Astérisque

MARC HERZLICH

L'inégalité de Penrose

Astérisque, tome 282 (2002), Séminaire Bourbaki, exp. nº 883, p. 85-111
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__85_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, n° 883, p. 85 à 111

L'INÉGALITÉ DE PENROSE
[d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...]

par **Marc HERZLICH**

L'inégalité de Penrose est un énoncé purement géométrique. Les objets qui y interviennent trouvent cependant leur source et une grande part de leurs motivations dans la théorie de la relativité générale. Il apparaît donc opportun (et c'est le choix fait par l'auteur de ces lignes) de consacrer une première partie de cet exposé à une description rapide du contexte physique, avant d'entrer plus avant dans les détails proprement mathématiques.

1. UN RAPIDE SURVOL DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La théorie physique de la relativité générale entretient des liens étroits et féconds avec la géométrie [8, 22, 30, 33]. Elle modélise l'espace-temps comme une variété différentielle (lisse) N de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne γ, de signature $(-+++)$, représentant le champ de gravitation. Les *équations d'Einstein* relient le champ de gravitation aux autres interactions en présence. La métrique y apparaît par l'intermédiaire de l'un des avatars de sa courbure, le *tenseur d'Einstein*, combinaison de la courbure de Ricci Ric^γ et de sa trace la courbure scalaire Scal^γ ; les autres champs sont combinés pour former le tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, dont l'expression varie suivant la nature des interactions en présence. Les équations s'écrivent alors :

$$\mathrm{Ric}^\gamma - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^\gamma\,\gamma \;=\; 8\pi\,\mathbf{T}. \tag{1.1}$$

Le tenseur d'Einstein est à divergence nulle, ce qui fournit les lois de conservation usuelles de la théorie des champs ($\mathrm{div}\,\mathbf{T} = 0$).

La situation à laquelle nous allons particulièrement nous intéresser est celle des *systèmes isolés* dans laquelle, de manière très schématique, on impose à l'ensemble des interactions de décroître au fur et à mesure que l'on s'éloigne de leur source et même de s'annuler à l'infini. Cette exigence est difficile à formuler géométriquement dans un cadre lorentzien, mais on peut donner une famille d'exemples archétypiques d'un tel

comportement : les métriques de Schwarzschild ont été introduites par K. Schwarzschild dès 1916 [47] pour modéliser l'extérieur d'une étoile fixe et statique de masse m, représenté par la variété $N = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}))$ munie de la métrique :

$$\gamma_{\text{schw.}} = -\frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2} d\tau^2 + \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl} \tag{1.2}$$

où eucl désigne la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ (cette écriture, qui n'est pas la plus commune pour une métrique de Schwarzschild, se révèlera la plus commode pour la suite). Cette famille de métriques est à symétrie sphérique et elles sont toutes « asymptotes » à l'infini à la métrique de Minkowski $-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ sur $\mathbb{R}^4$ (la situation où les interactions gravitationnelles sont absentes). La métrique semble devenir singulière lorsque l'on approche l'hypersurface $\{r = \frac{m}{2}\}$. Il ne s'agit en réalité que de singularités du système de coordonnées. Un changement de coordonnées, découvert par M. Kruskal [31], permet un prolongement lisse des métriques de Schwarzschild au-delà de l'hypersurface. Une fois les espaces de Schwarzschild ainsi « complétés », ils peuvent alors être interprétés comme le champ de gravitation d'un *trou noir* de masse m dont l'ouvert difféomorphe à $N = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}))$ constitue la région « extérieure ». L'hypersurface de séparation est l'*horizon* du trou noir : aucune courbe de type temps ou lumière (aucune particule) ne peut s'échapper de la région intérieure. Les sphères $\{\tau = \tau_0 \;\; r = \frac{m}{2}\}$ contenues dans l'horizon sont des surfaces minimales (et même totalement géodésiques) et elles entourent une (vraie) singularité de la métrique au centre du trou noir. La relation entre rayon de l'horizon et masse n'est pas fortuite ; elle est même au cœur de cet exposé.

1.1. Variétés asymptotiquement plates

Instruits par les exemples de Schwarzschild, nous imaginons désormais que toutes nos variétés sont le produit d'un intervalle (de type temps) par une variété *riemannienne* M de dimension 3. Via les équations de Gauss et Codazzi, tous les objets géométriques « de dimension 4 » peuvent s'écrire en fonction des métriques et secondes formes fondamentales des différentes *tranches d'espace* $\{\tau\} \times M$. Cette traduction a l'avantage de transformer de très nombreuses interrogations sur la géométrie lorentzienne de l'espace-temps en des questions de *pure géométrie riemannienne.* Dans le cas qui nous préoccupe, se donner un système isolé revient à imposer à chaque tranche d'être *asymptotiquement plate* (d'autres conditions géométriques, analogues mais non nécessairement équivalentes, sont parfois utilisées, voir [23, 42, 51]) :

DÉFINITION 1.1. — *Une variété riemannienne (M^n, g) non compacte, à un seul bout, est dite asymptotiquement plate d'ordre $\rho > 0$ s'il existe un compact $K \subset M$ et un difféomorphisme* (*dit* carte à l'infini) $z : M \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B_0(r)$ (*où* $r > 0$) *tels que les*

coefficients de la métrique vérifient dans cette carte $\{z^1, \dots, z^n\}$

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O(|z|^{-\rho}),\ \frac{\partial}{\partial z^k} g_{ij} = O(|z|^{-\rho-1}),\ \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial z^\ell} g_{ij} = O(|z|^{-\rho-2}). \tag{1.3}$$

Cette définition reposant sur des cartes particulières et des expressions en coordonnées peut paraître surprenante. Elle définit cependant un bon objet géométrique ; nous avons néanmoins préféré l'exposer en premier lieu dans la mesure où elle fournit une vision très concrète des variétés asymptotiquement plates. Elle est justifiée par le travail dû à S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima [2] qui montre l'équivalence entre platitude asymptotique et des conditions bien précises de décroissance de la courbure et de comportement du volume des grandes sphères géodésiques à l'infini.

1.2. La masse

Dans l'expression (1.2) des métriques de Schwarzschild, le paramètre m est la masse de l'étoile. Cette identification se trouve confortée par l'étude de l'équation différentielle régissant la trajectoire d'une géodésique radiale qui est de la forme $r'' = -mr^{-2} + O(r^{-3})$. Contrairement à l'intuition, la théorie des systèmes isolés ne dispose pourtant pas d'une notion universelle (et locale) de masse et estimer la quantité de matière présente dans une région bornée de l'espace(-temps) reste à l'heure actuelle une question mal comprise (voir la fin de ce texte).

La manière dont a été réalisée l'identification entre le paramètre m et la masse dans la métrique de Schwarzschild amène alors à l'idée que la masse totale d'un système isolé doit être calculée de façon *globale*, à l'aide d'un procédé de *passage à la limite.* La définition la plus couramment utilisée aujourd'hui est celle donnée en 1962 par R. Arnowitt, S. Deser et C. Misner [1], qui attribue une masse *à toute hypersurface asymptotiquement plate* d'un espace-temps. Cette définition, comme la précédente, est purement riemannienne et s'étend à toutes les dimensions.

DÉFINITION 1.2. — *Soient* (M^n, g) *une variété riemannienne asymptotiquement plate,* S_r *une sphère de rayon* r *dans une carte à l'infini et* ν *sa normale sortante. La masse est*

$$m(M,g) = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\nu^j \, d\mathrm{vol}_{S_r} \tag{1.4}$$

si cette intégrale existe.

Le coefficient 16π est choisi ici pour que le calcul de la masse de toute tranche d'espace $\{\tau\} \times M$ de la métrique de Schwarzschild (1.2) soit exactement m.

Cet objet, calculé d'une manière apparemment non-tensorielle –et à partir des *dérivées premières* de la métrique de surcroît !–, est pourtant bien défini. La confirmation de ce fait, connu de manière heuristique par les physiciens dès les années 60, se fera

attendre jusqu'en 1985, année où est démontré le théorème crucial qui permet d'attribuer une signification non ambiguë à la masse, dû à R. Bartnik [4] et indépendamment à P. Chruściel [14].

THÉORÈME 1.3. — *Si la variété riemannienne (M, g) de dimension n est asymptotiquement plate d'ordre $\rho > \frac{n-2}{2}$ et si sa courbure scalaire est dans l'espace de Lebesgue L^1, alors sa masse est bien définie. C'est un* invariant riemannien, *indépendant du choix de la carte.*

V. Denisov et O. Solovev ont construit dans [16] un contre-exemple en dimension 3, d'ordre de décroissance à l'infini exactement égal à 1/2 et dont deux cartes à l'infini fournissent deux masses différentes.

Si les équations d'Einstein du vide ($\mathbf{T} = 0$) sont vérifiées dans un espace-temps asymptotiquement plat $N = \mathbb{R} \times M$, la masse est indépendante de la tranche choisie pour le calcul [15] et on peut donc parler de la masse de l'espace-temps. Dans le cas général, il est naturel d'espérer que la masse soit positive si les interactions en présence sont physiquement réalistes et qu'elle ne puisse être nulle que pour l'espace-temps trivial de Minkowski. Les critères utilisés par les physiciens pour décider du caractère raisonnable des interactions sont des inégalités sur leur tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, dites *conditions d'énergie* [22], qui se traduisent donc, *via* les équations d'Einstein, en inégalités sur la courbure.

Un cas particulier très important (et très étudié) est celui où l'hypersurface asymptotiquement plate (M, g) dont on calcule la masse est de courbure moyenne nulle (par exemple si elle est totalement géodésique, *i.e.* si sa seconde forme est nulle). Les conditions d'énergie impliquent alors que *la courbure scalaire de (M, g) est positive.* Tout ce qui précède apporte donc une motivation profonde au résultat fondamental suivant, dû à R. Schoen et S.T. Yau [44] en 1978. Une preuve alternative a été donnée en 1981 par E. Witten [52] (voir aussi [4, 13, 30, 32]). Cet énoncé est purement riemannien et ne fait plus référence à la relativité.

THÉORÈME 1.4 (Théorème de la masse positive). — *Si (M, g) est une variété riemannienne asymptotiquement plate de dimension* 3, *complète, sans bord et à* courbure scalaire positive, *alors sa masse est positive, et elle est nulle si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace euclidien* $(\mathbb{R}^3, \mathrm{eucl})$.

Cette inégalité et la rigidité associée au cas d'égalité constituent donc un remarquable énoncé de géométrie riemannienne globale, dont certains corollaires sont frappants. On peut citer par exemple celui choisi par R. Geroch dans un exposé de 1974 au cours d'un symposium de l'A.M.S. pour tenter d'attirer l'attention des mathématiciens sur les problèmes issus de la relativité [19] : *la seule métrique riemannienne à courbure scalaire positive et plate en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^3$ est la métrique euclidienne.*

Ce théorème fait partie du paysage depuis 20 ans. Outre son importance en relativité, il joue un rôle crucial en géométrie conforme en relation avec la courbure scalaire, comme en témoigne le célèbre *problème de Yamabe* [32]. Mais on ne connaît pas encore ses conditions de validité les plus générales : à l'heure actuelle, il est vérifié en toutes dimensions si la variété est spinorielle (E. Witten) ou si la dimension est inférieure ou égale à 7 dans le cas général (preuve due à R. Schoen et S.-T. Yau, qui utilise des surfaces minimales, d'où la restriction ; ils ont affirmé à plusieurs reprises posséder une preuve valable en toutes dimensions, mais, à la connaissance de l'auteur, elle semble ne jamais avoir été publiée).

1.3. Trous noirs et inégalité de Penrose

En 1973, R. Penrose a conjecturé une inégalité frappante pour la masse d'un espace-temps asymptotiquement plat contenant un trou noir [43].

Qu'est-ce qu'un trou noir ? En étant volontairement flou, un espace-temps asymptotiquement plat (défini comme précédemment, c'est-à-dire feuilleté par des hypersurfaces riemanniennes $\{\tau\} \times M$ asymptotiquement plates) en contient un s'il existe une région (« bornée » en espace) dont aucune courbe de type temps ou lumière ne peut s'échapper et où toutes les géodésiques de ce type sont incomplètes. Si l'on se limite au cas où les tranches d'espace $\{\tau\} \times M$ sont totalement géodésiques, la présence d'une surface minimale dans $\{\tau\} \times M$ est un bon indice de l'existence d'un trou noir [22, chap. 9]. Il existe alors toujours une collection de sphères minimales, dites « les plus extérieures », c'est-à-dire délimitant une région extérieure qui ne contient aucune autre sphère minimale que les composantes de son bord (ce fait est non trivial, voir la section 3.6 pour plus de détails). Ces surfaces forment l'*horizon* du trou noir [22, chap. 9] : l'intérieur est caché aux yeux de tout observateur extérieur.

Dans ce cadre désormais riemannien, la conjecture de Penrose s'énonce : *si (M, g) est une variété riemannienne asymptotiquement plate de dimension 3 qui contient une surface minimale compacte et qui satisfait aux hypothèses du théorème de la masse positive, alors*

$$m(M,g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}} \tag{1.5}$$

où S est l'ensemble des sphères minimales « les plus extérieures » contenues dans M.

L'inégalité (1.5) est inspirée à la fois de la thermodynamique des trous noirs (qui impose des relations entre masse et entropie, c'est-à-dire aire) et d'une autre conjecture fameuse de relativité, la *censure cosmique*. Celle-ci prédit que la situation rencontrée dans les métriques de Schwarzschild (une singularité centrale entourée par un horizon) est en fait générique : tout espace-temps singulier admet une perturbation dans laquelle la singularité doit être entourée d'un horizon. Cet énoncé est probablement le problème ouvert le plus important pour les spécialistes de relativité ; sa vérification aurait des conséquences concrètes en astrophysique. Or R. Penrose présente dans [43]

un argument, heuristique mais convaincant, qui va à l'encontre de la censure cosmique si l'inégalité (1.5) est violée !

On comprend donc aisément l'importance de la conjecture de Penrose et son attrait. Pris du côté de la physique, son énoncé est très naturel : la masse d'un espace-temps statique qui contient un trou noir est minorée par la masse de la métrique de Schwarzschild dont le trou noir a un horizon de même aire (c'est-à-dire, en termes physiques, de même entropie). De plus, il n'est pas surprenant que l'énoncé ne concerne que la surface minimale la plus extérieure : la masse étant calculée à l'infini, ne peut y contribuer que la partie de l'espace-temps située au-delà de l'horizon puisque celui-ci masque le contenu intérieur aux yeux de l'infini... Mathématiquement parlant, il s'agit d'un résultat d'isolation qui impose à toute variété à courbure scalaire positive suffisamment différente de l'espace euclidien (qui ne contient pas de surface minimale compacte) d'avoir une masse non seulement strictement positive mais aussi notablement éloignée de zéro. Et les deux points de vue se rejoignent pour prédire que le cas d'égalité est caractéristique d'une tranche de la métrique de Schwarzschild (1.2), c'est-à-dire de la situation la plus symétrique.

La conjecture a résisté pendant près de 25 ans aux différentes tentatives de démonstrations (voir cependant [6, 39] pour des cas particuliers). Ce n'est que récemment (1997) que G. Huisken et T. Ilmanen [26, 27] ont pu apporter la preuve de sa véracité lorsque l'horizon est connexe. En 1999, H. Bray [9, 11] en a fourni une autre preuve.

THÉORÈME 1.5 (Bray, Huisken–Ilmanen). — *Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate de dimension 3 à courbure scalaire positive ou nulle, ayant pour bord (intérieur) une sphère minimale S et ne contenant pas d'autres surfaces minimales. Alors*

$$m(M, g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}}. \tag{1.6}$$

Le cas d'égalité n'est vérifié que si M est isométrique à $(\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1+\frac{m}{2r})^4\,\mathrm{eucl})$.

2. APPROCHES POSSIBLES

Il existe plusieurs stratégies possibles pour étudier la masse, inventées au cours des années 70 pour démontrer le théorème de la masse positive. L'approche qui a conduit pour la première fois au succès, c'est-à-dire celle de R. Schoen et S.T. Yau, était une démonstration par l'absurde. Il était donc difficile de l'utiliser pour en déduire des estimations effectives sur la masse. En revanche, la simplicité de la méthode mise à profit par E. Witten dans sa propre preuve de la masse positive faisait d'elle une candidate naturelle pour l'attaque de l'inégalité de Penrose.

2.1. L'approche spinorielle

L'argument de E. Witten se fonde sur la géométrie spinorielle : sur toute variété riemannienne spinorielle, la formule de Lichnerowicz [34] relie l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ au laplacien brut D^*D de la connexion de Levi-Civita :

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D} = D^*D + \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}^g. \tag{2.1}$$

E. Witten a alors remarqué que, lorsque cette formule, évaluée sur un champ de spineurs ψ *asymptotiquement constant* (cette notion étant définie avec précision), est intégrée sur des domaines de plus en plus grands, le terme de bord tend vers un multiple de la masse à l'infini, *i.e.*

$$\left(4\pi \lim_{\infty} |\psi|^2\right) m(M,g) \;=\; \int_M |D\psi|^2 \;+\; \frac{1}{4}\int_M \mathrm{Scal}^g\,|\psi|^2 \;-\; \int_M |\mathcal{D}\psi|^2. \tag{2.2}$$

La positivité de la masse est alors immédiate si l'on sait exhiber un spineur harmonique (c'est-à-dire annulé par $\mathcal{D}$) asymptotiquement constant et de dérivée de carré intégrable.

L'existence d'un spineur solution est obtenue grâce à la théorie des espaces de Sobolev ou de Hölder *à poids* développée pour les variétés asymptotiquement plates [4, 36, 37]. Le cas d'égalité s'obtient aisément en remarquant que la nullité de la masse entraîne que le spineur est parallèle, donc la courbure de Ricci est nulle. Le cas limite de l'estimation classique du volume due à Bishop [7] et le caractère asymptotiquement plat font le reste.

Le principal intérêt de cette stratégie est la simplicité avec laquelle elle peut être mise en œuvre. Malheureusement, elle ne conduit pas à une preuve de l'inégalité de Penrose. La principale difficulté est d'interpréter dans ce contexte spinoriel l'exigence de ne considérer que la surface minimale *la plus extérieure*. Faire abstraction de cette restriction conduit néanmoins à un résultat, moins fort mais valable pour toute surface minimale. La borne inférieure obtenue fait intervenir la constante géométrique

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}}\left(\inf_{f\in C_c^\infty} \frac{\int_{M_S} |df|^2}{\int_S f^2}\right). \tag{2.3}$$

À normalisation près, il s'agit de l'inverse de la norme de l'application trace qui envoie le complété (pour la norme de type Sobolev $||df||_{L^2(M_S)}$) de l'espace C_c^∞ des fonctions lisses à support compact sur l'extérieur M_S de la surface minimale S dans l'espace $L^2(S)$ des fonctions de carré intégrable sur S. Elle est donc strictement positive par nature et invariante par changement d'échelle, la valeur précise de l'aire de S n'y apparaissant qu'à des fins de normalisation. Le résultat, obtenu dans [24] à une époque où aucune preuve de l'inégalité de Penrose n'était disponible, peut alors s'énoncer :

THÉORÈME 2.1. — *Si (M, g) est une variété asymptotiquement plate de dimension 3 à courbure scalaire positive, ayant pour bord une sphère minimale S, alors*

$$m(M,g) \geqslant \frac{\sigma(S)}{2+2\sigma(S)}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(S)}{\pi}}. \tag{2.4}$$

Le cas d'égalité n'est vérifié que si $M = (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1+\frac{m}{2r})^4\,\mathrm{eucl})$.

La preuve repose avant tout sur une étude précise du cas d'égalité : celui-ci fait ressortir le rôle joué par la métrique euclidienne, dont la masse est nulle, qui est la seule métrique conforme à la (tranche spatiale de la) métrique de Schwarschild de courbure scalaire nulle et dans laquelle la sphère S est à courbure moyenne constante égale à $4\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{Aire}(S)}}$. La preuve suit alors le cours suivant : on déforme notre métrique d'origine en une métrique conforme $\bar{g} = \varphi^4\, g$ qui est à courbure scalaire nulle et dont la courbure moyenne de S vérifie exactement (dans la métrique $\bar{g}$) l'égalité précédente. Un calcul direct livre alors que la différence entre la masse de g et celle de $\bar{g}$ est minorée par la constante annoncée. Il reste à exhiber pour $\bar{g}$ un théorème de masse positive, obtenu par la méthode de Witten, pour la partie non bornée M_S. La subtilité provient de l'apparition, lors de l'intégration de la formule de Lichnerowicz (2.2), de termes de bord sur S contenant l'opérateur de Dirac de celle-ci. Il est alors possible de contrôler leur signe en faisant appel aux travaux de C. Bär et O. Hijazi sur la première valeur propre de l'opérateur de Dirac [3, 25].

2.2. Le flot de la courbure moyenne inverse

De nombreuses tentatives ont été faites pour donner une expression plus intrinsèque de la masse. L'idée la plus intéressante est due à S.W. Hawking [21] : sur une variété asymptotiquement plate de dimension 3,

$$m(M,g) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{Aire}\,(S_t)}}{64\pi^{3/2}}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right), \tag{2.5}$$

si les surfaces S_t (de courbure moyenne H_t) convergent très vite (en un sens précis) vers des sphères euclidiennes à l'infini. L'expression à l'intérieur de la limite dans (2.5) est appelée *masse de Hawking* $m_H(S_t)$ d'une surface S_t et vaut zéro pour toute sphère ronde dans l'espace euclidien (c'est le théorème de Gauss-Bonnet !)

Cette remarque conduit à une nouvelle approche de la masse positive, fondée sur une *formule de monotonie*. R. Geroch [18] et P. S. Jang et R. Wald [29] ont en effet imaginé que toute variété asymptotiquement plate (de dimension 3) « raisonnable » puisse être recouverte par des sphères (topologiques) évoluant sous le flot de la *courbure moyenne inverse*. Plus précisément, ils espèrent disposer d'une application lisse et *régulière* (sans points critiques) $F : \mathbb{R}\times\mathbb{S}^2 \longrightarrow M$, $(t,x) \longmapsto F_t(x)$, obéissant à l'équation

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = \frac{1}{H_t(x)}\,\nu_t(x) \tag{2.6}$$

où ν_t est le champ des normales unitaires sortantes et H_t la courbure moyenne de $S_t = F_t(\mathbb{S}^2)$. Par exemple, si S_0 est une sphère ronde de rayon r_0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la solution du flot (2.6) est fournie par les sphères concentriques S_t de rayons $r(t) = \mathrm{e}^{t/2}\, r_0$.

LEMME 2.2. — *Si* $\mathrm{Scal}^g \geqslant 0$, *et sous les hypothèses précédentes, la masse de Hawking* $m_H(S_t)$ *est une fonction croissante.*

Preuve. – Tout d'abord on a, pour tout t, $\mathrm{Aire}\,(S_t) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{Aire}\,(S_0)$ puisque la courbure moyenne est précisément la dérivée du volume infinitésimal. Notons K_t la courbure de Gauss et A_t^0 la partie à trace nulle de la seconde forme fondamentale A_t de S_t ; on peut calculer la dérivée de H_t par rapport à t à partir de la formule (2.6). Cela conduit à :

$$\frac{d}{dt}\int_{S_t} H_t^2 \;=\; -\int_{S_t} 2\,H_t^{-2}\,|dH_t|^2 + 2\,|A_t^0|^2 + 2\,\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t). \tag{2.7}$$

L'équation de Gauss fournit par ailleurs

$$-2\,\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t) + \mathrm{Scal}^g = 2\,K_t + |A_t^0|^2 - \frac{1}{2}H_t^2 \tag{2.8}$$

(une remarque déjà utilisée par R. Schoen et S.T. Yau dans le contexte de la courbure scalaire [45]), d'où

(2.9)
$$\frac{d}{dt}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right) \;\geqslant\; \int_{S_t} -2\,K_t + \mathrm{Scal}^g + |A_t^0|^2 + \frac{1}{2}H_t^2 \;\geqslant\; -\frac{1}{2}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right)$$

(en utilisant Gauss-Bonnet). Compte tenu du comportement de l'aire décrit plus haut, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt}m_H(S_t) \;=\; \frac{\sqrt{\mathrm{Aire}\,(S_0)}}{64\pi^{3/2}}\,\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}\left(16\pi - \int_{S_t} H_t^2\right)\right) \;\geqslant\; 0, \tag{2.10}$$

ce qui conclut la preuve. □

Si l'on fait l'hypothèse que le flot peut évoluer de cette façon *régulière* à partir d'une très petite sphère géodésique à $t = \varepsilon$ (dont la masse de Hawking est très proche de zéro puisque la géométrie riemannienne est asymptote à l'ordre 2 à la géométrie euclidienne au voisinage d'un point) et se comporte lorsque t tend vers l'infini comme les grandes sphères géodésiques, ce procédé fournit donc une nouvelle preuve de la masse positive.

C'est cette méthode que mettent en œuvre G. Huisken et T. Ilmanen dans leur preuve de l'inégalité de Penrose, au prix de formidables difficultés techniques. Même dans les cas les plus simples, il est en effet inévitable de voir se créer en temps fini des singularités du flot. Les contrôler de manière efficace et développer les outils permettant d'y faire face constitue l'essentiel de leur travail.

2.3. Trous noirs et inégalité isopérimétrique

L'idée de H. Bray pour démontrer l'inégalité est de considérer le quotient de la masse par la racine carrée de l'aire de l'horizon $\mathcal{P}(g) = \mathrm{Aire}\,(S(g))^{-\frac{1}{2}}\, m(g)$, qu'il dénomme *quotient de Penrose* de la variété et qu'il interprète comme une constante isopérimétrique pour l'horizon $S(g)$, ou encore comme une fonctionnelle sur l'espace des métriques asymptotiquement plates qui possèdent un horizon.

Plutôt que de tenter de rechercher directement un minimum de cette fonctionnelle, il définit un flot de métriques (et d'horizons associés) qui fait décroître le quotient de Penrose. Pour ce faire, il construit une famille de métriques conformes $g_t = \varphi_t^4\, g$ sur M, de quotient décroissant en t et munies d'horizons $S(g_t)$ qui, lorsque t tend vers l'infini, ont progressivement tendance à « enfler » (lorsqu'on les étudie avec la métrique d'origine) et donc à tendre vers l'infini. Le point crucial est le suivant : la restriction d'une métrique asymptotiquement plate arbitraire à l'extérieur d'un compact de plus en plus grand approxime de mieux en mieux une métrique de Schwarzschild qui est en quelque sorte sa *meilleure approximation à l'ordre* 1 *à l'infini.* Puisque $S(g_t)$ « tend vers l'infini », il est donc permis d'espérer que la métrique g_t tende vers une métrique de Schwarzschild de quotient de Penrose $(16\pi)^{-1/2}$. Cette approche est entièrement nouvelle et originale dans l'étude de la masse et des variétés asymptotiquement plates. Contrairement à celle de G. Huisken et T. Ilmanen, elle débouche sur une inégalité de Penrose générale où l'horizon n'est plus nécessairement connexe (voir le Théorème 4.7).

3. ESQUISSE DE LA PREUVE DE G. HUISKEN ET T. ILMANEN

Comme dit précédemment, leur preuve consiste à rendre rigoureuse l'approche du flot de la courbure moyenne inverse introduite par R. Geroch, P.S. Jang et R. Wald. Leur travail se décompose en deux parties distinctes : une étude générale du flot, valable en toute généralité et en toutes dimensions (ou au moins en dimension $n < 8$ en ce qui concerne les résultats de régularité), et une application au cas particulier de l'inégalité de Penrose sur une variété asymptotiquement plate à courbure scalaire positive.

3.1. Difficultés

Lorsque l'on examine du point de vue des mathématiques la stratégie des physiciens, on se heurte immédiatement à un obstacle de taille : *il est a priori impossible d'exclure l'apparition de singularités lors du flot.* Un exemple simple (sur lequel nous reviendrons plus tard) permet déjà de s'en convaincre : le flot de la courbure moyenne inverse appliqué à une sphère ronde S_0 dans $\mathbb{R}^3$ produit une famille de sphères rondes concentriques S_t, paramétrées de telle sorte que $\mathrm{Aire}\,(S_t) = \mathrm{e}^t \mathrm{Aire}\,(S_0)$. Prenons

maintenant comme donnée initiale deux sphères disjointes : chacune évolue indépendamment tant qu'elles restent disjointes et une singularité apparaît au premier point de contact !

L'accident qui survient ici montre qu'il est crucial de ne pas restreindre le type topologique des surfaces qui apparaissent. Dès lors, la formulation lisse du flot (2.6) de la section 2.2 doit être remplacée par une formulation *faible*, exprimée dans le langage de la théorie géométrique de la mesure. G. Huisken et T. Ilmanen procèdent alors en trois étapes :

(a) La récriture du flot lisse comme une équation aux dérivées partielles portant sur une fonction u dont les surfaces S_t sont les *surfaces de niveau.* Cette idée, inspirée par les travaux de L.C. Evans et J. Spruck [17], conduit ici à l'équation équivalente

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u|. \tag{3.1}$$

(b) Il serait alors agréable de voir l'EDP (3.1) précédente comme l'équation d'Euler-Lagrange d'une fonctionnelle portant sur u et sur ∇u. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Pour contourner cette difficulté, G. Huisken et T. Ilmanen s'inspirent de travaux de R. Hardt et X. Zhou [20], S. Luckhaus [38], A. Lichnewsky et R. Temam [35] et A. Visintin [50]. Si Ω est un ouvert de M, K un compact de Ω et u une fonction lipschitzienne fixée de Ω, ils introduisent la fonctionnelle

$$J_u^K(v) = \int_K |\nabla v| + v\,|\nabla u| \tag{3.2}$$

portant sur toutes les fonctions v de $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui diffèrent de u sur K. Une fonction u lisse et sans points critiques vérifie l'équation (3.1) dans Ω si et seulement si $J_u^K(u) \leqslant J_u^K(v)$ pour tout K et tout v. L'introduction des compacts K est destinée à compenser le manque de compacité des niveaux de u, une difficulté inhérente à la théorie.

(c) On peut alors remplacer la formulation variationnelle (3.2) par une nouvelle fonctionnelle portant sur les parties de $\mathbb{R}^n$. Pour une partie F et un compact K de $\mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{J}_u^K(F) = \operatorname{Aire}(\partial F \cap K) - \int_{F\cap K} |\nabla u|, \tag{3.3}$$

où le bord ∂F doit être pris ici au sens de la théorie géométrique de la mesure (on prendra donc F parmi les courants de *périmètre fini*, voir par exemple [48, sections 14, 26, 27]). On dit alors qu'une partie E minimise $\widetilde{J}_u$ si et seulement si $\widetilde{J}_u^K(E) \leqslant \widetilde{J}_u^K(F)$ pour toute partie F de M telle que la différence symétrique de E et F soit relativement compacte et pour tout choix de compact K qui contienne cette différence symétrique. Suivant le contexte, il sera commode d'utiliser l'une ou l'autre des fonctionnelles J_u ou $\widetilde{J}_u$. Ces allers-retours (incessants dans [26]) sont justifiés par le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. — *Soit Ω un ouvert de M et $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors u minimise la fonctionnelle J_u sur Ω si et seulement si, pour tout t, l'ensemble de niveau $E_t(u) = \{u < t\}$ minimise $\widetilde{J}_u$ sur Ω.*

Esquisse de preuve. — Un sens est immédiat en remarquant que, pour tout v différant de u sur un compact K, la formule de la coaire [48, §12.6] fournit, si l'on note $E_t(v) = \{v < t\}$:

(3.4)
$$\begin{aligned} J_u^K(v) &= \int_{\inf v}^{\sup v} \mathrm{Aire}(\partial E_t(v)) - \int_K \int_{\inf v}^{\sup v} \chi_{\{v(x)<t\}} |\nabla u| \, dt \, d\mathrm{vol}_g + (\sup v) \int_K |\nabla u| \\ &= \int_{\inf v}^{\sup v} \widetilde{J}_u^K(E_t(v)) + (\sup v) \int_K |\nabla u|. \end{aligned}$$

L'autre sens se démontre par l'absurde. Soit F, qu'on suppose d'abord inclus dans un E_{t_0}, tel que $\widetilde{J}_u^K(F) < \widetilde{J}_u^K(E_{t_0})$ (les théorèmes généraux de théorie géométrique de la mesure permettent de le choisir minimal pour cette propriété). On définit alors v telle que $E_t(v) = \{v < t\} = E_t \cap F$ et on compare $J_u^K(u)$ à $J_u^K(v)$ à l'aide de la formule précédente (3.4) et de l'inégalité très générale

$$\widetilde{J}_u(A \cap B) + \widetilde{J}_u(A \cup B) \leqslant \widetilde{J}_u(A) + \widetilde{J}_u(B). \tag{3.5}$$

Il s'ensuit que $\widetilde{J}_u^K(E_t) = \widetilde{J}_u^K(E_t \cap F)$ pour presque tout t et finalement, pour une suite $\{t_i\}$ croissante vers t_0, $\widetilde{J}_u^K(E_{t_0}) \leqslant \underline{\lim}\, \widetilde{J}_u^K(E_{t_i} \cup F) \leqslant \widetilde{J}_u^K(F)$, en utilisant une deuxième fois l'inégalité (3.5). On procède alors de manière analogue pour un F contenant E_{t_0} et le cas général (F quelconque) est alors une conséquence de (3.5). □

Nous dénotons maintenant par E_0 la condition initiale, qui est un ouvert arbitraire de M (dans le cas de l'inégalité de Penrose, il s'agit de la partie compacte de M délimitée par la surface minimale la plus extérieure). Le problème de minimisation (avec obstacle) de G. Huisken et T. Ilmanen peut donc être récrit de la manière suivante :

PROBLÈME 3.2. — *Trouver une famille $(E_t)_{t>0}$ de parties de $\mathbb{R}^3$, croissante pour l'inclusion, telle que*

1) *E_0 est contenu dans tous les E_t ;*

2) *si l'on définit une fonction u, qui est lipschitzienne, par $E_t = \{u < t\}$, alors E_t minimise la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ dans $M - E_0$, pour tout $t > 0$.*

Il n'y a aucune raison pour que l'équation soit *a priori* satisfaite en $t = 0$: E_0 est choisi de manière arbitraire et n'a donc aucune raison de minimiser la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$. En effet, les conditions précédentes impliquent au mieux que $F_0 = \{u \leqslant 0\}$ minimise $\widetilde{J}_u$ dans $M - E_0$, mais rien n'empêche $\{u = 0\}$ de contribuer à la fonctionnelle (Figure 1). De manière générale, il faut donc imposer des conditions supplémentaires pour relier la condition initiale à l'évolution future du flot.

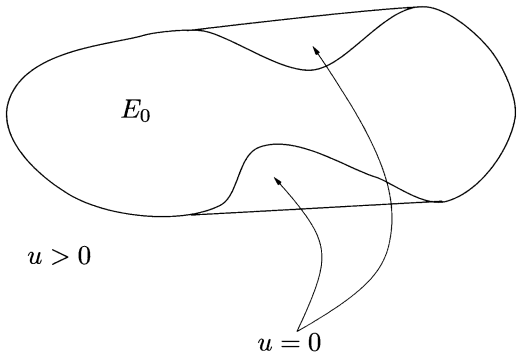

FIGURE 1. Une mauvaise condition initiale.

3.2. Régularité

La régularité des solutions éventuelles au flot reformulé est la conséquence de théorèmes classiques de théorie géométrique de la mesure, issus des travaux de W. Allard, F. Almgren et H. Federer. Leur application à la situation étudiée ici se trouve essentiellement contenue dans les travaux de U. Massari et M. Miranda [40] et P. Sternberg, G. Williams et W. Ziemer [49].

THÉORÈME 3.3. — *On suppose que la dimension est inférieure ou égale à 7. Soit f une fonction de $L^\infty(M)$ et U une partie de M de bord de classe C^1 (resp. $C^{1,\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$, resp. C^2 et $f = 0$). Si E minimise la fonctionnelle* $\operatorname{Aire}(\partial E) + \int_E f$ *(parmi toutes les parties de M qui contiennent l'obstacle U), alors ∂E est une sous-variété de classe C^1 (resp. $C^{1,\alpha}$, resp. $C^{1,1}$ et C^∞ en dehors des points de contact avec l'obstacle).*

3.3. Comportement lors des sauts

Le principal intérêt de la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ introduite au paragraphe précédent est de gérer au mieux le comportement des surfaces de niveau lorsque se produit un changement de topologie ou *saut* (ce qui est inévitable, comme nous l'avons déjà vu, si l'on souhaite que le flot soit défini pour tout temps).

Soit u une solution du Problème 3.2. Les ensembles de niveau $E_t = \{u < t\}$ minimisent donc la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$. Comme le second terme dans la définition (3.2) de $\widetilde{J}_u$ est toujours négatif et décroissant pour l'inclusion, leur bord est de périmètre minimum parmi toutes les parties de M qui les contiennent. Les parties $F_t = \{u \leqslant s\}$ sont la limite des E_s pour $s \to t^+$ et il est aisé de montrer qu'ils vérifient la même propriété de minimisation. On a ainsi $\operatorname{Aire}(\partial E_t) = \operatorname{Aire}(\partial F_t)$ dès qu'ils sont compacts. Nous dirons alors qu'une partie de M est une enveloppe minimisante (stricte) si elle est de périmètre minimum (strict) parmi toutes les parties qui la contiennent.

Comme F_t minimise non seulement le périmètre (du bord) mais aussi $\widetilde{J}_u$ et que ∇u doit être non nul au moins quelque part sur toute partie contenant strictement F_t (et qui en diffère d'un ensemble de mesure non-nulle), on en déduit que les F_t sont toujours des enveloppes minimisantes strictes. Le comportement d'une solution donnée du flot faible est maintenant intuitivement clair : tant que E_t reste une enveloppe minimisante stricte, le flot évolue de manière classique; dès que E_t n'est plus strictement minimisant, le flot saute à F_t, qui est la plus petite enveloppe minimisante stricte contenant E_t.

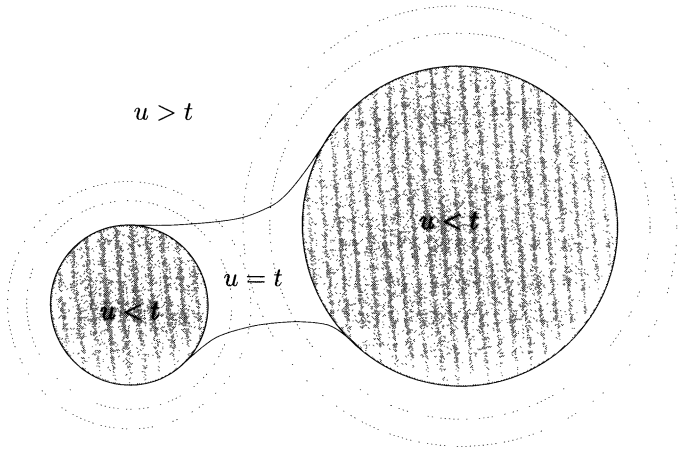

FIGURE 2. Il est temps de sauter...

La figure 2 donne une idée du phénomène pour l'évolution de deux sphères disjointes évoquée dans la section 3.1. Les sphères en pointillés représentent l'évolution ultérieure du flot classique, qui aboutit à une singularité au premier point de contact. Le flot faible « saute » à la région formée des deux sphères reliées par un collier caténoïdal dès que la réunion des deux sphères peut être entourée par une autre partie de même périmètre. Cette situation est réminiscente d'un autre phénomène, bien connu, concernant les surfaces minimales : la solution du problème de Plateau (c'est-à-dire de la recherche de la surface d'aire minimale de bord prescrit dans $\mathbb{R}^3$) pour deux cercles parallèles est un tronc de caténoïde si la distance des deux cercles est faible et deux disques sinon.

Une propriété étrange de ce comportement est qu'il est impossible d'exclure la possibilité d'un saut jusqu'à l'infini. En effet, si u est une solution du problème, alors $u_t = \min(u, t)$ est également une solution, *et ce pour tout* t ! On voit ici que, prises sans précautions, les solutions du flot faible souffrent d'une forme particulièrement brutale de non unicité (Figure 3).

Il peut même arriver que le saut jusqu'à l'infini soit le seul comportement possible. Si M est par exemple formée d'un bout cylindrique recollé à une demi-sphère et si

l'on prend l'équateur comme condition initiale, la seule solution du flot faible est la fonction nulle sur la partie cylindrique puisqu'il est impossible de trouver une enveloppe minimisante stricte qui contienne l'équateur !

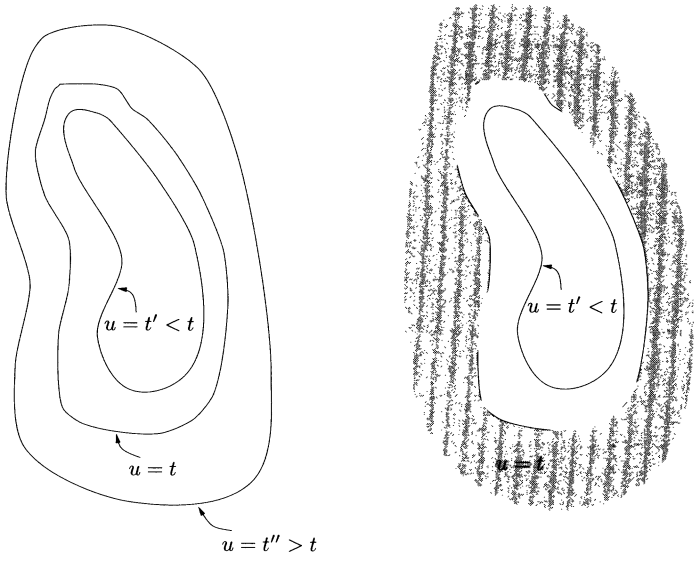

FIGURE 3. Un saut jusqu'à l'infini...

L'étude du comportement lors des sauts permet néanmoins de répondre à une question laissée auparavant en suspens : celle du comportement à $t = 0$. Puisque la fonctionnelle $\widetilde{J}_u$ sur $M - E_0$ se réduit ici au périmètre du bord, on obtient

PROPOSITION 3.4. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2 de donnée initiale E_0. Alors E_0 vérifie l'équation à $t = 0$ si et seulement si E_0 est une enveloppe minimisante.*

Rappelons que tous les E_t minimisent $\widetilde{J}_u$, qui doit donc être constante en t. Dès lors, la formule de la coaire et les considérations précédentes assurent :

PROPOSITION 3.5. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2. Si tous les E_t sont relativement compacts, alors $e^{-t}\,\mathrm{Aire}\,(\partial E_t)$ est une fonction constante en t, égale à $\mathrm{Aire}\,(\partial F_0)$. Si E_0 est une enveloppe minimisante, alors $\mathrm{Aire}\,(\partial E_0) = \mathrm{Aire}\,(\partial F_0)$.*

3.4. Propriétés d'unicité

Comme on vient de le voir, elles sont nécessairement subtiles. L'énoncé suivant, où aucune hypothèse n'est innocente, donne une idée de ce que l'on peut quand même obtenir.

PROPOSITION 3.6. — *Soit Ω un ouvert de M dont aucune composante connexe n'est compacte. Alors :*

(i) *si u et v minimisent les fonctionnelles associées J_u et J_v dans Ω et si $\{v > u\}$ est relativement compact dans Ω, alors $u \geqslant v$ dans l'ouvert ;*

(ii) *si $(E_t)_{t>0}$ et $(F_t)_{t>0}$ sont deux solutions du Problème 3.2 dans Ω de données initiales $E_0 \subset F_0$ et* si E_t est relativement compact dans Ω *pour tout t, alors $E_t \subset F_t$ pour tout t.*

Compte tenu de ce qui précède et de l'équivalence entre le flot classique (2.6) de la section 2.2 et sa formulation faible (étapes **a)–c)** de la section 3.1), on a alors

PROPOSITION 3.7. — *Soit $(E_t)_{t>0}$ une solution du Problème 3.2. Si à t_0 donné ∂E_{t_0} est une sous-variété lisse, compacte, à courbure moyenne strictement positive et est une enveloppe minimisante, alors le flot faible et le flot classique coïncident sur un petit intervalle de temps après t_0.*

Toutes les hypothèses sont nécessaires. La non annulation de la courbure moyenne donne un sens à l'équation classique, son signe assure son caractère parabolique, il existe donc une solution au flot classique sur un voisinage tubulaire de la donnée initiale. On utilise ensuite le résultat de comparaison 3.6(ii) dans ce voisinage, à la condition expresse que l'intersection de chaque ensemble de niveau $E_t = \{u < t\}$ du flot faible avec ce voisinage y soit relativement compacte (l'exemple des deux sphères montre la nécessité de cette hypothèse). D'après la discussion sur les sauts de la section précédente, la condition d'enveloppe assure que $E_{t_0} = \{u < t_0\}$ est l'intérieur de $F_{t_0} = \{u \leqslant t_0\}$, qui est la limite pour $t \to t_0^+$ (pour la distance de Hausdorff) des E_t $(t > t_0)$.

3.5. Existence de solutions convenables

G. Huisken et T. Ilmanen obtiennent une solution u, lipschitzienne et surtout *propre*, du flot faible formulé à l'aide de la fonctionnelle J_u, par un procédé de *régularisation elliptique* (voir [17, 28]), c'est-à-dire comme limite d'une suite de fonctions lisses solutions d'équations régularisées.

Il est illusoire de prétendre donner une idée précise des arguments tout en conservant une taille raisonnable à ce rapport. Nous nous contenterons donc de décrire rapidement la méthode. Pour tout $\varepsilon > 0$, G. Huisken et T. Ilmanen montrent d'abord l'existence de solutions particulières u^ε aux *équations régularisées*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u^\varepsilon}{\sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2}}\right) = \sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2} \tag{3.6}$$

sur des domaines Ω_ε, compris entre la donnée initiale E_0 et des hypersurfaces A_ε qui s'enfuient à l'infini si ε tend vers 0. Cette procédure peut être interprétée géométriquement si l'on remarque que la fonction $(z, x) \longmapsto u^\varepsilon(x) - \varepsilon z$ fournit une solution au flot classique dans $\mathbb{R} \times \Omega_\varepsilon$.

Les solutions souhaitées des équations régularisées sont obtenues par application répétée de la méthode de continuité. Il reste alors un long travail pour mettre à jour les estimées vérifiées par la suite des solutions et qui assurent sa convergence dans $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$, modulo extraction d'une sous-suite, vers la solution du flot faible souhaitée.

La mise en œuvre de ce schéma de preuve requiert un contrôle fin de la géométrie à l'infini. C'est en effet celle-ci qui assure qu'il existe des solutions propres, qui donc résistent à la tentation de « sauter jusqu'à l'infini » comme dans la figure 3. Plutôt que d'imposer des contraintes particulières au comportement asymptotique de la variété, G. Huisken et T. Ilmanen préfèrent faire une hypothèse équivalente mais de nature analytique : l'existence d'une fonction, lipschitzienne et propre, sous-solution (en un sens qui est précisé dans [26]) au flot faible en dehors d'un compact (arbitraire, éventuellement très grand). L'existence de cette sous-solution est l'ingrédient essentiel de toutes les estimées portant sur la suite des solutions des équations régularisées : elles sont toutes obtenues par comparaison avec la sous-solution et application de formes variées et parfois raffinées du principe du maximum. Le résultat de ces efforts est le

THÉORÈME 3.8 (Existence de solutions). — *Soit M une variété connexe, complète et E_0 une condition initiale au sens du Problème 3.2. S'il existe une sous-solution v dans $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$ du flot faible à l'extérieur d'un compact et qui est* propre, *alors il existe une unique solution u* propre *dans $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(M - E_0)$, de donnée initiale E_0.*

3.6. Région extérieure, formule de monotonie et inégalité de Penrose

Plaçons-nous dans la situation de la conjecture de Penrose : une variété asymptotiquement plate de dimension 3 contenant une surface minimale. Nous commençons, comme promis, par quelques préliminaires sur les régions extérieures de M, c'est-à-dire les composantes de ce qui reste lorsque l'on ôte de M toutes les surfaces minimales compactes plongées ainsi que toutes les parties compactes de M délimitées par ces mêmes surfaces. Des arguments relativement élémentaires de géométrie et topologie de dimension 3 montrent alors [26] :

LEMME 3.9. — *Chaque* région extérieure *M_e a la topologie de $\mathbb{R}^3$ privé d'un nombre fini de sphères, minimales et stables. Le bout unique de M_e est asymptotiquement plat et ∂M_e est un nombre fini de surfaces minimales stables.*

Nous supposerons désormais que M_e est difféomorphe à $\mathbb{R}^3 - B_0$. L'unique composante du bord, notée S_0, est donc la sphère minimale *la plus extérieure* de l'inégalité de Penrose, telle qu'énoncée au Théorème 1.5. On procède alors comme suit.

(a) la géométrie à l'infini étant bien maîtrisée, le Théorème 3.8 fournit une fonction propre et lipschitzienne u dont les ensembles de niveau $E_t = \{u < t\}$ sont solution du Problème 3.2 avec comme condition initiale la partie de M délimitée par S_0, qui est une sphère minimale et stable. Selon le principe exposé à la Proposition 3.4, l'équation est vérifiée en $t = 0$.

(b) *monotonie de la masse de Hawking* : Comme les solutions u^ε des équations régularisées de la section 3.5 sont des solutions du flot classique sur le cylindre $\mathbb{R} \times M$ (associées aux $N_t^\varepsilon = \{(u^\varepsilon(x) - \varepsilon z) = t\}$), la preuve de la monotonie (Lemme 2.2) fournit, pour $r \leqslant s$,

$$(3.7)\quad \int_{N_s^\varepsilon} \varphi H^2 - \int_{N_r^\varepsilon} \varphi H^2 \leqslant \int_r^s \int_{N_t^\varepsilon} \varphi \left(H^2 - 2|A|^2 - 2\mathrm{Ric}(\nu,\nu)\right) + \langle d\varphi, H\nu - 2\frac{dH}{H}\rangle,$$

où φ est une fonction plateau en la variable z (son introduction est nécessaire car les N_t^ε convergent vers les cylindres $\mathbb{R} \times \partial E_t$ qui ne sont pas compacts !) Faire converger les inégalités 3.7 lorsque ε tend vers 0 est une des parties les plus techniques du travail. Les termes les plus délicats sont ceux en la courbure moyenne H^2 (le lemme de Fatou est insuffisant car incompatible avec l'inégalité voulue) et en la seconde forme $|A|^2$. Une version faible de ces deux notions doit être utilisée (voir [48, §16]) et leur comportement lors des convergences bien contrôlé (au passage, G. Huisken et T. Ilmanen montrent et utilisent un théorème de Gauss-Bonnet pour ces notions faibles). On conclut que la masse de Hawking (faible) des niveaux de la solution fournie par la section 3.5 est croissante.

(c) *comportement asymptotique de* $E_t = \{u < t\}$: il est gouverné par les propriétés d'unicité du flot faible. Considérons la solution précédente du flot de la courbure moyenne inverse restreinte au complémentaire d'une grande boule B fixée de $\mathbb{R}^3$, munie de la famille des métriques rééchelonnées $g_R = R^{-2}g$. Elles convergent vers la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ lorsque R tend vers l'infini ; de plus, il est possible d'exhiber une suite de solutions qui converge vers une solution du flot dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Il reste à s'assurer que la seule solution du flot sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dont tous les ensembles de niveau sont relativement compacts est donnée par les sphères concentriques en l'origine. Ce point est vraisemblable si l'on relit la Proposition 3.6 mais nécessite une preuve *ad hoc*. Les bords ∂E_t sont donc, asymptotiquement, de plus en plus sphériques.

Nous avons alors en main tous les instruments nécessaires : l'existence globale du flot faible à partir de l'horizon et la monotonie de la masse de Hawking. Sa valeur à l'origine est la racine carrée de l'aire de l'horizon (convenablement renormalisée) et elle tend à l'infini vers la masse. L'inégalité de Penrose est donc démontrée.

Remarque 3.10. — L'étape **(b)**, en particulier par l'usage du théorème de Gauss-Bonnet, ne vaut que si les surfaces ∂E_t, et donc l'horizon, sont connexes. La preuve

s'étend au cas général en démarrant le flot sur la composante d'aire maximale de l'horizon, l'interrompant dès que les surfaces de niveau approchent de trop près d'autres composantes ; on construit alors « à la main » un saut qui englobe les nouvelles composantes et qui préserve la monotonie de la masse de Hawking, avant de reprendre l'évolution normale du flot. On minore ainsi la masse en fonction de l'aire de la composante la plus grande, ce qui est moins précis que la conjecture initiale de Penrose, qui est le résultat de H. Bray décrit dans les paragraphes suivants.

4. LA PREUVE DE H. BRAY

La démonstration de H. Bray est complètement originale et emploie une stratégie inédite dans l'étude de la masse. Son point de départ s'inspire néanmoins des premiers travaux de R. Schoen et S.T. Yau [44].

LEMME 4.1. — *Pour toute variété asymptotiquement plate (M, g) avec un horizon Σ, il existe une suite de métriques g_σ à courbure scalaire nulle, asymptotiquement plates et* globalement conformes *à la métrique euclidienne en dehors de la boule $B(\sigma)$, qui tend (uniformément) vers g lorsque σ tend vers l'infini. De plus $m(g_\sigma) - m(g) \leqslant C\,\sigma^{-1}$ (où $C > 0$) et chaque métrique g_σ possède un horizon Σ_σ extérieur à Σ et dont l'aire tend vers* $\mathrm{Aire}_g(\Sigma)$ *lorsque σ tend vers l'infini.*

4.1. Le flot conforme

Le lemme 4.1 montre qu'il suffit de démontrer l'inégalité de Penrose dans la classe des métriques asymptotiquement plates et *harmoniquement plates*, c'est-à-dire à courbure scalaire nulle et globalement conformes à l'espace euclidien en dehors d'un compact.

Nous nous plaçons désormais dans ce cadre et, pour fixer les notations, nous notons $g(x) = \mathcal{U}^4(x)\,\mathrm{eucl}$ pour tout x de $M_e - K$, où M_e est toujours la région extérieure au sens de la section 3.6, de bord Σ (non nécessairement connexe) et où la fonction $\mathcal{U}$ est harmonique ($\mathrm{Scal}^g = 0$) et tend vers 1 à l'infini. On se trouve donc ramené à une situation semblable aux métriques de Schwarzschild (qui peuvent donc guider l'intuition plus efficacement que dans le cas général) et où l'essentiel de l'information (au moins au voisinage de l'infini) est contenu dans une fonction. Partant d'une métrique harmoniquement plate, il est alors naturel de chercher à diminuer le quotient de Penrose en restant à l'intérieur de cette classe de métriques.

PROPOSITION 4.2. — *Il existe une fonction $(t, x) \longmapsto v_t(x)$ sur $\mathbb{R} \times M_e$ et des hypersurfaces lisses (non nécessairement connexes) $\Sigma(t)$ telles que*

$$\Delta_g v_t = 0 \text{ à l'extérieur de } \Sigma(t), \quad v_t = 0 \text{ à l'intérieur de } \Sigma(t), \quad \lim_{\infty} v_t = -\mathrm{e}^{-t} \tag{4.1}$$

et de plus $\Sigma(t)$ est la surface minimale la plus extérieure pour

$$g_t = u_t^4\, g = \left(1 + \int_0^t v_t dt\right)^4 g. \tag{4.2}$$

La fonction v est lipschitzienne en t et lisse en x sauf sur $\Sigma(t)$ où elle est C^1.

Le cas d'égalité est assez éclairant et mérite donc d'être détaillé. Partant de la métrique de Schwarzschild $g^S = (1 + \frac{m}{2r})^4$ eucl de masse m, le flot conforme défini par H. Bray produit la famille $g_t^S = \mathcal{U}_t^4$ eucl avec

$$\mathcal{U}_t(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} + \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2r} & \text{si } r > \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}, \\ \sqrt{\frac{2m}{r}} & \text{si } r \leqslant \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il s'agit donc d'une famille de métriques de Schwarzschild de masse constante m, donc toutes isométriques, mais définies à l'extérieur d'horizons $S(g_t) = \{r = \frac{m\mathrm{e}^{2t}}{2}\}$ qui « filent à l'infini ». La formulation générale du flot est obtenue en recherchant des facteurs conformes qui vérifient dans la métrique initiale g les mêmes équations que celles vérifiées par les fonctions (4.3) dans le modèle de Schwarschild g^S.

Les conditions portant sur g_t doivent être comprises comme analogues à une *équation différentielle* : la fonction v_t est la dérivée de u_t (le facteur conforme apparaissant dans la définition de g_t) et est déterminée par les équations (4.1). L'existence du flot et ses propriétés de régularité sont d'ailleurs obtenues par un procédé de discrétisation fort semblable à la méthode d'Euler pour les équations différentielles ordinaires.

LEMME 4.3. — *L'aire (totale) de $\Sigma(t)$ est constante, égale à* $\mathrm{Aire}\,(\Sigma)$.

Esquisse (très rapide) de preuve. — L'horizon initial Σ est de courbure moyenne strictement négative pour la normale extérieure dans g_t dès que $t > 0$. Dès lors, $\Sigma(t)$, surface minimale la plus extérieure pour g_t, est à l'extérieur de Σ et $\mathrm{Aire}\,(\Sigma(t)) \leqslant \mathrm{Aire}\,(\Sigma)$.

L'inégalité dans l'autre sens est nettement plus délicate et repose sur une étude fine du comportement des approximations qui sont utilisées dans la méthode d'Euler. Pour un pas $\varepsilon > 0$ petit, les approximations g_t^ε sont en effet suffisamment explicites pour que l'on puisse contrôler l'aire de leurs surfaces minimales les plus extérieures et surtout leur taux de variation. On en déduit alors que la surface minimale la plus extérieure pour g_t^ε est d'aire égale à $\mathrm{Aire}(\Sigma) + o(1)$ lorsque le pas ε tend vers 0. □

4.2. Masse et fonctions de Green

La partie la plus originale du travail de H. Bray est celle consacrée au comportement de la masse lors de l'évolution. Elle fait intervenir, de manière assez inattendue, le théorème de la masse positive.

Il met en évidence une relation (très générale) entre la masse de la variété et un objet classique de théorie du potentiel, la capacité de l'horizon, définie par

$$\mathcal{E}(\Sigma, g) = \frac{1}{2\pi} \inf_{\mathcal{D}} \int_{M_e} |d\psi|^2 \quad \text{où } \mathcal{D} = \{\psi \in C_c^\infty(M),\ \psi = 1 \text{ sur } \Sigma\}. \tag{4.4}$$

La borne inférieure est bien sûre atteinte pour une fonction ψ_0 harmonique hors de Σ, nulle à l'infini et valant 1 sur l'horizon. Si la métrique est asymptotiquement plate, une telle fonction s'écrit toujours $\psi_0 = \frac{c}{2|x|} + O\left(|x|^{-2}\right)$ (voir [4]) et la formule de Green assure que $\mathcal{E}(\Sigma, g) = c$.

THÉORÈME 4.4. — *Dans les conditions précédentes, $m(g) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{E}(\Sigma, g)$.*

Esquisse de preuve. — Soit ψ_0 une fonction minimisante pour la capacité. On considère alors le double $\bar{M} = M_e \cup (-M_e)$ (obtenu par réflexion le long de Σ) muni de la fonction harmonique φ_0 définie par $\varphi_0(x) = 1 - \frac{\psi_0(x)}{2}$ si x est dans M_e et $\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(-x)}{2}$ si x est dans $(-M_e)$, et de la métrique $\bar{g} = \varphi_0^4\, g$. La variété $\bar{M}$ semble avoir deux bouts mais, en réalité, il n'en est rien : compte tenu du comportement asymptotique de la fonction ψ_0, l'infini de $(-M_e)$ se comporte comme un voisinage épointé de l'origine dans $\mathbb{R}^3$; la métrique s'y étend de manière C^∞ car $\bar{g}$ est de la forme $\mathcal{V}^4$ eucl avec $\mathcal{V}$ harmonique (théorème d'élimination des singularités). Un calcul direct montre de plus que la masse de $(\bar{M}, \bar{g})$ (en l'infini de M_e, qui est le seul vrai bout de $\bar{M}$) vaut $m(g) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\Sigma, g)$. Si $\bar{g}$ était lisse sur Σ, elle serait redevable du théorème de la masse positive puisqu'elle est à courbure scalaire positive. Dans le cas présent, il faut régulariser astucieusement la métrique au voisinage de Σ et appliquer une version faible de la masse positive démontrée par H. Bray et F. Finster [10]. □

LEMME 4.5. — *La masse $m(g_t)$ est une fonction décroissante en t.*

Preuve. — Le calcul de la masse est effectué à l'infini : l'hypothèse de platitude harmonique assure donc qu'à l'extérieur d'un compact $g_t = u_t^4\, g_0 = (u_t \mathcal{U})^4$ eucl. De plus la fonction $u_t = 1 + \int_0^t v_t dt$ est dérivable presque partout car monotone.

Imaginons (pour simplifier) que ce soit le cas à $t = 0$. Comme $1 + \mathrm{e}^t\, v_t$ est harmonique, tend vers 0 à l'infini et vaut 1 sur l'horizon $\Sigma(t)$, $v_t = \mathrm{e}^{-t}\left(-1 + \frac{\mathcal{E}(\Sigma(t), g_t)}{2|x|}\right) + O\left(|x|^{-2}\right)$ et, de manière analogue, $\mathcal{U}(x) = \left(1 + \frac{m(g)}{2|x|}\right) + O\left(|x|^{-2}\right)$. La masse $m(t)$ se déduit directement du produit $u_t \mathcal{U}$ et on calcule $m'(0) = \mathcal{E}(\Sigma, g) - 2m(0)$, qui est négatif d'après le Théorème 4.4. La situation à $t > 0$ se traite exactement de la même façon. □

La relation entre masse et capacité n'est pas réellement nouvelle mais elle n'apparaissait jusque-là qu'en filigrane dans plusieurs travaux antérieurs [12]. En l'isolant du contexte, le travail de H. Bray souligne le rôle central du Théorème 4.4 et fournit par là des preuves beaucoup plus conceptuelles à des résultats plus anciens.

4.3. Comportement asymptotique du flot et conclusion

Il reste à comprendre le comportement des métriques g_t lorsque t devient grand. Pris un à un, les arguments employés par H. Bray ne sont pas tous difficiles, mais impliquent des estimées souvent longues, techniques, calculatoires, et l'ensemble demande une grande virtuosité. Tout le travail est néanmoins facilité par l'hypothèse de platitude harmonique : à partir d'un certain moment, tout se passe à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^3$ et l'étude des métriques g_t s'y résume à l'étude des fonctions harmoniques $\mathcal{U}_t = u_t\,\mathcal{U}$. Nous nous contentons de décrire succinctement les différentes étapes.

(a) *les surfaces* $\Sigma(t)$ *sont comprises entre les deux sphères* $S(a\mathrm{e}^{2t})$ *et* $S(b\mathrm{e}^{2t})$. Ce point est la partie la plus difficile du travail de H. Bray. Très schématiquement, il est acquis en montrant que toute autre situation conduirait à ce que l'aire de $\Sigma(t)$ ne soit pas égale à celle de Σ, en contradiction avec le Lemme 4.3. Interviennent dans la preuve de longues estimations explicites de l'aire de surfaces dans l'espace euclidien, en fonction de l'intégrale de Willmore $\int_{\Sigma(t)} H^2$. Tout ceci utilise profondément l'invariance conforme de l'intégrale de Willmore et donc l'hypothèse de platitude harmonique. En procédant avec un peu de soin, on obtient un contrôle explicite des constantes a et b.

(b) *contraction des coordonnées* : compte tenu de **(a)**, il est commode de rééchelonner toute la situation d'un facteur e^{2t}. On dispose donc de deux familles de métriques :

$$\begin{aligned} G_t &= \left(\mathrm{e}^t\,\mathcal{U}_t(x\mathrm{e}^{2t})\right)^4 \mathrm{eucl} = U_t^4\,\mathrm{eucl} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3 - B(\mathrm{e}^{-2t}) \\ \widetilde{G}_t &= W_t^4\,\mathrm{eucl} = (\varphi_0\,U_t)^4\,\mathrm{eucl} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où φ_0 est définie comme dans la preuve du Théorème 4.4. Elles sont asymptotiquement plates, et la première est bien sûr isométrique au bout harmoniquement plat de (M_e, g_t).

D'après le Lemme 4.5, leurs masses (avec des notations évidentes) sont donc reliées par $m'(t) = -2\widetilde{m}(t)$. Compte tenu du théorème de la masse positive et de sa décroissance, $m(t)$ converge, lorsque t tend vers l'infini, vers un $\mathrm{M} \geqslant 0$ et $\int^\infty \widetilde{m}(t) < \infty$.

(c) La fin de la preuve repose sur une *étude précise de l'espace* $\mathcal{H}$ *des métriques harmoniquement plates* en dehors d'une boule fixée de $\mathbb{R}^3$. Cette étude a un intérêt qui dépasse largement le cadre strict de l'inégalité de Penrose. Il n'est pas impossible qu'elle permette de préciser la structure de *l'espace des modules des métriques asymptotiquement plates.* Une clef de la démonstration est fournie par la

PROPOSITION 4.6. — *La masse est continue sur* $\mathcal{H}$. *De plus, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, si* $m(U^4\,\mathrm{eucl}) \leqslant \delta$, *alors* $|U - 1|$ *est uniformément bornée par* ε.

On en déduit (presque) immédiatement que $\widetilde{G}$ tend uniformément vers la métrique euclidienne. Les fonctions U_t et W_t n'étant pas indépendantes (leurs valeurs sont gouvernées, à l'origine, par le choix du flot conforme), la suite de métriques $\{G_t\}$ tend vers une métrique de Schwarzschild : la suite de fonctions U_t tend uniformément vers $1 + \frac{\mathrm{M}}{2r}$.

(d) La preuve est achevée si l'on sait montrer que *les surfaces* $\Sigma(t)$ *convergent vers l'horizon de Schwarzschild* (au sens, bien sûr, de la théorie géométrique de la mesure). Ce point découle en fait du **(c)**, car une connaissance suffisamment fine des fonctions U_t suffit, avec un peu de travail, à contrôler le comportement des horizons $\Sigma(t)$.

Contrairement à la preuve de G. Huisken et T. Ilmanen, celle de H. Bray ne suppose à aucun moment que l'horizon d'origine Σ est connexe. L'énoncé vaut donc pour toutes les régions extérieures décrites à la section 3.6, ce qui constitue la version la plus générale connue à ce jour de l'inégalité de Penrose :

THÉORÈME 4.7. — *Soit* (M, g) *une variété asymptotiquement plate de dimension* 3 *à courbure scalaire positive, ayant pour bord (intérieur) une famille finie* Σ *de sphères minimales et ne contenant pas d'autres surfaces minimales. Alors*

$$m(M,g) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(\Sigma)}{\pi}}. \tag{4.6}$$

En cas d'égalité, Σ *est connexe et* $M = (\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1+\frac{m}{2r})^4\,\mathrm{eucl})$.

5. QUELQUES IDÉES POUR ALLER PLUS LOIN...

Pour les spécialistes des aspects mathématiques de la relativité générale, la preuve de l'inégalité de Penrose ne constitue qu'une première étape dans un programme beaucoup plus vaste. Il reste en effet à comprendre le cas où la variété M est une hypersurface asymptotiquement plate arbitraire (non nécessairement totalement géodésique) d'un espace-temps lorentzien. Tel est en effet le cadre originel du travail de R. Penrose, passage obligé lorsque l'on s'intéresse à la conjecture de la censure cosmique déjà évoquée. La masse doit alors être complétée par trois autres quantités $\{p_1, p_2, p_3\}$ dépendant de la géométrie extrinsèque de l'hypersurface et l'horizon n'est plus une collection de surfaces minimales mais de surfaces *piégées* [41, page 435]. Sous les conditions d'énergie les plus générales, l'ensemble (m, p_1, p_2, p_3), qui est habituellement vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski et porte le nom de *vecteur de moment-énergie*, vérifie une généralisation de la masse positive [46, 52] :

$$m^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 \;\geqslant\; 0.$$

Il est difficile de citer ici une conjecture précise et la forme mathématique exacte de ce que devrait être l'inégalité de Penrose dans ce cadre général est encore un sujet de débat. Avant de passer à la situation lorentzienne, une étape intermédiaire possible est d'étudier la situation *asymptotiquement hyperbolique* où l'espace euclidien modèle est remplacé par l'espace hyperbolique de dimension 3, qui est une autre hypersurface naturelle de l'espace de Minkowski. Cet objectif ne paraît pas déraisonnable à l'heure actuelle et pourrait être atteint avec les techniques de G. Huisken et T. Ilmanen.

Les résultats et les techniques de H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen permettent aussi d'ouvrir quelques perspectives pour un autre problème de grande ampleur, tant en relativité qu'en géométrie des variétés asymptotiquement plates. Comme nous l'avons signalé, il n'existe pas de notion locale de masse en relativité. Une question majeure de la recherche actuelle est donc de définir une quantité « quasi-locale » de masse. La proposition la plus géométrique est celle de R. Bartnik [5] qui suggère de définir la masse d'un ouvert Ω de M comme l'infimum des masses des variétés asymptotiquement plates à courbure scalaire positive qui contiennent Ω isométriquement. Cette définition séduisante manquait jusqu'à présent de bases solides : ainsi, il n'était nullement assuré qu'un ouvert non localement isométrique à $\mathbb{R}^3$ avait une masse de Bartnik strictement positive. Les outils développés par G. Huisken et T. Ilmanen permettent de répondre affirmativement à cette question. Ils précisent également que les masses de Bartnik d'une exhaustion Ω_i d'une variété M asymptotiquement plate à courbure scalaire positive convergent vers la masse (usuelle) de M [26]. De leur côté, les techniques de H. Bray laissent entrevoir des liens intéressants entre la masse de Bartnik (ou d'autres masses quasi-locales) et la théorie du potentiel [9], dans l'esprit du Théorème 4.4.

Tous ces résultats permettent d'envisager maintenant une étude plus approfondie de la masse de Bartnik, ou d'autres masses quasi-locales, qui pourraient être des outils puissants pour une meilleure compréhension de la géométrie des variétés asymptotiquement plates.

Remerciements. — Ce texte n'aurait pu exister sans de nombreuses conversations avec Tom Ilmanen et Hubert Bray, ni sans la lecture assidue et ô combien précieuse qu'en a faite Gilles Carron. J'ai aussi apprécié les remarques utiles de Jean-Pierre Bourguignon, Piotr Chruściel, Hélène Davaux, Zindine Djadli, Paul Gauduchon et Jacques Lafontaine. Qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés.

RÉFÉRENCES

[1] R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner – « Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity », *Phys. Rev.* **122** (1961), p. 997–1006.

[2] S. Bando, A. Kasue & H. Nakajima – « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. math.* **97** (1989), p. 313–349.

[3] C. Bär – « Lower eigenvalues estimates for Dirac operators », *Math. Ann.* **293** (1992), p. 39–46.

[4] R. Bartnik – « The mass of an asymptotically flat manifold », *Commun. Pure. Appl. Math.* **39** (1986), p. 661–693.

[5] ———, « New definition of quasi-local mass », *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), p. 2346–2348.

[6] ———, « Quasi-spherical metrics and prescribed scalar curvature », *J. Diff. Geom.* **37** (1993), p. 31–71.

[7] R. BISHOP & R. CRITTENDEN – *Geometry of manifolds*, Pure Appl. Math., vol. XV, Acad. Press, New York, 1964.

[8] J.-P. BOURGUIGNON – « Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski », Sém. Bourbaki n° 740, Astérisque, vol. 201-202-203, Soc. math. France, 1991, p. 321–358.

[9] H. BRAY – « Proof of the Riemannian Penrose conjecture using the positive mass theorem », *J. Diff. Geom.*, **59** (2001), p. 177–267.

[10] H. BRAY & F. FINSTER – « Curvature estimates and the positive mass theorem », *Commun. Anal. Geom.*, **10** (2002), p. 291–306.

[11] H. BRAY & R. SCHOEN – « Recent proofs of the Riemannian Penrose inequality », *Current Developments in Mathematics*, Harvard Univ., 1999.

[12] G. L. BUNTING & A. K. MASOOD-UL-ALAM – « Non-existence of multiple black holes in asymptotically euclidean vacuum spacetimes », *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987), p. 147–154.

[13] Y. CHOQUET-BRUHAT – « Positive energy theorems », Relativity, groups and topology II, Les Houches XL, 1983 (B. De Witt & R. Stora, éds.), Elsevier, Amsterdam, 1984, p. 740–785.

[14] P. T. CHRUŚCIEL – « Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view », Topological properties and global structure of spacetime, Erice 1985 (P. Bergmann & V. de Sabbata, éds.), Plenum, New York, 1986, p. 49–59.

[15] ———, « On the invariant mass conjecture in General Relativity », *Commun. Math. Phys* **120** (1988), p. 233–248.

[16] V. DENISOV & O. SOLOVEV – « The energy determined in General Relativity on the basis of the traditional Hamiltonian approach does not have physical meaning », *Theor. Math. Phys.* **56** (1983), p. 832–838, english translation.

[17] L. C. EVANS & J. SPRUCK – « Motion of level sets by mean curvature », *J. Diff. Geom.* **33** (1991), p. 635–681.

[18] R. GEROCH – « Energy extraction », *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224** (1973), p. 108–117.

[19] ———, « General Relativity », in Differential geometry, Proc. Symp. Pure Math., vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[20] R. HARDT & X.ZHOU – « An evolution problem for linear growth functionals », *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), p. 1879–1907.

[21] S. HAWKING – « Gravitational radiation in an expanding universe », *J. Math. Phys.* **9** (1968), p. 598–604.

[22] S. W. HAWKING & G. ELLIS – *The large-scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[23] M. HERZLICH – « Compactification conforme des variétés asymptotiquement plates », *Bull. Soc. math. France* **125** (1997), p. 55–92.

[24] ———, « A Penrose-like inequality for the mass of Riemannian asymptotically flat manifolds », *Commun. Math. Phys.* **188** (1997), p. 121–133.

[25] O. HIJAZI – « Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe », *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991), p. 865–868.

[26] G. HUISKEN & T. ILMANEN – « The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality », *J. Diff. Geom.*, **59** (2001), p. 353–437.

[27] ———, « Proof of the Penrose inequality », *Int. Math. Res. Not.* **20** (1997), p. 1045–1058, annonce.

[28] T. ILMANEN – *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 520, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[29] P. S. JANG & R. WALD – « The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis », *J. Math. Phys.* **18** (1977), p. 41–44.

[30] J. KAZDAN – « Positive energy in General Relativity », Sém. Bourbaki n° 593, Astérisque, vol. 92-93, Soc. math. France, 1982, p. 315–330.

[31] M. KRUSKAL – « Maximal extension of the Schwarzschild metric », *Phys. Rev.* **119** (1960), p. 1743–1745.

[32] J. LEE & T. H. PARKER – « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc.* **17** (1987), p. 37–91.

[33] A. LICHNEROWICZ – *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[34] ———, « Spineurs harmoniques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **257** (1963), p. 7–9.

[35] A. LICHNEWSKY & R. TEMAM – « Pseudosolutions of the time-dependant minimal surface problem », *J. Diff. Eq.* **30** (1978), p. 340–363.

[36] R. B. LOCKHART – « Fredholm properties of a class of elliptic operators on non-compact manifolds », *Duke Math. J.* **48** (1983), p. 289–312.

[37] R. B. LOCKHART & R. MCOWEN – « Elliptic differential operators on non-compact manifolds », *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa* **12** (1985), p. 409–447.

[38] S. LUCKHAUS – « Solutions for the two-phase Stefan problem with the Gibbs-Thompson law for the melting temperature », *Eur. J. Appl. Math.* **1** (1990), p. 101–111.

[39] E. MALEC & N. O'MURCHADHA – « Trapped surfaces and the Penrose inequality in spherically symmetric geometries », *Phys. Rev.* **D 49** (1994), p. 6931–6934.

[40] U. MASSARI & M. MIRANDA – *Minimal surfaces of codimension one*, North-Holland Math. Stud., vol. 91, Elsevier, 1984.

[41] B. O'NEILL – *Semi-Riemannian geometry*, Acad. Press, San Diego, 1983.

[42] R. PENROSE – « Conformal treatment of infinity », *Relativity, groups and topology* (C. de Witt & B. de Witt, éds.), École d'été de Physique Théorique, Les Houches 1963, Gordon and Breach, 1963, p. 563–584.

[43] ———, « Naked singularities », *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224** (1973), p. 125–134.

[44] R. SCHOEN & S. T. YAU – « On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity », *Commun. Math. Phys* **65** (1979), p. 45–76.

[45] ———, « On the structure of manifolds with positive scalar curvature », *Manuscripta math.* **28** (1979), p. 159–183.

[46] ———, « The energy and linear-momentum of spacetimes in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **79** (1981), p. 47–51.

[47] K. SCHWARZSCHILD – « Über das Gravitationsfeld eines Masses nach der Einsteinschen Theorie », *Sitz. König. Preuss. Akad. Wiss.* (1916), p. 189–196.

[48] L. SIMON – *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal., vol. 3, Austr. Nat. Univ., 1983.

[49] P. STERNBERG, G. WILLIAMS & W. P. ZIEMER – « Regularity of constrained area minimizing hypersurfaces », *J. Diff. Eq.* **94** (1991), p. 83–94.

[50] A. VISINTIN – « Nucleation and mean curvature flow », *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998), p. 17–53.

[51] R. WALD – *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1984.

[52] E. WITTEN – « A new proof of the positive energy theorem », *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), p. 381–402.

Marc HERZLICH

Institut de Mathématiques
et Modélisation de Montpellier
UMR 5030 du CNRS
Université Montpellier II
F-34095 Montpellier Cedex 5
E-mail : `herzlich@math.univ-montp2.fr`