Astérisque

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires

Astérisque, tome 276 (2002), Séminaire Bourbaki, exp. n° 866, p. 29-51
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1999-2000__42__29_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1999
52e année, 1999-2000, nO 866, p. 29 à 51

EXPOSANTS CRITIQUES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN ET LES MARCHES ALÉATOIRES [d'après Kenyon, Lawler et Werner]

par **Jean-François LE GALL**

INTRODUCTION

Cet exposé présente plusieurs travaux récents qui étudient certains exposants asymptotiques pour le mouvement brownien ou les marches aléatoires dans le plan. La première partie, issue des articles de Lawler et Werner, est consacrée aux exposants d'intersection, qui donnent l'ordre de grandeur de la probabilité pour deux ou plusieurs trajectoires de mouvements browniens, ou de marches aléatoires, de ne pas se rencontrer sur un intervalle de temps long. Si l'existence de ces exposants et parfois leurs valeurs exactes ont été prédites depuis longtemps par les physiciens théoriciens, leur construction rigoureuse ne date que de quelques années, et c'est seulement avec les travaux récents de Lawler et Werner que leur étude mathématique a connu des progrès vraiment significatifs. Un pas décisif a été l'obtention de relations « en cascade » entre les différents exposants (Théorème 1.3). Ces relations permettent ensuite de montrer que la classe importante des exposants dans un demi-espace peut s'écrire en termes d'une seule fonction réelle U pour laquelle on dispose d'une conjecture très plausible. La fonction U possède une propriété d'universalité remarquable puisqu'elle apparaît dès que l'on cherche à définir des exposants asymptotiques pour des mesures définies sur une classe de sous-ensembles compacts du plan et vérifiant une propriété convenable d'invariance conforme (Théorème 1.7). Après la soumission de la première version de cet exposé, nous avons reçu un travail tout récent de Lawler, Schramm et Werner [26] qui résout certaines des conjectures relatives aux exposants d'intersection (une brève discussion de ces derniers résultats est donnée à la fin de la première partie).

La deuxième partie a pour objectif principal de présenter un résultat de Kenyon (Théorème 2.1) donnant la valeur exacte de l'exposant de croissance de la marche aléatoire à boucles effacées dans le plan. La marche aléatoire à boucles effacées est un chemin aléatoire auto-évitant (i.e. sans auto-intersection) et est à ce titre un objet d'intérêt pour les physiciens théoriciens qui étudient les modèles de polymères. Le calcul de l'exposant de croissance applique des méthodes que Kenyon a développées pour

l'étude asymptotique du nombre de pavages par dominos de certains sous-ensembles du plan, lorsque le pas du réseau devient petit. Un résultat significatif de Kenyon dans cette direction figure aussi à la fin de cet exposé (Théorème 2.7). Ce résultat est susceptible de plusieurs interprétations, puisque les pavages par dominos des régions considérées sont en bijection avec les arbres couvrants du graphe associé, et qu'on sait depuis Kirchhoff que le nombre d'arbres couvrants est égal au produit des valeurs propres non nulles du Laplacien discret sur le graphe.

Les deux parties sont indépendantes, et les techniques impliquées sont très différentes. Cependant il existe des liens étroits entre les objets étudiés : l'article de Lawler et Werner qui fournit l'essentiel de la matière de la première partie donne aussi des conjectures précises sur le comportement asymptotique de la marche aléatoire à boucles effacées. En outre, les propriétés d'invariance conforme, pour les trajectoires browniennes dans la première partie ou la fonction de couplage asymptotique dans la seconde, jouent un rôle fondamental dans tout l'exposé.

1. EXPOSANTS D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN

1.1. La définition des exposants

Soient des entiers $k \geq 2$ et $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ et soit une famille $(B_j^i; 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n_i)$ de $n_1 + \cdots + n_k$ mouvements browniens plans indépendants, dont le point de départ est uniformément distribué sur le cercle unité. Pour tout $R > 1$, soit

$$T_j^i(R) = \inf\{t \geq 0 : |B_j^i(t)| = R\}$$

le temps de sortie du mouvement brownien B_j^i hors du disque de rayon R centré en l'origine. Pour $a \geq 0$ on note $B_j^i[0,a] = \{B_j^i(t); 0 \leq t \leq a\}$ l'ensemble des points visités par B_j^i sur l'intervalle de temps $[0,a]$.

PROPOSITION 1.1. — *Il existe un réel $\zeta(n_1, \ldots, n_k) > 0$, tel que, pour $R \to \infty$,*

$$(1) \quad P\Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i[0, T_j^i(R)]\Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n_{i'}} B_j^{i'}[0, T_j^{i'}(R)]\Big) = \varnothing, \text{ pour tous } i \neq i'\Big] \approx R^{-\zeta(n_1,\ldots,n_k)}.$$

La notation $f(R) \approx g(R)$ signifie que $\frac{\log f(R)}{\log g(R)} \longrightarrow 1$ quand $R \to \infty$.

Le nombre $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ est appelé *exposant d'intersection* pour k paquets de respectivement $n_1, \ldots, n_k$ mouvements browniens plans. La première construction mathématique de ces exposants est due à Burdzy et Lawler [2] (voir aussi [6]).

Esquissons la preuve de la proposition. Soient z_j^i, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n_i$ des points du cercle unité. Écrivons $P^{(z_j^i)}$ pour la probabilité sous laquelle les processus B_j^i sont des mouvements browniens plans indépendants et B_j^i part de z_j^i. Soit $\mathcal{A}_R$ l'événement

$$\mathcal{A}_R = \Big\{ \Big(\bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i[0, T_j^i(R)] \Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n_{i'}} B_j^{i'}[0, T_j^{i'}(R)] \Big) = \varnothing, \text{ pour tous } i \neq i' \Big\}.$$

Posons

$$f(R) = \sup_{(z_j^i)} P^{(z_j^i)}(\mathcal{A}_R),$$

où le supremum porte sur tous les choix possibles de familles (z_j^i) de points sur le cercle unité. Une application de la propriété de Markov forte du mouvement brownien, puis de la propriété d'invariance par changement d'échelle, montre que, pour tous $R, R' > 1$,

$$f(RR') \leq f(R) f(R').$$

Donc $\log f$ est fonction sous-additive de $\log R$, et la limite

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\log f(R)}{\log R} = -\zeta(n_1, \ldots, n_k)$$

existe. Des estimations simples montrent que $0 < \zeta(n_1, \ldots, n_k) < \infty$ (pour voir que $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ est fini, on observe que $\mathcal{A}_R$ est réalisé dès que les k paquets de mouvements browniens sont contenus dans des cônes disjoints basés en l'origine).

Il est ensuite facile d'obtenir l'énoncé de la proposition. La quantité $P(\mathcal{A}_R)$ qui figure à gauche dans (1) est évidemment majorée par $f(R)$. Inversement, si on observe que la loi du point d'atteinte par B_j^i du cercle de rayon 2 centré en 0 est majorée par une constante fois la probabilité uniforme sur ce cercle, on obtient aisément l'estimation $f(2R) \leq C\, P(\mathcal{A}_R)$, C étant une constante indépendante de R.

Remarque 1.2. — Modulo un certain travail technique, on peut remplacer les temps de sortie de grands disques centrés en l'origine par des instants déterministes qu'on fait tendre vers l'infini. Par exemple, on peut définir l'exposant $\zeta(1,1)$ en disant que si B et B' sont deux mouvements browniens plans indépendants issus de points distincts, on a

$$P[B[0,t] \cap B'[0,t] = \varnothing] \approx t^{-\zeta(1,1)/2}$$

quand $t \to \infty$. On peut aussi [2] remplacer les mouvements browniens par des marches aléatoires : si S et S' sont deux marches aléatoires simples (i.e. à plus proches voisins) indépendantes dans $\mathbb{Z}^2$, issues de points distincts, on a

$$P[\{S_k; 0 \leq k \leq n\} \cap \{S'_k; 0 \leq k \leq n\} = \varnothing] \approx n^{-\zeta(1,1)/2}$$

quand $n \to \infty$. La définition des exposants qui résulte de la Proposition 1.1 est cependant la plus facile à justifier.

Dans toute la classe des exposants $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ un seul a pu être calculé exactement : $\zeta(2,1) = 2$. Cependant, Lawler et Werner [24] ont montré qu'il existe des relations remarquables et inattendues entre ces exposants. L'objectif principal des paragraphes qui suivent est d'expliquer la démarche qui conduit à ces relations. Parallèlement, nous donnerons aussi certains résultats qui justifient l'importance du calcul des exposants.

Un rôle crucial dans l'approche de [24] est joué par une seconde classe d'exposants, les exposants d'intersection dans un demi-plan. Soit $H = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. Des arguments très semblables à ceux de la preuve précédente montrent que

$$P[\mathcal{A}_R \cap \{B^i_j[0, T^i_j(R)] \subset H \text{ pour tous } i, j\}] \approx R^{-\xi(n_1,\ldots,n_k)}$$

avec un exposant $\xi(n_1, \ldots, n_k) \geq \zeta(n_1, \ldots, n_k)$. Remarquons que cela a un sens de définir l'exposant ξ lorsque $k = 1$ (alors $\mathcal{A}_R$ n'intervient pas), et des estimations faciles montrent que $\xi(n_1) = n_1$.

Bien qu'il n'y ait jusqu'à présent pas de calcul mathématique rigoureux des exposants, les physiciens théoriciens ont proposé des valeurs exactes pour certains d'entre eux. Sur la base de simulations et de considérations non-rigoureuses de théorie des champs conforme, Duplantier et Kwon [11] (voir aussi [12]) ont conjecturé que

$$\xi(1^{\otimes k}) = \frac{k(2k+1)}{3}\ , \quad \zeta(1^{\otimes k}) = \frac{4k^2 - 1}{12}\ ,$$

où $\alpha^{\otimes k}$ désigne le k-uplet dont toutes les composantes sont égales à α. Bien que la valeur donnée ci-dessus pour ζ lorsque $k = 1$ ($\zeta(1) = \frac{1}{4}$) n'ait a priori pas de sens, Duplantier a suggéré que cette valeur correspond à l'exposant de disconnexion que nous introduirons plus loin. Après avoir eu connaissance du travail de Lawler et Werner [24], Duplantier [8],[9] a justifié et étendu les conjectures précédentes dans le cadre (non rigoureux pour les mathématiciens) de la théorie de la gravité quantique.

1.2. L'extension aux valeurs réelles des paramètres

Dans ce paragraphe, nous montrons comment on étend la définition des exposants ζ ou ξ au cas où certains des paramètres $n_1, \ldots, n_k$ prennent des valeurs réelles. Par souci de simplicité, nous définissons d'abord $\zeta(1, \lambda)$ pour tout $\lambda \geq 0$. Nous considérons deux mouvements browniens plans B et W partant comme ci-dessus d'un point uniformément réparti sur le cercle unité, définis respectivement sous les probabilités P et P'. Notons T_R, resp. S_R, pour le temps d'atteinte par B, resp. W, du cercle de rayon R. Par définition,

$$P \otimes P'[B[0, T_R] \cap W[0, S_R] = \varnothing] \approx R^{-\zeta(1,1)}.$$

En intégrant d'abord par rapport à P', on peut aussi écrire

$$P \otimes P'[B[0, T_R] \cap W[0, S_R] = \varnothing] = E[Z_R(B)]$$

où $Z_R(B) = P'[B[0,T_R] \cap W[0,S_R] = \varnothing]$ est une fonction du mouvement brownien B (en fait de l'ensemble aléatoire $B[0,T_R]$). Si W est un autre mouvement brownien plan défini sous P' (indépendant de W et avec la même loi de départ), le même argument montre aussi que

$$E[Z_R(B)^2] = P \otimes P'[B[0,T_R] \cap (W[0,S_R] \cup \tilde{W}[0,\tilde{S}_R]) = \varnothing] \approx R^{-\zeta(1,2)}$$

et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$,

$$E[Z_R(B)^n] \approx R^{-\zeta(1,n)}.$$

Ceci suggère de définir pour tout *réel* $\lambda \geq 0$ l'exposant $\zeta(1,\lambda)$ par :

$$E[Z_R(B)^\lambda] \approx R^{-\zeta(1,\lambda)},$$

avec la convention inhabituelle que lorsque $\lambda = 0$, $0^0 = 0$. Un argument de sous-additivité montre à nouveau qu'il existe un tel exposant $\zeta(1,\lambda)$.

La même idée permet pour tout entier $k \geq 1$, pour tous les entiers $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ et tous les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$, de définir un exposant $\zeta(n_1, \lambda_1, \ldots, n_k, \lambda_k)$ qui étend la définition précédente. Remarquons qu'il est (pour l'instant) nécessaire d'alterner entre valeurs réelles et entières des paramètres. En effet, on conditionne d'abord par rapport aux k paquets de respectivement $n_1, \ldots, n_k$ mouvements browniens, puis on considère k variables $Z_R^1, \ldots, Z_R^k$ qui sont (toutes) non nulles seulement sur l'ensemble où les k paquets sont d'intersection vide deux à deux, et de plus sont ordonnés dans le sens trigonométrique autour de l'origine. La variable Z_R^i est alors la probabilité conditionnelle qu'un mouvement brownien indépendant reste « entre le i-ième et le $i+1$-ième paquet » jusqu'au temps d'atteinte du rayon R. Finalement, l'exposant $\zeta(n_1, \lambda_1, \ldots, n_k, \lambda_k)$ est défini par

$$E[(Z_R^1)^{\lambda_1} \cdots (Z_R^k)^{\lambda_k}] \approx R^{-\zeta(n_1,\lambda_1,\ldots,n_k,\lambda_k)}.$$

Une extension analogue vaut pour le cas des exposants ξ dans un demi-espace. En fait pour ces exposants il est naturel de définir $\xi(\lambda_0, n_1, \lambda_1, \ldots, n_k, \lambda_k)$ pour $n_1, \ldots, n_k$ entiers (non-nuls) et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ réels positifs. La méthode est exactement celle décrite ci-dessus, mais on impose aux paquets de mouvements browniens de rester dans le demi-plan supérieur H et en plus de $Z_R^1, \ldots, Z_R^k$, on introduit aussi Z_R^0 qui est la probabilité pour un mouvement brownien indépendant de rester (jusqu'au temps d'atteinte du rayon R) entre la demi-droite réelle positive et le premier paquet de n_1 mouvements browniens. Par convention on prend $\xi(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \geq 0$, ce qui est cohérent avec le cas où λ est entier.

On notera dans la suite $\xi(1,\lambda) = \xi(0,1,\lambda)$.

1.3. Propriétés trajectorielles du mouvement brownien

Avant d'aller plus loin, expliquons pourquoi le calcul des exposants est important en liaison avec l'étude de la trajectoire brownienne. Remarquons d'abord que les exposants $\zeta(p,0)$, pour p entier strictement positif, ont une interprétation remarquable.

En effet, avec les notations ci-dessus, on a

$$P[Z_R(B) > 0] \approx R^{-\zeta(1,0)}.$$

Or l'événement $\mathcal{B}_R = \{Z_R(B) > 0\}$ est réalisé ssi la trajectoire $B[0, T_R]$ ne disconnecte pas le cercle unité de l'infini. On appelle donc $\zeta(1,0)$ l'exposant de disconnexion pour une trajectoire brownienne. On a une interprétation analogue pour $\zeta(p,0)$, qui est l'exposant de disconnexion pour p trajectoires browniennes indépendantes. Lawler a montré que ces exposants sont liés à une conjecture fameuse de Mandelbrot [28] sur la dimension de Hausdorff du contour de la courbe brownienne. Le contour, noté $\mathcal{C}$, de $B[0,1]$ est par définition la frontière de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash B[0,1]$. La conjecture de Mandelbrot est $\dim \mathcal{C} = \frac{4}{3}$, et Lawler [22] a montré que

$$\dim \mathcal{C} = 2 - \zeta(2,0)$$

(un premier résultat dans cette direction avait été obtenu dans [3]). L'idée de la preuve est relativement simple : si $z = B_t$, avec $t \in]0,1[$, est un point de $\mathcal{C}$, la courbe de B considérée avant et après l'instant t fournit localement deux trajectoires browniennes indépendantes issues de z qui ne disconnectent pas le point z de l'infini.

Un second lien entre exposants d'intersection et propriétés trajectorielles de la courbe brownienne concerne les points de coupure. Un point $z \in \mathbb{C}$ est appelé point de coupure de B si $z = B_s$ pour une valeur de $s \in]0,1[$ telle que $B[0,s] \cap B[s,1] = \{B_s\}$. Si $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des points de coupure, Lawler [21] a montré que

$$\dim \mathcal{D} = 2 - \zeta(1,1).$$

Voir encore [4] pour d'autres applications des exposants d'intersection.

1.4. Les relations en cascade

THÉORÈME 1.3 ([24]). — *Soient $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ des entiers et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels positifs. Alors, pour tout entier $j \in \{1, \ldots, k-1\}$,*

$$\xi(\lambda_0, n_1, \lambda_1, \ldots, n_k, \lambda_k) = \xi(\lambda_0, n_1, \lambda_1, \ldots, n_j, \xi(\lambda_j, n_{j+1}, \lambda_{j+1}, \ldots, n_k, \lambda_k))$$

et

$$\zeta(n_1, \lambda_1, \ldots, n_k, \lambda_k) = \zeta(n_1, \lambda_1, \ldots, n_j, \xi(\lambda_j, n_{j+1}, \lambda_{j+1}, \ldots, n_k, \lambda_k)).$$

Remarque 1.4. — La première relation ne met en jeu que les exposants ξ, alors que la seconde mélange ξ et ζ. D'une certaine manière, les exposants dans un demi-espace sont plus fondamentaux.

PREUVE (esquisse) — Nous allons traiter en détail un cas particulier du théorème, à savoir la relation $\xi(1,1,1) = \xi(1, \xi(1,1))$. Les mêmes arguments montreraient aussi bien l'égalité $\zeta(1,1,1) = \zeta(1, \xi(1,1))$, et la preuve de la forme générale des relations en cascade repose sur des idées très semblables.

Nous considérons trois mouvements browniens plans indépendants W, B, B' issus respectivement de y, z_1, z_2 avec $y = e^{i\gamma}$, $z_1 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = e^{i\theta_2}$, où $0 < \gamma < \theta_1 < \theta_2 < \pi$.

Par commodité, nous supposerons que W, B, B' sont en fait des mouvements browniens conditionnés à atteindre le cercle de rayon R avant de pénétrer dans le disque unité ouvert (bien qu'il s'agisse d'un conditionnement par un ensemble de probabilité nulle, on vérifie assez facilement que les exposants peuvent être définis aussi bien en termes de ces processus conditionnés). On a alors, avec des notations évidentes

$$P\big[W[0,S_R]\cap B[0,T_R]=\varnothing,\quad B[0,T_R]\cap B'[0,T'_R]=\varnothing,\\ W[0,S_R]\subset H,\quad B[0,T_R]\subset H,\quad B'[0,T'_R]\subset H\big]\approx R^{-\xi(1,1,1)}.$$

Observer que l'événement $\{W[0,S_R]\cap B'[0,T'_R]=\varnothing\}$ est automatiquement réalisé sur l'ensemble que nous considérons.

Nous allons maintenant conditionner par rapport à la trajectoire $W[0,S_R]$ (en supposant que $W[0,S_R]\subset H$). Notons $H_R=\{z\in H : 1<|z|<R\}$ et U_R la composante connexe de $H_R\backslash W[0,S_R]$ dont la frontière contient z_1 et z_2. Alors,

$$\begin{aligned}&P\big[W[0,S_R]\cap B[0,T_R]=\varnothing,\quad B[0,T_R]\cap B'[0,T'_R]=\varnothing,\\ &\qquad W[0,S_R]\subset H,\quad B[0,T_R]\subset H,\quad B'[0,T'_R]\subset H\big]\\ &=E\left[1_{\{W[0,S_R]\subset H\}}\,P\big[B[0,T_R]\cap B'[0,T_R]=\varnothing, B[0,T_R]\subset U_R, B'[0,T'_R]\subset U_R\mid W\big]\right].\end{aligned}$$

On peut trouver un réel $L_R>1$ (dépendant de U_R et donc de W) et une bijection conforme φ de U_R sur H_{L_R}, qui se prolonge par continuité à $\bar{U}_R$, de telle manière que :

- φ envoie $\partial^1 U_R:=\{z\in\partial U_R : |z|=1\}$ sur $\partial^1 H_{L_R}:=\{z\in\partial H_{L_R} : |z|=1\}$;
- φ envoie $\partial^2 U_R:=\{z\in\partial U_R : |z|=R\}$ sur $\partial^2 H_{L_R}:=\{z\in\partial H_{L_R} : |z|=L_R\}$.

Le nombre L_R s'interprète en termes de la distance extrémale entre $\partial^1 U_R$ et $\partial^2 U_R$ dans U_R, voir [1].

L'invariance conforme du mouvement brownien plan montre alors que la probabilité conditionnelle

$$P\big[B[0,T_R]\cap B'[0,T_R]=\varnothing, B[0,T_R]\subset U_R, B'[0,T'_R]\subset U_R\mid W\big]$$

est égale à la probabilité que deux mouvements browniens indépendants issus de $\partial^1 H_{L_R}$ ne se rencontrent pas et ne quittent pas H_{L_R} avant d'atteindre le cercle de rayon L_R. Par définition des exposants dans un demi-espace, nous savons que cette probabilité se comporte comme $L_R^{-\xi(1,1)}$.

De même par invariance conforme, la quantité

$$P\big[B[0,T_R]\subset U_R\mid W\big]$$

est égale à la probabilité qu'un mouvement brownien issu de $\partial^1 H_{L_R}$ ne quitte pas H_{L_R} avant d'atteindre le cercle de rayon L_R. Une estimation facile montre que cette probabilité se comporte comme L_R^{-1}.

En mettant bout à bout les considérations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} R^{-\xi(1,1,1)} &\approx E\big[1_{\{W[0,S_R]\subset H\}} L_R^{-\xi(1,1)}\big] \\ &\approx E\big[1_{\{W[0,S_R]\subset H\}} P\big[B[0,T_R]\subset U_R \mid W\big]^{\xi(1,1)}\big] \\ &\approx R^{-\xi(1,\xi(1,1))} \end{aligned}$$

où la dernière ligne découle directement de la définition des exposants $\xi(1,\lambda) = \xi(0,1,\lambda)$ pour λ réel. On obtient la relation $\xi(1,1,1) = \xi(1,\xi(1,1))$ comme annoncé. □

En utilisant aussi un argument de symétrie, on déduit assez facilement du Théorème 1.3 des *relations de commutation* pour les exposants d'intersection. Par exemple, pour toutes permutations ρ et σ de $\{1,\dots,k\}$, on a

$$\zeta(n_1,\lambda_1,\dots,n_k,\lambda_k) = \zeta(n_{\rho(1)},\lambda_{\sigma(1)},\dots,n_{\rho(k)},\lambda_{\sigma(k)}),$$

et on a un énoncé analogue pour les exposants ξ.

1.5. Le théorème principal

Les relations en cascade permettent d'étendre la définition des exposants à toutes les valeurs réelles des exposants. Commençons par le cas des exposants dans un demi-espace. On montre que la fonction $\lambda \to \xi(1,\lambda)$ est strictement croissante et continue de $[0,\infty[$ sur $[1,\infty[$ (la continuité sur $]0,\infty[$ découle du fait que cette fonction est concave). Alors, si α et α' sont deux réels positifs quelconques, on définit $\xi(\alpha,\alpha')$ comme étant l'unique réel positif tel que $\xi(1,\xi(\alpha,\alpha')) = \xi(\alpha,1,\alpha')$ (ce choix est forcé si l'on veut conserver les relations de commutation et les relations en cascade décrites ci-dessus). Puis on définit simplement par récurrence

$$\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \xi(\alpha_1,\xi(\alpha_2,\dots,\alpha_k))$$

pour tous *réels* $\alpha_1,\dots,\alpha_k \geq 0$. Il est ensuite possible de vérifier que cette définition est cohérente avec le cas où les α_j sont entiers, puis que les relations en cascade $(\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \xi(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\xi(\alpha_{j+1},\dots,\alpha_k)))$ ainsi que les relations de commutation $(\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \xi(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(k)}))$ sont valides.

On procède (presque) de même pour les exposants ζ. Il y a cependant une difficulté. On ne définit $\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, pour $k \geq 2$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ réels positifs, que si deux au moins des nombres α_i sont supérieurs ou égaux à 1. Si $\alpha_j \geq 1$, on définit β_j par la relation $\alpha_j = \xi(1,\beta_j)$ puis on pose

$$\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \zeta(1,\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\beta_j,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_k)).$$

La condition que deux des nombres α_i sont supérieurs ou égaux à 1 intervient pour montrer que cette définition de $\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ est bien cohérente avec celle introduite précédemment. Les relations en cascade

$$\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\xi(\alpha_{j+1},\dots,\alpha_k))$$

et les relations de commutation

$$\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\zeta(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(k)})$$

restent vraies.

THÉORÈME 1.5 ([24]). — *Il existe une fonction* $U:[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[$ *continue et strictement croissante, avec* $U(0)=0$, $U(\infty)=\infty$, *telle que, pour tous* $k\geq 1$ *et* $\alpha_1,\dots,\alpha_k\geq 0$,

$$\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=U^{-1}\big(U(\alpha_1)+\cdots+U(\alpha_k)\big).$$

De plus, il existe une fonction croissante continue $\eta:[\xi(1,1),\infty[\longrightarrow[0,\infty[$ *telle que, pour tout entier* $k\geq 2$ *et tous* $\alpha_1,\dots,\alpha_k\geq 0$ *avec* $\alpha_1\geq 1$ *et* $\alpha_2\geq 1$, *on a*

$$\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\eta(\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k)).$$

La fonction U peut être obtenue par la formule

$$U^2(\alpha)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\xi(\alpha^{\otimes N}).$$

La preuve de la première partie du théorème utilise fortement les relations en cascade entre les exposants. Un autre ingrédient important est le comportement asymptotique de l'exposant d'intersection pour k paquets de mouvements browniens, lorsque le nombre de mouvements browniens à l'intérieur de chaque paquet tend vers l'infini [33].

L'expression de ξ en fonction de ζ est une conséquence presque directe des relations en cascade. Rappelons que la fonction $\kappa(\lambda)=\xi(1,\lambda)$ est bijective de $[0,\infty[$ sur $[1,\infty[$ et, en supposant $\alpha_1\geq 1$ notons $\beta_1=\kappa^{-1}(\alpha_1)$. Alors, en utilisant d'abord la construction donnée ci-dessus de $\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, puis en appliquant deux fois les relations en cascade, on a

$$\begin{aligned}\zeta(\alpha_1,\dots,\alpha_k) &= \zeta(1,\xi(\beta_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k))\\ &= \zeta(1,\kappa^{-1}(\xi(1,\beta_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)))\\ &= \zeta(1,\kappa^{-1}(\xi(\alpha_1,\dots,\alpha_k)))\,,\end{aligned}$$

ce qui donne la dernière formule du théorème avec $\eta(\lambda)=\zeta(1,\kappa^{-1}(\lambda)))$.

REMARQUE. Du point de vue de la physique théorique [8],[9], les formules du Théorème 1.5 trouvent une interprétation dans le cadre de la théorie (non rigoureuse) de la gravité quantique. À titre d'exemple, la fonction U^{-1} est la transformation qui fait passer les exposants du demi-plan « quantique » (où les exposants ont une structure additive) vers le demi-plan « standard ».

1.6. Conjectures

Les prédictions de [11] pour les valeurs des exposants $\zeta(1^{\otimes N})$ et $\xi(1^{\otimes N})$ conduisent à conjecturer les formes explicites suivantes pour les fonctions U et η qui interviennent dans le Théorème 1.5 :

$$U(x) = \frac{\sqrt{24x+1}-1}{\sqrt{24}}\ , \qquad \eta(\alpha) = \frac{(\sqrt{24\alpha+1}-1)^2-4}{48}\ .$$

Il est très plausible que la dernière formule du Théorème 1.5 reste vraie sous la seule condition que $\max(\alpha_i) \geq 1$ (qui est nécessaire pour définir $\zeta(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$). En particulier on devrait avoir, pour tout entier $p \geq 1$, $\zeta(p,0) = \eta(\xi(p,0)) = \eta(p)$, et la fonction η s'interprèterait comme un exposant de disconnexion généralisé. La valeur $\eta(1) = \frac{1}{4}$ est bien cohérente avec les prédictions de Duplantier et Kwon [11]. De même la valeur $\eta(2) = \frac{2}{3}$ est cohérente avec la conjecture de Mandelbrot sur la dimension de Hausdorff du contour $\mathcal{C}$ de la courbe brownienne.

Les conjectures pour U et η et le Théorème 1.5 conduisent aux valeurs suivantes pour les exposants ζ et ξ :

$$\zeta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \frac{(\sqrt{24\alpha_1+1}+\cdots+\sqrt{24\alpha_k+1}-k)^2-4}{48}$$

$$\xi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \frac{(\sqrt{24\alpha_1+1}+\cdots+\sqrt{24\alpha_k+1}-(k-1))^2-1}{24}.$$

Il est rassurant de voir qu'on retrouve la seule valeur connue $\zeta(2,1) = 2$!

1.7. Prolongements

Très récemment, Lawler et Werner [25] ont montré une propriété d'universalité remarquable des exposants ξ, ou de manière équivalente de la fonction U du Théorème 1.5. Ces exposants interviennent non seulement dans l'étude des trajectoires browniennes mais bien plus généralement dès que l'on s'intéresse à des mesures définies sur une certaine classe de sous-ensembles compacts du disque unité et vérifiant une propriété d'invariance conforme. Dans ce paragraphe, nous donnons une présentation succincte d'un résultat majeur de [25].

On note D le disque unité ouvert dans le plan. Un *pont* est par définition un sous-ensemble compact K simplement connexe de $\bar{D}$ tel que $\partial K \cap \partial D$ a exactement deux composantes connexes. Le pont est *orienté* lorsque l'on a choisi l'une de ces deux composantes connexes, qui sera notée $d_1 = d_1(K)$, l'autre étant $d_2 = d_2(K)$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des ponts orientés. Si A_1 et A_2 sont deux arcs (fermés) disjoints sur ∂D, on note $\mathcal{K}(A_1, A_2)$ l'ensemble des ponts orientés tels que $d_1 \subset A_1$ et $d_2 \subset A_2$. Lorsque $A_2 = V_\delta^+ := \{e^{i\theta}; -\delta \leq \theta \leq \delta\}$ et $A_1 = V_\delta^- := -A_2$, on note simplement $\mathcal{K}_\delta = \mathcal{K}(V_\delta^-, V_\delta^+)$. Enfin, si $D' \subset D$ et $A_1 \cup A_2 \subset \partial D'$, on note $\mathcal{K}(A_1, A_2; D')$ l'ensemble des ponts orientés de $\mathcal{K}(A_1, A_2)$ qui ont la propriété additionnelle que $K \cap D \subset D'$.

DÉFINITION 1.6. — *Une mesure μ sur $\mathcal{K}$ est dite complètement invariante conforme (CIC) si elle possède les deux propriétés suivantes.*

• *Il existe un exposant $\alpha = \alpha(\mu) > 0$ tel que, quand $\delta \to 0$,*

$$\mu(\mathcal{K}_\delta) \approx \delta^{2\alpha}.$$

• *Soit D' un sous-ensemble ouvert simplement connexe de D et soient A_1, A_2 deux arcs (fermés non vides) disjoints contenus dans $\partial D \cap \partial D'$. Il existe une unique valeur $\delta = \delta(A_1, A_2; D')$ et une bijection conforme $\Phi : D' \longrightarrow D$ telles que $\Phi(A_1) = V_\delta^-$ et $\Phi(A_2) = V_\delta^+$. Alors, si $\mu_{A_1,A_2}^{D'}$ désigne la restriction de μ à $\mathcal{K}(A_1, A_2; D')$, on a*

$$\Phi\big(\mu_{A_1,A_2}^{D'}\big) = \mu_{V_\delta^-, V_\delta^+}^{D}.$$

Dans la dernière formule, $\Phi\big(\mu_{A_1,A_2}^{D'}\big)$ désigne la mesure image de $\mu_{A_1,A_2}^{D'}$ par l'application Φ, qui agit de manière évidente sur $\mathcal{K}(A_1, A_2; D')$.

La propriété la plus importante est la deuxième. L'exposant $\alpha(\mu)$ qui intervient dans la première est appelé exposant de croisement de μ. Il mesure la difficulté pour un pont distribué selon μ de passer par des « petites » portes d'entrée et de sortie. On vérifie aisément qu'une mesure CIC est nécessairement de masse totale infinie.

EXEMPLE. — La mesure d'excursion du mouvement brownien plan à l'intérieur du cercle unité permet de construire un premier exemple de mesure CIC, que nous noterons μ_0 et qui fait le lien avec les paragraphes précédents. Le compact K est obtenu sous μ_0 comme complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de la trajectoire sous la mesure d'excursion. Dans ce cas, les arcs d_1 et d_2 sont réduits à des points, et on voit facilement que l'exposant de croisement vaut 1.

Nous allons maintenant définir un exposant d'intersection pour une famille finie de mesures CIC. Nous devons auparavant introduire une notation supplémentaire. Si K est un pont orienté, on note $D^- = D^-(K)$ et $D^+ = D^+(K)$ les composantes connexes de $D \backslash K$ numérotées de sorte que les arcs d_1, $\partial D^- \cap \partial D$, d_2 et $\partial D^+ \cap \partial D$ sont dans l'ordre trigonométrique. Soient alors $\mu_1, \dots, \mu_p$ des mesures CIC, et supposons que les ponts orientés $K_1, \dots, K_p$ sont choisis selon la mesure produit $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_p$. On note $\mathcal{O}$ l'événement sur lequel les ponts (orientés) $K_1, \dots, K_p$ sont ordonnés, au sens où

$$K_j \cap D \subset D^-(K_{j+1}) \,, \qquad j = 1, \dots, p-1$$

(de manière imagée, le pont K_1 est situé « en dessous » du pont K_2, lequel est lui-même en-dessous de K_3, etc.). L'exposant d'intersection $\alpha = \alpha(\mu_1, \dots, \mu_p)$ est alors défini par

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_p\big((\mathcal{K}_\delta)^p \cap \mathcal{O}\big) \approx \delta^{2\alpha}$$

quand $\delta \to 0$, lorsqu'un tel exposant α existe.

Autrement dit, on évalue la « probabilité » que les ponts « indépendants » $K_1, \dots, K_p$ aient des arcs d'entrée et de sortie proches (puisque contenus dans V_δ^-, respectivement V_δ^+) mais néanmoins ne se rencontrent pas (en fait on leur demande

même d'être dans un ordre bien défini, mais cela ne fait pas de différence pour le comportement logarithmique de la probabilité). Lorsque $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont toutes égales à la mesure μ_0 construite à partir de la mesure d'excursion brownienne, on vérifie que $\alpha(\mu_0, \dots, \mu_0)$ existe, et

$$\alpha(\mu_0, \dots, \mu_0) = \xi(1, \dots, 1).$$

Le théorème qui suit généralise considérablement cette observation.

THÉORÈME 1.7 ([25]). — *Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ des mesures CIC. Alors l'exposant d'intersection $\alpha(\mu_1, \dots, \mu_p)$ existe, et*

$$\alpha(\mu_1, \dots, \mu_p) = \xi(\alpha(\mu_1), \dots, \alpha(\mu_p)).$$

L'énoncé du Théorème 1.7 ne fait plus intervenir de mouvement brownien, si on oublie la manière dont les exposants ξ ont été introduits ci-dessus. Cependant la preuve de ce théorème fait une utilisation intensive de la mesure d'excursion brownienne. L'intérêt du Théorème 1.7 est qu'il est susceptible de s'appliquer aux mesures CIC autres que la mesure μ_0, que l'on s'attend à obtenir par des passages à la limite convenables à partir de modèles probabilistes comme les marches aléatoires auto-évitantes ou les amas de percolation (tout récemment, Schramm [30] a discuté l'existence de modèles continus pour la marche aléatoire à boucles effacées qui sera étudiée dans la partie suivante). L'article [25] contient une série de conjectures dans cette direction. dont plusieurs rejoignent les prédictions des physiciens théoriciens.

Après la rédaction de la première version de cet exposé, nous avons eu connaissance d'un travail tout récent de Lawler, Schramm et Werner [26] qui démontre certaines des conjectures mentionnées dans le paragraphe 1.6 ci-dessus. L'idée est d'utiliser le processus de croissance introduit par Schramm [30] pour lequel des calculs explicites des exposants sont possibles. Grâce aux résultats d'universalité décrits dans le paragraphe 1.7, cela permet aussi de calculer au moins certaines valeurs des exposants d'intersection browniens, en accord avec les conjectures du paragraphe 1.6. Des résultats même plus complets que ceux de [26], incluant une preuve de la conjecture de Mandelbrot $\dim \mathcal{C} = \frac{4}{3}$, ont été annoncés par Lawler, Schramm et Werner.

2. MARCHES ALÉATOIRES À BOUCLES EFFACÉES ET PAVAGES PAR DOMINOS

2.1. Marches aléatoires à boucles effacées et arbres couvrants

La marche aléatoire à boucles effacées a été introduite par Lawler [19] en 1980. Commençons par rappeler sa définition. Soit $\gamma = (\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(N))$ un chemin déterministe dans $\mathbb{Z}^d$ ou sur un graphe quelconque. Si ce chemin est auto-évitant, c'est-à-dire si les $\gamma(i)$ sont distincts, on arrête là la construction. Sinon, on choisit j minimal

tel qu'il existe $i < j$ avec $\gamma(j) = \gamma(i)$, on remplace γ par $\gamma' = (\gamma(0), \dots, \gamma(i), \gamma(j+1), \dots, \gamma(N))$ et on recommence. La construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et donne alors un chemin auto-évitant ayant mêmes points de départ et d'arrivée que γ.

Si on considère maintenant un chemin infini $\gamma = (\gamma(0), \gamma(1), \dots)$ ayant la propriété de ne passer qu'un nombre fini de fois en chaque sommet du graphe, la même méthode fournit un chemin infini auto-évitant. Ceci s'applique à une trajectoire de marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 3$ et le chemin aléatoire ainsi obtenu est appelé marche aléatoire à boucles effacées dans $\mathbb{Z}^d$. En revanche, dans le graphe $\mathbb{Z}^2$ (ou dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$), la construction précédente ne marche pas directement à cause de la récurrence de la marche aléatoire simple. Néanmoins, on peut l'appliquer d'abord à la marche aléatoire issue de 0 arrêtée au premier temps de sortie d'une grande boîte centrée en 0, puis faire tendre la taille de la boîte vers l'infini pour obtenir encore la marche aléatoire à boucles effacées dans $\mathbb{Z}^2$, ou dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ (voir le dernier chapitre de [20]). L'article récent de Lawler [23] donne un aperçu très complet des problèmes ouverts et des conjectures sur les marches aléatoires à boucles effacées.

Le théorème suivant, dû à Kenyon [17], résout l'une des plus importantes de ces conjectures.

THÉORÈME 2.1. — *Pour la marche aléatoire à boucles effacées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ issue de l'origine, le nombre moyen de points visités qui sont à distance inférieure à N de l'origine est $N^{\frac{5}{4}+o(1)}$. Plus précisément, la probabilité qu'un point de la forme $(x, y) = re^{i\theta}$ soit visité se comporte quand $r \to \infty$ comme*

$$r^{-\frac{3}{4}(1+o(1))} \left((\cos\theta)^{\frac{1}{4}} + o(1)\right),$$

où le terme $o(1)$ dans l'exposant ne dépend pas de θ.

On s'attend à ce qu'un résultat analogue soit vrai pour la marche aléatoire à boucles effacées dans $\mathbb{Z}^2$, même si cette extension présente probablement des difficultés techniques. Le théorème suggère fortement que la moyenne à l'instant n du carré de la norme d'une marche aléatoire à boucles effacées dans $\mathbb{Z}^2$ se comporte asymptotiquement comme $n^{\frac{8}{5}}$. Cette valeur de l'exposant $\gamma = \frac{8}{5}$ a été prédite par les physiciens théoriciens (Majumdar [27], voir aussi [7]). Lawler [20] donne la minoration $\gamma \geq \frac{3}{2}$.

La formulation du théorème précédent qui figure dans [17] est différente et utilise la notion d'arbre couvrant uniforme. Si G est un graphe connexe quelconque, on appelle arbre couvrant de G un sous-graphe connexe de G qui est un arbre et qui contient pour chaque sommet de G au moins une arête incidente à ce sommet. Lorsque G est fini, on définit un arbre couvrant uniforme comme étant un sous-graphe aléatoire de G dont la loi est la probabilité uniforme sur l'ensemble (fini) de tous les arbres couvrants de G.

Cette définition peut être étendue à des graphes infinis. Considérons le cas où $G = \mathbb{Z}^d$. Pour tout entier $n \geq 1$, notons D_n le cube de coté $2n$ centré en l'origine dans

$\mathbb{Z}^d$. Soit μ_n la probabilité uniforme sur l'ensemble des arbres couvrants de D_n, vu ici comme contenu dans l'ensemble des sous-graphes de $\mathbb{Z}^d$, qui est muni de la topologie-produit (on identifie un sous-graphe à un élément de $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$, si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$). On montre alors [29] que μ_n converge étroitement vers une mesure de probabilité μ portée par les sous-graphes de $\mathbb{Z}^d$. De plus, lorsque $d \leq 4$, la mesure μ est portée par les arbres couvrants de $\mathbb{Z}^d$, et on appelle arbre couvrant uniforme sur $\mathbb{Z}^d$ un arbre aléatoire dont la loi est μ. La même construction s'applique au graphe $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

On montre aussi [29], toujours en dimension $d \leq 4$, que la mesure μ est portée par les arbres qui ont un seul « bout », c'est-à-dire tels que la suppression d'un sommet divise l'arbre en deux composantes dont une seule est infinie. Il est alors immédiat qu'il existe dans l'arbre couvrant uniforme un seul chemin (sans recoupement) joignant 0 à ∞.

PROPOSITION 2.2 ([29]). — *Pour l'arbre aléatoire couvrant uniforme dans $\mathbb{Z}^d$, $d \leq 4$ ou dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, l'arc joignant 0 à l'infini a la loi d'une marche aléatoire à boucles effacées issue de 0.*

2.2. Arbres couvrants et pavages par dominos

Grâce à la Proposition 2.2, on peut ramener la preuve du Théorème 2.1 à celle d'un énoncé équivalent sur les arbres couvrants. Nous allons voir qu'on peut introduire encore une autre formulation mettant en jeu les pavages par dominos de certaines régions du plan.

Soit T le pavage « en échiquier » de $\mathbb{R}^2$ par des carrés unité, chaque carré étant centré en un point du réseau $\mathbb{Z}^2$. Nous supposons que le carré centré en l'origine est blanc, et nous notons W_0 l'ensemble des carrés (blancs) dont les coordonnées du centre sont paires, W_1 l'ensemble des autres carrés blancs. Nous notons aussi B_0 l'ensemble des carrés noirs dont les coordonnées du centre sont égales à $(1,0)$ modulo 2, B_1 l'ensemble des autres carrés noirs.

Un *polyomino* est une réunion finie de carrés de T dont la frontière est une courbe fermée simple (pour simplifier, nous ne considérons ici que des polyominos simplement connexes). Un polyomino est dit *pair* si tous les carrés de coin, que ce coin soit convexe ou concave, sont de type B_1. Enfin un polyomino *temperlien* est obtenu à partir d'un polyomino pair en enlevant un (seul) carré noir d adjacent à la frontière de ce dernier (d sera appelé le *point de base* du polyomino). À cause de la définition d'un polyomino pair, d est forcément de type B_1 (dans un polyomino pair les seuls carrés noirs adjacents à la frontière sont de type B_1). Remarquons qu'un polyomino temperlien contient le même nombre de carrés blancs et noirs.

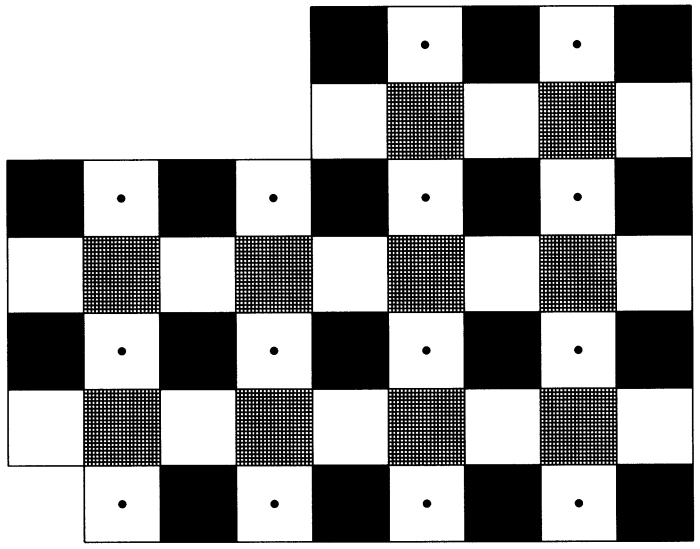

FIGURE 1.

La figure 1 donne un exemple de polyomino temperlien, pour lequel le carré de base (qui ne fait pas partie du polyomino) est en bas à gauche. Sur cette figure, les carrés noirs sont de type B_1, les carrés gris de type B_0, les carrés blancs pointés de type W_1 et enfin les carrés blancs de type W_0.

Soit P un polyomino temperlien, et P' le polyomino pair dont est issu P. On note $\mathbf{B}_1(P)$ le graphe dont les sommets sont les carrés de type B_1 contenus dans P', deux sommets étant reliés par une arête si les centres des carrés sont à distance 2. Remarquons que d est un sommet du graphe $\mathbf{B}_1(P)$, et qu'à chaque arête de $\mathbf{B}_1(P)$ est associé un unique carré blanc de P. Le dual du graphe $\mathbf{B}_1(P)$ est le graphe $\mathbf{B}_0(P)$ dont les sommets sont les carrés de type B_0 dans P.

On appelle *domino* un rectangle 1×2 ou 2×1 dont les sommets sont des points de $\mathbb{Z}^2$. Il est facile de vérifier qu'un polyomino temperlien est toujours pavable par dominos. Le théorème suivant est dû à Temperley [31] dans le cas d'un rectangle (voir [5] et [18] pour des généralisations incluant celle-ci).

THÉORÈME 2.3. — *Les pavages par dominos de P sont en bijection avec les arbres couvrants du graphe $\mathbf{B}_1(P)$.*

De manière intuitive, si l'on part d'un arbre couvrant dont on oriente les arêtes en partant du point de base d, on construit le pavage par dominos correspondant de la manière suivante. On « jette » pour chaque arête de l'arbre un domino dont le carré noir est le sommet terminal de l'arête et le carré blanc est le carré associé à l'arête. Pour compléter le pavage, il suffit ensuite de « boucher les trous », ou, ce qui revient au même, de jeter pareillement les dominos le long de l'arbre dual. La figure 2 donne

un exemple de pavage par dominos du polyomino de la figure 1 et de l'arbre associé dont les sommets sont les points de $\mathbf{B}_1(P)$.

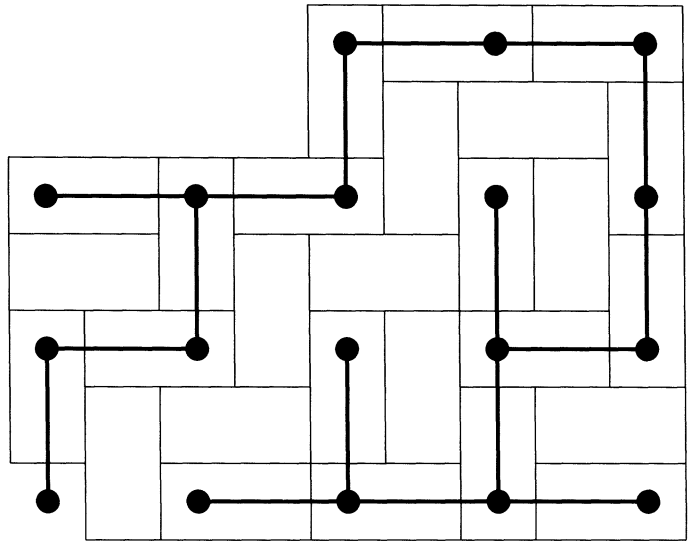

FIGURE 2.

Considérons maintenant, pour un entier pair n, le polyomino temperlien P rectangulaire défini comme la réunion des carrés unité centrés aux points de $\{1, 2, \ldots, 2n+1\} \times \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$, à l'exception du carré d centré en $(1, 0)$. Soit Q l'ensemble obtenu à partir de P en enlevant un carré noir b adjacent à la frontière de P (donc de type B_1) ainsi qu'un carré blanc w (qu'on peut voir comme une arête de $\mathbf{B}_1(P)$).

LEMME 2.4 ([17]). — *Les pavages par dominos de Q sont en bijection avec les arbres couvrants de $\mathbf{B}_1(P)$ pour lesquels l'arc de b à d contient l'arête w.*

Ce lemme nous permet d'esquisser la méthode d'approche du Théorème 2.1 [17]. Nous voulons estimer la probabilité que dans l'arbre couvrant uniforme sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, l'arc joignant 0 à ∞ contienne l'arête w fixée. Le lemme précédent nous permettra d'estimer la probabilité que pour l'arbre couvrant uniforme dans une boîte rectangulaire arbitrairement grande, l'arc joignant le point de base à un autre point de la frontière contienne l'arête w. Cette probabilité s'exprimera d'après le Lemme 2.4 et le Théorème 2.3 comme le rapport du nombre de pavages par dominos de Q sur le nombre de pavages par dominos de P. Dans les sections suivantes, nous expliquons comment on estime le nombre de pavages par dominos d'un polyomino temperlien. Ceci ne s'applique pas directement à Q qui n'est pas temperlien, mais la méthode peut être adaptée.

2.3. Matrice de Kasteleyn et fonction de couplage

Dans ce paragraphe, nous considérons un polyomino temperlien P et nous notons M l'ensemble des carrés de P. L'ensemble M est muni d'une structure de graphe évidente, où deux carrés sont adjacents ssi ils ont un côté en commun. La *matrice de Kasteleyn* de P est la matrice symétrique $K = (K(v,v'), v, v' \in M)$ telle que $K(v,v') = 0$ si v et v' ne sont pas adjacents et, pour $v \in M \cap (W_0 \cup W_1)$ et $v' \in M$,

$$K(v,v') = \begin{cases} 1 & \text{si } v' = v + (1,0) \\ i & \text{si } v' = v + (0,1) \\ -1 & \text{si } v' = v + (-1,0) \\ -i & \text{si } v' = v + (0,-1). \end{cases}$$

Kasteleyn [14] a montré (avec une définition différente de K) que le nombre de pavages par dominos de P est la racine carrée du module du déterminant de K. En général, sauf dans le cas du rectangle où une formule explicite existe, il est cependant difficile d'utiliser ce résultat pour estimer le nombre de pavages par dominos de P.

La *fonction de couplage* de P est par définition la matrice inverse $C = K^{-1}$.

PROPOSITION 2.5 ([15]). — *Si u, v sont deux carrés adjacents de P, la probabilité qu'un pavage aléatoire uniforme de P contienne le domino $\{u,v\}$ est égale à $|C(u,v)|$.*

Plus généralement [15], la probabilité qu'un pavage aléatoire uniforme contienne une famille fixée de dominos disjoints s'exprime comme la valeur absolue du déterminant d'une sous-matrice de C.

Nous verrons dans la partie suivante que si l'on se donne une suite de polyominos temperliens P_ε de $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ qui approchent une région du plan, il est possible d'obtenir des informations précises sur le comportement asymptotique des fonctions de couplage C_ε associées. Afin de mieux comprendre l'origine de ces informations, donnons quelques propriétés simples de la fonction de couplage.

Si on énumère les éléments de M en écrivant successivement les carrés de type W_0, W_1, B_0 et enfin B_1, la matrice K est de la forme

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_1 & iK_2 \\ 0 & 0 & iK_3 & K_4 \\ K_1^t & iK_3^t & 0 & 0 \\ iK_2^t & K_4^t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les matrices K_1, K_2, K_3, K_4 sont réelles. Il est facile de voir que l'inverse de K doit être aussi de cette forme. En particulier, $C(v,v') = 0$ si v et v' sont tous les deux blancs, ou tous les deux noirs, $C(v,v')$ est réel quand $v' = v + (1,0)$ modulo 2 et imaginaire pur quand $v' = v + (0,1)$ modulo 2.

Par définition de C, on a $KC(v,v') = \delta_v(v')$, où δ_v est la fonction indicatrice du singleton $\{v\}$. Notons K^* la matrice conjuguée de K. On vérifie facilement que la

matrice K^*K agit sur les fonctions définies sur $\mathbf{B}_0(P)$, et que pour une telle fonction f on a pour tout $v \in \mathbf{B}_0(P)$,

$$(2)\quad K^*Kf(v) = 4f(v) - f(v+(2,0)) - f(v+(-2,0)) - f(v+(0,2)) - f(v+(0,-2)).$$

Cette formule est vraie même si les quatre voisins (dans B_0) de v ne sont pas tous dans $\mathbf{B}_0(P)$, auquel cas il faut affecter la valeur 0 à la fonction f aux points extérieurs à $\mathbf{B}_0(P)$. La formule précédente s'interprète en disant que $K^*K = \Delta$ est (4 fois) le Laplacien discret sur $\mathbf{B}_0(P)$, avec conditions de Dirichlet au bord. Ce qui précède reste vrai si on remplace $\mathbf{B}_0(P)$ par $\tilde{\mathbf{B}}_1(P) = \mathbf{B}_1(P)\backslash\{d\}$, mais la formule (2) doit être modifiée si v est adjacent à la frontière de P. Dans ce cas, le terme de droite de (2) est $f(v)$ multiplié par le nombre de voisins de v dans $\mathbf{B}_1(P)$ moins la somme des valeurs de f en ces voisins (en prenant $f(d) = 0$).

En appliquant K^* à l'égalité $KC(v,v') = \delta_v(v')$, on trouve pour $v \in W_0 \cup W_1$,

$$\Delta C(v,\cdot) = \delta_{v+(1,0)} - \delta_{v+(-1,0)} - i\delta_{v+(0,1)} + i\delta_{v+(0,-1)}.$$

Fixons $v \in W_0 \cap M$. La restriction, notée f, de $C(v,\cdot)$ à $\mathbf{B}_0(P)$ est à valeurs réelles, et l'égalité précédente montre que cette fonction est harmonique (au sens discret) sur $\mathbf{B}_0(P)\backslash\{v-(1,0), v+(1,0)\}$, avec conditions frontière de type Dirichlet. En revanche la restriction, notée ig, de $C(v,\cdot)$ à $\tilde{\mathbf{B}}_1(P)$ est à valeurs imaginaires pures et est harmonique sur $\tilde{\mathbf{B}}_1(P)\backslash\{v+(0,1), v+(0,-1)\}$. Les conditions frontière sont maintenant de type Neumann : la valeur de g en un point frontière v' est la moyenne de ses valeurs aux voisins de v' dans $\mathbf{B}_1(P)$, en prenant $g(d) = 0$.

De plus, on peut dire que g est la conjuguée harmonique de f, au sens où on a les équations de Cauchy-Riemann discrètes

$$\begin{aligned} \partial_x f(v') &= \partial_y g(v') \qquad \text{pour } v' \in (M \cap W_0)\backslash\{v\} \\ \partial_y f(v') &= -\partial_x g(v') \qquad \text{pour } v' \in M \cap W_1, \end{aligned}$$

avec la notation $\partial_x f(v) = f(v+(1,0)) - f(v+(-1,0))$, $\partial_y f(v) = f(v+(0,1)) - f(v+(0,-1))$.

On a des résultats analogues pour la fonction $C(v,\cdot)$ lorsque $v \in W_1$.

2.4. Comportement asymptotique de la fonction de couplage

Soit U un polygone rectiligne de $\mathbb{R}^2$ (U est un domaine simplement connexe et sa frontière est composée de segments parallèles aux axes), et soit $d_0 \in \partial U$. Considérons pour chaque $\varepsilon > 0$ un polyomino temperlien P_ε de $\varepsilon\mathbb{Z}^2$, et supposons que ces polyominos convergent vers U de la manière évidente (en particulier, P_ε a autant de coins que U, et chaque coin de P_ε converge vers le coin correspondant de U). On suppose aussi que les points de base d_ε de P_ε convergent vers le point d_0.

Notons C_ε la fonction de couplage de P_ε et M_ε l'ensemble des carrés de P_ε.

THÉORÈME 2.6 ([16]). — *Soient, pour chaque $\varepsilon > 0$, u_ε, v_ε, w_ε, x_ε des éléments de M_ε appartenant respectivement à W_0, W_1, B_0, B_1, et convergeant respectivement vers des points distincts u, v, w, $x \in U$. Alors,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon(u_\varepsilon, w_\varepsilon) = \operatorname{Re} F_0(u,w)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) = i \operatorname{Im} F_0(u,x)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon(v_\varepsilon, w_\varepsilon) = \operatorname{Re} F_1(v,w)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon(v_\varepsilon, x_\varepsilon) = i \operatorname{Im} F_1(v,x)$$

où les fonctions F_0 et F_1 sont caractérisées par les propriétés suivantes.

Pour $v \in U$, la fonction $F_0(v,\cdot)$ est méromorphe sur U, sa partie réelle s'annule sur ∂U, elle a un zéro en $z = d_0$, un pôle simple de résidu $\frac{1}{\pi}$ en $z = v$ et pas d'autre pôle sur $\bar{U}$.

De même, la fonction $F_1(v,\cdot)$ est méromorphe sur U, sa partie imaginaire s'annule sur ∂U, elle a un zéro en $z = d_0$, un pôle simple de résidu $\frac{1}{\pi}$ en $z = v$ et pas d'autre pôle sur $\bar{U}$.

REMARQUE — Un résultat analogue est vrai pour des ouverts U plus généraux : voir [16].

Les propriétés des fonctions F_0 et F_1, et le fait qu'on obtienne tantôt $\operatorname{Re} F$ tantôt $\operatorname{Im} F$, viennent directement des propriétés des fonctions de couplage décrites dans la partie précédente. Donnons rapidement l'idée de la preuve du théorème. On note $\mathbf{B}_0'(P_\varepsilon)$ le graphe obtenu en ajoutant à $\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$ tous les carrés noirs (de type B_0) qui sont adjacents à un carré blanc à la frontière de P_ε, et les arêtes reliant deux carrés noirs si le carré blanc situé entre eux est dans P_ε. Soit alors $G_\varepsilon(w,w')$ la fonction de Green de $\mathbf{B}_0'(P_\varepsilon)$: pour $w \in \mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$, la fonction $G_\varepsilon(w,\cdot)$ vérifie $\Delta G_\varepsilon(w,\cdot) = \delta_w$ sur $\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$, et $G_\varepsilon(w,w') = 0$ pour $w' \in \mathbf{B}_0'(P_\varepsilon)\backslash\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$. Par abus de notation, écrivons $\operatorname{Re} C_\varepsilon(u_\varepsilon,\cdot)$ pour la restriction de $C_\varepsilon(u_\varepsilon,\cdot)$ à $\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$ (qui est à valeurs réelles) et prolongeons-la à $\mathbf{B}_0'(P_\varepsilon)$ en lui donnant la valeur 0 sur $\mathbf{B}_0'(P_\varepsilon)\backslash\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$. Nous avons vu que, sur $\mathbf{B}_0(P_\varepsilon)$,

$$\Delta \operatorname{Re} C_\varepsilon(u_\varepsilon,\cdot) = \delta_{u_\varepsilon+\varepsilon} - \delta_{u_\varepsilon-\varepsilon}.$$

Puisque $\operatorname{Re} C_\varepsilon(u_\varepsilon,\cdot)$ s'annule à la frontière, il en découle que

$$\operatorname{Re} C_\varepsilon(u_\varepsilon, w) = G_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon, w) - G_\varepsilon(u_\varepsilon-\varepsilon, w).$$

On peut alors déduire la première convergence du théorème de résultats sur le comportement asymptotique des fonctions de Green discrètes.

Les fonctions de couplage asymptotiques F_0 et F_1 possèdent des propriétés d'invariance conforme qui sont très importantes pour les applications. Posons $F_+^U = F_0 + F_1$

et $F_-^U = F_0 - F_1$. Alors, $F_+^U(v,z)$ est méromorphe en v et en z, et $F_-^U(v,z)$ est méromorphe en z et anti-méromorphe en v. De plus, si $f : V \longrightarrow U$ est une bijection conforme envoyant le point de base de V sur le point de base de U, on a :

$$F_+^V(v,z) = f'(v)\, F_+^U(f(v), f(z)),$$
$$F_-^V(v,z) = \overline{f'(v)}\, F_-^U(f(v), f(z)).$$

2.5. L'asymptotique du nombre de pavages par dominos

Dans ce paragraphe, nous décrivons brièvement un résultat important de [17] donnant l'asymptotique du logarithme du nombre $N(P_\varepsilon)$ de pavages par dominos de P_ε (sous les hypothèses de la partie précédente). Ce résultat ne peut pas être appliqué directement à la preuve du Théorème 2.1, qui nécessite d'estimer le rapport $N(Q_\varepsilon)/N(P_\varepsilon)$ où Q_ε n'est pas temperlien. Cependant, les techniques impliquées dans cette preuve sont proches de celles que nous décrivons très succinctement ci-dessous.

Nous notons A_ε l'aire de P_ε, $\mathrm{perim}(P_\varepsilon)$ son périmètre, et V le nombre de sommets du polygone V.

THÉORÈME 2.7 ([17]). — *Soit $N(P_\varepsilon)$ le nombre de pavages par dominos de P_ε. Alors,*

$$\log N(P_\varepsilon) = \frac{c_0 A_\varepsilon}{\varepsilon^2} + \frac{c_1\, \mathrm{perim}(P_\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\varepsilon} - \frac{V-4}{36} h(\varepsilon) + c_2(U) + o(1),$$

où $c_0 = \frac{G}{\pi}$, si $G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$ est la constante de Catalan, $c_1 = \frac{G}{2\pi} + \frac{\log(\sqrt{2}-1)}{4}$, $c_2(U)$ est une constante dépendant seulement de U, et la fonction h est indépendante de U et vérifie $h(\varepsilon) = \log\frac{1}{\varepsilon} + o(\log\frac{1}{\varepsilon})$.

REMARQUE. — Le premier terme du développement ci-dessus est essentiellement contenu dans le travail de Burton et Pemantle [5].

Dans le cas particulier où U est un rectangle, le développement du théorème peut être obtenu à partir des expressions explicites dues à Kasteleyn [13] et Temperley et Fischer [32] (voir [10] pour une dérivation du développement dans ce cas). Pour se ramener au cas du rectangle, on utilise une technique de découpage. Considérons un segment (vertical ou horizontal) γ' qui traverse U, touche ∂U seulement en ses points de départ et d'arrivée, et évite le point de base d_0 de U. Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons aussi une bande γ_ε de largeur ε formée de carrés de P_ε, qui traverse P_ε en restant à une distance $O(\varepsilon)$ de γ'. On peut imposer que les carrés noirs contenus dans γ_ε soient de type B_0, et que si l'une ou l'autre extrémité de γ' est à un coin concave de U, l'extrémité correspondante de γ_ε soit au coin correspondant de P_ε.

La longueur de γ_ε doit alors être un multiple impair de ε. Si nous retirons la bande γ_ε de P_ε, il reste deux polyominos disjoints. Celui, noté P_1, qui contient le carré de base de P_ε est temperlien. L'autre, noté P_2, devient temperlien si on lui enlève un seul carré s de type B_1 adjacent à l'un des points terminaux de γ_ε. Remarquons que

la réunion $\gamma_\varepsilon \cup s$ a un seul pavage par dominos. Le nombre de pavages par dominos de P_ε est égal au produit du nombre de pavages de P_1 et du nombre de pavages de P_2, divisé par la probabilité que le pavage de $\gamma_\varepsilon \cup s$ apparaisse dans un pavage de P_ε tiré au hasard uniformément.

Nous pouvons répéter cette procédure à partir de P_1 et P_2 de manière à découper le polyomino initial en des morceaux de plus en plus simples. Au bout d'un nombre fini d'itérations on arrive à des rectangles temperliens pour lesquels on peut utiliser la formule exacte. Tout le problème est donc d'estimer la probabilité que dans un pavage aléatoire uniforme de P_ε, apparaisse le pavage de $\gamma_\varepsilon \cup s$. Notons $a_1, \ldots, a_N$ les dominos qui forment ce pavage. Les a_i sont mis bout à bout (à partir de la frontière) sauf pour a_N qui est perpendiculaire aux autres. La probabilité que tous les a_i soient présents s'écrit comme le produit

$$\prod_{j=1}^{N} P(a_j \mid a_1, \ldots, a_{j-1})$$

des probabilités conditionnelles que a_j soit présent sachant que $a_1, \ldots, a_{j-1}$ le sont. Pour j fixé, cette dernière probabilité conditionnelle est la probabilité que a_j soit présent dans un pavage aléatoire de la région $P_\varepsilon^{(j)} := P_\varepsilon \backslash \{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$, qui est elle-même un polyomino temperlien. Soit $C_\varepsilon^{(j)}$ la fonction de couplage de $P_\varepsilon^{(j)}$, et soient $u_\varepsilon^{(j)}$, $v_\varepsilon^{(j)}$ les deux carrés qui composent le domino a_j. Alors, la probabilité que a_j soit présent dans un pavage aléatoire de $P_\varepsilon^{(j)}$ est d'après la Proposition 2.5 égale à $|C_\varepsilon^{(j)}(u_\varepsilon^{(j)}, v_\varepsilon^{(j)})|$. Le comportement asymptotique de ces quantités peut être décrit en termes des fonctions de couplage asymptotiques F_0, F_1 de la partie 4, correspondant à la région U privée d'une coupure le long (d'une partie) du segment γ'. À l'aide d'une analyse détaillée de ces asymptotiques et d'une utilisation intensive des propriétés d'invariance conforme, cela conduit à des estimations suffisamment précises pour établir le Théorème 2.7.

RÉFÉRENCES

[1] L. V. AHLFORS – *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory.* McGraw-Hill, New York 1973

[2] K. BURDZY, G. F. LAWLER – *Non-intersection exponents for random walk and Brownian motion. Part I : Existence and an invariance principle.* Probab. Th. Rel. Fields **84** (1990), 393-410.

[3] K. BURDZY, G. F. LAWLER – *Non-intersection exponents for random walk and Brownian motion. Part II : Estimates and applications to a random fractal.* Ann. Probab. **18** (1990), 981-1009.

[4] K. BURDZY, W. WERNER – *No triple point of planar Brownian motion is accessible.* Ann. Probab. **24** (1996), 125-147.

[5] R. BURTON, R. PEMANTLE – *Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer impedances.* Ann. Probab. **21** (1993), 1329-1371.

[6] M. CRANSTON, T. MOUNTFORD – *An extension of a result by Burdzy and Lawler.* Probab. Th. Rel. Fields **89** (1991), 487-502.

[7] B. DUPLANTIER – *Loop-erased self-avoiding walks in two dimensions : exact critical exponents and winding numbers.* Physica A **191** (1992), 516-522.

[8] B. DUPLANTIER – *Random walks and quantum gravity in two dimensions.* Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 5489-5492.

[9] B. DUPLANTIER – *Two-dimensional copolymers and exact conformal multifractality.* Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 880-883.

[10] B. DUPLANTIER, F. DAVID – *Exact partition functions and correlation functions of multiple Hamiltonian walks on the Manhattan lattice.* J. Stat. Phys. **51** (1988), 327-434.

[11] B. DUPLANTIER, K.-H. KWON – *Conformal invariance and intersections of random walks.* Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 2514-2517.

[12] B. DUPLANTIER, G. F. LAWLER, J. F. LE GALL, T. J. LYONS – *The geometry of the Brownian curve.* Bull. Sci. math. **117** (1993), 91-106.

[13] P. KASTELEYN – *The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice.* Physica **27** (1961), 1209-1225.

[14] P. KASTELEYN – *Graph theory and crystal physics.* In : *Graph Theory and Theoretical Physics.* Academic Press, London 1967

[15] R. KENYON – *Local statistics of lattice dimers.* Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **33** (1997), 591-618.

[16] R. KENYON – *Conformal invariance of domino tilings.* Preprint.

[17] R. KENYON – *The asymptotic determinant of the discrete Laplacian.* Preprint.

[18] R. KENYON, J. PROPP, D. WILSON – *Trees and matchings.* Preprint.

[19] G. F. LAWLER – *A self-avoiding random walk.* Duke Math. J. **47** (1980), 655-693.

[20] G. F. LAWLER – *Intersections of Random Walks.* Birkhäuser, Boston 1991

[21] G. F. LAWLER – *Hausdorff dimension of cut points for Brownian motion.* Electron. J. Probab. **1** (1996), no 2.

[22] G. F. LAWLER – *The dimension of the frontier of planar Brownian motion.* Electronic Commm. Probab. **1** (1996), no 5.

[23] G. F. LAWLER – *Loop-erased random walk.* In : *Perplexing Problems in Probability.* Birkhäuser, Boston 1999

[24] G. F. LAWLER, W. WERNER – *Intersection exponents for planar Brownian motion.* Preprint.

[25] G. F. LAWLER, W. WERNER – *Universality for conformally invariant intersection exponents.* Preprint.

[26] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM, W. WERNER – *Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponents.* Preprint.

[27] S. N. MAJUMDAR – *Exact fractal dimension of the loop-erased self-avoiding walk in two dimensions.* Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 2329-2331.

[28] B. B. MANDELBROT – *The Fractal Geometry of Nature.* Freeman 1982.

[29] R. PEMANTLE – *Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly.* Ann. Probab. **19** (1991), 1559-1574.

[30] O. SCHRAMM – *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees.* Preprint.

[31] H. TEMPERLEY – *Combinatorics : Proceedings of the British Combinatorial Conference 1973.* London Math. Soc. Lecture Notes Series **13** (1974), 202-204.

[32] H. TEMPERLEY, M. FISHER – *The dimer problem in statistical mechanics – an exact result.* Phil. Mag. **6** (1961), 1061-1063.

[33] W. WERNER – *Asymptotic behaviour of disconnection and intersection exponents.* Probab. Th. Rel. Fields **108** (1997), 131-152.

Jean-François LE GALL

DMA – École normale supérieure
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS Cedex 05
E-mail : legall@dmi.ens.fr