

[10] U. Haagerup – « Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III$_1$ », *Acta Math.* **158** (1987), p. 95–148.

[11] F.J. Murray & J. von Neumann – « On rings of operators. IV », *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 716–808.

[12] N. Ozawa – « Solid von Neumann algebras », *Acta Math.* **192** (2004), p. 111–117.

[13] G. Pisier & D. Shlyakhtenko – « Grothendieck's theorem for operator spaces », *Invent. Math.* **150** (2002), p. 185–217.

[14] R.T. Powers & E. Størmer – « Free states of the canonical anticommutation relations », *Comm. Math. Phys.* **16** (1970), p. 1–33.

[15] F. Rădulescu – « A one-parameter group of automorphisms of $L(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(H)$ scaling the trace », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314** (1992), p. 1027–1032.

[16] ———, « A type III$_\lambda$ factor with core isomorphic to the von Neumann algebra of a free group, tensor $\mathrm{B}(H)$ », in *Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992)*, Astérisque, vol. 232, Société Mathématique de France, 1995, p. 203–209.

[17] M.A. Rieffel & A. van Daele – « A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory », *Pacific J. Math.* **69** (1977), p. 187–221.

[18] D. Shale & W.F. Stinespring – « States of the Clifford algebra », *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 365–381.

[19] D. Shlyakhtenko – « On multiplicity and free absorption for free Araki-Woods factors », Prépublication.

[20] ———, « Free quasi-free states », *Pacific J. Math.* **177** (1997), p. 329–368.

[21] ———, « Some applications of freeness with amalgamation », *J. reine angew. Math.* **500** (1998), p. 191–212.

[22] ———, « A-valued semicircular systems », *J. Funct. Anal.* **166** (1999), p. 1–47.

[23] ———, « Prime type III factors », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **97** (2000), p. 12439–12441.

[24] ———, « On the Classification of Full Factors of Type III », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), p. 4143–4159.

[25] G. Skandalis – « Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives (d'après Voiculescu, etc.) », in *Sém. Bourbaki, 1992/93*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, 1993, p. 87–102.

[26] Ş. Strătilă & L. Zsidó – *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.

[27] S. Vaes – « Strictly outer actions of groups and quantum groups », *J. reine angew. Math.* **578** (2005), p. 147–184.

[28] D.V. Voiculescu – « The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. II », *Invent. Math.* **118** (1994), p. 411–440.

[29] ———, « The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. III », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), p. 172–199.

[30] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema & A. Nica – *Free random variables*, CRM Monograph Series, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Stefaan VAES

CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu
Algèbres d'Opérateurs, Plateau 7E
175 rue du Chevaleret
F-75013 Paris

et

Département de Mathématiques
K. U. Leuven
Celestijnenlaan 200 B
B-3001 Leuven
Belgique
E-mail : `vaes@math.jussieu.fr`