Astérisque

LAURENT BONAVERO

Factorisation faible des applications birationnelles

Astérisque, tome 282 (2002), Séminaire Bourbaki, exp. nº 880, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__1_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53e année, 2000-2001, n° 880, p. 1 à 37

FACTORISATION FAIBLE DES APPLICATIONS BIRATIONNELLES [d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]

par **Laurent BONAVERO**

1. INTRODUCTION

Dans tout ce texte, $\mathbf{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (la nullité de la caractéristique est essentielle dans les parties 2 et 5, les constructions des parties 3 et 4 sont cependant valables en caractéristique arbitraire).

1.1. Rappels sur les éclatements

Si $n \geqslant 2$ et si V est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, on note $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}(V)$ l'espace projectif des droites vectorielles de V. Si $V = \mathbf{K}^n$, on note simplement $\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{K}}(V)$. Considérons

$$B_0(\mathbf{K}^n) = \{(v, d) \in \mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \mid v \in d\}.$$

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées sur $\mathbf{K}^n$ et $[y_1 : \ldots : y_n]$ les coordonnées homogènes associées sur $\mathbf{P}^{n-1}$, alors

$$B_0(\mathbf{K}^n) = \{(x, y) \in \mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \mid \forall i, j\,,\ x_i y_j = x_j y_i\}.$$

Il en découle que $B_0(\mathbf{K}^n)$ est une sous-variété algébrique fermée lisse de $\mathbf{K}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$. La première projection $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \to \mathbf{K}^n$ est une application régulière birationnelle qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \setminus \pi^{-1}(0) \to \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ avec $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}$. L'application birationnelle $\pi : B_0(\mathbf{K}^n) \to \mathbf{K}^n$ s'appelle *l'éclatement de* $\mathbf{K}^n$ *en* 0 ; 0 est le *centre* de π et $\pi^{-1}(0)$ est le *diviseur exceptionnel* de π.

Plus généralement (voir par exemple [Har77]), si Y est une sous-variété fermée lisse d'une variété algébrique lisse X, il y a une variété algébrique lisse $B_Y(X)$ et une application régulière birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_Y(X) \setminus \pi^{-1}(Y) \to X \setminus Y$ et $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbf{P}(N_{Y/X})$ où $N_{Y/X}$ désigne le fibré normal de Y dans X. L'application birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ s'appelle *l'éclatement de* X *le long de* Y*, ou de centre* Y et $E := \pi^{-1}(Y)$ est le *diviseur exceptionnel* de π. Moralement, on remplace chaque point y de Y par l'espace projectif des directions

normales à Y dans X passant par y. Si la donnée initiale est $B_Y(X)$, on dit encore que $\pi : B_Y(X) \to X$ est une *contraction* de centre Y (éclatement et contraction désignent donc *dans ce texte* la même application birationnelle, ils sont utilisés respectivement suivant que la donnée initiale est X (resp. $B_Y(X)$) et la donnée finale $B_Y(X)$ (resp. X)). Enfin, si Z est une sous-variété de X, on appelle *transformée stricte de* Z l'adhérence dans $B_Y(X)$ de $\pi^{-1}(Z) \setminus E$.

1.2. Énoncé du théorème principal

C'est un problème classique depuis une trentaine d'années de savoir s'il est possible de décomposer une application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes lisses en une suite d'éclatements et contractions de centres lisses. En dimension 1, la question est vide : toute application birationnelle entre deux courbes algébriques complètes lisses est un isomorphisme. Dans le cas des surfaces, on sait depuis un siècle que toute application birationnelle entre surfaces complètes lisses est une suite d'éclatements et contractions de centre des points (voir par exemple [BPV84]) : un exemple classique est la transformation de Cremona $[x : y : z] \to [1/x : 1/y : 1/z]$ de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^2$ qui se décompose en l'éclatement des trois points $[0 : 0 : 1]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[1 : 0 : 0]$ suivie de la contraction des transformées strictes des trois droites joignant deux à deux les points précédents. Le problème était ouvert dès la dimension trois.

Nous donnons dans cet exposé les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant, dû à Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk [AKMW99] et Włodarczyk [Wlod99].

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes et lisses X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses. Autrement dit, il y a une suite d'applications birationnelles entre variétés algébriques complètes et lisses*

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\varphi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

de sorte que $\varphi = \varphi_{l-1} \circ \varphi_{l-2} \circ \cdots \varphi_1 \circ \varphi_0$ et pour tout i, $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ ou $\varphi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$ est une application régulière obtenue en éclatant une sous-variété irréductible lisse.

Ce texte est pour l'essentiel une reprise de [AKMW99] et [Mat99], dans lesquels on trouvera beaucoup plus de précisions, une liste de références très complète ainsi qu'une discussion détaillée des extensions ou généralisations du théorème 1.1.

Mentionnons aussi que le théorème de factorisation admet les raffinements fondamentaux suivants :

- *si φ est un isomorphisme sur un ouvert U, le centre de chaque φ_i ou φ_i^{-1} peut être choisi disjoint de U,*
- *si X_1 et X_2 sont des variétés projectives, chaque V_i peut être choisie projective,*

• *si X_1 et X_2 ne sont pas supposées complètes, toute application birationnelle propre (voir* [Har77] *pour cette notion) entre X_1 et X_2 se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses,*

• *si X_1 et X_2 sont deux variétés analytiques complexes compactes lisses, toute application biméromorphe propre entre X_1 et X_2 se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres analytiques lisses,*

• *le théorème 1.1 est vrai même si $\mathbf{K}$ n'est pas supposé algébriquement clos.*

Pour simplifier l'exposition, nous nous contenterons de renvoyer à [AKMW99] et [Mat99] pour une démonstration de ces points.

Faisons aussi les remarques suivantes :

• *la factorisation n'est évidemment pas unique (même si l'on impose que pour tout i, φ_i ne soit pas l'inverse de φ_{i-1}),*

• *dans le cas des surfaces, si φ est régulière, alors toutes les φ_i peuvent être choisies régulières. Ceci est faux en dimension supérieure ou égale à trois,*

• *la factorisation décrite dans le théorème 1.1 est une solution positive au problème de factorisation faible ; le problème de factorisation forte (au sens où il existe un entier i_0 tel que pour tout $i \leqslant i_0$, φ_i^{-1} est régulière et pour tout $i \geqslant i_0 + 1$, φ_i est régulière) est un problème ouvert à ce jour en dimension supérieure ou égale à trois.*

1.3. Quelques mots sur la démonstration du théorème 1.1

La démonstration du théorème 1.1 est en un certain sens une victoire de la géométrie torique. En effet, la ligne directrice est une réduction (en plusieurs étapes, certaines utilisant fondamentalement des techniques toriques) au cas d'une application birationnelle équivariante entre variétés toriques, cas résolu par Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], puis étendu au cadre toroïdal par Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99]. Il est bien connu depuis quelques années que la géométrie des variétés toriques (ou des plongements toroïdaux), gouvernée par des objets combinatoires simples issus de la géométrie convexe, donne une bonne vision locale de certaines propriétés des variétés algébriques (voir par exemple l'existence d'altérations due à De Jong). L'exposé qui suit donnera, je l'espère, envie au lecteur de mieux connaître ou de découvrir ces techniques ; ce texte ne remplaçant certainement pas l'énorme effort pédagogique que constitue le texte [Mat99] de K. Matsuki.

Remerciements. — Merci aux collègues qui m'écoutent parler d'éclatements depuis plusieurs années, ils sont trop nombreux pour être tous mentionnés. Merci à Michel Brion, Laurent Manivel, Kenji Matsuki et Emmanuel Peyre pour m'avoir aidé à préparer ce texte, et plus particulièrement à Stéphane Guillermou, infatigable relecteur de multiples versions préliminaires, ainsi qu'à Cinzia Casagrande pour m'avoir signalé les trop nombreuses coquilles de la version distribuée le jour de l'exposé.

Je dédie ce travail à mes enfants Alex et Zoé, et à Marguerite leur maman.

2. COBORDISME BIRATIONNEL ET ACTION DE $\mathbf{K}^*$

La notion de cobordisme birationnel a été dégagée par Włodarczyk [Wlo97], suite au travail fondamental de Morelli [Mor96] dans le cadre des variétés toriques. L'idée essentielle est la suivante : la théorie de Morse sur les variétés (différentiables réelles) permet de reconstruire topologiquement une variété donnée X à partir d'une fonction de Morse f sur X. Le passage des points critiques de f (qui sont aussi les points fixes du champ de vecteurs $\mathrm{grad}(f)$ lorsque X est munie d'une métrique riemannienne) correspond aux changements de topologie par ajout d'une cellule. A un morphisme birationnel entre X_1 et X_2 de dimension n, on associe une variété algébrique de dimension $n+1$ munie d'une action de $\mathbf{K}^*$, avec un ordre sur les composantes connexes de points fixes. L'action de $\mathbf{K}^*$ joue le rôle du champ de vecteurs $\mathrm{grad}(f)$ et à chaque composante connexe de $\mathbf{K}^*$-points fixes, on associe une application birationnelle élémentaire, dont on montre qu'elle est « localement torique ».

2.1. Rappels sur les $\mathbf{K}^*$-actions

Lorsque le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement sur une variété algébrique X, pour $t \in \mathbf{K}^*$ et $x \in X$, le résultat de l'action de t sur x sera noté $t \cdot x$. On note $X/\mathbf{K}^*$ l'ensemble des orbites de l'action et $X^{\mathbf{K}^*}$ l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de X.

DÉFINITION. — *Un* bon quotient *ou* quotient catégorique $Y = X//\mathbf{K}^*$ *est la donnée d'une variété algébrique Y et d'une application régulière $\pi : X \to Y$ constante sur les $\mathbf{K}^*$-orbites de sorte que pour tout ouvert affine U de Y, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert affine de X et l'application induite $\pi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to (\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)))^{\mathbf{K}^*}$ est un isomorphisme (ici, $(\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)))^{\mathbf{K}^*}$ désigne les éléments $\mathbf{K}^*$-invariants de $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$). Si de plus les fibres de π sont exactement les orbites, alors Y est appelé* quotient géométrique.

Rappelons (voir par exemple [MFK94]) que $\mathbf{K}^*$ étant un groupe réductif, pour toute variété affine X munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$, le quotient catégorique $X//\mathbf{K}^*$ existe et ses points correspondent aux $\mathbf{K}^*$-orbites fermées. De plus $X//\mathbf{K}^*$ est normale si X l'est.

Notations. — Soit X une variété algébrique sur laquelle $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement. Introduisons les deux sous-ensembles localement fermés de X suivants :

$$X_+ = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} t \cdot x \text{ n'existe pas dans } X\}$$

et

$$X_- = \{x \in X \mid \lim_{t\to 0} t \cdot x \text{ n'existe pas dans } X\}.$$

Précisons ici que « $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ existe dans X » signifie que l'application régulière de $\mathbf{K}^*$ dans X qui à t associe $t \cdot x$ s'étend en une application régulière de $\mathbf{K}$ dans X ayant $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ pour valeur en 0.

Premier exemple fondamental. — Considérons l'action algébrique de $\mathbf{K}^*$ sur $X = \mathbf{K}^{n+1}$ définie par $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{a_1}x_1, \ldots, t^{a_{n+1}}x_{n+1})$ où les a_i sont des entiers premiers entre eux tels que $a_i < 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha$ et $a_i > 0$ pour $\alpha + 1 \leqslant i \leqslant n+1$ pour un entier α tel que $2 \leqslant \alpha \leqslant n$. Alors $X_+ = X \setminus (\mathbf{K}^\alpha \times \{0\})$ et $X_- = X \setminus (\{0\} \times \mathbf{K}^{n+1-\alpha})$. Les quotients géométriques $X_+/\mathbf{K}^*$ et $X_-/\mathbf{K}^*$ existent, ainsi que le quotient catégorique $X//\mathbf{K}^*$ et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_-/\mathbf{K}^* \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_-"'] & & X_+/\mathbf{K}^* \arrow[dl, "\varphi_+"] \\ & X//\mathbf{K}^* & \end{tikzcd}$$

Si $\underline{0} \in X//\mathbf{K}^*$ désigne l'unique $\mathbf{K}^*$-orbite fermée de X, la fibre $\varphi_+^{-1}(\underline{0})$ (resp. $\varphi_-^{-1}(\underline{0})$) est isomorphe à l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{n+1})$ (resp. $\mathbf{P}(a_1, \ldots, a_\alpha)$) De plus, φ_+ et φ_- se restreignent en des isomorphismes sur l'ouvert $(X_- \cap X_+)/\mathbf{K}^*$, ainsi $\varphi = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_- : X_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow X_+/\mathbf{K}^*$ est une application birationnelle.

2.2. Cobordisme birationnel

La définition suivante sera l'outil fondamental dans toute la suite.

DÉFINITION. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés algébriques normales X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Un* cobordisme birationnel *pour φ est la donnée d'une variété algébrique normale B telle que :*

(i) *le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^*$ agit de façon effective sur B (*i.e. $\bigcap_{x \in B} \mathrm{Stab}(x) = 1$*),*

(ii) *les ensembles B_- et B_+ sont des ouverts (de Zariski) non vides,*

(iii) *les quotients géométriques $B_-/\mathbf{K}^*$ et $B_+/\mathbf{K}^*$ existent et sont respectivement isomorphes à X_1 et X_2,*

(iv) *si $\psi : B_- \dashrightarrow B_+$ est l'application birationnelle induite par les inclusions $B_- \cap B_+ \subset B_-$ et $B_- \cap B_+ \subset B_+$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} B_- \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d] & B_+ \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r, dashed, "\varphi"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Dans le premier exemple fondamental, $X = \mathbf{K}^{n+1}$ est un cobordisme birationnel pour $\varphi : X_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow X_+/\mathbf{K}^*$.

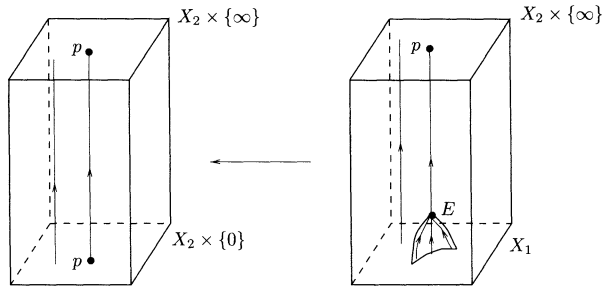

FIGURE 1. Cobordisme birationnel : éclatement d'un point

Deuxième exemple fondamental (voir aussi [Ful84]*).*— Soient X une variété algébrique complète et lisse, Y une sous-variété irréductible lisse de X et $\varphi : X_1 \to X_2 = X$ l'éclatement de X de centre Y. Construisons un cobordisme birationnel pour φ. Soit W la variété algébrique $X_2 \times \mathbf{P}^1$ sur laquelle le groupe $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement par multiplication sur le second facteur. Notons $\overline{Y} = Y \times \{0\} \subset W$ et soit $\overline{B}$ la variété algébrique complète et lisse obtenue en éclatant W le long de $\overline{Y}$. Comme $\overline{Y}$ est inclus dans l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de W, l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W se relève en une action sur $\overline{B}$. La transformée stricte D_1 de $X_2 \times \{0\}$ est isomorphe à X_1 si bien que $\overline{B}$ possède deux diviseurs constitués de $\mathbf{K}^*$-points fixes, l'un, D_1, isomorphe à X_1 et l'autre, noté D_2 et égal à l'image inverse dans $\overline{B}$ de $X_2 \times \{\infty\}$, isomorphe à X_2. Posons alors $B = \overline{B} \setminus (D_1 \cup D_2)$. Soit E le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\overline{B} \to W$. Ce diviseur est isomorphe à $\mathbf{P}(N_{\overline{Y}/W}) = \mathbf{P}(N_{Y/X_2} \oplus \underline{0})$ et est $\mathbf{K}^*$-invariant ($\underline{0}$ désigne le fibré en droites trivial). Remarquons que l'ensemble des $\mathbf{K}^*$-points fixes de B correspond à l'image de $\mathbf{P}(N_{X_2 \times \{0\}/W|\overline{Y}})$ dans l'identification précédente et est donc naturellement isomorphe à Y. C'est ensuite un exercice facile de voir que B est un cobordisme birationnel pour φ. La figure 1 représente le cas de l'éclatement d'un point dans une surface et devrait éclairer le lecteur.

2.3. Construction de cobordisme birationnel

On démontre ici le résultat suivant, dû à Włodarczyk [Wlo00] :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses. Alors, il existe une variété projective lisse $\overline{B}$ munie d'une action algébrique effective de $\mathbf{K}^*$ vérifiant :*

(i) *il existe deux plongements $\iota_1 : X_1 \to \overline{B}^{\mathbf{K}^*}$ et $\iota_2 : X_2 \to \overline{B}^{\mathbf{K}^*}$ d'images disjointes,*
(ii) *la variété $B = \overline{B} \setminus (\iota_1(X_1) \cup \iota_2(X_2))$ est un cobordisme birationnel pour φ.*

Démonstration. — Elle suit de près la construction du deuxième exemple fondamental. Comme $\varphi : X_1 \to X_2$ est une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives, il existe un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_2}$ cohérent tel que φ soit l'éclatement de $\mathcal{I}$ (voir par exemple [Har77] page 166). Soit W la variété algébrique $X_2 \times \mathbf{P}^1$ sur

laquelle le groupe $\mathbf{K}^*$ agit algébriquement par multiplication sur le second facteur. Soit $\mathcal{J} = (p_1^{-1}\mathcal{I} + p_2^{-1}\mathcal{I}_0)\mathcal{O}_W$ où $\mathcal{I}_0$ est l'idéal du point 0 de $\mathbf{P}^1$ et soit $\pi : \widetilde{W} \to W$ l'éclatement de $\mathcal{J}$. Comme $\mathcal{J}$ est $\mathbf{K}^*$-invariant, l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W se relève à $\widetilde{W}$. La variété $\widetilde{W}$ est projective et en général singulière. La transformée stricte D_1 de $X_2 \times \{0\}$ est isomorphe à X_1 et, étant lisse, de Cartier et d'équation locale d'ordre 1, est incluse dans le lieu régulier de $\widetilde{W}$. Soit alors $\overline{B}$ une désingularisation canonique de $\widetilde{W}$ (une telle désingularisation est obtenue par une suite d'éclatements le long de centres lisses disjoints du lieu régulier de $\widetilde{W}$ et est naturellement munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ relevant l'action de $\mathbf{K}^*$ sur W ; de telles désingularisations existent, voir la partie 5 pour plus de détails). Alors, la pré-image D_1' de D_1 dans $\overline{B}$ est isomorphe à X_1, la pré-image D_2' de $X_2 \times \{\infty\}$ dans $\overline{B}$ est isomorphe à X_2 et $B = \overline{B} \setminus (D_1' \cup D_2')$ est un cobordisme birationnel pour φ. □

2.4. Filtrabilité

La notion de cobordisme filtrable est due à Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], son origine se situe dans les travaux de Bialynicki-Birula.

DÉFINITION. — *Soit B une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. Si F_1 et F_2 sont deux composantes connexes de $B^{\mathbf{K}^*}$, on dit que F_1* précède *F_2, que l'on note $F_1 \prec F_2$, s'il existe $x \in B \setminus B^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t\cdot x \in F_1$ et $\lim_{t\to\infty} t\cdot x \in F_2$.*

La relation $\prec$ n'est en général pas transitive.

DÉFINITION. — *Soit B une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. On dit que B est* filtrable *s'il n'y a pas de $\prec$-cycle de composantes connexes de $B^{\mathbf{K}^*}$*

$$F_1 \prec F_2 \prec \cdots \prec F_m \prec F_1.$$

En particulier, il n'y a pas de composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ telle que $F \prec F$.

Le lemme suivant est élémentaire mais essentiel :

LEMME 2.2. — *Soit B une variété algébrique lisse munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. Si B est quasi-projective, alors B est filtrable.*

Démonstration. — Par un résultat de Sumihiro [Sum74] [Sum75], il existe une immersion localement fermée et équivariante de B dans un espace projectif $\mathbf{P}(V)$ où V est un espace vectoriel sur lequel $\mathbf{K}^*$ agit linéairement et algébriquement. Comme l'action de $\mathbf{K}^*$ est algébrique, V se décompose en espaces propres $V = \bigoplus_{k=0}^m V(a_k)$ où les a_k sont des entiers relatifs ordonnés $a_0 < \cdots < a_m$ et $\mathbf{K}^*$ agit sur $x_k \in V(a_k)$ par $t\cdot x_k = t^{a_k} x_k$ (les a_k sont les *poids* de la représentation V). L'observation suivante est élémentaire mais cruciale : *soit $x \in \mathbf{P}(V)$ que l'on relève en $\overline{x} = x_0 \oplus \cdots \oplus x_m$ dans V. Soit* $\min(x)$ *(resp.* $\max(x)$*) le plus petit (resp. grand) indice i dans $\{0, \ldots, m\}$ tel que $x_i \neq 0$. Alors $\lim_{t\to 0} t\cdot x$ (resp. $\lim_{t\to\infty} t\cdot x$) est l'image dans $\mathbf{P}(V)$ de $x_{\min(x)}$ (resp. $x_{\max(x)}$).*

Les composantes connexes de $(\mathbf{P}(V))^{\mathbf{K}^*}$ sont les $C_{a_k} = \mathbf{P}(V(a_k))$ et le lemme repose sur le fait suivant : s'il existe x dans $\mathbf{P}(V) \setminus (\mathbf{P}(V))^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t \cdot x \in C_{a_i}$ et $\lim_{t\to\infty} t \cdot x \in C_{a_j}$, alors, d'après l'observation précédente, $a_i < a_j$. De là, si F est une composante connexe de $B^{\mathbf{K}^*}$ et si $a(F)$ est l'unique entier tel que $F \subset C_{a(F)}$, on déduit que $F \prec F'$ implique $a(F) < a(F')$. Il s'ensuit que B est filtrable. □

2.5. Décomposition d'un cobordisme birationnel et théorie géométrique des invariants

Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses et soit B un cobordisme birationnel quasi-projectif (et donc filtrable d'après ce qui précède) pour φ donné par le théorème 2.1. Dans le paragraphe précédent, on a associé à B une suite de poids entiers ordonnés $(a_i)_{i=0,\dots,m}$, et quitte à remplacer V par $\mathrm{Sym}^2(V)$, on peut supposer de plus que tous les poids a_i sont pairs, en particulier $a_i < a_i + 1 < a_{i+1}$. Rappelons aussi qu'à toute composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ correspond l'un de ces poids $a(F)$. Si x appartient à $B^{\mathbf{K}^*}$, x appartient à une unique composante connexe F de $B^{\mathbf{K}^*}$ et on note $a(x)$ le poids $a(F)$ correspondant.

Notations. — Soit a_i l'un des poids précédents. On note B_{a_i} le complémentaire dans B de

$$\{x \mid x_\infty = \lim_{t\to\infty} t \cdot x \text{ existe dans } B \text{ et } a(x_\infty) < a_i\}$$
$$\cup \{x \mid x_0 = \lim_{t\to 0} t \cdot x \text{ existe dans } B \text{ et } a(x_0) > a_i\}.$$

Remarquons que chaque B_{a_i} contient l'ouvert $B_- \cap B_+$ et que si x est un point fixe dans B_{a_i}, alors $a(x) = a_i$. En particulier, d'après le paragraphe 2.4, il n'existe pas de point x dans $B_{a_i} \setminus B_{a_i}^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ et $\lim_{t\to\infty} t \cdot x$ existent dans B_{a_i}. Cette dernière observation joue un rôle crucial dans la construction de « l'atlas torique » de la partie 2.6.

Le lemme suivant est immédiat :

LEMME 2.3. — *Avec les notations précédentes,* $(B_{a_i})_+ = (B_{a_{i+1}})_-$ *pour tout* $0 \leqslant i \leqslant m-1$. *De plus,* $B_- = (B_{a_0})_-$ *et* $B_+ = (B_{a_m})_+$.

Exemple. — Considérons $\mathbf{P}(V)$ où V est un espace vectoriel sur lequel $\mathbf{K}^*$ agit linéairement et algébriquement. Comme précédemment, V se décompose en espaces propres $V = \bigoplus_{k=0}^m V(a_k)$ où les a_k sont les poids de V supposés tels que $a_k < a_k + 1 < a_{k+1}$ pour tout k. Considérons $B = \mathbf{P}(V) \setminus (\mathbf{P}(V(a_0) \cup \mathbf{P}(V(a_m)))$. Alors, il est très facile de voir que

$$B_{a_i} = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i \leqslant \max(x)\},$$
$$(B_{a_i})_+ = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant \max(x)\}$$
et
$$(B_{a_i})_- = \{x \in B \mid \min(x) \leqslant i-1 \leqslant i \leqslant \max(x)\}.$$

Le résultat suivant est dû à Włodarczyk [Wlo00], il voit son origine dans les travaux de Guillemin-Sternberg [GuS89] et Brion-Procesi [BrP90] :

PROPOSITION 2.4. — *Le quotient catégorique $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ et les quotients géométriques $(B_{a_i})_-/\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ existent. De plus, B_{a_i} est un cobordisme birationnel pour*

$$\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*.$$

Démonstration. — Les notations étant celles de la démonstration du lemme 2.2, soit ρ_0 l'action de $\mathbf{K}^*$ sur $V = \bigoplus_{k=0}^m V(a_k)$ et pour un entier $r \in \mathbf{Z}$, soit ρ_r l'action de $\mathbf{K}^*$ obtenue en « tordant » ρ_0 par t^{-r}. Autrement dit, si $x_k \in V(a_k)$, on a $\rho_r(t) \cdot x_k = t^{a_k - r} x_k$. Evidemment, l'action de ρ_r sur $\mathbf{P}(V)$ est égale à l'action initiale ρ_0, mais ρ_r induit un changement de linéarisation sur le $\mathbf{K}^*$-fibré en droites ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$. Sous l'hypothèse que les poids de l'action vérifient $a_i + 1 < a_{i+1}$, on observe que B_{a_i} (resp. $(B_{a_i})_-$, resp. $(B_{a_i})_+$) est le lieu des points semi-stables de B pour le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$ linéarisé par ρ_{a_i} (resp. ρ_{a_i-1}, resp. ρ_{a_i+1}) - rappelons que x est un point semi-stable d'une variété algébrique munie d'une action de $\mathbf{K}^*$ et d'un fibré en droites L ample et linéarisé par ρ_r si et seulement si il existe une section invariante de $L^{\otimes n}$ non nulle en x pour un certain entier n. La théorie géométrique des invariants [MFK94] assure alors que les quotients catégoriques $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$, $(B_{a_i})_-//\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+//\mathbf{K}^*$ existent, et comme de plus chaque orbite de $(B_{a_i})_-$ (resp. $(B_{a_i})_+$) est fermée dans $(B_{a_i})_-$ (resp. $(B_{a_i})_+$), les quotients $(B_{a_i})_-//\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+//\mathbf{K}^*$ sont des quotients géométriques. De plus, le quotient catégorique $\pi_i : B_{a_i} \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ est un morphisme affine : ceci découle du fait déjà observé qu'il n'existe pas de point x dans $B_{a_i} \setminus B_{a_i}^{\mathbf{K}^*}$ tel que $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ et $\lim_{t\to\infty} t \cdot x$ existent dans B_{a_i}. Notons enfin qu'il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \arrow[rr, dashed, "\varphi_i"] \arrow[dr, "(\varphi_i)_-"'] & & (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^* \arrow[dl, "(\varphi_i)_+"] \\
& B_{a_i}//\mathbf{K}^* &
\end{tikzcd}$$

si bien que le cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ s'interprète comme un changement de linéarisation pour la restriction à B_{a_i} du $\mathbf{K}^*$-fibré en droites ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$. □

Faisons le point. — Si $\varphi : X_1 \to X_2$ est une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses, ce qui précède montre que φ se factorise en une suite d'applications birationnelles

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{m-1}}{\dashrightarrow} V_m \overset{\varphi_m}{\dashrightarrow} V_{m+1} = X_2$$

où chaque $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ est un cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$, la variété B_{a_i} étant une $\mathbf{K}^*$-variété quasi-projective pour laquelle le quotient catégorique $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ existe. La figure suivante illustre cette décomposition.

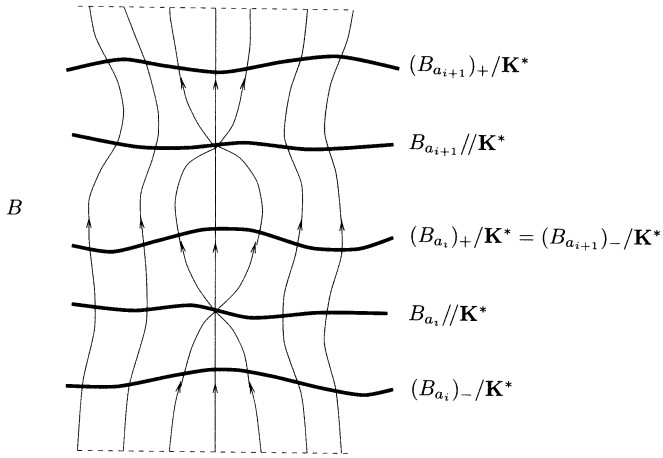

FIGURE 2. Décomposition d'un cobordisme birationnel

2.6. Structures localement toriques

Nous allons expliquer dans ce paragraphe, en montrant que l'on peut munir les variétés B_{a_i} construites précédemment d'un atlas de « cartes étales fortement toriques », que la décomposition obtenue précédemment est une décomposition en applications « localement toriques ». Ceci est un point essentiel pour la suite où toutes les constructions élaborées (en particulier dans la partie 4) et la vérification de leurs propriétés se feront à l'aide de cet atlas.

Rappelons qu'une application régulière $f : Z \to X$ entre variétés algébriques est *étale* si elle est lisse de dimension relative 0. De façon équivalente, f est étale si pour tout $z \in Z$, f induit un isomorphisme $f^* : \widehat{\mathcal{O}}_{X,f(z)} \to \widehat{\mathcal{O}}_{Z,z}$ entre les complétés des anneaux locaux. Sur le corps des nombres complexes, f est étale si et seulement si f est un biholomorphisme local.

DÉFINITION. — *Soit $f : Z \to X$ un morphisme étale, $\mathbf{K}^*$-équivariant entre deux variétés algébriques affines munies d'une action de $\mathbf{K}^*$. On dit que f est* fortement étale *si et seulement si $f//\mathbf{K}^* : Z//\mathbf{K}^* \to X//\mathbf{K}^*$ est étale et l'application naturelle $Z \to Z//\mathbf{K}^* \times_{X//\mathbf{K}^*} X$ est un isomorphisme.*

Soit V une variété algébrique lisse munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ et soit $x \in V$ un $\mathbf{K}^*$-point fixe. Par un résultat de Sumihiro [Sum74] [Sum75], il existe un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine W_x de x dans V. Comme x est un point fixe, le lemme fondamental de Luna [Lun73] [MFK94] assure qu'il existe un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine $V_x \subset W_x$ de x, saturé pour la projection $\pi_x : W_x \to W_x//\mathbf{K}^*$, et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant et fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x := T_xV$ (où T_xV est l'espace tangent de V en x). Comme l'action de $\mathbf{K}^*$ sur T_xV se diagonalise, il existe une base de

vecteurs propres de T_xV, faisant de T_xV une variété torique affine lisse où $\mathbf{K}^*$ agit comme sous-groupe à un paramètre du tore (nous renvoyons au paragraphe suivant pour les notions de géométrie torique).

En adaptant un peu cette construction, on obtient la proposition suivante, où l'on a repris les notations des paragraphes précédents :

PROPOSITION 2.5. — *Soit B_{a_i} comme dans le paragraphe 2.5 et soit $\pi_i : B_{a_i} \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$ le quotient catégorique. Alors, pour tout $x \in B_{a_i}$, il y a un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine V_x de x, saturé pour π_i, une variété torique affine lisse X_x et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant et fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x$.*

Mentionnons ici que l'on peut choisir les V_x saturés pour π_i car π_i est un morphisme affine d'après la démonstration de la proposition 2.4. Mentionnons aussi que la version en caractéristique non nulle du résultat de Luna donnée par Bardsley et Richardson [BaR85] peut s'appliquer ici si on ne suppose plus $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle.

DÉFINITION. — *Dans la proposition 2.5, pour $x \in B_{a_i}$, on appelle* carte torique fortement étale en x *la donnée de $\eta_x : V_x \to X_x$.*

Ces cartes toriques fortement étales ont des propriétés très fortes, en particulier :

- $(B_{a_i})_- \cap V_x = (V_x)_-$ et $(B_{a_i})_+ \cap V_x = (V_x)_+$,
- le morphisme η_x se restreint en des morphismes $(\eta_x)_- := (\eta_x)_{|(V_x)_-} : (V_x)_- \to (X_x)_-$ et $(\eta_x)_+ := (\eta_x)_{|(V_x)_+} : (V_x)_+ \to (X_x)_+$ fortement étales et il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(V_x)_-/\mathbf{K}^* \arrow[d, "(\eta_x)_-/\mathbf{K}^*"'] \arrow[dr] & & (V_x)_+/\mathbf{K}^* \arrow[dl] \arrow[d, "(\eta_x)_+/\mathbf{K}^*"] \\
(X_x)_-/\mathbf{K}^* \arrow[dr] & V_x//\mathbf{K}^* \arrow[d] & (X_x)_+/\mathbf{K}^* \arrow[dl] \\
& X_x//\mathbf{K}^* &
\end{tikzcd}$$

La proposition 2.5 signifie donc que le cobordisme birationnel $\varphi_i : (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ est *localement torique* au sens où, au voisinage de tout point, et à morphisme étale près, l'application birationnelle φ_i est torique. Il est essentiel de remarquer que nous sommes encore loin d'avoir démontré le théorème de factorisation : d'une part les $(B_{a_i})_-/\mathbf{K}^*$ et $(B_{a_i})_+/\mathbf{K}^*$ sont des variétés singulières en général, et d'autre part la structure torique dépend du point x choisi dans B_{a_i}.

Le but de la partie 4 est de décomposer un cobordisme birationnel donné en une suite de cobordismes birationnels (en général singuliers) « toroïdaux », ce qui signifie en un certain sens que la « structure torique » ne dépendra plus du point x choisi.

En attendant, dans la partie 3 suivante, nous nous intéressons au cadre torique.

3. LE THÉORÈME DE MORELLI ET WŁODARCZYK

Nous montrons ici le théorème de factorisation faible des applications birationnelles toriques.

3.1. Rappels de géométrie torique et énoncé du théorème

Des références usuelles de géométrie torique sont [Ewa96], [Ful93] et [Oda88].

DÉFINITION. — *Une* variété torique *(de dimension n) est une variété algébrique normale, contenant le tore $T := (\mathbf{K}^*)^n$ comme ouvert (de Zariski), munie d'une action algébrique de T prolongeant l'action de T sur lui-même.*

Si M est un réseau (*i.e.* un groupe abélien libre) de rang n, une variété torique X_Σ de dimension n munie d'une action du tore $T = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{K}^*)$ est définie par la donnée d'un éventail Σ, subdivision de l'espace vectoriel dual $N_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ par des cônes rationnels polyédraux.

Si X_Σ est une variété torique d'éventail Σ, à chaque cône σ de Σ correspond naturellement un ouvert affine T-invariant U_σ de X_Σ de sorte que $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma$. De plus, si $\sigma \subset \tau$ (*i.e.* σ est une face de τ), alors $U_\sigma \subset U_\tau$. Rappelons aussi qu'il y a une correspondance bijective entre les orbites de T de codimension r dans X_Σ et les cônes de dimension r de Σ. Pour $\sigma \in \Sigma$, on note $V(\sigma)$ l'adhérence de l'orbite correspondant à σ ; si $\sigma \subset \tau$, alors $V(\tau) \subset V(\sigma)$. Rappelons enfin qu'une variété torique est lisse si et seulement si tous les cônes de Σ sont *non-singuliers* (*i.e.* engendrés par une famille de $N := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$ pouvant se compléter en une base de N) et complète si et seulement si le support de Σ est $N_{\mathbf{Q}}$.

Le théorème de factorisation faible dans le cadre torique est dû à Morelli [Mor96] et Włodarczyk [Wlo97], voir aussi [AMR99] et [Mat00] :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle équivariante entre deux variétés toriques complètes et lisses X_1 et X_2 sur $\mathbf{K}$. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses invariants. Autrement dit, il y a une suite d'applications birationnelles équivariantes entre variétés toriques complètes et lisses*

$$X_1 = V_0 \overset{\varphi_0}{\dashrightarrow} V_1 \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{i-1}}{\dashrightarrow} V_i \overset{\varphi_i}{\dashrightarrow} V_{i+1} \overset{\varphi_{i+1}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\varphi_{l-2}}{\dashrightarrow} V_{l-1} \overset{\varphi_{l-1}}{\dashrightarrow} V_l = X_2$$

de sorte que $\varphi = \varphi_{l-1} \circ \varphi_{l-2} \circ \cdots \varphi_1 \circ \varphi_0$ et pour tout i, $\varphi_i : V_i \dashrightarrow V_{i+1}$ ou $\varphi_i^{-1} : V_{i+1} \dashrightarrow V_i$ est une application régulière obtenue en éclatant une adhérence d'orbite du tore.

Dans la suite, nous donnons les grandes lignes de la preuve du théorème 3.1. Mentionnons ici que malgré les travaux [Mor96] et [AMR99], le problème de factorisation forte torique est toujours ouvert, même en dimension trois (voir [Mat00] pour une discussion des lacunes de [Mor96] et [AMR99]).

3.2. Cobordisme torique en termes d'éventails, d'après Morelli

Soient M un réseau de rang n et N le réseau dual $\mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$. Soient N^+ le réseau $(n+1)$-dimensionnel $N \oplus \mathbf{Z}$, $N_{\mathbf{Q}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $N^+_{\mathbf{Q}} := N^+ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et π la projection $N^+_{\mathbf{Q}} \to N_{\mathbf{Q}}$.

Dans toute la suite et sauf mention explicite du contraire, tous les cônes rationnels σ de $N^+_{\mathbf{Q}}$ que nous considérerons seront supposés *simpliciaux* (*i.e.* engendrés par une famille libre d'éléments de N^+) et *π-strictement convexes* (*i.e.* $\pi(\sigma)$ est un cône strictement convexe de $N_{\mathbf{Q}}$).

DÉFINITION. — *Soit σ un cône rationnel de $N^+_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-indépendant *si $\pi_{|\sigma}$ est injective (ceci signifie que* $\mathrm{Vect}(\sigma)$ *ne contient pas la direction verticale $\{0\} \oplus \mathbf{Q}$). On dit que σ est* π-dépendant *s'il n'est pas π-indépendant. Soit σ un cône rationnel π-indépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-non-singulier *si $\pi(\sigma)$ est un cône non-singulier de $N_{\mathbf{Q}}$. On dit que σ est* π-singulier *s'il n'est pas π-non-singulier. On dit qu'un éventail de $N^+_{\mathbf{Q}}$ est* π-non-singulier *si tous ses cônes π-indépendants sont π-non-singuliers.*

Nous noterons $\nu = (0,1) \in N \oplus \mathbf{Z} = N^+$, ce vecteur correspond à un sous-groupe à un paramètre λ_ν du tore $N^+ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}^* = T \times \mathbf{K}^*$.

Soit Σ un éventail simplicial de $N^+_{\mathbf{Q}}$. Définissons les *faces supérieure et inférieure de* Σ

$$\partial_+(\Sigma) = \{x \in \Sigma \mid x + \varepsilon\nu \notin \Sigma \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit}\}$$

et

$$\partial_-(\Sigma) = \{x \in \Sigma \mid x - \varepsilon\nu \notin \Sigma \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit}\}.$$

DÉFINITION. — *Soit σ un cône rationnel simplicial de $N^+_{\mathbf{Q}}$. Nous dirons que σ est un* circuit *si σ est π-dépendant et si toutes les faces strictes de σ sont π-indépendantes.*

Remarquons que tout cône rationnel simplicial π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$ contient (*i.e.* comme face) un unique circuit.

Soit τ un cône rationnel simplicial π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$ et soit σ l'unique circuit inclus dans τ. *Dans ce qui suit, nous allons montrer que la variété affine X_τ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre λ_ν est un cobordisme birationnel, que $V(\sigma)$ est l'unique composante connexe de λ_ν-points fixes de X_τ et relier $\partial_-(\tau)$ et $\partial_+(\tau)$ à $(X_\tau)_-$ et $(X_\tau)_+$.*

Supposons pour simplifier que τ est non-singulier et écrivons $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m \rangle$ où les ρ_i sont les générateurs dans N^+ des faces de dimension 1 de τ numérotés de sorte que $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$. Comme τ est non-singulier, on peut compléter la famille $(\rho_1, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m)$ en une base $(\rho_1, \ldots, \rho_m, \ldots, \rho_{n+1})$ de N^+. La variété torique X_τ est isomorphe à $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ et contient l'ouvert affine invariant $U_\sigma = \mathbf{K}^k \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-k}$. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ la base duale de $(\rho_1, \ldots, \rho_{n+1})$. Comme $\nu \in \mathrm{Vect}(\sigma)$, on a $\langle u_i, \nu \rangle = 0$ pour $i \geqslant k+1$ et quitte à renuméroter les ρ_j, on peut

supposer que $\langle u_i, \nu\rangle > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et $\langle u_i, \nu\rangle < 0$ pour $l+1 \leqslant i \leqslant k$ où l est un certain entier vérifiant $1 \leqslant l \leqslant k-1$ (un tel l existe car σ est π-strictement convexe).

Le groupe $\mathbf{K}^*$ agit comme sous-groupe à un paramètre λ_ν sur $x \in X_\tau$ par

$$t \cdot x = \lambda_\nu(t)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\langle u_1,\nu\rangle} x_1, \ldots, t^{\langle u_k,\nu\rangle} x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Pour j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k$, notons $\gamma_j = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_j, \ldots, \rho_m\rangle$ où la notation $\check{\rho}_j$ signifie que ρ_j ne figure pas parmi les arêtes de γ_i. C'est une face maximale de τ et les formules précédentes montrent que :

$$\begin{aligned}(X_\tau)^{\mathbf{K}^*} &= \{(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})\} = V(\sigma),\\ (X_\tau)_+ &= \textstyle\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l} U_{\gamma_j}\\ (X_\tau)_- &= \textstyle\bigcup_{l+1\leqslant j\leqslant k} U_{\gamma_j}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, c'est un exercice facile de montrer que

$$\partial_+(\tau) = \textstyle\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l} \gamma_j \ \text{ et } \ \partial_-(\tau) = \bigcup_{l+1\leqslant j\leqslant k} \gamma_j.$$

Ainsi, la variété torique $X_{\pi(\partial_+(\tau))}$ (resp. $X_{\pi(\partial_-(\tau))}$) d'éventail $\pi(\partial_+(\tau))$ (resp. $\pi(\partial_-(\tau))$) est la variété torique $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ (resp. $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$) et X_τ est un cobordisme torique birationnel pour $\varphi : X_{\pi(\partial_-(\tau))} \dashrightarrow X_{\pi(\partial_+(\tau))}$. Tout ceci est illustré par la figure 3.

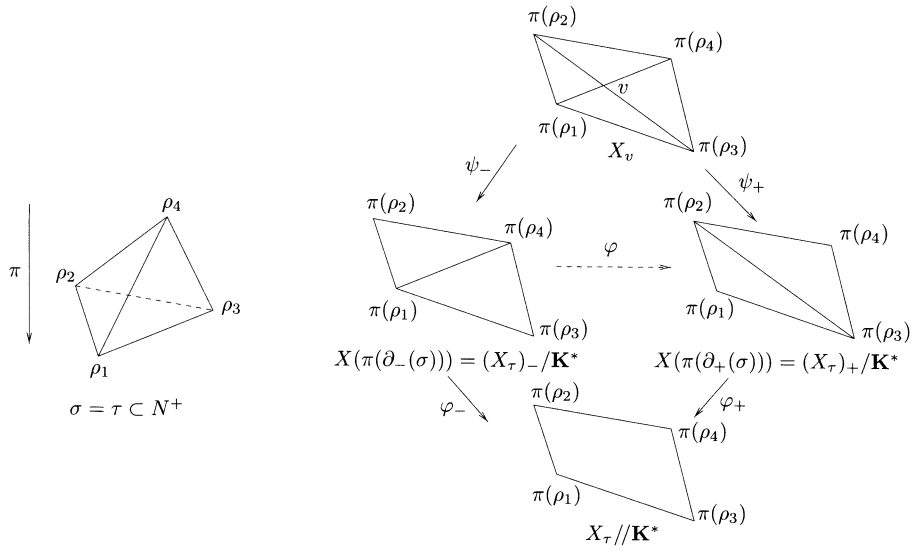

FIGURE 3. Cobordisme torique

Étudions maintenant l'application birationnelle $\varphi : X_{\pi(\partial_-(\tau))} \dashrightarrow X_{\pi(\partial_+(\tau))}$. Pour chaque ρ_j, soit v_j le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_j)$ et w_j le rationnel

tel que ρ_j soit proportionnel à (v_j, w_j) : on écrit $\rho_j = c_j(v_j, w_j)$ où c_j est un entier strictement positif. Projetant l'égalité

$$\nu = (0,1) = \sum_{j=1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle \rho_j$$

sur le facteur $N_{\mathbf{Q}}$ de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j = 0.$$

Posons

$$v = \sum_{j=1}^{l} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j = -\sum_{j=l+1}^{k} \langle u_j, \nu \rangle c_j v_j \in N.$$

Ce vecteur v est dans l'intérieur relatif des cônes

$$\langle v_1, \ldots, v_l \rangle = \bigcap_{j=l+1}^{k} \pi(\gamma_j) \text{ et } \langle v_{l+1}, \ldots, v_k \rangle = \bigcap_{j=1}^{l} \pi(\gamma_j).$$

Par conséquent, les éventails obtenus par subdivision étoilée de $\pi(\partial_+(\tau))$ et de $\pi(\partial_-(\tau))$ par rapport à v sont égaux, si bien qu'il existe une variété torique X_v et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & X_v \arrow[dl, "\psi_-"'] \arrow[dr, "\psi_+"] & \\
(X_\tau)_-/\mathbf{K}^* \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_-"'] & & (X_\tau)_+/\mathbf{K}^* \arrow[dl, "\varphi_+"] \\
 & X_\tau//\mathbf{K}^* &
\end{tikzcd}$$

Si de plus le cône initial τ est π-non singulier, alors $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ et $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ sont lisses et

$$v = \sum_{j=1}^{l} v_j = \sum_{j=l+1}^{k} v_j \in N,$$

de sorte que X_v est lisse, $\psi_+ : X_v \to (X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ et $\psi_- : X_v \to (X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ sont des éclatements le long de sous-variétés lisses invariantes (voir la figure 3).

Insistons ici sur le fait que seule la π-non singularité du cône initial τ est importante (pour obtenir des variétés $(X_\tau)_-/\mathbf{K}^*$ et $(X_\tau)_+/\mathbf{K}^*$ lisses et des éclatements ψ_+ et ψ_- le long de sous-variétés lisses invariantes) mais il n'est pas nécessaire de supposer que τ soit non-singulier, le fait qu'il soit simplicial est suffisant.

3.3. Cobordisme torique

Soit $\varphi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ une application régulière birationnelle équivariante entre deux variétés toriques projectives lisses de dimension n et d'éventails respectifs Δ' et Δ dans $N_{\mathbf{Q}}$. La construction expliquée au paragraphe 2.3 s'adapte sans difficulté au cas torique (historiquement, rappelons que c'est la construction torique qui a inspiré le cas général), si bien qu'il existe un cobordisme birationnel B torique (au sens où l'action de $\mathbf{K}^*$ sur B est celle d'un sous-groupe à un paramètre du tore de B) quasi-projectif pour φ.

D'après ce qui précède, l'existence d'un tel B en termes d'éventails se traduit de la façon suivante. Il existe un éventail Σ non-singulier (et donc simplicial) dans $N_{\mathbf{Q}}^+$ tel que $\pi(\partial_-(\Sigma)) = \Delta'$, $\pi(\partial_+(\Sigma)) = \Delta$, B est la variété torique d'éventail Σ et φ est le cobordisme birationnel $\varphi : B_-/\mathbf{K}^* = X_{\Delta'} \to B_+/\mathbf{K}^* = X_\Delta$. Comme B est quasi-projectif, il y a un ordre sur les circuits de Σ (qui correspondent aux composantes connexes des points fixes pour l'action du sous-groupe à un paramètre $\nu = (0,1)$). Choisissons un circuit σ_1 minimal pour cet ordre. Soient

$$\mathrm{Star}(\sigma_1) = \{\tau \in \Sigma \mid \sigma_1 \subset \tau\}$$

et

$$\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1) = \{\tau' \in \Sigma \mid \tau' \subset \tau \text{ pour un } \tau \text{ dans } \mathrm{Star}(\sigma_1)\}.$$

Alors comme σ_1 est minimal, $\partial_-(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1)) \subset \partial_-(\Sigma)$. Posons alors $\Sigma_1 = (\Sigma \setminus \partial_-(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1))) \cup \partial_+(\overline{\mathrm{Star}}(\sigma_1))$. D'après le paragraphe précédent, si B_1 est la variété d'éventail Σ_1 et si X_1 est la variété torique d'éventail $\Delta_1 := \pi(\partial_-(\Sigma_1))$, alors φ se décompose en

$$\varphi : B_-/\mathbf{K}^* = X_{\Delta'} \overset{\psi_-}{\leftarrow} X_v \overset{\psi_+}{\to} X_{\Delta_1} = (B_1)_-/\mathbf{K}^* \overset{\varphi_1}{\dashrightarrow} X_\Delta = (B_1)_+/\mathbf{K}^* = B_+/\mathbf{K}^*,$$

et on peut recommencer avec le cobordisme B_1. Si de plus Σ est π-non singulier, alors X_{Δ_1} et X_v sont lisses, ψ_- et ψ_+ sont des éclatements le long de sous-variétés lisses invariantes et Σ_1 est encore π-non singulier.

Faisons le point. — Le théorème 3.1 est démontré pour une application régulière $\varphi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ birationnelle équivariante entre deux variétés toriques projectives lisses de dimension n si on peut contruire un cobordisme birationnel $\widetilde{B}$ quasi-projectif d'éventail $\widetilde{\Sigma}$ simplicial et *π-non singulier* dans $N_{\mathbf{Q}}^+$ tel que $\pi(\partial_-(\widetilde{\Sigma})) = \Delta'$ et $\pi(\partial_+(\widetilde{\Sigma})) = \Delta$.

Un tel éventail $\widetilde{\Sigma}$ va être obtenu en π-désingularisant l'éventail Σ, son existence est garantie par le théorème de π-désingularisation de Morelli, dont l'énoncé fait l'objet du paragraphe suivant et dont la démonstration est repoussée à la fin de ce texte §6.

3.4. Le théorème de π-désingularisation de Morelli

Les notations sont celles du paragraphe précédent. Le théorème suivant est dû à Morelli [Mor96] avec une démonstration incomplète ; la démonstration a été complétée par Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99] [Mat00].

THÉORÈME 3.2. — *Soit Σ un éventail de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$. Alors il existe un éventail π-non-singulier de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$ obtenu par une suite finie de subdivisions étoilées de Σ. De plus, la procédure de π-désingularisation n'affecte pas les cônes π-non-singuliers de Σ.*

Il apparaîtra clairement lors de la démonstration de ce résultat §6 que l'éventail obtenu n'est en général pas non-singulier.

3.5. Démonstration du théorème de factorisation faible torique

On termine la démonstration du théorème de factorisation, qui repose sur le lemme de Chow torique (voir par exemple [Oda88]) et la levée des indéterminations torique due à De Concini-Procesi [DCP85].

THÉORÈME 3.3. — *Soit X une variété torique complète. Alors il existe une variété torique projective lisse $\widetilde{X}$ et une application régulière birationnelle équivariante $\varphi : \widetilde{X} \to X$.*

THÉORÈME 3.4. — *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle équivariante entre deux variétés toriques complètes lisses. Alors il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X} \to X$ telle que $\varphi \circ \psi : \overline{X} \to X'$ soit une application régulière birationnelle équivariante.*

De ces deux résultats, déduisons une version précise du théorème de Moishezon torique :

THÉORÈME 3.5. — *Soit X une variété torique lisse et complète. Alors il existe une variété torique projective lisse $\widetilde{X}$ obtenue à partir de X par suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \widetilde{X} \to X$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : \widetilde{X} \to X$ donnée par le théorème 3.3, où $\widetilde{X}$ est projective lisse. Appliquons le théorème 3.4 à φ^{-1} : il y a une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X} \to X$ de sorte que $h = \varphi^{-1} \circ \psi : \overline{X} \to \widetilde{X}$ soit une application régulière birationnelle. Comme ψ est un morphisme projectif et puisque $\varphi \circ h = \psi$, h est aussi un morphisme projectif, et comme $\widetilde{X}$ est projective, on en déduit que $\overline{X}$ est projective. □

Application. — Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux variétés toriques complètes et lisses. Par le théorème 3.5, il y a des variétés toriques projectives lisses $\widetilde{X_1}$ et $\widetilde{X_2}$ et deux suites d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi_1 : \widetilde{X_1} \to X_1$ et $\psi_2 : \widetilde{X_2} \to X_2$. Soit $\widetilde{\varphi} = \psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1 : \widetilde{X_1} \dashrightarrow \widetilde{X_2}$. Par le théorème 3.4, il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés invariantes de codimension deux $\psi : \overline{X_1} \to \widetilde{X_1}$ telle que $\widetilde{\varphi} \circ \psi : \overline{X_1} \to \widetilde{X_2}$ soit une application régulière birationnelle équivariante. Comme $\overline{X_1}$ et $\widetilde{X_2}$ sont projectives lisses, il y a d'après les paragraphes précédents une factorisation faible pour $\widetilde{\varphi} \circ \psi$ et par suite une factorisation faible pour φ. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

3.6. Extension au cas toroïdal

Il y a une classe de variétés algébriques possédant essentiellement les mêmes propriétés que les variétés toriques.

DÉFINITION. — *Soit V une variété algébrique et U un ouvert de V. Le plongement $U \subset V$ est un* plongement toroïdal *si pour tout $x \in V$, il y a un voisinage V_x de x dans V, une variété torique X_x et une application étale $\eta_x : V_x \to X_x$ telle que $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x \cap U$.*

Comme dans le cas torique, il y a une notion naturelle de morphismes toroïdaux et d'applications birationnelles toroïdales entre plongements toroïdaux. De plus, il y a une stratification naturelle de V et les adhérences des strates correspondent formellement aux adhérences d'orbites dans les variétés toriques. Enfin, un plongement toroïdal est décrit par un complexe polyédral conique rationnel qui joue exactement le rôle de l'éventail d'une variété torique (à ceci près que ce complexe est défini abstraitement et qu'il ne se plonge en général pas linéairement dans un espace vectoriel $N_{\mathbf{Q}}$). Les résultats de la géométrie birationnelle des variétés toriques (existence de désingularisation, levée des indéterminations par éclatements de centres lisses, etc.) s'étendent sans trop de difficultés au cas des plongements toroïdaux (voir [KKMS73] ou [AbO97] p. 69-73). Il en est de même pour le théorème de factorisation comme l'ont remarqué Abramovich, Matsuki et Rashid [AMR99].

THÉORÈME 3.6. — *Soit $\varphi : (U_1 \subset X_1) \dashrightarrow (U_2 \subset X_2)$ une application birationnelle toroïdale entre deux plongements toroïdaux lisses sur $\mathbf{K}$, X_1 et X_2 complètes. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses égaux à des adhérences de strates.*

4. STRUCTURES TOROÏDALES ET COBORDISME BIRATIONNEL

Le but de cette partie est de décomposer un cobordisme birationnel donné en une suite de cobordismes birationnels (en général singuliers) toroïdaux. L'idée est la suivante : si on éclate un faisceau d'idéaux I sur une variété algébrique, on obtient une nouvelle variété algébrique avec un diviseur bien déterminé puisque I devient principal après éclatement. Le complémentaire de son support est alors un candidat pour être un plongement toroïdal. Lorsque de plus la variété algébrique est munie d'une action de $\mathbf{K}^*$, on peut essayer de construire I de sorte que le plongement toroïdal obtenu soit compatible avec l'action de $\mathbf{K}^*$.

4.1. Idéal α-toroïdal

Soit V une variété algébrique munie d'une action algébrique effective de $\mathbf{K}^*$. Pour $v \in V$, on note $\mathrm{Stab}(v)$ le stabilisateur de v ($\mathrm{Stab}(v)$ est isomorphe soit à $\mathbf{K}^*$, soit à un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

Notation. — Si α est un entier, on note $J_{\alpha,v}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{V,v}$ engendré par les fonctions $f \in \mathcal{O}_{V,v}$ $\mathrm{Stab}(v)$-semi-invariantes de $\mathrm{Stab}(v)$-poids α, *i.e.* pour tout $t \in \mathrm{Stab}(v)$, $t^*(f) = t^\alpha f$.

Il n'est pas difficile de voir que si $z_1, \ldots, z_n$ sont des générateurs $\mathrm{Stab}(v)$-semi-invariants de l'idéal maximal $\mathcal{M}_{V,v}$ dont l'existence est assurée par le théorème de Sumihiro [Sum74] [Sum75], alors $J_{\alpha,v}$ est engendré par les monômes $z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$ de $\mathrm{Stab}(v)$-poids α. Ceci implique en particulier que si $\eta : V \to X$ est un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant fortement étale entre deux variétés algébriques munies d'une action de $\mathbf{K}^*$, alors l'image inverse de $J_{\alpha,\eta(v)}$ engendre $J_{\alpha,v}$ pour tous $v \in V$ et $\alpha \in \mathbf{Z}$.

La collection des $J_{\alpha,v}$ lorsque v décrit V ne définit pas un faisceau d'idéaux cohérent en général. Cependant, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Soient $\alpha \in \mathbf{Z}$ et B un cobordisme birationnel lisse quasi-projectif de la forme B_{a_i} (les notations sont celles des parties 2.5 et 2.6). Alors, il existe un unique faisceau d'idéaux cohérent $\mathbf{K}^*$-équivariant I_α non nul tel que pour tout $v \in (B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$, on a $(I_\alpha)_v = J_{\alpha,v}$.*

L'idéal I_α s'appelle le faisceau *α-toroïdal* associé à l'action de $\mathbf{K}^*$ sur B. Rappelons que $(B_+ \cap B_-)$ est un ouvert non vide de B et que $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$ est l'union des $\mathbf{K}^*$-orbites fermées de B.

Démonstration de la proposition 4.1. — Commençons par l'unicité de I_α. Elle est claire sur $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$. Soit donc v dans le complémentaire de $(B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}$. L'adhérence de l'orbite de v contient un point fixe. Comme I_α est uniquement déterminé en ce point fixe, il l'est aussi au voisinage puisque I_α est cohérent. Par $\mathbf{K}^*$-équivariance, I_α est alors uniquement déterminé en v.

Pour l'existence, la proposition 2.5 permet de recouvrir B par des cartes toriques $\eta_x : V_x \to X_x$ fortement étales. Comme $((B_+ \cap B_-) \cup B^{\mathbf{K}^*}) \cap V_x$ est l'image inverse par η_x de $((X_x)_+ \cap (X_x)_-) \cup (X_x)^{\mathbf{K}^*}$, il suffit de construire un faisceau α-toroïdal sur X_x. Par image inverse, ceci définit un faisceau α-toroïdal sur V_x et l'unicité déjà prouvée entraîne que ces faisceaux ainsi construits se recollent en un faisceau sur B. Le lemme suivant [AKMW99] achève donc la preuve. □

LEMME 4.2. — *Soit X une variété torique affine lisse définie par un cône régulier σ d'un réseau N et soit $a \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T. On suppose de plus que a n'appartient pas à $\sigma \cup -\sigma$ (ceci correspond au fait que $B_+ \cap B_-$ est non vide). Alors, pour tout*

$\alpha \in \mathbf{Z}$, le faisceau I_α existe, est non nul et engendré par les monômes z^m où $m \in \check{\sigma}$ avec $\langle m, a\rangle = \alpha$.

Remarquons qu'il n'est pas utile d'après ce lemme de calculer explicitement les stabilisateurs $\mathrm{Stab}(v)$. Donnons un exemple concret, que nous utiliserons aussi dans la suite :

Exemple « $(2,1,-1)$ ». — Soit $X = \mathbf{K}^3$ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre $a = (2,1,-1)$ (*i.e.* $\lambda_a(t)(z_1,z_2,z_3) = (t^2 z_1, t z_2, t^{-1} z_3)$), alors I_2 (resp. I_1, resp. I_{-1}) est le faisceau d'idéaux engendré par z_1 et z_2^2 (resp. $z_1 z_3$ et z_2, resp. z_3).

4.2. Plongements toroïdaux avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$

Soit V une variété algébrique munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$. On suppose que l'action de $\mathbf{K}^*$ est localement torique au sens où on peut recouvrir V par des cartes toriques fortement étales. Soit D un diviseur effectif de V et U l'ouvert $V \setminus \mathrm{Supp}(D)$.

DÉFINITION. — *On dit que U est un* plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ *si pour tout $x \in V$, il y a un voisinage $\mathbf{K}^*$-invariant et affine V_x de x, une variété torique affine X_x avec une action de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre et un morphisme $\mathbf{K}^*$-équivariant étale $\eta_x : V_x \to X_x$ tel que $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x \cap U$ (où T_x désigne le tore dense de X_x). On appelle* carte toroïdale étale *en x la donnée d'une telle $\eta_x : V_x \to X_x$. D'après le lemme fondamental de Luna, si une telle carte existe, en restreignant l'ouvert V_x, on peut la supposer de plus fortement étale.*

Exemples. — Soit X la variété torique $\mathbf{K}^2$ définie par un cône régulier $\sigma = \langle v_1, v_2\rangle$ d'un réseau N et soit $a = (a_1, a_2) \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T. Soient $D_{v_1} = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{K}^2 \mid z_1 = 0\}$ et $D_{v_2} = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{K}^2 \mid z_2 = 0\}$. Alors, $U = \mathbf{K}^2 \setminus (D_{v_1} \cup D_{v_2})$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ quel que soit le choix du sous-groupe à un paramètre a. En revanche, $U = \mathbf{K}^2 \setminus D_{v_1}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$ si et seulement si $a = \pm v_1$. Géométriquement, ceci signifie que l'action de $\mathbf{K}^*$ sur $\mathbf{K}^2$ est produit de l'action triviale sur $\{0\} \times \mathbf{K}$ et d'une action d'un sous-groupe à un paramètre de la variété torique $\mathbf{K} \times \{0\}$ et que le diviseur D_{v_2} est égal à $\mathbf{K} \times \{0\}$.

Cet exemple se généralise en le lemme suivant [AKMW99] :

LEMME 4.3. — *Soit X une variété torique définie par un éventail Σ d'un réseau N et soit $a \in N$ un élément primitif correspondant à une action effective de $\mathbf{K}^*$ d'un sous-groupe à un paramètre de T, soient D un diviseur torique effectif de X et $U = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout cône σ de Σ et tout diviseur torique E de l'ouvert torique affine $U_\sigma \subset X$, si E n'est pas dans* $\mathrm{Supp}(D)$, *alors il existe une variété torique affine $X_{\sigma'}$ telle que :*

$$U_\sigma \simeq X_{\sigma'} \times \mathbf{K} \ \ et \ \ E \simeq X_{\sigma'} \times \{0\}$$

de sorte que l'action de $\mathbf{K}^*$ sur U_σ soit le produit de l'action d'un sous-groupe à un paramètre sur $X_{\sigma'}$ et de l'action triviale sur $\mathbf{K}$,

(ii) *U est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$.*

Remarquons que l'implication *(i) implique (ii)* est aisée, c'est la seule utilisée dans la suite.

4.3. Faisceaux toroïdaux et plongements toroïdaux

Soit B un cobordisme birationnel lisse et quasi-projectif de dimension $n+1$ de la forme B_{a_i} (les notations sont celles des parties 2.5 et 2.6). Fixons-nous une famille finie de cartes toriques fortement étales $\eta_x : V_x \to X_x$ recouvrant B. Dans X_x, l'action de $\mathbf{K}^*$ correspond à celle d'un sous-groupe à un paramètre : concrètement X_x est isomorphe à $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ et l'action de $\mathbf{K}^*$ est de la forme $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_{n+1}} x_{n+1})$ pour certains poids entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.

Notation. — On note $\mathcal{A}$ une famille finie d'entiers telle que pour toute carte torique fortement étale $\eta_x : V_x \to X_x$, tous les poids $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ de l'action de $\mathbf{K}^*$ appartiennent à $\mathcal{A}$. Une telle famille d'entiers sera dite *admissible.*

DÉFINITION. — *Si $\mathcal{A}$ est une famille admissible d'entiers, on note $I_\mathcal{A}$ le faisceau d'idéaux sur B défini par $I_\mathcal{A} = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$. Un tel faisceau d'idéaux sur B est appelé* faisceau toroïdal.

Notation. — Si $I_\mathcal{A}$ est un faisceau toroïdal, on note $\pi_\mathcal{A} : B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}} \to B$ la normalisation de l'éclatement de B de centre le faisceau d'idéaux $I_\mathcal{A}$. Comme $I_\mathcal{A}$ est $\mathbf{K}^*$-équivariant, la variété $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est naturellement munie d'une action algébrique de $\mathbf{K}^*$ faisant de $\pi_\mathcal{A}$ un morphisme équivariant. On note $D^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ le diviseur défini par le faisceau inversible $\pi_\mathcal{A}^{-1}(I_\mathcal{A})\mathcal{O}_{B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}}$ et $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ le complémentaire de son support dans $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$.

La proposition suivante est le cœur de cette partie :

PROPOSITION 4.4. — *La variété algébrique $B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est un cobordisme birationnel quasi-projectif. L'ouvert $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$. Enfin, $(B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}})_+ = \pi_\mathcal{A}^{-1}(B_+)$ et $(B^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}})_- = \pi_\mathcal{A}^{-1}(B_-)$.*

Démonstration. — Montrons que l'ouvert $U^{\mathrm{tor}}_{I_\mathcal{A}}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$. A nouveau, il suffit de traiter le cas torique, autrement dit de montrer ce résultat dans chacune des cartes toriques fortement étales considérées au début de la construction. Le lemme suivant donne donc le résultat. □

LEMME 4.5. — *Soit X la variété torique affine lisse $\mathbf{K}^m \times (\mathbf{K}^*)^{n+1-m}$ avec une action de $\mathbf{K}^*$ de la forme $t \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_{n+1}} x_{n+1})$ pour certains poids entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Soient $\mathcal{A}$ une famille d'entiers contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ et $I_{\mathcal{A}}$ le faisceau toroïdal associé. Soient $\pi_{\mathcal{A}} : X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}} \to X$ la normalisée de l'éclatement de centre $I_{\mathcal{A}}$, $D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ le diviseur défini par le faisceau inversible $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(I_{\mathcal{A}})\mathcal{O}_{B^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}}$ et $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ le complémentaire de son support dans $B^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$. Alors $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est un plongement toroïdal avec action toroïdale de $\mathbf{K}^*$.*

Démonstration. — Les diviseurs toriques de $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ non inclus dans $\mathrm{Supp}(D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}})$ (les seuls à considérer d'après le lemme 4.3) sont des transformées strictes de diviseur $D_i := \{x \in X \mid x_i = 0\}$. Soit donc i dans $\{1, \ldots, n+1\}$. Evidemment, le monôme x_i appartient au faisceau α_i-toroïdal I_{α_i}. Si ce dernier est principal engendré par x_i, alors D_i est dans $\mathrm{Supp}(D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}})$. Sinon, soit X_i la normalisée de l'éclatement du faisceau α_i-toroïdal I_{α_i}. Il est aisé de vérifier que D_i satisfait l'assertion (i) du lemme 4.3. La suite de la démonstration consiste à remarquer que $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est obtenu en normalisant l'éclatement de centre I_{α_1}, puis en normalisant l'éclatement de centre l'image inverse de I_{α_2}, etc. □

Reprenons l'exemple « $(2, 1, -1)$ » : $X = \mathbf{K}^3$ munie de l'action du sous-groupe à un paramètre $(2, 1, -1)$. On prend ici $\mathcal{A} = \{-1, 1, 2\}$. Si X est définie par un cône régulier $\sigma = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, alors $X^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est la variété torique d'éventail Σ obtenu en subdivisant σ en les trois cônes : $\sigma_1 = \langle v_1, 2v_1 + v_2, v_3 \rangle$, $\sigma_2 = \langle v_1 + v_2, v_3, 2v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle$ et $\sigma_3 = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2 \rangle$. Le diviseur $D^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}}}$ est le diviseur $D_{v_3} \cup D_{v_1+v_2} \cup D_{2v_1+v_2} \cup D_{v_2+v_3}$. Seul les cônes σ_1 et σ_3 sont à considérer pour vérifier l'assertion (i) du lemme 4.3, avec $E = D_{v_1}$ pour σ_1 et $E = D_{v_2}$ pour σ_3. L'assertion (i) est satisfaite car $a = (2, 1, -1)$ appartient au réseau engendré par $v_1 + v_2$ et $v_2 + v_3$ et au réseau engendré par $2v_1 + v_2$ et v_3.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit B_{a_i} un cobordisme birationnel lisse et quasi-projectif obtenu dans le paragraphe 2.5. Choisissons un faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$ et notons $\pi_{\mathcal{A}_i} : B^{\mathrm{tor}}_{a_i} \to B_{a_i}$ la normalisée de l'éclatement de centre $I_{\mathcal{A}_i}$. Alors, il y a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & (B^{\mathrm{tor}}_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \arrow[rr, dashed, "\varphi_i^{\mathrm{tor}}"] \arrow[dl, "(\pi_{\mathcal{A}_i})_-"'] & & (B^{\mathrm{tor}}_{a_i})_+/\mathbf{K}^* \arrow[dr, "(\pi_{\mathcal{A}_i})_+"] & \\
V_i = (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \arrow[rrrr, dashed, "\varphi_i"] & & & & (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^* = V_{i+1}
\end{tikzcd}$$

Faisons le point. — La variété $B^{\mathrm{tor}}_{a_i}$ contient l'ouvert $U^{\mathrm{tor}}_{I_{\mathcal{A}_i}}$ comme plongement toroïdal avec action de $\mathbf{K}^*$ si bien que φ_i^{tor} est une application birationnelle toroïdale au sens

où pour tout $x \in B_{a_i}^{\mathrm{tor}}$ il y a une carte en x toroïdale fortement étale $\eta_x : V_x^{\mathrm{tor}} \to X_x$ (donc vérifiant $\eta_x^{-1}(T_x) = V_x^{\mathrm{tor}} \cap U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}}$) induisant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (V_x^{\mathrm{tor}})_-/\mathbf{K}^* & \overset{\varphi_i^{\mathrm{tor}}}{\dashrightarrow} & (V_x^{\mathrm{tor}})_+/\mathbf{K}^* \\ {\scriptstyle (\eta_x)_-/\mathbf{K}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\eta_x)_+/\mathbf{K}^*} \\ (X_x)_-/\mathbf{K}^* & \dashrightarrow & (X_x)_+/\mathbf{K}^* \end{array}$$

où $(X_x)_-/\mathbf{K}^* \dashrightarrow (X_x)_+/\mathbf{K}^*$ est une application birationnelle entre variétés toriques. Dans la partie suivante, on explique comment on peut obtenir un résultat analogue en restant dans le cadre des variétés non singulières.

5. DÉSINGULARISATION CANONIQUE ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FACTORISATION

5.1. Désingularisation canonique

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, on sait depuis Hironaka [Hir64] que toute variété algébrique peut être désingularisée par une suite d'éclatements le long de centres lisses. A partir de la dimension trois, il n'y a pas de désingularisation minimale et il n'y a pas de choix naturel d'un modèle non singulier pour une variété algébrique donnée. Cependant, avec les travaux de Bierstone-Milman [BiM97], Encinas-Villamayor [EnV97] et Villamayor [Vil89], on peut parler de désingularisation « canonique ».

DÉFINITION. — *Une* résolution canonique des singularités *est un algorithme qui à toute variété algébrique X associe une suite uniquement déterminée d'éclatements le long de centres lisses $r : X^{\mathrm{res}} \to X$ satisfaisant : pour tout morphisme lisse $Y \to X$, la variété Y^{res} est égale au produit fibré $Y \times_X X^{\mathrm{res}}$.*

Une résolution canonique des singularités a les propriétés suivantes découlant de la définition :

- les centres des éclatements sont au-dessus du lieu singulier de X,
- toute famille d'automorphismes $(\theta_g)_{g\in G}$ d'une variété X paramétrée par une variété non singulière G se relève en une famille d'automorphismes de X^{res}. Ceci s'applique en particulier au cas de l'action d'un groupe algébrique.

De telles résolutions canoniques des singularités existent d'après Bierstone-Milman, Encinas-Villamayor, Hironaka ou Villamayor.

Les algorithmes connus de résolutions canoniques des singularités ont la propriété supplémentaire suivante : *pour tout faisceau d'idéaux cohérent $I \subset \mathcal{O}_X$ sur une variété non singulière X, il existe une suite uniquement déterminée d'éclatements le long de*

centres lisses $p : X^{\mathrm{can}} \to X$ *de sorte que* $p^{-1}(I)\mathcal{O}_{X^{\mathrm{can}}}$ *soit principal et pour tout morphisme lisse* $f : Y \to X$, *la suite correspondante d'éclatements* $p' : Y^{\mathrm{can}} \to Y$ *de sorte que* $(p')^{-1}(f^*I)\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{can}}}$ *soit principal est égale au produit fibré* $Y \times_X X^{\mathrm{can}} \to Y$. (Attention, $p : X^{\mathrm{can}} \to X$ dépend de I mais nous n'avons pas inclus I dans la notation pour ne pas alourdir la suite.)

Dorénavant, on se fixe une résolution canonique des singularités.

La proposition suivante est le cœur de cette partie :

PROPOSITION 5.1. — *Avec les notations du corollaire 4.6, il y a un diagramme commutatif de variétés algébriques :*

$$\begin{tikzcd}
 & V_{i-}^{\mathrm{can}} \arrow[rr, dashed, "\varphi_i^{\mathrm{can}}"] \arrow[dl, "p_{i-}"'] \arrow[d, "h_{i-}"'] & & V_{i+}^{\mathrm{can}} \arrow[d, "h_{i+}"] \arrow[dr, "p_{i+}"] & \\
V_i^{\mathrm{res}} \arrow[d, "r_i"'] & (B_{a_i}^{\mathrm{tor}})_-/\mathbf{K}^* \arrow[rr, dashed, "\varphi_i^{\mathrm{tor}}"] \arrow[dl, "(\pi_{\mathcal{A}_i})_-"'] & & (B_{a_i}^{\mathrm{tor}})_+/\mathbf{K}^* \arrow[dr, "(\pi_{\mathcal{A}_i})_+"] & V_{i+1}^{\mathrm{res}} \arrow[d, "r_{i+1}"] \\
V_i = (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \arrow[rrrr, dashed, "\varphi_i"] & & & & (B_{a_i})_+/\mathbf{K}^* = V_{i+1}
\end{tikzcd}$$

où

(i) p_{i-} *et* p_{i+} *sont deux suites d'éclatements le long de centres lisses,*

(ii) *si* $U_{i-}^{\mathrm{can}} = h_{i-}^{-1}((U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}})_-/\mathbf{K}^*)$ *et* $U_{i+}^{\mathrm{can}} = h_{i+}^{-1}((U_{I_{\mathcal{A}_i}}^{\mathrm{tor}})_+/\mathbf{K}^*)$, *alors* $(U_{i-}^{\mathrm{can}} \subset V_{i-}^{\mathrm{can}})$ *et* $(U_{i+}^{\mathrm{can}} \subset V_{i+}^{\mathrm{can}})$ *sont des plongements toroïdaux et* φ_i^{can} *est birationnelle toroïdale.*

Expliquons la construction de ce diagramme. Il s'agit de montrer dans un premier temps que $(\pi_{\mathcal{A}_i})_-$ est l'éclatement d'un faisceau d'idéaux $(I_i)_-$ sur V_i. C'est plus facile si l'on suppose que la famille admissible $\mathcal{A}_i$ est choisie vérifiant

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} \alpha = 0,$$

ce qu'il est toujours possible de faire en rajoutant un entier à la famille admissible initialement choisie. Alors, le faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$ sur B_{a_i} est engendré par des fonctions invariantes d'après le lemme 4.2, donc provient d'un faisceau d'idéaux I_i sur $B_{a_i}//\mathbf{K}^*$. Le faisceau d'idéaux $(I_i)_-$ sur V_i est alors obtenu par image inverse $V_i = (B_{a_i})_-/\mathbf{K}^* \to B_{a_i}//\mathbf{K}^*$. Le morphisme $p_{i-} : V_{i-}^{\mathrm{can}} \to V_i^{\mathrm{res}}$ est la suite d'éclatements uniquement déterminée rendant $r_i^{-1}((I_i)_-)\mathcal{O}_{V_i^{\mathrm{res}}}$ principal et h_{i-} est l'unique morphisme induit par la propriété universelle de l'éclatement d'un faisceau d'idéaux. La vérification du point (ii) se fait à nouveau dans les cartes toriques fortement étales utilisées pour construire le faisceau toroïdal $I_{\mathcal{A}_i}$, on renvoie à [AKMW99] pour les détails.

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $\varphi : X_1 \to X_2$ une application régulière birationnelle entre deux variétés projectives lisses. Alors, φ se factorise en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de tout ce qui précède : il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à chaque φ_i^{can} et de remarquer que puisque X_1 et X_2 sont lisses, alors $X_1 = V_0 = V_0^{\mathrm{res}}$ et $X_2 = V_{m+1} = V_{m+1}^{\mathrm{res}}$. □

5.2. Fin de la démonstration du théorème de factorisation

Elle se termine exactement comme dans le cas torique, à l'aide du théorème de Moishezon [Moi67]. La levée des indéterminations, due à Hironaka [Hir75] dans le cadre général se formule ainsi :

THÉORÈME 5.3. — *Soit $\varphi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle entre deux variétés complètes lisses. Alors il existe une suite d'éclatements le long de sous-variétés lisses $\psi : \overline{X} \to X$ telle que $\varphi \circ \psi : \overline{X} \to X'$ soit une application régulière birationnelle.*

Le lemme de Chow (voir [Har77] p. 107) est lui aussi valable en général :

THÉORÈME 5.4. — *Soit X une variété algébrique complète. Alors il existe une variété projective lisse $\widetilde{X}$ et une application régulière birationnelle $\varphi : \widetilde{X} \to X$.*

On déduit de ces résultats le théorème de Moishezon [Moi67] (dont la preuve initiale, antérieure à la levée des indéterminations est évidemment beaucoup plus difficile) comme dans le cas torique :

THÉORÈME 5.5. — *Soit X une variété algébrique lisse et complète. Alors il existe une variété projective lisse $\widetilde{X}$ obtenue à partir de X par suite d'éclatements le long de sous-variétés lisses $\psi : \widetilde{X} \to X$.*

Ceci permet enfin de ramener le théorème de factorisation au corollaire 5.2.

6. APPENDICE : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE π-DÉSINGULARISATION

6.1. Outils et résultats intermédiaires principaux.

Les notes qui suivent sont une reprise de [AMR99], avec une simplification de la démonstration de la proposition 6.5. *Merci à Adam Parusinski pour sa lecture attentive de cet appendice.*

6.1.1. Relation de π-dépendance, π-multiplicité et π-profil de multiplicité.— Soit

$$\eta = \langle \rho_1, \dots, \rho_k \rangle$$

un cône simplicial de N^+ et pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soit v_i le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_i)$. Il existe alors un unique w_i dans $\mathbf{Q}$ tel que ρ_i soit proportionnel à (v_i, w_i).

DÉFINITION. — *Si η est π-indépendant, on définit la* π-multiplicité *de η, notée* π-mult(η) *comme étant la multiplicité du cône $\pi(\eta)$ (égale à l'indice dans le réseau engendré par $\pi(\eta)$ du sous-groupe $\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_k$). Remarquons que η est π-non-singulier si et seulement si* π-mult$(\eta) = 1$. *On définit le* π-profil de multiplicité *de η, noté* π-mp(η), *comme étant le quadruplet* π-mp$(\eta) :=$ (π-mult$(\eta), 0, 0, 0$).

Si η est π-dépendant, comme le noyau de π est de dimension 1, il existe une unique *relation de π-dépendance*

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0 \text{ avec } \max\{|r_i| \,;\, 1 \leqslant i \leqslant k\} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} r_i w_i > 0.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on note η_i la face de codimension 1 de η suivante :

$$\eta_i = \langle \rho_1, \dots, \check{\rho}_i, \dots, \rho_k \rangle.$$

Le lemme suivant est élémentaire et essentiel :

LEMME 6.1. — (i) *La face η_i est π-indépendante si et seulement si $r_i \neq 0$.*
(ii) *Si η_i et η_j sont toutes deux π-indépendantes, alors*

$$|r_j|\, \pi\text{-mult}(\eta_i) = |r_i|\, \pi\text{-mult}(\eta_j).$$

Notation. — Introduisons les ensembles : $I_1(\eta) = \{i \,;\, r_i = 1\}$, $I_+(\eta) = \{i \,;\, r_i > 0\}$, $I_{-1}(\eta) = \{i \,;\, r_i = -1\}$, $I_-(\eta) = \{i \,;\, r_i < 0\}$ et $i_1(\eta)$, $i_+(\eta)$, $i_{-1}(\eta)$ et $i_-(\eta)$ leur cardinal respectif.

DÉFINITION. — *Si η est π-dépendant, on définit la* π-multiplicité *de η comme étant le maximum des π-multiplicités des faces η_i pour $i \in I_+(\eta) \cup I_-(\eta)$. Autrement dit,* π-mult(η) *est le maximum des π-multiplicités des faces π-indépendantes de η. On définit le* π-profil de multiplicité *de η, noté* π-mp(η), *comme étant le quadruplet*

$$\pi\text{-mp}(\eta) := (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0) \;\; si \;\; i_1(\eta) + i_{-1}(\eta) = 1,$$

et

$$\pi\text{-mp}(\eta) := (\pi\text{-mult}(\eta), 1, i_+(\eta) + i_-(\eta), i_1(\eta) + i_{-1}(\eta)) \;\; si \;\; i_1(\eta) + i_{-1}(\eta) \geqslant 2.$$

Remarquons que la quantité $k_\eta = i_+(\eta) + i_-(\eta)$ est la dimension de l'unique circuit contenu dans η.

Notation. — Soit Σ un éventail de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$. On note g_Σ le maximum (pour l'ordre lexicographique) des π-mp(η) lorsque η décrit tous les cônes maximaux de Σ (*i.e.* non contenus strictement dans un cône de Σ) et s_Σ le nombre de cônes maximaux atteignant ce maximum. Alors le *π-profil de multiplicité* de Σ est le quintuplet :

$$\pi\text{-mp}(\Sigma) := (g_\Sigma, s_\Sigma).$$

6.1.2. Faces codéfinies.— Soient $\eta = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ un cône π-dépendant de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$ et τ une face π-indépendante de η. Si

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$$

est la relation de π-dépendance de η, on dit que τ est *codéfinie* par rapport à η si ses générateurs sont inclus dans $\{\rho_i\,,\, r_i \geqslant 0\}$ ou dans $\{\rho_i\,,\, r_i \leqslant 0\}$. Evidemment, si τ est une face de τ' où τ' est codéfinie par rapport à η, alors τ est codéfinie par rapport à η.

Si $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_l \rangle$ est un cône π-indépendant de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$, et si v_i est le générateur dans N de l'arête engendrée par $\pi(\rho_i)$, on note :

$$\text{par}(\pi(\tau)) = \{v \in N\,;\, v = \sum_{i=1}^{l} a_i v_i\,,\, 0 < a_i < 1\}.$$

Remarquons que si η est un cône π-singulier de $N_{\mathbf{Q}}^{+}$, et si τ est une face π-indépendante et π-singulière de η de dimension minimale, alors $\text{par}(\pi(\tau)) \neq \varnothing$.

La proposition suivante est le résultat central de ce paragraphe. Elle illustre parfaitement l'utilité des faces codéfinies.

PROPOSITION 6.2. — *Soient η un cône π-dépendant de N^{+} et τ une face π-indépendante de η. Soient $v \in \text{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N_{\mathbf{Q}}^{+}$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$. Soit η' l'éventail obtenu par subdivision étoilée de η par rapport à ρ. Si τ est codéfinie par rapport à η, alors π-mp$(\eta') \leqslant \pi$-mp(η) et si de plus τ est contenue dans une face γ de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale, alors π-mp$(\eta') < \pi$-mp(η).*

Démonstration. — Notons $\tau = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$ et $\eta = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$ avec $n > m$. On note $\rho = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i$ et soit $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$ la relation de π-dépendance de η.

Les cônes maximaux de η' sont les $\eta_\alpha = \langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_m, \ldots, \rho_n \rangle$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant m$. Nous allons estimer π-mp(η_α).

Les faces nouvelles de η_α (*i.e.* les faces de η_α qui ne sont pas faces de η) sont les

$$\gamma_{\alpha\beta} = \langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \check{\rho_\beta}, \ldots, \rho_n \rangle$$

pour $\beta \neq \alpha$. Supposons que $\gamma_{\alpha\beta}$ est π-indépendante et remarquons que cela implique que $r_\alpha \neq 0$ ou $r_\beta \neq 0$.

- si $\beta \geqslant m+1$, alors

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) &= |\det(v, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)| \\ &= a_\alpha |\det(v_1, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)| \\ &\leqslant a_\alpha\, \pi\text{-mult}(\eta) < \pi\text{-mult}(\eta).\end{aligned}$$

- si $\beta \leqslant m$, alors

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = |a_\alpha \det(v_\alpha, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n) \\ + a_\beta \det(v_\beta, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)|.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = \alpha$ ou β, posons $m_\lambda = \det(v_\lambda, v_1, \ldots, \check{v_\alpha}, \ldots, \check{v_\beta}, \ldots, v_n)$. De $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, on en déduit que $r_\alpha m_\alpha + r_\beta m_\beta = 0$, et τ étant codéfinie par rapport à η, r_α et r_β sont de même signe donc m_α et m_β sont de signes opposés. De là

$$\begin{aligned}\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) &= |a_\alpha m_\alpha + a_\beta m_\beta| \\ &\leqslant \max(a_\alpha |m_\alpha|, a_\beta |m_\beta|) \\ &\leqslant \max(a_\alpha, a_\beta)\, \pi\text{-mult}(\eta) < \pi\text{-mult}(\eta).\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute nouvelle face $\gamma_{\alpha\beta}$, on a $\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) < \pi\text{-mult}(\eta)$.

Enfin, chaque η_α possède une unique ancienne face de codimension un :

$$\gamma_\alpha = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$$

et cette face satisfait évidemment $\pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) \leqslant \pi\text{-mult}(\eta)$.

Le bilan est le suivant :

$$\begin{aligned}\text{si } \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) = \pi\text{-mult}(\eta), &\quad \text{alors } \pi\text{-mp}(\eta_\alpha) = (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0) \\ \text{et si } \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) < \pi\text{-mult}(\eta), &\quad \text{alors } \pi\text{-mp}(\eta_\alpha) < (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Notons s' le nombre de faces de codimension 1 de η ne contenant pas τ et de π-multiplicité maximale et r_η le nombre de faces de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale.

Alors,

- si $s' = 0$, ce qui précède montre que $\pi\text{-mp}(\eta_\alpha) < (\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0)$ pour tout α, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, et donc $\pi\text{-mp}(\eta') < \pi\text{-mp}(\eta)$.
- si $s' = 1$, on a

$$\pi\text{-mp}(\eta') = ((\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0), 1) \leqslant \pi\text{-mp}(\eta).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $r_\eta = s' = 1$, ce qui ne se produit pas dans le cas où τ est contenue dans une face de codimension 1 de η de π-multiplicité maximale.

- si $s' \geqslant 2$, on a

$$\pi\text{-mp}(\eta') = ((\pi\text{-mult}(\eta), 0, 0, 0), s') < \pi\text{-mp}(\eta) = ((\pi\text{-mult}(\eta), 1, k_\eta, r_\eta), 1). \qquad \square$$

La proposition 6.2 nous encourage à fabriquer des faces codéfinies. Ce sera l'objet du paragraphe suivant. Enonçons dès maintenant le lemme immédiat suivant :

LEMME 6.3. — *Soient η un cône π-dépendant de N^+, τ une face π-indépendante de η et σ l'unique circuit contenu dans η. Si* $\dim(\sigma) \leqslant 2$, *alors τ est codéfinie par rapport à η.*

6.1.3. Subdivision étoilée positive et négative.— Soient Σ un éventail de $N^+_{\mathbf{Q}}$ et $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ un circuit de Σ. Si

$$\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$$

est la relation de π-dépendance de σ, on pose

$$v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i \text{ et } v_- = \sum_{i \in I_-(\sigma)} v_i.$$

(Attention, v_+ et v_- ne sont pas nécessairement primitifs.) Remarquons que comme σ est un circuit, on a $I_+(\sigma) \cup I_-(\sigma) = \{1, \ldots, k\}$, autrement dit, tous les r_i de la relation de π-dépendance de σ sont non nuls.

Comme

$$v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i = \sum_{i \in I_+(\sigma)} (1 - \varepsilon r_i) v_i + \sum_{i \in I_-(\sigma)} (-\varepsilon r_i) v_i,$$

pour ε petit, v_+ est de la forme $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i$ où tous les c_i sont strictement positifs. Il existe donc ρ_+ dans l'intérieur relatif de σ tel que $\pi(\rho_+) = v_+$. Soit Σ^+ l'éventail obtenu par subdivision étoilée de Σ par rapport à ρ_+. On l'appelle *subdivision étoilée positive* de Σ par rapport à σ. (Cette construction dépend du choix de ρ_+ mais les propriétés que nous énoncerons n'en dépendent pas.) La même construction à partir de v_- donne lieu à la *subdivision étoilée négative* Σ^- de Σ par rapport à σ.

Malheureusement, le π-profil de multiplicité de Σ^+ (resp. Σ^-) n'est en général pas inférieur ou égal à celui de Σ. Le lemme facile suivant illustre néanmoins l'intérêt des subdivisions étoilées positive et négative :

LEMME 6.4. — *Soient η un cône π-dépendant de $N^+_{\mathbf{Q}}$, γ une face de codimension* 1 *de η de π-multiplicité maximale. Soit η^+ (resp. η^-) l'éventail obtenu par subdivision étoilée positive (resp. négative) de η par rapport à l'unique circuit σ contenu dans η. Alors γ est codéfinie par rapport au cône maximal de η^+ (resp. η^-) contenant γ.*

La proposition suivante joue un rôle crucial dans la démonstration du théorème de π-désingularisation.

PROPOSITION 6.5. — *Soit σ un circuit de $N^+_{\mathbf{Q}}$ de dimension strictement supérieure à* 2. *Alors soit l'éventail σ^+ obtenu par subdivision étoilée positive de σ, soit l'éventail σ^- obtenu par subdivision étoilée négative de σ satisfait l'une des deux propriétés suivantes (nous notons σ' l'éventail σ^+ ou l'éventail σ^- qui convient) :*

A) *pour tout cône maximal δ' de σ', on a $\pi\text{-mp}(\delta') < \pi\text{-mp}(\sigma)$; en particulier*

$$\pi\text{-mp}(\sigma') < \pi\text{-mp}(\sigma).$$

B) *il existe un cône maximal κ' de σ' vérifiant π-mp$(\kappa') = \pi$-mp(σ) et tel que tout cône maximal $\delta' \neq \kappa'$ de σ' vérifie π-mp$(\delta') < \pi$-mp(σ) ; en particulier*

$$\pi\text{-mp}(\sigma') = \pi\text{-mp}(\sigma).$$

De plus, l'unique ancienne face γ' de codimension 1 de κ' est π-indépendante, et vérifie π-mult$(\gamma') = \pi$-mult$(\kappa') = \pi$-mult(σ). En particulier, γ' est codéfinie par rapport à κ' d'après le lemme 6.4.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, commençons par un calcul intermédiaire : notons $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$ la relation de π-dépendance de σ et $v_+ = \sum_{i \in I_+(\sigma)} v_i = e\overline{v}_+$ avec $\overline{v}_+$ primitif. Soit enfin ρ_+ dans l'intérieur relatif de σ tel que $\pi(\rho_+) = v_+$. Les cônes maximaux de σ^+ sont de la forme $\sigma_\alpha = \langle \rho_+, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$ et nous devons estimer leur π-profil de multiplicité ; chacun d'eux a une face ancienne de codimension un $\gamma_\alpha = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \rho_n \rangle$ et de nouvelles faces

$$\gamma_{\alpha\beta} = \langle \rho_+, \rho_1, \ldots, \check{\rho_\alpha}, \ldots, \check{\rho_\beta}, \ldots, \rho_n \rangle.$$

Les calculs de π-multiplicité des faces de σ_α sont faciles :

- si $r_\alpha > 0$ alors

$$\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{1}{e} |\, \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) - \pi\text{-mult}(\gamma_\beta)| & \text{si } r_\beta > 0 \\ \frac{1}{e}\, \pi\text{-mult}(\gamma_\beta) & \text{si } r_\beta < 0, \end{cases}$$

- si $r_\alpha < 0$ alors

$$\pi\text{-mult}(\gamma_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{1}{e}\, \pi\text{-mult}(\gamma_\alpha) & \text{si } r_\beta > 0 \\ 0 & \text{si } r_\beta < 0. \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 6.5

• supposons qu'une seule face de codimension 1 de σ est de π-multiplicité maximale, autrement dit π-mp$(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0)$. Ceci signifie que $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) = 1$ et on peut supposer que $i_{-1}(\sigma) = 0$ et $i_1(\sigma) = 1$, on note alors α_0 le seul indice tel que $r_{\alpha_0} = 1$. Montrons que σ^+ satisfait la propriété B).

En effet, les formules précédentes montrent que π-mult$(\sigma_\alpha) < \pi$-mult(σ) pour $\alpha \neq \alpha_0$ (et donc π-mp$(\sigma_\alpha) < \pi$-mp(σ) pour $\alpha \neq \alpha_0$) et que π-mult$(\sigma_{\alpha_0}) = \pi$-mult$(\sigma)$, la seule face de codimension 1 de σ_{α_0} de π-multiplicité maximale étant γ_{α_0}. On en déduit que π-mp$(\sigma_{\alpha_0}) = \pi$-mp$(\sigma)$, et γ_{α_0}, étant de π-multiplicité maximale, est codéfinie par rapport à σ_{α_0} d'après le lemme 6.4.

• supposons que π-mp$(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, i_+(\sigma) + i_-(\sigma), i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma))$. Dans ce cas, $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et on peut supposer que $i_1(\sigma) \geqslant 1$. Montrons que σ^+ satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = 1$.

(i) si $e > 1$, les formules précédentes montrent que $\pi\text{-mult}(\sigma_\alpha) \leqslant \pi\text{-mult}(\sigma)$ pour tout α, et que si $\pi\text{-mult}(\sigma_\alpha) = \pi\text{-mult}(\sigma)$, la seule face de codimension 1 de σ_α de π-multiplicité maximale est γ_α. On en déduit que $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) \leqslant (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi\text{-mp}(\sigma)$ pour tout α et donc que σ^+ satisfait la propriété A).

(ii) si $e = 1$, évaluons séparément $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha)$ suivant que $r_\alpha = -1$, $-1 < r_\alpha < 0$, $r_\alpha = 1$ ou $1 > r_\alpha > 0$.

a) si $-1 < r_\alpha < 0$, les formules précédentes montrent que $\pi\text{-mult}(\sigma_\alpha) < \pi\text{-mult}(\sigma)$ et donc que $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) < \pi\text{-mp}(\sigma)$.

b) si $1 > r_\alpha > 0$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) \begin{cases} \leqslant (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi\text{-mp}(\sigma) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \leqslant 1, \\ = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, i_{-1}(\sigma)) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \geqslant 2. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, $k_{\sigma_\alpha} \leqslant k_\sigma = \dim(\sigma)$ et $i_{-1}(\sigma) < i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma)$ donc $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) < \pi\text{-mp}(\sigma)$.

c) si $r_\alpha = 1$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) = \begin{cases} (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, 1 + i_{-1}(\sigma)) & \text{si } i_{-1}(\sigma) \neq 0, \\ (\pi\text{-mult}(\sigma), 0, 0, 0) < \pi\text{-mp}(\sigma) & \text{si } i_{-1}(\sigma) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas, si $i_1(\sigma) \geqslant 2$, σ_α possède une face de codimension 1 π-dépendante (car de π-multiplicité nulle) donc $k_{\sigma_\alpha} < k_\sigma$ et par suite $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) < \pi\text{-mp}(\sigma)$; sinon $i_1(\sigma) = 1$, par suite $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) = \pi\text{-mp}(\sigma)$ et γ_α, étant de π-multiplicité maximale, est codéfinie par rapport à σ_α d'après le lemme 6.4.

d) si $r_\alpha = -1$, les formules précédentes montrent que

$$\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) = (\pi\text{-mult}(\sigma), 1, k_{\sigma_\alpha}, 1 + i_+(\sigma)).$$

(Remarquons que $i_+(\sigma) \geqslant i_1(\sigma) \geqslant 1$). Si $i_-(\sigma) \geqslant 2$, σ_α possède une face de codimension 1 π-dépendante (car de π-multiplicité nulle) donc $k_{\sigma_\alpha} < k_\sigma$ et par suite $\pi\text{-mp}(\sigma_\alpha) < \pi\text{-mp}(\sigma)$; si $i_-(\sigma) = 1$, alors

$$1 + i_+(\sigma) \geqslant i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) = i_1(\sigma) + 1$$

et on ne peut conclure à ce stade de la démonstration.

Le bilan est cependant le suivant : si $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et $i_1(\sigma) \geqslant 1$ alors σ^+ satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = 1$. De façon symétrique, si $i_1(\sigma) + i_{-1}(\sigma) \geqslant 2$ et $i_{-1}(\sigma) \geqslant 1$ alors σ^- satisfait l'une des propriétés A) ou B) sauf si $i_1(\sigma) = i_+(\sigma) = 1$.

Le seul cas restant est donc celui où

$$i_{-1}(\sigma) = i_-(\sigma) = i_1(\sigma) = i_+(\sigma) = 1,$$

mais alors $\dim(\sigma) = 2$ ce qui est exclu par l'hypothèse. □

Nous aurons besoin du lemme suivant qui précise la proposition 6.5 :

LEMME 6.6. — *Soient Σ un éventail de N^+, σ un circuit de Σ de dimension strictement supérieure à 2. Si $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ désigne l'éventail obtenu par la subdivision étoilée positive ou négative de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ donnée par la proposition précédente, alors*

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') < \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) \ \textit{dans le cas A)}$$

et

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') = \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) \ \textit{dans le cas B)}\ .$$

Indication de démonstration. — On montre que si

$$\pi\text{-mp}(\sigma) = (\pi\text{-mult}(\sigma), b_\sigma, k_\sigma, r_\sigma, 1) \ \text{ et } \ \pi\text{-mp}(\sigma') = (\pi\text{-mult}(\sigma'), b_{\sigma'}, k_{\sigma'}, r_{\sigma'}, s'),$$

alors il existe des entiers e et s supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}) = (\pi\text{-mult}(\sigma)e, b_\sigma, k_\sigma, r_\sigma, s)$$

et

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') = (\pi\text{-mult}(\sigma')e, b_{\sigma'}, k_{\sigma'}, r_{\sigma'}, s's). \qquad \square$$

6.2. Démonstration du théorème de π-désingularisation.

Soit Σ un éventail de N^+. La stratégie est claire : si Σ est π-non-singulier, il n'y a rien à faire. Sinon, il suffit de construire un éventail Σ_1 obtenu par une suite finie de subdivisions étoilées de Σ n'affectant pas les cônes π-non-singuliers de Σ et vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) < \pi\text{-mp}(\Sigma)$. Si Σ_1 est π-non-singulier, c'est fini, sinon on recommence. Ce procédé doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes et l'éventail obtenu est π-non-singulier. La construction de Σ_1 se fait en trois étapes, illustrées par la figure 4.

Étape 1. — Posons $\pi\text{-mp}(\Sigma) = (g_\Sigma, s_\Sigma)$ et choisissons η un cône maximal de Σ de π-profil de multiplicité maximal (*i.e.* égal à g_Σ) et soit σ l'unique circuit contenu dans η.

(i) Supposons que $\dim(\sigma) > 2$ et appliquons alors la proposition 6.5 ; on note Σ' l'éventail ainsi obtenu et η' le sous-éventail de Σ' obtenu en subdivisant η.

- Dans le cas A), le lemme 6.6 assure que $\pi\text{-mp}(\Sigma') < \pi\text{-mp}(\Sigma)$. On pose alors $\Sigma_1 := \Sigma$.
- Dans le cas B), le lemme 6.6 assure que $\pi\text{-mp}(\Sigma') = \pi\text{-mp}(\Sigma)$. Soit γ l'unique face de codimension 1 de η telle que $\gamma \cap \sigma = \gamma'$ (γ' donnée par la proposition 6.5). Alors γ est codéfinie par rapport à l'unique cône maximal ν de η' dont elle est face, elle est de plus de π-multiplicité maximale.

(ii) Supposons que $\dim(\sigma) \leqslant 2$ et choisissons une face γ de codimension 1 de η, de π-multiplicité maximale. Comme $\dim(\sigma) \leqslant 2$, γ est codéfinie par rapport à η.

Le bilan de l'Étape 1 est le suivant : nous avons construit un éventail Σ', subdivision étoilée de Σ, vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma') \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma)$ avec

(i) un cône maximal ν de π-profil de multiplicité maximal,

(ii) une face γ de codimension 1 de ν, de π-multiplicité maximale, codéfinie par rapport à ν.

Choisissons alors τ une face de γ (donc codéfinie par rapport à ν), π-singulière de dimension minimale, $v \in \mathrm{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N_{\mathbf{Q}}^{+}$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$.

Le problème à ce stade est que τ, qui est codéfinie par rapport à ν, ne l'est en général pas par rapport aux autres cônes maximaux qui la contiennent.

Étape 2. — Enonçons la proposition suivante, dont la démonstration sera donnée à la fin de ce paragraphe :

PROPOSITION 6.7. — *Soit Σ un éventail de N^{+}, σ un circuit de Σ. Soit τ dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$, π-indépendante. Alors il y a une subdivision de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$, notée $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$, obtenue par une suite finie de subdivisions étoilées positives ou négatives par rapport à des circuits successifs contenus dans σ telle que :*

(i) $\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$,

(ii) *τ est une face de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ (i.e. τ n'est pas affectée par les subdivisions) et τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ qui la contiennent.*

Appliquons cette proposition de la façon suivante à notre situation : on considère l'ensemble des circuits σ' différents de celui contenu dans ν tels que τ est contenu dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma')}$ et on applique la proposition précédente à chacun d'eux (le résultat obtenu ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a considéré les différents σ').

Le bilan de l'Étape 2 est alors le suivant : nous avons construit un éventail Σ'', obtenu par une suite de subdivisions étoilées de Σ vérifiant $\pi\text{-mp}(\Sigma'') \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma)$, avec

(i) un cône maximal ν de π-profil de multiplicité maximal,

(ii) une face γ de codimension 1 de ν, de π-multiplicité maximale, codéfinie par rapport à ν,

(iii) une face τ de γ (donc codéfinie par rapport à ν), π-singulière de dimension minimale, $v \in \mathrm{par}(\pi(\tau))$ et $\rho \in N_{\mathbf{Q}}^{+}$ dans l'intérieur relatif de τ tel que $\pi(\rho) = v$. *De plus, τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de Σ'' qui la contiennent.*

Étape 3. — On note Σ_1 l'éventail obtenu par subdivision étoilée de Σ'' par rapport à ρ. Comme τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de Σ'' qui la contiennent, on a $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) \leqslant \pi\text{-mp}(\Sigma'')$ d'après la proposition 6.2, et puisque τ est contenue dans une face γ de π-multiplicité maximale, on a en fait $\pi\text{-mp}(\Sigma_1) < \pi\text{-mp}(\Sigma'')$, ce qui termine la démonstration du théorème de π-désingularisation. $\square$

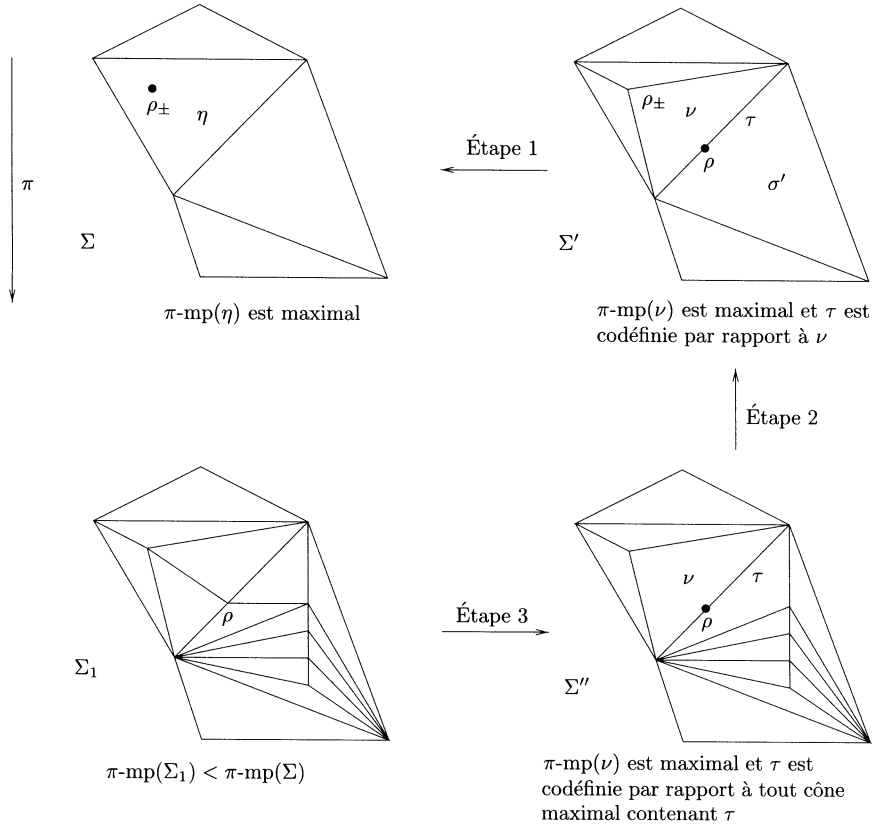

FIGURE 4. Le théorème de π-désingularisation

Démonstration de la proposition 6.7. — Si $\dim(\sigma) \leqslant 2$, il n'y a rien à faire : τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ qui la contiennent. On suppose dorénavant que $\dim(\sigma) > 2$.

Si π-mult$(\sigma) = 1$, remarquons que si η est un cône maximal contenant σ, alors toutes les faces de codimension un π-indépendantes de η ont même π-multiplicité. Soit $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+$ la subdivision étoilée positive de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ par rapport à σ. Alors $\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+) \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$ par le lemme 6.6 et la face τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}^+$ qui la contiennent d'après le lemme 6.4.

La démonstration de la proposition 6.7 se fait alors par récurrence sur π-mult(σ) : subdivisons une première fois $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ à l'aide de la proposition 6.5. On a

$$\pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}') \leqslant \pi\text{-mp}(\overline{\mathrm{Star}(\sigma)})$$

par le lemme 6.6.

Si le cas A) de la proposition 6.5 se produit, les circuits contenus dans $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}'$ sont tous de π-multiplicité strictement inférieure à celle de σ et on conclut par l'hypothèse de récurrence.

Si le cas B) de la proposition 6.5 se produit, seul le circuit $\overline{\sigma}$ contenu dans κ' pose un problème *a priori* car on ne peut pas lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Mais si τ est face d'un cône maximal contenant κ', alors $\tau \cap \sigma$ est incluse dans γ'. En effet : écrivons $\sigma = \langle \rho_1, \ldots, \rho_k \rangle$ et quitte à renuméroter les ρ_i, on peut supposer que $\tau = \langle \rho_l, \ldots, \rho_k, \ldots, \rho_m \rangle$ pour certains indices l et m tels que $2 \leqslant l \leqslant k$ et $m \geqslant k$ (si $\tau \cap \sigma = \varnothing$, alors τ est codéfinie par rapport à tous les cônes maximaux de $\overline{\mathrm{Star}(\sigma)}$ qui la contiennent). Le cône κ' est de la forme $\langle \rho, \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_k \rangle$ pour un certain i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$ et alors $\gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_k \rangle$. Comme τ est face d'un cône maximal contenant κ', on a $i \leqslant l-1$, c'est-à-dire $\gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle$ donc

$$\tau \cap \sigma = \langle \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle \subset \gamma' = \langle \rho_1, \ldots, \check{\rho}_i, \ldots, \rho_l, \ldots, \rho_k \rangle.$$

Finalement, comme γ' est codéfinie par rapport à κ', τ est codéfinie par rapport à tout cône maximal contenant $\overline{\sigma}$. □

RÉFÉRENCES

[AKMW99] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk – *Torification and factorization of birational maps.* J. Amer. Math. Soc. 15, no. 3, (531-572) 2002. Preprint `math.AG/9904135`, 1999.

[AMR99] D. Abramovich, K. Matsuki, S. Rashid – *A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension.* Tohoku Math. J. (2), 51, no. 4, (489-537) 1999.

[AbO97] D. Abramovich, F. Oort – *Alterations and resolution of singularities.* In *Resolution of Singularities,* Progr. Math. 181, Birkhäuser, (39-108) 2000.

[BaR85] P. Bardsley, R.W. Richardson – *Etale slices for algebraic transformation groups in characteristic p.* Proc. London Math. Soc. (3), 51, (295-317) 1985.

[BiM97] E. Bierstone, P. Milman – *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant.* Invent. Math. 128 (2), (207-302) 1997.

[BPV84] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven – *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 4, Springer-Verlag, 1984.

[BrP90] M. Brion, C. Procesi – *Action d'un tore dans une variété projective.* In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989),* Progr. Math. 92, Birkhäuser, (509-539) 1990.

[DCP85] C. De Concini, C. Procesi – *Complete Symmetric Varieties II.* In Algebraic Groups and Related Topics (R. Hotta, ed.), Adv. Studies in Pure Math. 6, (481-513) 1985.

[EnV97] S. Encinas, O. Villamayor – *Constructive desingularization.* In *Resolution of Singularities,* Progr. Math., 181, Birkhäuser, (39-108) 2000.

[Ewa96] G. Ewald – *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 168, Springer-Verlag, 1996.

[Ful84] W. Fulton – *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag, 1984.

[Ful93] W. Fulton – *Introduction to toric varieties.* Annals of mathematics studies, 131, Princeton University Press, 1993.

[GuS89] V. Guillemin, S. Sternberg – *Birational equivalence in the symplectic category.* Invent. Math. 97, No. 3, (485-522) 1989.

[Har77] R. Hartshorne – *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, 1977.

[Hir64] H. Hironaka – *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* Annals of Math. vol 79, (109-326) 1964.

[Hir75] H. Hironaka – *Flattening theorem in complex analytic geometry.* Amer. J. of Math. vol. 97, no. 2, (503-547) 1975.

[KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat – *Toroidal embeddings I.* Lecture Notes in Mathematics, 339, Springer-Verlag, 1973.

[Lun73] D. Luna – *Slices étales.* Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mem. No. 33, (81-105) 1973.

[Mat99] K. Matsuki – *Lectures on factorization of birational maps.* RIMS preprint `math.AG/0002084`, 2000.

[Mat00] K. Matsuki – *Correction : "A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension".* Tohoku Math. J. (2), 52, no. 4, (629-631) 2000.

[Moi67] B. Moishezon – *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions.* Amer. Math. Soc. Trans. 63, (51-177) 1967.

[Mor96] R. Morelli – *The birational geometry of toric varieties.* J. Alg. Geom. 5, (751-782) 1996.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan – *Geometric Invariant Theory (Third Enlarged Edition).* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 034, Springer-Verlag, 1994.

[Oda88] T. Oda – *Convex bodies and algebraic geometry : an introduction to the theory of toric varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 015, Springer-Verlag, 1988.

[Sum74] H. Sumihiro – *Equivariant Completion I.* J. Math. Kyoto Univ. 14, (1-28) 1974.

[Sum75] H. Sumihiro – *Equivariant Completion II.* J. Math. Kyoto Univ. 15, (573-605) 1975.

[Vil89] O. VILLAMAYOR – *Constructiveness of Hironaka's resolution.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 22, no. 1, (1-32) 1989.

[Wlo97] J. WŁODARCZYK – *Decomposition of birational toric maps in blow-ups and blow-downs. A proof of the weak Oda conjecture.* Transactions of the AMS 349, (373-411) 1997.

[Wlo00] J. WŁODARCZYK – *Birational cobordism and factorization of birational maps.* J. Alg. Geom. 9, no. 3, (425-449) 2000.

[Wlod99] J. WŁODARCZYK – *Combinatorial structures on toroidal varieties and a proof of the weak factorization theorem.* Preprint `math.AG/9904076`, 1999.

Laurent BONAVERO

Université Grenoble I
Institut Fourier
Lab. de Mathématiques Pures
URA 5582 du CNRS
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : `bonavero@ujf-grenoble.fr`