

Astérisque

GÉRARD LAUMON

**Travaux de Frenkel, Gaitsgory et Vilonen sur la
correspondance de Drinfeld-Langlands**

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 906, p. 267-284

http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__267_0

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE FRENKEL, GAITSGORY ET VILONEN SUR LA CORRESPONDANCE DE DRINFELD–LANGLANDS

par **Gérard LAUMON**

En 1967, R. Langlands a proposé une vaste extension de la théorie du corps de classes abélien de E. Artin et J. Tate. Plus précisément, il a conjecturé une correspondance naturelle entre représentations automorphes d'un groupe réductif G sur un corps global F et représentations galoisiennes de F à valeurs dans le groupe algébrique ${}^L G$ dual de G . La composante neutre $\widehat{G}$ de ${}^L G$ est le groupe réductif complexe dont les racines sont les co-racines de G et vice-versa.

Si G est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n)$ sur F , $\widehat{G}$ n'est autre que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et la correspondance de Langlands globale a été démontrée par V. Drinfeld [DR1] ($n = 2$) et L. Lafforgue [La] (n arbitraire) lorsque F un corps de fonctions, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{F}_p(t)$. La correspondance de Langlands globale sur les corps de nombres reste un des grands problèmes ouverts en mathématiques.

La *correspondance de Drinfeld-Langlands*, dite aussi de *Langlands géométrique*, est un analogue conjectural de la correspondance de Langlands pour un groupe réductif déployé G sur une extension finie F de $k(t)$, où k est un corps arbitraire. Si X est une courbe algébrique quasi-projective et lisse sur k , de corps des fonctions F , cette correspondance met en dualité un espace de modules de G -fibrés sur X et un espace de modules de $\widehat{G}$ -systèmes locaux sur X .

Pour $G = \mathrm{GL}(1)$ la correspondance de Drinfeld-Langlands n'est autre que la théorie du corps de classes géométrique de M. Rosenlicht et S. Lang, exposée par J.-P. Serre dans [Se]. Le cas $G = \mathrm{GL}(2)$ a été traité par V. Drinfeld dans les articles [DR2] et [DR3] qui sont à l'origine de la théorie.

De nombreux travaux ont été consacrés à divers aspects de la correspondance de Drinfeld-Langlands, en particulier ceux de A. Beilinson et V. Drinfeld ([B-D]), de A. Braverman et D. Gaitsgory ([B-G]), et de S. Lysenko ([Ly1] et [Ly2]). Dans cet exposé je n'évoquerai que les travaux récents de E. Frenkel, D. Gaitsgory et K. Vilonen dans le cas où X est projective (correspondance partout non ramifiée) et $G = \mathrm{GL}(n)$, travaux qui généralisent ceux de V. Drinfeld dans [DR2].

Je remercie S. Lysenko pour son aide dans la préparation de cet exposé.

0. PRÉLIMINAIRES

Dans le cas partout non ramifié qui fait l'objet de cet exposé, on espère établir une correspondance de Drinfeld-Langlands pour chaque triplet formé d'un corps de base k , d'un corps des coefficients C et d'une théorie cohomologique à coefficients dans C pour la catégorie des schémas de type fini sur k .

Les trois triplets principaux (corps de base, corps des coefficients, théorie cohomologique) sont :

- (Betti) $k = \mathbb{C}$, C algébriquement clos de caractéristique 0 et la théorie des faisceaux constructibles de C -espaces vectoriels pour la topologie classique,
- (De Rham) k de caractéristique nulle, $C = k$ et la théorie des $\mathcal{D}$ -Modules holonomes pour la topologie de Zariski,
- (ℓ -adique) k arbitraire, $C = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ pour un nombre premier ℓ inversible dans k et la théorie des faisceaux ℓ -adiques pour la topologie étale.

La donnée première de la correspondance de Drinfeld-Langlands est celle d'une courbe algébrique sur le corps de base k . À cette courbe on attache des espaces de modules qui sont en général des champs algébriques sur k . J'utiliserai donc librement le langage des champs algébriques (*cf.* [L-M]).

Les théories cohomologiques ci-dessus n'ont pas été développées de manière systématique pour la catégorie des champs algébriques et les références sont parcellaires. La situation est assez satisfaisante pour le triplet (ℓ -adique) utilisé par Frenkel, Gaitsgory et Vilonen dans leurs articles (en fait, ils supposent de plus que k est de caractéristique $p > 0$ pour disposer d'une transformation de Fourier géométrique, mais cette restriction n'est pas nécessaire). Le triplet (De Rham) est utilisé dans les travaux [B-D] de Beilinson et Drinfeld où on trouvera une définition de l'anneau des opérateurs différentiels pour un champ algébrique. Le triplet (Betti), qui est en principe le plus élémentaire, a été étudié par Bernstein et Luntz [B-L], mais la théorie des champs analytiques reste à écrire.

Dans cet exposé, j'utiliserai néanmoins ce dernier triplet (Betti). Le corps de base sera donc $k = \mathbb{C}$ et, pour tout champ algébrique $\mathcal{S}$ de type fini, ou plus généralement localement de type fini (sur $\mathbb{C}$), je noterai simplement $D_c^b(\mathcal{S})$ la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de C -espaces vectoriels à cohomologie bornée et constructible sur le champ analytique associé à $\mathcal{S}$. Lorsque $\mathcal{S}$ est présenté comme un quotient d'un schéma S par l'action d'un groupe algébrique G , ce champ analytique n'est autre que le champ quotient de $S(\mathbb{C})^{\text{an}}$ par l'action de $G(\mathbb{C})^{\text{an}}$ et $D_c^b(\mathcal{S})$ est la catégorie dérivée $D_{G(\mathbb{C})^{\text{an}}}^b(S(\mathbb{C})^{\text{an}})$ introduite par Bernstein et Luntz dans [B-L].

Pour tous les champs algébriques $\mathcal{S}$ considérés dans ce texte, la catégorie dérivée $D_c^b(\mathcal{S})$ est munie d'un produit tensoriel et d'un foncteur de dualité $D : D_c^b(\mathcal{S})^{\text{opp}} \rightarrow D_c^b(\mathcal{S})$; pour tous les morphismes représentables $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ considérés entre tels champs, on a des foncteurs images directes $f_*, f_! : D_c^b(\mathcal{S}) \rightarrow D_c^b(\mathcal{T})$ et images inverses

$f^*, f^! : D_c^b(\mathcal{T}) \rightarrow D_c^b(\mathcal{S})$ satisfaisant au formalisme des six opérations de Grothendieck. La catégorie $D_c^b(\mathcal{S})$ est munie de la t -structure pour la perversité intermédiaire dont le cœur est la catégorie $\text{Perv}(\mathcal{S})$ des faisceaux pervers sur $\mathcal{S}$ (cf. [B-B-D]). Rappelons que cette sous-catégorie pleine de $D_c^b(\mathcal{S})$ est abélienne, noethérienne, artinienne et auto-duale pour la dualité D .

Si $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}$ est un fibré vectoriel de rang constant r , on peut considérer le $\mathcal{S}$ -champ quotient $\bar{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ par l'action par homothétie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Si $\mathcal{V}^\circ$ est l'ouvert complémentaire dans $\mathcal{V}$ de la section nulle, l'inclusion $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{V}$ induit une immersion ouverte

$$j : \mathbb{P}(\mathcal{V}) = [\mathcal{V}^\circ / \mathbb{G}_m] = \bar{\mathcal{V}}^\circ \hookrightarrow \bar{\mathcal{V}}$$

où $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{S}$ est le fibré projectif des droites de $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}$. Le fermé complémentaire de cette immersion ouverte est le quotient de la section nulle de $\mathcal{V}$ par l'action triviale de $\mathbb{G}_m$, c'est-à-dire le champ classifiant $B(\mathbb{G}_m/\mathcal{S})$.

Les complexes $\mathbb{G}_m$ -équivariants constructibles de C -espaces vectoriels sur $\mathcal{V}$ sont par définition les objets de $D_c^b(\bar{\mathcal{V}})$.

On a une transformation de Fourier géométrique pour ces complexes $\mathbb{G}_m$ -équivariants, appelée la *transformation de Fourier homogène* associée au fibré vectoriel $\mathcal{V}/\mathcal{S}$ (cf. [Lau3]). Cette transformation de Fourier est une équivalence de catégories dérivées

$$\text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}/\mathcal{S}} : D_c^b(\bar{\mathcal{V}}) \longrightarrow D_c^b(\bar{\mathcal{V}}^\vee),$$

d'inverse $\text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}^\vee/\mathcal{S}}$, où $\bar{\mathcal{V}}^\vee$ est le $\mathcal{S}$ -champ quotient du fibré vectoriel dual $\pi^\vee : \mathcal{V}^\vee \rightarrow \mathcal{S}$ par l'action par homothétie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Elle commute à la dualité et elle est t -exacte. On peut la définir de la façon suivante.

Sur le champ quotient $\mathcal{A} = [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ quotient de la droite affine par l'action par homothétie du groupe multiplicatif, on a le complexe $\Psi = \beta_* C \in \text{ob } D_c^b(\mathcal{A})$, où $\beta : \text{Spec}(\mathbb{C}) = [\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m] \hookrightarrow \mathcal{A}$ est l'immersion ouverte induite par l'inclusion $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^1$. Ce complexe admet pour faisceaux de cohomologie non triviaux

$$\mathcal{H}^0(\Psi) = C$$

et

$$\mathcal{H}^1(\Psi) = \alpha_* C$$

où $\alpha : B(\mathbb{G}_m) \hookrightarrow \mathcal{A}$ est l'immersion fermée complémentaire de β induite par l'inclusion de l'origine dans $\mathbb{A}^1$, et c'est en fait un faisceau pervers non irréductible, extension du faisceau pervers ponctuel $\alpha_* C[-1]$ par le faisceau pervers constant C .

Le morphisme d'accouplement naturel entre le fibré vectoriel $\mathcal{V}$ et son fibré dual passe au quotient en un morphisme de champs algébriques

$$\mu : \bar{\mathcal{V}}^\vee \times_{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et, si on note $p : \bar{\mathcal{V}}^\vee \times_{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{V}} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}$ et $p^\vee : \bar{\mathcal{V}}^\vee \times_{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{V}} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}^\vee$ les deux projections canoniques, on a par définition

$$(0.1) \quad \text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}/\mathcal{S}}(K) = (p^\vee)_!(p^*K \otimes \mu^*\Psi)[r-1], \quad \forall K \in D_c^b(\bar{\mathcal{V}}).$$

Les morphismes p et $p^\vee$ ne sont pas représentables et $(p^\vee)_!$ ne respecte pas D_c^b : il envoie $D_c^b(\bar{\mathcal{V}}^\vee \times_{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{V}})$ dans $D_c^-(\bar{\mathcal{V}}^\vee)$. Cependant, on peut vérifier que $\text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}/\mathcal{S}}$ respecte lui D_c^b .

DÉFINITION 0.2. — *Un faisceau pervers L sur $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ est dit propre si la flèche d'oubli des supports $j_!L \rightarrow j_*L$ est un isomorphisme. Si tel est le cas $j_!L \cong j_*L$ est en fait un faisceau pervers sur $\bar{\mathcal{V}}$ qui n'est autre que le prolongement intermédiaire $j_{!*}L$ de L .*

LEMME 0.3. — *Soit L un faisceau pervers sur $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. Alors, L est propre si et seulement si $(\bar{\pi}^\circ)_!L = 0$ où $\bar{\pi}^\circ : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{S}$ est la projection canonique.* $\square$

La transformation de Radon géométrique associée au fibré projectif $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{S}$ est le foncteur

$$\text{Rad}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})/\mathcal{S}} : D_c^b(\mathbb{P}(\mathcal{V})) \longrightarrow D_c^b(\mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee))$$

défini par

$$\text{Rad}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})/\mathcal{S}}(L) = (q^\vee)_!q^*L[r-1]$$

où $q : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V})$ et $q^\vee : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee)$ sont les deux projections canoniques du champ d'incidence

$$\mathcal{H} \subset \mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee) \times_{\mathcal{S}} \mathbb{P}(\mathcal{V})$$

des couples formés d'une droite et d'un hyperplan de $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}$ tels que la droite soit contenue dans l'hyperplan. On renvoie à la monographie de Brylinski [Br] pour une étude détaillée de cette transformation.

LEMME 0.4. — *Soit L un faisceau pervers sur $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ que l'on suppose propre. Alors $\text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}/\mathcal{S}}(j_!L)$ est aussi propre et sa restriction à l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee) = \bar{\mathcal{V}}^{\vee\circ}$ complémentaire de la section nulle dans $\bar{\mathcal{V}}^\vee$ est égale à $\text{Rad}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})/\mathcal{S}}(L)$.* $\square$

1. CORPS DE CLASSES GÉOMÉTRIQUE

Soit X une courbe algébrique connexe, projective et lisse (une surface de Riemann compacte connexe) de genre g . Fixons un point base x_0 , une base $(\delta_1, \dots, \delta_{2g})$ du $\mathbb{Z}$ -module libre

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1^{\text{ab}}(X) := \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

et une base $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ de l'espace vectoriel complexe $H^0(X, \Omega_X^1)$. Les périodes

$$\Pi_i = \left(\int_{\delta_i} \omega_1, \dots, \int_{\delta_i} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g, \quad i = 1, \dots, 2g,$$

sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ et engendrent un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$. La jacobienne de X est le tore complexe de dimension g ,

$$J(X) = \mathbb{C}^g / \Lambda.$$

On a une application analytique

$$\varphi : X \longrightarrow J(X), \quad x \longmapsto \left(\int_{x_0}^x \omega_1, \dots, \int_{x_0}^x \omega_g \right) + \Lambda,$$

qui envoie x_0 sur l'élément neutre 0 de $J(X)$.

Soit $\text{Pic}(X)$ le schéma de Picard qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites sur X . C'est un schéma en groupes pour la structure de groupe induite par le produit tensoriel des fibrés en droites, qui s'insère dans la suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{Pic}^0(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $\deg(\mathcal{L})$ est le degré du fibré en droites $\mathcal{L}$, et sa composante neutre $\text{Pic}^0(X)$ est une variété abélienne.

THÉORÈME 1.1 (Abel-Jacobi). — *La jacobienne $J(X)$ est le tore complexe sous-jacent à la variété abélienne $\text{Pic}^0(X)$ et le morphisme analytique*

$$\varphi : X \longrightarrow J(X) \cong \text{Pic}^0(X)$$

n'est autre que le morphisme algébrique qui envoie $x \in X$ sur la classe d'isomorphie de $\mathcal{O}_X([x] - [x_0])$ dans $\text{Pic}^0(X)$. $\square$

L'homomorphisme

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(J(X), 0)$$

induit par φ est l'application quotient

$$\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \Lambda.$$

Pour tout caractère $\chi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow C^\times$ il existe donc un unique caractère $\text{Aut}_\chi : \pi_1(\text{Pic}^0(X), 0) \rightarrow C^\times$ tel que $\chi = \text{Aut}_\chi \circ \varphi_*$.

Comme un système local E (de C -espaces vectoriels) sur une variété n'est autre qu'une représentation de dimension finie sur C du groupe fondamental de cette variété, on a montré par voie analytique :

THÉORÈME 1.2. — *Pour tout système local E de rang 1 sur X , il existe un unique système local (rigidifié à l'origine) Aut_E de rang 1 sur $\text{Pic}^0(X)$ tel que $\varphi^* \text{Aut}_E = E$.*

De plus, si $m : \text{Pic}^0(X) \times \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}^0(X)$ est la loi de groupe, on a un isomorphisme canonique

$$m^* \text{Aut}_E \cong \text{Aut}_E \boxtimes \text{Aut}_E.$$

Démonstration algébrique du théorème 1.2. — Pour chaque entier $d \geq 0$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit de manière évidente sur le produit

$$X^d = \overbrace{X \times \cdots \times X}^d.$$

Le schéma quotient

$$X^{(d)} = X^d / \mathfrak{S}_d,$$

qui est connexe, projectif et lisse de dimension d , est l'espace de modules des diviseurs $D = \sum_x d_x [x]$ effectifs ($d_x \geq 0$) et de degré $\sum_x d_x = d$ sur X , et le morphisme φ induit un morphisme

$$\varphi^{(d)} : X^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X), \quad D \longmapsto \mathcal{O}_X(D - d[x_0]).$$

Dès que $d \geq 2g - 1$, $\varphi^{(d)}$ est un fibré projectif de rang $d - g$ et a donc ses fibres simplement connexes.

Pour chaque système local E de rang n sur X et chaque entier $d \geq 0$, le produit tensoriel externe $E^{\boxtimes d}$ est un système local de rang n^d sur X^d muni d'une action de $\mathfrak{S}_d$ qui relève celle sur X^d . Si on note $r : X^d \twoheadrightarrow X^d / \mathfrak{S}_d = X^{(d)}$ le morphisme quotient, le faisceau constructible de C -espaces vectoriels $r_* E^{\boxtimes d}$ est donc muni d'une action de $\mathfrak{S}_d$ et on note

$$E^{(d)} = (r_* E^{\boxtimes d})^{\mathfrak{S}_d} \subset E^{\boxtimes d}$$

le sous-faisceau des vecteurs fixes par cette action. On vérifie que la fibre en $D \in X^{(d)}$ de $E^{(d)}$ est égale à

$$(1.3) \quad (E^{(d)})_D = \bigotimes_x \mathrm{Sym}^{d_x} E_x.$$

Si maintenant E est de rang 1 sur X , $E^{(d)}$ est en fait un système local de rang 1 sur $X^{(d)}$. Pour tout $d \geq 2g - 1$, $E^{(d)}$ est donc constant sur les fibres simplement connexes du morphisme $\varphi^{(d)} : X^{(d)} \rightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$ et se descend en un système local sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ qui n'est autre que Aut_E . $\square$

C'est le cas $\mathrm{GL}(1)$ de la correspondance de Drinfeld-Langlands partout non ramifiée.

2. LE THÉORÈME PRINCIPAL

Soit n un entier ≥ 2 . La généralisation naturelle de $\mathrm{Pic}(X)$, ou plutôt du champ quotient du schéma $\mathrm{Pic}(X)$ par l'action triviale de $\mathbb{G}_m$, est le champ $\mathrm{Fib}_n(X)$ des fibrés vectoriels de rang n sur la surface de Riemann X . Ce champ est algébrique, lisse purement de dimension $n^2(g - 1)$ et réunion croissante d'ouverts de type fini. Si $g \geq 2$, il contient un ouvert dense qui est une $\mathbb{G}_m$ -gerbe sur le schéma quasi-projectif de modules des fibrés stables sur X . Les composantes connexes $\mathrm{Fib}_n^d(X)$ de $\mathrm{Fib}_n(X)$ sont découpées par le degré d du fibré vectoriel universel.

Un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur X peut aussi être vu comme un $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre de rang n . Une *modification inférieure élémentaire* de $\mathcal{L}$ en un point $x \in X$ est un fibré vectoriel $\mathcal{L}'$ de rang n sur X qui est contenu dans $\mathcal{L}$ en tant que sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de telle sorte que le $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ soit un faisceau gratte-ciel de longueur 1 concentré en x . Le degré de $\mathcal{L}'$ est donc égal à

$$\deg(\mathcal{L}') = \deg(\mathcal{L}) - 1.$$

Le *champ de Hecke* est le champ modulaire $\text{Hecke}_n(X)$ des triplets $(x, \mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L})$ où $x \in X$, $\mathcal{L} \in \text{Fib}_n(X)$ et $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ est une modification élémentaire inférieure de $\mathcal{L}$ en x .

La *correspondance de Hecke* est le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}_n(X) & \\ (q, p') \swarrow & & \searrow p \\ X \times \text{Fib}_n(X) & & \text{Fib}_n(X) \end{array}$$

où les projections (q, p') et p sont données par

$$(q, p')(x, \mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}) = (x, \mathcal{L}')$$

et

$$p(x, \mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}) = \mathcal{L},$$

et sont des morphismes représentables projectifs et lisses de dimension relative $n - 1$ et n respectivement.

Cette correspondance induit un *opérateur de Hecke* sur la catégorie dérivée $D_c^b(\text{Fib}_n(X))$ qui envoie $K \in D_c^b(\text{Fib}_n(X))$ sur

$$H(K) = (q, p')_* p^* K[n - 1] \in D_c^b(X \times \text{Fib}_n(X)).$$

On peut « itérer » H et on obtient en particulier l'opérateur

$$H \circ H : D_c^b(\text{Fib}_n(X)) \longrightarrow D_c^b(X \times X \times \text{Fib}_n(X)),$$

dont la restriction au complémentaire $(X \times X - \Delta_X) \times \text{Fib}_n(X)$ de la diagonale est $\mathfrak{S}_2$ -équivariante pour l'action qui permute les deux copies de X .

DÉFINITION 2.1. — Soit E un système local irréductible de rang n sur X . Un faisceau pervers irréductible K sur $\text{Fib}_n(X)$ est dit avoir la propriété de Hecke relativement à E s'il existe un isomorphisme

$$H(K) \cong E \boxtimes K$$

tel que la restriction de l'isomorphisme induit

$$(H \circ H)(K) \cong E \boxtimes E \boxtimes K$$

à l'ouvert $(X \times X - \Delta_X) \times \text{Fib}_n(X)$ soit $\mathfrak{S}_2$ -équivariant.

THÉORÈME 2.2 (Drinfeld pour $n = 2$, [DR2] ; Frenkel, Gaitsgory et Vilonen en général, [F-G-V2] et [Ga])

Pour tout système local irréductible E de rang n sur X , il existe un faisceau pervers Aut_E sur $\text{Fib}_n(X)$ dont la restriction à chaque composante connexe $\text{Fib}_n^d(X)$ est irréductible et qui a la propriété de Hecke relativement à E .

La démonstration du théorème se fait en deux temps.

Premièrement on construit un complexe de faisceaux constructibles Aut'_E sur l'espace de modules $\text{Fib}'_n(X)$ des couples (L, s) formés d'un fibré vectoriel L de rang n sur X et d'une section non nulle à homothétie près

$$s : (\Omega_X^1)^{\otimes(n-1)} \hookrightarrow L.$$

Cette construction est inspirée par le développement en série de Fourier d'une forme automorphe cuspidale pour $\text{GL}(n)$ et la formule de Shintani pour les coefficients de cette série de Fourier, compte tenu du dictionnaire fonctions-faisceaux de Grothendieck ; mais ce n'en est pas une simple transposition.

Puis on montre que, sur un gros ouvert de $\text{Fib}'_n(X)$, Aut'_E est un faisceau pervers qui se descend par le morphisme $\text{Fib}'_n(X) \rightarrow \text{Fib}_n(X)$ d'oubli de la section s , en un faisceau pervers Aut_E sur $\text{Fib}_n(X)$ qui a les propriétés requises. C'est bien entendu dans cette deuxième étape que réside toute la difficulté.

3. LES FAISCEAUX PERVERS $\mathcal{L}_E^d$

Pour chaque entier $d \geq 0$, soit $\text{Coh}_0^d(X)$ le champ des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents $\mathcal{M}$ de rang générique 0, c'est-à-dire à support fini, et de longueur $\dim H^0(X, \mathcal{M}) = d$. On note $\text{Coh}_0(X)$ la réunion disjointe des $\text{Coh}_0^d(X)$.

La définition du champ $\text{Coh}_0^d(X)$ a un sens pour toute courbe algébrique X quasi-projective ; en particulier, on peut considérer le champ $\text{Coh}_0^d(\mathbb{A}^1)$. Comme la donnée d'un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ -Module cohérent de rang générique 0 et de longueur d équivaut à la donnée d'un espace vectoriel de dimension d muni d'un endomorphisme, $\text{Coh}_0^d(\mathbb{A}^1)$ n'est autre que le champ quotient $[\text{gl}(d)/\text{GL}(d)]$ de l'espace affine des matrices carrées de taille $d \times d$ par l'action par conjugaison de $\text{GL}(d)$. Comme toute courbe algébrique lisse X est localement pour la topologie étale isomorphe à la droite affine $\mathbb{A}^1$, $\text{Coh}_0^d(X)$ est localement pour la topologie étale isomorphe à $[\text{gl}(d)/\text{GL}(d)]$.

Chaque diviseur effectif D sur X définit un $\mathcal{O}_X$ -Module de torsion

$$\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X(-D)$$

de longueur le degré de D et, pour chaque entier $d \geq 0$, le morphisme

$$X^{(d)} \longrightarrow \text{Coh}_0^d(X), \quad D \longmapsto \mathcal{O}_{X,D},$$

est lisse de dimension relative d . Tout $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}_0(X)$ est isomorphe à $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X, D_i}$ pour une famille finie $(D_i)_{i \in I}$ de diviseurs effectifs sur X et, pour chaque entier $d \geq 0$, on a un morphisme *déterminant*

$$\det : \mathrm{Coh}_0^d(X) \longrightarrow X^{(d)}$$

qui envoie $\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X, D_i}$ sur $\sum_{i \in I} D_i$. On note $X_{\mathrm{rss}}^{(d)}$ l'ouvert de $X^{(d)}$ formé des D sans multiplicité ($d_x = 0$ ou 1 quel que soit x) et $\mathrm{Coh}_{0, \mathrm{rss}}^d(X) = \det^{-1}(X_{\mathrm{rss}}^{(d)})$ l'ouvert correspondant de $\mathrm{Coh}_0^d(X)$.

Soit E un système local de rang n sur X . La formule (1.3) pour la fibre en $D \in X^{(d)}$ de $E^{(d)}$ montre que le rang de cette fibre varie avec D , mais que, au-dessus de l'ouvert $X_{\mathrm{rss}}^{(d)}$, ce rang est constant et la restriction de $E^{(d)}$ est un système local de rang n^d .

LEMME 3.1. — *Pour chaque entier $d \geq 0$, le complexe $E^{(d)}[d] \in D_c^b(X^{(d)})$, constitué du faisceau constructible $E^{(d)}$ placé en degré $-d$, est un faisceau pervers, qui est le prolongement intermédiaire de sa restriction à $X_{\mathrm{rss}}^{(d)}$.*

Le faisceau pervers $E^{(d)}[d]$ est irréductible (resp. semi-simple) si E l'est. □

La restriction

$$\mathcal{L}_{E, \mathrm{rss}}^d = \det^* E^{(d)}|_{\mathrm{Coh}_{0, \mathrm{rss}}^d(X)}$$

du faisceau constructible $\det^* E^{(d)}$ à l'ouvert dense $\mathrm{Coh}_{0, \mathrm{rss}}^d(X)$ de $\mathrm{Coh}_0^d(X)$ est aussi un système local de rang n^d , qui est irréductible (resp. semi-simple) si E l'est.

DÉFINITION 3.2. — *Pour chaque entier $d \geq 0$, le faisceau pervers $\mathcal{L}_E^d$ associé à un système local E sur X est le prolongement intermédiaire de $\mathcal{L}_{E, \mathrm{rss}}^d$ à $\mathrm{Coh}_0^d(X)$ tout entier.*

Bien sûr, $\mathcal{L}_E^d$ est irréductible (resp. semi-simple) si E l'est. On vérifie en outre que l'image réciproque décalée de d de $\mathcal{L}_E^d$ par le morphisme $X^{(d)} \rightarrow \mathrm{Coh}_0^d$, $D \mapsto \mathcal{O}_{X, D}$, n'est autre que le faisceau pervers $E^{(d)}[d]$.

4. LE COMPLEXE Aut'_E

On suppose dorénavant que le genre g de X est ≥ 2 . En genre 0 ou 1, la correspondance de Drinfeld-Langlands partout non ramifiée pour $\mathrm{GL}(n)$ avec $n \geq 2$ est vide puisqu'il n'y a pas de système local irréductible de rang ≥ 2 sur X .

On se propose dans cette section de construire un candidat Aut'_E pour la restriction de Aut_E au champ algébrique $\mathrm{Fib}'_n(X)$ des fibrés vectoriels $\mathcal{L}$ de rang n sur X munis d'une section $s : (\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \rightarrow \mathcal{L}$ à homothétie près.

Considérons le champ algébrique $\mathcal{U}_n$ des triplets $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, s_\bullet)$ où $\mathcal{L}_n$ est un fibré vectoriel de rang n ,

$$\mathcal{L}_\bullet = ((0) = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L})$$

est un drapeau complet de sous-fibrés vectoriels et $s_\bullet$ est une famille d'isomorphismes de fibrés en droites

$$s_j : (\Omega_X^1)^{\otimes j-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{n-j+1}/\mathcal{L}_{n-j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

cette famille étant prise à homothétie près : $(s_j)_{j=1, \dots, n} \sim (ts_j)_{j=1, \dots, n}$ pour tout $t \in \mathbb{G}_m$. On a des morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow f_n & & \\ \mathrm{Fib}'_n{}^{n(n-1)(g-1)}(X) & & \end{array}$$

où f_n envoie le triplet $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, s_\bullet)$ sur le fibré $\mathcal{L}$ muni de la section à homothétie près induite par

$$s_n : (\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$$

et g_n envoie ce même triplet sur le scalaire somme des classes d'extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_j/\mathcal{L}_{j-1} \longrightarrow \mathcal{L}_{j+1}/\mathcal{L}_{j-1} \longrightarrow \mathcal{L}_{j+1}/\mathcal{L}_j \longrightarrow 0$$

dans

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{L}_{j+1}/\mathcal{L}_j, \mathcal{L}_j/\mathcal{L}_{j-1}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1((\Omega_X^1)^{\otimes n-j-1}, (\Omega_X^1)^{\otimes n-j}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_X^1) \cong \mathbb{C}.$$

Si l'on fait agir le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $\mathcal{U}_n$ par

$$t \cdot (\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, s_\bullet) = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, t \cdot s_\bullet)$$

où $t \cdot s_\bullet = (t^{n-j}s_j)_{j=1, \dots, n}$ et par homothétie sur $\mathbb{A}^1$, le morphisme g_n est $\mathbb{G}_m$ -équivariant. En passant au quotient par cette action on obtient des morphismes

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{U}}_n & \xrightarrow{\overline{g}_n} & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] = \mathcal{A} \\ \downarrow \overline{f}_n & & \\ \mathrm{Fib}'_n{}^{n(n-1)(g-1)}(X) & & \end{array}$$

et on peut former le complexe de faisceaux constructibles

$$L_n = (\overline{f}_n)_!(\overline{g}_n)^*\Psi[\dim \overline{\mathcal{U}}_n]$$

où $\Psi \in D_c^b(\mathcal{A})$ est le complexe défini dans la section 0.

Pour chaque entier d , on a une correspondance

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Mod}'_n{}^d(X) & \xrightarrow{q} \mathrm{Coh}_0^d(X) \\ p' \swarrow & & \searrow p \\ \mathrm{Fib}'_n{}^{n(n-1)(g-1)}(X) & & \mathrm{Fib}'_n{}^{n(n-1)(g-1)+d}(X) \end{array}$$

où $\text{Mod}'^d_n(X)$ est le champ des diagrammes

$$(\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \hookrightarrow \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$$

formés de deux fibrés vectoriels de rang n et de degrés $n(n-1)(g-1)$ et $n(n-1)(g-1)+d$ respectivement et d'injections $\mathcal{O}_X$ -linéaires $(\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \hookrightarrow \mathcal{L}'$ (à homothétie près) et $\mathcal{L}' \hookrightarrow \mathcal{L}$, et où p, p' et q envoient un tel diagramme sur $(\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \hookrightarrow \mathcal{L}'$ (à homothétie près), $(\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \hookrightarrow \mathcal{L}$ (à homothétie près) et $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ respectivement.

Si E est un système local sur X , on définit le foncteur

$$M_{n,E}'^d : D_c^b(\text{Fib}'^{n(n-1)(g-1)}_n(X)) \longrightarrow D_c^b(\text{Fib}'^{n(n-1)(g-1)+d}_i(X))$$

par

$$M_{n,E}'^d(K) = p_* p'^*(K \otimes q^* \mathcal{L}_E^d)[nd]$$

où $\mathcal{L}_E^d$ est le faisceau pervers sur $\text{Coh}_0^d(X)$ construit dans la section 3.

DÉFINITION 4.1. — Si E est un système local sur X , on définit le complexe Aut'_E sur $\text{Fib}'_n(X)$ par

$$\text{Aut}'_E | \text{Fib}'^{n(n-1)(g-1)+d}_n(X) = M_{n,E}'^d(L_n)$$

si $d \geq 0$ et

$$\text{Aut}'_E | \text{Fib}'^{n(n-1)(g-1)+d}_n(X) = (0)$$

si $d < 0$.

5. CONSTRUCTION PAR TRANSFORMATIONS DE FOURIER

Pour chaque $i = 1, \dots, n$, soient $\text{Coh}_i(X)$ le champ algébrique des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents $\mathcal{M}_i$ de rang générique i et $\text{Coh}'_i(X)$ le champ algébrique des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents $\mathcal{M}_i$ de rang générique i munis d'une injection $\mathcal{O}_X$ -linéaire $s_i : (\Omega_X^1)^{\otimes i-1} \hookrightarrow \mathcal{M}_i$ à homothétie près. Ces champs admettent pour ouverts denses les champs $\text{Fib}_i(X)$ et $\text{Fib}'_i(X)$ et, tout comme ces derniers champs, leurs composantes connexes $\text{Coh}_i^d(X)$ et $\text{Coh}'_i^d(X)$ sont découpées par le degré d de $\mathcal{M}_i$.

LEMME 5.1. — Il existe une constante $c(g, n)$ qui a la propriété suivante : pour tout entier $d \geq c(g, n)$ et tout $\mathcal{L} \in \text{Fib}_n^d(X)$ tel que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, (\Omega_X^1)^{\otimes n+1}) \neq (0)$, $\mathcal{L}$ est très instable au sens où il existe une décomposition non triviale en somme directe $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ pour laquelle $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = (0)$. $\square$

Pour chaque $i = 0, \dots, n$, soient $\mathcal{C}_i \subset \text{Coh}_i(X)$ l'ouvert formé des $\mathcal{M}_i$ de degré $\geq c(n, g) + i(i-1)(g-1)$ tels que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_i, (\Omega_X^1)^{\otimes n+1}) = (0)$, et donc a fortiori tels que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_i, (\Omega_X^1)^{\otimes i}) = (0)$ et que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1((\Omega_X^1)^{\otimes i-1}, \mathcal{M}_i) = (0)$ par dualité de Serre. Soient $\mathcal{V}_i$ le champ algébrique des couples $(\mathcal{M}_i, s_i)$ où $\mathcal{M}_i \in \mathcal{C}_i$ et $s_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\Omega_X^1)^{\otimes i-1}, \mathcal{M}_i)$ et $\mathcal{V}_i^\vee$ le champ algébrique des extensions

$$0 \longrightarrow (\Omega_X^1)^{\otimes i} \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{M}_i \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents avec $\mathcal{M}_i \in \mathcal{C}_i$. On a des projections naturelles $\pi_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$ et $\pi_i^\vee : \mathcal{V}_i^\vee \rightarrow \mathcal{C}_i$ qui sont des fibrés vectoriels en dualité.

Introduisons les ouverts

$$\mathcal{V}_i^\circ = \{(\mathcal{M}_i, s_i) \mid s_i \text{ est injective}\} \subset \mathcal{V}_i$$

et

$$\mathcal{V}_i^{\vee\circ} = \{(0 \rightarrow (\Omega_X^1)^{\otimes i} \rightarrow \mathcal{M}_{i+1} \rightarrow \mathcal{M}_i \rightarrow 0) \mid \mathcal{M}_{i+1} \in \mathcal{C}_{i+1}\} \subset \mathcal{V}_i^\vee.$$

Bien entendu, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{V}_i^{\vee\circ} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i+1}^\circ$$

qui envoie $0 \rightarrow (\Omega_X^1)^{\otimes i} \rightarrow \mathcal{M}_{i+1} \rightarrow \mathcal{M}_i \rightarrow 0$ sur l'injection $(\Omega_X^1)^{\otimes i} \rightarrow \mathcal{M}_{i+1}$.

Le groupe multiplicatif agit par homothétie sur les fibrés vectoriels $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_i^\vee$ et par passage au quotient on obtient le diagramme fondamental

$$\begin{array}{ccccccc} & \bar{\mathcal{V}}_n^\circ & \xleftarrow{\sim} & \bar{\mathcal{V}}_{n-1}^{\vee\circ} & \hookrightarrow & \bar{\mathcal{V}}_{n-1}^\vee & & \bar{\mathcal{V}}_{n-1} & \hookleftarrow & \bar{\mathcal{V}}_{n-1}^\circ & \xleftarrow{\sim} & \bar{\mathcal{V}}_{n-2}^{\vee\circ} & \hookrightarrow & \dots \\ & \swarrow & & & & \searrow & & \swarrow & & & & & & & \\ \mathcal{C}_n & & & & & \mathcal{C}_{n-1} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ \dots & \bar{\mathcal{V}}_2^\vee & & \bar{\mathcal{V}}_2 & \hookleftarrow & \bar{\mathcal{V}}_2^\circ & \xleftarrow{\sim} & \bar{\mathcal{V}}_1^{\vee\circ} & \hookrightarrow & \bar{\mathcal{V}}_1^\vee & & \bar{\mathcal{V}}_1 & \hookleftarrow & \bar{\mathcal{V}}_0^\circ & \xleftarrow{\sim} & \bar{\mathcal{V}}_0^{\vee\circ} & \hookrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \swarrow & & & & \searrow & & \swarrow & & & & \searrow & & \swarrow & & \\ & \mathcal{C}_2 & & & & & & \mathcal{C}_1 & & & & & & \mathcal{C}_0 & & & & \end{array}$$

où les flèches obliques sont les projections $\bar{\pi}_n^\circ : \bar{\mathcal{V}}_n^\circ = [\mathcal{V}_n^\circ/\mathbb{G}_m] \rightarrow \mathcal{C}_n$, $\bar{\pi}_i : \bar{\mathcal{V}}_i = [\mathcal{V}_i/\mathbb{G}_m] \rightarrow \mathcal{C}_i$, $\bar{\pi}_i^\vee : \bar{\mathcal{V}}_i^\vee = [\mathcal{V}_i^\vee/\mathbb{G}_m] \rightarrow \mathcal{C}_i$ et $\bar{\pi}_0^{\vee\circ} : \bar{\mathcal{V}}_0^{\vee\circ} = [\mathcal{V}_0^{\vee\circ}/\mathbb{G}_m] \rightarrow \mathcal{C}_0$ et où les flèches horizontales sont d'une part les immersions ouvertes $j_i : \bar{\mathcal{V}}_i^\circ \hookrightarrow \bar{\mathcal{V}}_i$ et $j_i^\vee : \bar{\mathcal{V}}_i^{\vee\circ} \hookrightarrow \bar{\mathcal{V}}_i^\vee$ induites par les inclusions $\mathcal{V}_i^\circ \subset \mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_i^{\vee\circ} \subset \mathcal{V}_i^\vee$ et d'autre part les isomorphismes $\iota_i : \bar{\mathcal{V}}_i^{\vee\circ} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{V}}_{i+1}^\circ$ induits par les isomorphismes $\mathcal{V}_i^{\vee\circ} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i+1}^\circ$ ci-dessus.

Pour tout système local E de rang n sur X on définit alors les complexes $K_{E,i} \in D_c^b(\bar{\mathcal{V}}_i^\circ)$, $i = 1, \dots, n$, par

$$K_{E,1} = (\iota_0)_*(\bar{\pi}_0^{\vee\circ})^*\mathcal{L}_E,$$

où $\mathcal{L}_E$ est le complexe sur $\mathcal{C}_0$ dont la restriction à chaque composante connexe $\mathcal{C}_0^d$ de $\mathcal{C}^0$ est le faisceau pervers $\mathcal{L}_E^d$ défini en 3.2, décalé de $d - 1$, et par la relation de récurrence

$$K_{E,i+1} = (\iota_i)_*(j_i^\vee)^* \text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}_i/\mathcal{C}_i}((j_i)_! K_{E,i}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

où $\text{Four}_{\bar{\mathcal{V}}_i/\mathcal{C}_i} : D_c^b(\bar{\mathcal{V}}_i) \rightarrow D_c^b(\bar{\mathcal{V}}_i^\vee)$ est la transformation de Fourier homogène pour le fibré vectoriel $\mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$ définie dans la section 0.

Les champs $\overline{V}_i^\circ$ et $\text{Fib}'_i(X)$ sont des ouverts de $\text{Coh}'_i(X)$ et on peut donc considérer leur intersection.

LEMME 5.2. — Soit E un système local de rang n sur X . Pour chaque $i = 1, \dots, n$ et chaque entier $d \geq 0$, la restriction de $K_{E,i}$ à l'ouvert $\overline{V}_i^\circ \cap \text{Fib}'^{i(i-1)(g-1)+d}_i(X)$ de $\text{Coh}'^{i(i-1)(g-1)+d}_i(X)$ est égale à

$$M'_{i,E}{}^d(L_i)$$

avec les notations de la section 4.

En particulier, pour chaque entier $d \geq 0$, les restrictions de $K_{E,n}$ et de Aut'_E à l'ouvert $\overline{V}_n^\circ \cap \text{Fib}'^{n(n-1)(g-1)+d}_i(X)$ de $\text{Coh}'^{n(n-1)(g-1)+d}_i(X)$ coïncident. $\square$

6. LE THÉORÈME D'ANNULATION

Soient $i \geq 1$ et $d \geq 0$ des entiers. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Mod}_i^d(X) & \xrightarrow{q} \text{Coh}_0^d(X) \\ & \swarrow p' \quad \searrow p & \\ \text{Fib}_i(X) & & \text{Fib}_i(X) \end{array}$$

où $\text{Mod}_i^d(X)$ est le champ des couples $(\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L})$ formé d'un fibré vectoriel de rang i et d'une modification inférieure $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ de co-longueur d , où les projections p' et p envoient $(\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L})$ sur $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ respectivement et où q envoie $(\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L})$ sur le $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ de rang générique 0 et de longueur d .

Pour tout système local E sur X , on a la variante suivante du foncteur $M'_{i,E}{}^d$ de la section 4

$$M'_{i,E}{}^d : D_c^b(\text{Fib}_i(X)) \longrightarrow D_c^b(\text{Fib}_i(X)), \quad M'_{i,E}{}^d(K) = p_* p'^*(K \otimes q^* \mathcal{L}_E^d)[id],$$

où $\mathcal{L}_E^d$ est le faisceau pervers sur $\text{Coh}_0^d(X)$ défini en 3.2.

THÉORÈME 6.1 (Gaitsgory, [Ga]). — Soit E un système local irréductible de rang n . Alors, pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et tout entier $d > in(2g-2)$, le foncteur $M'_{i,E}{}^d$ est identiquement nul. $\square$

Remarque 6.2. — La preuve de ce théorème est longue et technique. Elle dépasse largement le cadre de cet exposé. Signalons cependant que, pour $i = 1$, cet énoncé n'est autre qu'une reformulation d'un résultat de Deligne (cf. [DR2]) qui dit que

$$(\varphi^{(d)})_* E^{(d)} = 0$$

pour tout système local irréductible de rang $n > 1$ sur X et tout entier $d > n(2g-2)$, où $\varphi^{(d)} : X^{(d)} \rightarrow \text{Pic}^0(X)$ est le fibré projectif considéré dans la section 1. $\square$

Frenkel, Gaitsgory et Vilonen utilisent le théorème 6.1 pour démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 6.3. — *Soit E un système local irréductible de rang n . Alors, pour chaque $i = 1, \dots, n-1$, la flèche canonique*

$$(j_i)_! K_{E,i} \longrightarrow (j_i)_* K_{E,i}$$

est un isomorphisme.

Idée de la démonstration. — Au-dessus de l'ouvert $\text{Fib}_i(X) \cap \mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{V}_i^\circ \subset \mathcal{V}_i$ est le complémentaire de la section nulle dans le fibré vectoriel $\mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$. D'après le lemme (0.3), pour démontrer l'assertion au-dessus de cet ouvert, il suffit donc de montrer que $(\bar{\pi}_i^\circ)_! K_{E,i} = (0)$ où $\bar{\pi}_i^\circ : \bar{\mathcal{V}}_i^\circ \rightarrow \mathcal{C}_i$ est la projection, ou ce qui revient au même la projection $\mathbb{P}(\mathcal{V}_i) \rightarrow \mathcal{C}_i$ puisque les deux projections coïncident au-dessus de $\text{Fib}_i(X) \cap \mathcal{C}_i$. Or, d'après le lemme 5.2, pour tout entier $d \geq 0$, on a

$$(\bar{\pi}_i^\circ)_! K_{E,i} | (\mathcal{C}_i \cap \text{Fib}_i^{i(i-1)(g-1)+d}(X)) = M_{i,E}^d(\pi'_* L_i) | (\mathcal{C}_i \cap \text{Fib}_i^{i(i-1)(g-1)+d}(X))$$

où $\pi' : \text{Fib}'_i(X) \rightarrow \text{Fib}_i(X)$ est le morphisme d'oubli de la section $s : (\Omega_X^1)^{\otimes n-1} \rightarrow \mathcal{L}$, d'où la conclusion d'après le théorème 6.1. $\square$

Il résulte de la proposition 6.3 que, si $K_{E,i}$ est un faisceau pervers irréductible, il en est de même de $(j_i)_! K_{E,i}$ puisque c'est alors le prolongement intermédiaire de $K_{E,i}$. Comme la transformation de Fourier homogène préserve la perversité et l'irréductibilité, on voit par récurrence sur i que la restriction de $K_{E,i}$ à chaque composante connexe de $\bar{\mathcal{V}}_i^\circ$ est un faisceau pervers irréductible. En particulier, on a démontré :

COROLLAIRE 6.4. — *Soit E un système local irréductible de rang n . La restriction de $K_{E,n}$ à chaque composante connexe de $\bar{\mathcal{V}}_n^\circ$ est un faisceau pervers irréductible.* $\square$

7. LA DESCENTE

Commençons par rappeler deux résultats généraux. Pour tout schéma (ou champ algébrique) S et tout $K \in D_c^b(S)$, notons

$$\chi_K : S \longrightarrow \mathbb{Z}$$

la fonction *caractéristique d'Euler-Poincaré* de K définie par

$$\chi_K(s) = \sum_i (-1)^i \dim_C H^i(K_s), \quad \forall s \in S,$$

où K_s est la fibre de K en s .

LEMME 7.1 (Deligne, [II] Corollaire 2.10). — Soit $f : Y \rightarrow Z$ un morphisme propre de schémas, voire un morphisme représentable et propre de champs algébriques. Alors, si $K, K' \in D_c^b(Y)$ sont localement isomorphes sur Y , les complexes f_*K et f_*K' ont même fonction caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{f_*K} = \chi_{f_*K'}$ sur Z . $\square$

LEMME 7.2. — Soit S un schéma, voire un champ algébrique, soit $V \rightarrow S$ un fibré vectoriel de rang constant fini r , définissant un fibré projectif $\pi : P = \mathbb{P}(V) \rightarrow S$, et soit K un faisceau pervers irréductible sur P . Alors, il existe un faisceau pervers (nécessairement irréductible) L sur S tel que K soit isomorphe à $\pi^*(L)[r-1]$ si et seulement si la fonction caractéristique d'Euler-Poincaré χ_K est constante le long des fibres de π .

Démonstration. — La partie « seulement si » est triviale. Supposons donc χ_K constante le long des fibres de π . Par le théorème de structure des faisceaux pervers irréductibles, on a $K \cong i_*j_{!*}E[\dim Q]$ où $i : Q \hookrightarrow P$ est le fermé irréductible support de K , $j : Q^\circ \hookrightarrow Q$ est un ouvert dense et E est un système local irréductible sur Q° .

On vérifie dans un premier temps que $Q = \pi^{-1}(T)$ pour un fermé irréductible T de S , puis que l'on peut choisir Q° de la forme $\pi^{-1}(T^\circ)$ pour un ouvert dense T° de T et enfin que E provient d'un système local irréductible F sur T° puisque les fibres de π sont simplement connexes.

Le faisceau pervers L sur S cherché est alors le prolongement par zéro à S tout entier du prolongement intermédiaire de $F[\dim T]$ à T . $\square$

Étudions maintenant la descente de Aut'_E en un faisceau pervers Aut_E sur $\text{Fib}_n(X)$. Pour cela, considérons le champ $\mathcal{Y}_n^d$ introduit par Drinfeld, qui classe les couples $(\mathcal{L}, s^\bullet)$ où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de degré $n(n-1)(g-1) + d$ et $s^\bullet = (s^1, \dots, s^n)$ est une suite d'injections de $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$\begin{array}{ccc} (\Omega_X^1)^{\otimes n-1} & \xrightarrow{s^1} & \mathcal{L} \\ & \dots & \\ (\Omega_X^1)^{\otimes (n-1)+\dots+(n-i)} & \xrightarrow{s^i} & \bigwedge^i \mathcal{L} \\ & \dots & \\ (\Omega_X^1)^{\otimes n(n-1)/2} & \xrightarrow{s^n} & \bigwedge^n \mathcal{L} \end{array}$$

qui satisfont les relations de Plücker faisant que la suite $s^\bullet$ définisse un drapeau complet de sous-espaces vectoriels dans la fibre de $\mathcal{L}$ au point générique de X .

Le champ $\mathcal{Y}_n^d$ est une « compactification partielle » du champ des triplets $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, s_\bullet)$ où

$$\mathcal{L}_\bullet = ((0) = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_n)$$

est un drapeau de sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules de $\mathcal{L}$ et $s_\bullet$ est une suite d'isomorphismes de $\mathcal{O}_X$ -Modules $s_j : (\Omega_X^1)^{\otimes j-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{n-j+1}/\mathcal{L}_{n-j}$ pour $j = 1, \dots, n$. En effet, le morphisme

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, s_\bullet) \longmapsto (\mathcal{L}, s^\bullet)$$

défini par

$$s^i = s_n \otimes s_{n-1} \otimes \cdots \otimes s_{n-i+1} : (\Omega_X^1)^{\otimes (n-1)+(n-2)+\cdots+(n-i)} \\ \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_1 \otimes (\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}) \cong \bigwedge^i \mathcal{L}_i$$

identifie ce champ des triplets à l'ouvert $\mathcal{Y}_n^{d^\circ} \subset \mathcal{Y}_n^d$ formé des $(\mathcal{L}, s^\bullet)$ tels que les conoyaux des injections $s^i : (\Omega_X^1)^{\otimes (n-1)+\cdots+(n-i)} \hookrightarrow \bigwedge^i \mathcal{L}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ n'aient pas de torsion.

Le tore $\mathbb{G}_m^n$ agit sur $\mathcal{Y}_n^d$ par

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (\mathcal{L}, (s^1, \dots, s^n)) = (\mathcal{L}, (t_1 s^1, \dots, t_n s^n)).$$

Cette action respecte l'ouvert $\mathcal{Y}_n^{d^\circ}$ et est donnée sur le champ des triplets par

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)) = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_\bullet, (t_n t_{n-1}^{-1} s_1, \dots, t_2 t_1^{-1} s_{n-1}, t_1 s_n)).$$

En particulier, on peut identifier le champ algébrique $\mathcal{U}_n$ (resp. $\bar{\mathcal{U}}_n = [\mathcal{U}_n/\mathbb{G}_m]$) introduit dans la section 4, au quotient de $\mathcal{Y}_n^{d^\circ}$ par l'action de $\mathbb{G}_m$ (resp. $\mathbb{G}_m^2$) à travers le plongement $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{G}_m^n$, $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$ (resp. $\mathbb{G}_m^2 \hookrightarrow \mathbb{G}_m^n$, $(t, t') \mapsto (t, t^2 t', t^3 t'^3, \dots, t^n t'^{n(n-1)/2})$).

PROPOSITION 7.3 ([B-G] Proposition 1.2.2). — *Le morphisme d'oubli $(\mathcal{L}, s^\bullet) \rightarrow (\mathcal{L}, s^1)$ passe au quotient en un morphisme de champs algébriques*

$$\tilde{f} : \tilde{\mathcal{Y}}_n^d := [\mathcal{Y}_n^d/\mathbb{G}_m^n] \longrightarrow \mathrm{Fib}'_{n(n-1)(g-1)+d}(X)$$

qui est représentable et propre. □

Considérons le complexe $(\bar{g}_n)^* \Psi$ sur $\bar{\mathcal{U}}_n = [\mathcal{Y}_n^{d^\circ}/\mathbb{G}_m^2]$ introduit dans la section 4, et notons $\Phi \in D_c^b(\tilde{\mathcal{Y}}_n^0)$ son image directe à supports propres par le morphisme composé de l'application quotient $[\mathcal{Y}_n^{d^\circ}/\mathbb{G}_m^2] \rightarrow [\mathcal{Y}_n^{d^\circ}/\mathbb{G}_m^n]$ et de l'inclusion $[\mathcal{Y}_n^{d^\circ}/\mathbb{G}_m^n] \subset [\mathcal{Y}_n^0/\mathbb{G}_m^n] = \tilde{\mathcal{Y}}_n^d$.

Pour tout système local E de rang n sur X , on a une variante du foncteur $M_{n,E}^d$

$$N_{n,E}^d : D_c^b(\tilde{\mathcal{Y}}_n^0) \longrightarrow D_c^b(\tilde{\mathcal{Y}}_n^d), \quad K \longmapsto p_* p'^*(K \otimes q^* \mathcal{L}_E^d)[nd],$$

définie à l'aide du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{Z}}_n^d & \xrightarrow{q} \mathrm{Coh}_0^d(X) \\ p' \swarrow & & \searrow p \\ \tilde{\mathcal{Y}}_n^0 & & \tilde{\mathcal{Y}}_n^d \end{array}$$

où

$$\tilde{\mathcal{Z}}_n^d = \tilde{\mathcal{Y}}_n^0 \times_{\mathrm{Fib}_n(X), p'} \mathrm{Mod}_n^d(X)$$

est le quotient par $\mathbb{G}_m^n$ du champ algébrique des triplets $(\mathcal{L}', s'^\bullet, \mathcal{L}' \subset \mathcal{L})$ avec $(\mathcal{L}', s'^\bullet) \in \mathcal{Y}_n^0$ et $(\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}) \in \mathrm{Mod}_i^d(X)$, et où p, p' et q sont induits par les flèches qui

envoient un tel triplet sur $(\mathcal{L}, s^\bullet)$, $(\mathcal{L}', s'^\bullet)$ et $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ respectivement avec s^i le composé de s'^i et de l'inclusion $\bigwedge^i \mathcal{L}' \subset \bigwedge^i \mathcal{L}$.

LEMME 7.4. — Soit E un système local de rang n sur X . Pour tout entier $d \geq 0$, on a

$$\mathrm{Aut}'_E | \mathrm{Fib}'_n{}^{n(n-1)(g-1)+d} = \tilde{f}_* N_{n,E}^d(\Phi).$$

Pour montrer que Aut'_E se descend par le morphisme $\mathrm{Fib}'_n(X) \rightarrow \mathrm{Fib}_n(X)$ d'oubli de la section, Frenkel, Gaitsgory et Vilonen utilisent le lemme 7.4, la proposition 7.3 et le lemme 7.1 pour montrer que la fonction caractéristique d'Euler-Poincaré de Aut'_E ne dépend pas de E . Puis ils calculent cette fonction d'Euler-Poincaré quand E est le système local trivial de rang n , et enfin ils utilisent le lemme 7.2 pour conclure.

RÉFÉRENCES

- [B-B-D] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – *Faisceaux pervers*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [B-D] A. BEILINSON & V. DRINFELD – « Quantization of Hitchin's Integrable System and Hecke Eigensheaves », prépublication, <http://www.math.uchicago.edu/~benzvi/BD/hitchin.ps.gz>.
- [B-L] J. BERNSTEIN & V. LUNTS – *Equivariant Sheaves and Functors*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1578, Springer-Verlag, 1974.
- [B-G] A. BRAVERMAN & D. GAITSGORY – « Geometric Eisenstein series », *Invent. Math.* **150** (2002), p. 287–384.
- [Br] J.-L. BRYLINSKI – « Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques », in *Géométrie et analyse microlocales*, Astérisque, vol. 140–141, Soc. Math. France, Paris, 1986, p. 3–134.
- [DR1] V.G. DRINFELD – « Langlands' conjecture for $\mathrm{GL}(2)$ over functional fields », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, p. 565–574.
- [DR2] ———, « Two-dimensional ℓ -adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$ », *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 85–114.
- [DR3] ———, « Two-dimensional ℓ -adic representations of the Galois group of a global field of characteristic p and automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$ », *J. of Soviet Math.* **36** (1987), p. 93–105.
- [F-G-K-V] E. FRENKEL, D. GAITSGORY, D. KAZHDAN & K. VILONEN – « Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), p. 451–484.
- [F-G-V1] E. FRENKEL, D. GAITSGORY & K. VILONEN – « Whittaker patterns in the geometry of moduli spaces of bundles on curves », *Annals of Math.* **153** (2001), p. 699–748.

- [F-G-V2] ———, « On the geometric Langlands conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 367–417.
- [Ga] D. GAITSGORY – « On a vanishing conjecture appearing in the geometric Langlands correspondence », prépublication, <http://arXiv.org/abs/math/0204081>, 2002.
- [Il] L. ILLUSIE – « Théorie de Brauer et caractéristiques d'Euler-Poincaré d'après Deligne », in *Caractéristique d'Euler-Poincaré (séminaire ENS, 1978–1979)*, Astérisque, vol. 82–83, Soc. Math. France, Paris, 1981, p. 161–172.
- [La] L. LAFFORGUE – « Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands », *Invent. Math.* **147** (2002), p. 1–241.
- [Lau1] G. LAUMON – « Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions », *Duke Math. J.* **54** (1987), p. 309–359.
- [Lau2] ———, « Faisceaux automorphes pour GL_n : la première construction de Drinfeld », prépublication, <http://arXiv.org/abs/math/9511004>, 1995.
- [Lau3] ———, « Transformation de Fourier homogène », *Bull. Soc. math. France* **131** (2003), p. 527–551.
- [L-M] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Springer-Verlag, 1999.
- [Ly1] S. LYSENKO – « Local geometrized Rankin-Selberg method for $GL(n)$ », *Duke Math. J.* **111** (2002), p. 451–493.
- [Ly2] ———, « Global geometrized Rankin-Selberg method for $GL(n)$ », <http://arxiv.org/abs/math.AG/0108208>, 2001.
- [Se] J.-P. SERRE – *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1975.

Gérard LAUMON

Université Paris-Sud

UMR 8628 du CNRS

Mathématique, Bât. 425

F-91405 Orsay Cedex

E-mail : Gerard.Laumon@math.u-psud.fr