

Astérisque

GÉRARD LAUMON

La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions

Astérisque, tome 276 (2002), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 873, p. 207-265

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1999-2000__42__207_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS
SUR LES CORPS DE FONCTIONS**
[d'après Laurent Lafforgue]

par **Gérard LAUMON**

Lafforgue a récemment établi la correspondance de Langlands pour GL_r sur un corps de fonctions. Sa preuve suit la stratégie introduite, il y a plus de 25 ans, par Drinfeld pour traiter le cas $r = 2$.

Après avoir énoncé le théorème principal et ses conséquences, nous présenterons les grandes lignes de la démonstration, en renvoyant pour les détails aux publications de Lafforgue ([La 1] à [La 9]). Les sections 4 (Compactification de l'isogénie de Lang pour PGL_r) et 7 (Une variante d'un théorème de Pink) sont de nature générale et peuvent être lues indépendamment du reste du texte.

Je remercie chaleureusement L. Lafforgue pour son aide dans la préparation de cet exposé.

1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

On fixe dans tout cet exposé une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. On note $|X|$ l'ensemble des points fermés de X .

Soit F le corps des fonctions de X . On identifie les places de F aux éléments de $|X|$. Pour chaque $x \in |X|$ on peut former le complété F_x de F en la place x . C'est un corps de valuation discrète complet. On notera encore $x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ sa valuation. L'anneau des entiers de F_x est l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_x = \{a_x \in F_x^\times \mid x(a_x) \geq 0\} \cup \{0\}$, $\mathfrak{p}_x = \{a_x \in F_x^\times \mid x(a_x) > 0\} \cup \{0\}$ est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_x$ et le corps résiduel $\kappa(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_x$ est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ dont on notera $\deg(x)$ le degré.

L'anneau (topologique) des adèles de F est le produit restreint

$$\mathbb{A} = \{a = (a_x)_{x \in |X|} \mid a_x \in \mathcal{O}_x \text{ pour presque tout } x\} \subset \prod_{x \in |X|} F_x$$

où l'expression « pour presque tout x » signifie « pour tous les x sauf un nombre fini ». Le corps F se plonge diagonalement dans $\mathbb{A}$ et l'anneau topologique compact $\mathcal{O} := \prod_{x \in |X|} \mathcal{O}_x$ est un sous-anneau de $\mathbb{A}$.

On dispose d'un homomorphisme de groupes $\deg : \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$\deg(a) = \sum_{x \in |X|} \deg(x) x(a_x).$$

Cet homomorphisme est surjectif et est identiquement nul sur $F^\times$ et aussi sur $\mathcal{O}^\times$. Son noyau est compact modulo $F^\times$: en d'autres termes, pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, le groupe quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathcal{O}^\times a^\mathbb{Z}$ est fini.

1.1. Représentations automorphes cuspidales

Soit r un entier ≥ 1 . On considère le groupe adélique $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ des matrices inversibles de taille $r \times r$ et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}$, et ses sous-groupes $\mathrm{GL}_r(F)$ et

$$K = \prod_{x \in |X|} K_x = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) = \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x).$$

On fixe une fois pour toutes une mesure de Haar dg sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et une décomposition $dg = \prod_{x \in |X|} dg_x$ de cette mesure en produit de mesures de Haar locales. Il est commode de normaliser dg et les dg_x par les conditions $\mathrm{vol}(K, dg) = 1$ et $\mathrm{vol}(K_x, dg_x) = 1$.

Une *forme automorphe cuspidale* (pour GL_r sur F) est une fonction $\varphi : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$, $\forall \gamma \in \mathrm{GL}_r(F)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$,
- 2) il existe un sous-groupe $K_\varphi \subset K$ d'indice fini tel que $\varphi(gk) = \varphi(g)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\forall k \in K_\varphi$,
- 3) il existe $a \in \mathbb{A}^\times$ tel que $\deg(a) \neq 0$ et $\varphi(ga) = \varphi(g)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$,
- 4) pour toute décomposition non triviale $r = r_1 + \dots + r_s$ de r en entiers strictement positifs, qui définit un sous-groupe parabolique standard $P = MU \subsetneq \mathrm{GL}_r$ de radical unipotent U et de composante de Levi $M \cong \mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_s}$, le *terme constant*

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \varphi(ug) du,$$

est identiquement nul (ici du est n'importe quelle mesure de Haar sur le quotient compact $U(F) \backslash U(\mathbb{A})$).

Si l'on fixe un élément a_0 de degré non nul dans $\mathbb{A}^\times$, on a

$$L_{\mathrm{cusp}} = \bigcup_{n \geq 1} L_{\mathrm{cusp}}(a_0^n)$$

où, pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, $L_{\mathrm{cusp}}(a) \subset L_{\mathrm{cusp}}$ est le sous-espace défini en imposant ce a particulier dans la propriété 3).

Toujours pour $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, on montre que toute fonction $\varphi \in L_{\text{cusp}}(a)$ est à support compact sur $\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}$, et on peut donc munir $L_{\text{cusp}}(a)$ du produit scalaire hermitien défini positif

$$(\varphi_1, \varphi_2) := \int_{\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}} \overline{\varphi_1(g)} \varphi_2(g) dg.$$

Le groupe $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ agit par translation à droite sur l'espace vectoriel complexe

$$L_{\text{cusp}} = L_{\text{cusp}}(\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A}))$$

des formes automorphes cuspidales. Cette représentation est *lisse* (le fixateur de tout vecteur dans L_{cusp} est un sous-groupe ouvert de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$). Comme on a fixé une mesure de Haar dg sur $\text{GL}_r(\mathbb{A})$, la donnée de cette représentation équivaut à celle d'une structure de $\mathcal{H}$ -module sur L_{cusp} , où l'*algèbre de Hecke*

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}_c^\infty(\text{GL}_r(\mathbb{A}))$$

est l'algèbre de convolution des fonctions complexes, localement constantes et à support compact, sur $\text{GL}_r(\mathbb{A})$.

Pour chaque $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, l'action de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ respecte le sous-espace $L_{\text{cusp}}(a)$. La représentation induite sur ce sous-espace est *admissible* (pour tout sous-groupe $K' \subset K$ d'indice fini, l'espace vectoriel des invariants sous K' dans $L_{\text{cusp}}(a)$ est de dimension finie). Elle est de plus *unitaire* pour le produit scalaire défini ci-dessus. La représentation de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ sur L_{cusp} est donc semi-simple : elle admet une décomposition isotypique

$$L_{\text{cusp}} \cong \bigoplus_{\pi} V_{\pi}^{\oplus m(\pi)}$$

où π parcourt un système de représentants des classes d'isomorphie de représentations complexes irréductibles admissibles de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$, où V_{π} est l'espace de π (en général de dimension infinie) et où les multiplicités $m(\pi)$ sont des entiers ≥ 0 .

DÉFINITION. — Une représentation automorphe cuspidale irréductible (pour GL_r sur F) est une représentation complexe admissible irréductible de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ qui est isomorphe à un facteur direct de L_{cusp} .

On notera $\mathcal{A}_r$ un système de représentants des classes d'isomorphie de ces représentations automorphes cuspidales irréductibles. Chaque $\pi \in \mathcal{A}_r$ admet un caractère central $\omega_{\pi} : F^\times \backslash \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui est d'ordre fini puisque $\omega_{\pi}(a) = 1$ pour au moins un $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul.

THÉORÈME (Théorème de multiplicité un, [PS 2], [Sh]). — On a

$$L_{\text{cusp}} \cong \bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} V_{\pi}.$$

En d'autres termes, les multiplicités dans la décomposition isotypique de la représentation L_{cusp} de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ sont données par $m(\pi) = 1$ si π est automorphe cuspidale et $m(\pi) = 0$ sinon.

Pour tout $x \in |X|$, on définit aussi l'algèbre de Hecke locale

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{C}_c^\infty(\text{GL}_r(F_x)).$$

C'est l'algèbre de convolution pour la mesure de Haar dg_x sur $\text{GL}_r(F_x)$. L'espace de toute représentation lisse de $\text{GL}_r(F_x)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}_x$ -module.

On notera $e_{K_x} \in \mathcal{H}_x$ la fonction caractéristique de $K_x = \text{GL}_r(\mathcal{O}_x)$ dans $\text{GL}_r(F_x)$ et on appellera algèbre de Hecke locale *non ramifiée* la sous-algèbre

$$\mathcal{H}_x(K_x) = e_{K_x} * \mathcal{H}_x * e_{K_x} \subset \mathcal{H}_x.$$

C'est une algèbre commutative unitaire munie d'un isomorphisme, construit par Satake,

$$\mathcal{H}_x(K_x) \cong \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_r, z_r^{-1}]^{\mathfrak{S}_r},$$

où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ agit par permutation des indéterminées $z_1, \dots, z_r$. En particulier, si (π_x, V_{π_x}) est une représentation admissible irréductible de $\text{GL}_r(F_x)$ *non ramifiée*, c'est-à-dire telle que $V_{\pi_x}^{K_x} \neq (0)$, on a en fait

$$\dim(V_{\pi_x}^{K_x}) = 1$$

et le $\mathcal{H}_x(K_x)$ -module $V_{\pi_x}^{K_x}$ de rang 1 et aussi la représentation (π_x, V_{π_x}) sont (à isomorphisme près) uniquement déterminés par la donnée d'un r -uplet non ordonné

$$(z_1(\pi_x), \dots, z_r(\pi_x))$$

de nombres complexes non nuls, appelés les *valeurs propres de Hecke* de π_x .

L'algèbre de Hecke globale $\mathcal{H}$ est le produit tensoriel restreint

$$\mathcal{H} = \varinjlim_S \left(\bigotimes_{x \in S} \mathcal{H}_x \right) \otimes \left(\bigotimes_{x \notin S} e_{K_x} \right)$$

des algèbres de Hecke locales, où S parcourt l'ensemble des parties finies de $|X|$. Une représentation admissible irréductible (π, V_π) de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ admet donc, pour chaque $x \in |X|$, une composante locale (π_x, V_{π_x}) qui est une représentation irréductible admissible de $\text{GL}_r(F_x)$ bien définie à isomorphisme près. Pour presque tout x , π est non ramifiée en x , c'est-à-dire admet une composante locale non ramifiée en x , et π est le produit tensoriel restreint

$$\pi \cong \bigotimes_{x \in |X|}' \pi_x$$

de ses composantes locales. (Une fois que l'on a fixé une base v_x de $V_{\pi_x}^{K_x}$ pour chaque place x non ramifiée pour π , l'espace de la représentation du membre de droite est par définition la limite inductive

$$\varinjlim_S \left(\bigotimes_{x \in S} V_{\pi_x} \right) \otimes \left(\bigotimes_{x \notin S} v_x \right)$$

pour S parcourant l'ensemble des parties finies de $|X|$ qui contiennent toutes les places ramifiées pour π .)

On définit la *fonction L partielle* de π comme le produit eulérien formel

$$L^{S_\pi}(\pi, T) = \prod_{x \notin S_\pi} L(\pi_x, T) = \prod_{x \notin S_\pi} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\pi_x) T^{\deg(x)})} \in \mathbb{C}[[T]]$$

où $S_\pi \subset |X|$ est l'ensemble fini des places ramifiées de π . Godement et Jacquet ([G-J]) ont démontré que le produit eulérien $L^{S_\pi}(\pi, q^{-s})$ converge absolument dans un demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ pour un nombre réel σ assez grand, et que la série formelle en T définie par $L^{S_\pi}(\pi, T)$ est en fait le développement d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(T)$, et même d'un polynôme dans $\mathbb{C}[T]$ si $r \geq 2$.

1.2. Représentations du groupe de Galois

On fixe une clôture séparable $\overline{F}$ de F et on note Γ_F le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F . Pour chaque $x \in |X|$ on choisit arbitrairement un sous-groupe de décomposition $D_x \subset \Gamma_F$ en x . Ce groupe de décomposition est le groupe de Galois Γ_{F_x} d'une certaine clôture séparable $\overline{F}_x$ de F_x . On note $I_x \subset D_x$ le sous-groupe d'inertie de ce groupe de décomposition. Le groupe quotient D_x/I_x est isomorphe au groupe de Galois $\Gamma_{\kappa(x)}$ de $\overline{\kappa(x)}$ sur $\kappa(x)$ pour une certaine clôture algébrique $\overline{\kappa(x)}$ de $\kappa(x)$ et est donc isomorphe à $\operatorname{Frob}_x^{\mathbb{Z}}$ où $\operatorname{Frob}_x \in \Gamma_{\kappa(x)}$ est l'élément de Frobenius géométrique (l'inverse de l'élévation à la puissance $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)}$).

Muni de la topologie de Krull, Γ_F est un groupe topologique pro-fini, dont les représentations complexes continues et de dimension finie se factorisent nécessairement par un quotient fini. Suivant Serre et Grothendieck, on obtient une catégorie plus vaste de représentations de Γ_F en remplaçant le corps des coefficients $\mathbb{C}$ par un corps ℓ -adique. Fixons donc un nombre premier auxiliaire ℓ , distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, et fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$.

Une *représentation ℓ -adique* σ de Γ_F est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel V_σ de dimension finie, muni d'un homomorphisme de groupes $\sigma : \Gamma_F \rightarrow \operatorname{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V_\sigma)$, ayant les propriétés suivantes :

1) il existe une base de V_σ identifiant $\operatorname{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V_\sigma)$ à $\operatorname{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, où r est la dimension de V_σ , et une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ telles que $\sigma(\Gamma_F) \subset \operatorname{GL}_r(E_\lambda) \subset \operatorname{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,

2) $\sigma : \Gamma_F \rightarrow \operatorname{GL}_r(E_\lambda)$ est continu pour la topologie de Krull sur Γ_F et la topologie ℓ -adique sur $\operatorname{GL}_r(E_\lambda)$,

3) pour presque tout $x \in |X|$, σ est *non ramifiée* en x , c'est-à-dire que la restriction σ_x de σ au sous-groupe de décomposition $D_x \subset \Gamma_F$ est triviale sur le sous-groupe d'inertie $I_x \subset D_x$.

Ces représentations forment une catégorie abélienne où tout objet est de longueur finie.

Soit $\mathcal{G}_r$ un système de représentants des classes d'isomorphie de représentations ℓ -adiques irréductibles de rang r de Γ_F dont le déterminant (la puissance extérieure maximale) est d'ordre fini. Pour chaque $\sigma \in \mathcal{G}_r$, on note S_σ l'ensemble fini des places de F où σ est ramifiée. Pour chaque $x \notin S_\sigma$, on dispose de l'automorphisme $\sigma_x(\text{Frob}_x)$ de V_σ , et on note

$$(z_1(\sigma_x), \dots, z_r(\sigma_x))$$

les *valeurs propres de Frobenius de σ en x* , c'est-à-dire le r -uplet non ordonné d'éléments non nuls de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ formé des valeurs propres de $\sigma_x(\text{Frob}_x)$. La *fonction L partielle* de σ est par définition le produit eulérien formel

$$L^{S_\sigma}(\sigma, T) = \prod_{x \in |X| - S_\sigma} L(\sigma_x, T) = \prod_{x \in |X| - S_\sigma} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x) T^{\deg(x)})} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[[T]].$$

Il résulte de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz ([Gr]) que cette série formelle est le développement d'une fraction rationnelle dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(T)$, et même d'un polynôme dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T]$ si $r \geq 2$.

1.3. La correspondance de Langlands et ses conséquences

On fixe un isomorphisme de corps $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ (il en existe d'après l'axiome du choix). On notera encore ι les isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(T)$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[T]]$) sur $\mathbb{C}(T)$ (resp. $\mathbb{C}[[T]]$) induits par ι .

THÉORÈME PRINCIPAL. — (i) (Correspondance de Langlands) *Il existe une unique bijection*

$$\mathcal{A}_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_r, \quad \pi \mapsto \sigma(\pi),$$

telle que, pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$\iota(L(\sigma(\pi)_x, T)) = L(\pi_x, T),$$

pour presque tout $x \notin S_{\sigma(\pi)} \cup S_\pi$.

(ii) (Conjecture de Ramanujan-Petersson) *Pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ et toute place $x \notin S_\pi$ on a*

$$|z_i(\pi_x)| = 1, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Le cas $r = 1$ de ce théorème est une reformulation de la théorie du corps de classes abélien pour les corps de fonctions. Le cas $r = 2$ a été démontré par Drinfeld ([Dr 6], [Dr 7]). Le cas général est dû à Lafforgue ([La 9]).

Les conséquences de ce théorème qui sont formulées ci-dessous étaient attendues, et leur déduction du théorème principal est bien connue.

THÉORÈME (Compatibilité avec la correspondance de Langlands locale)

Pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ et tout $x \in |X|$, la représentation de Galois locale $\sigma(\pi)_x$ de $D_x = \Gamma_{F_x}$ est l'image $\sigma_x(\pi_x)$ de la représentation locale π_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ par la correspondance de Langlands locale (cf. [L-R-S]). En particulier, π et $\sigma(\pi)$ ont les mêmes facteurs L locaux en toutes les places de F .

THÉORÈME (Conjecturé par Deligne, [De] (1.2.10)). — Soit $\sigma \in \mathcal{G}_r$.

(i) Le sous-corps $E = E(\sigma)$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients des polynômes $\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x)T)$ pour tous les $x \notin S_\sigma$ est un corps de nombres (une extension finie de $\mathbb{Q}$).

(ii) Pour tout nombre premier ℓ' distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ de $\mathbb{Q}_{\ell'}$ et notons $\mathcal{G}_{r,\ell'}$ l'ensemble $\mathcal{G}_r$ correspondant.

Il existe alors une unique famille de représentations $\sigma_{\ell',\lambda'} \in \mathcal{G}_{r,\ell'}$, indexée par les couples (ℓ', λ') formés d'un nombre premier ℓ' distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ et d'un plongement $\lambda' : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$, et ayant les propriétés suivantes :

- $\sigma = \sigma_{\ell,\lambda}$ où λ est l'inclusion de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$,
- chaque $\sigma_{\ell',\lambda'}$ a le même ensemble de places ramifiées que σ et pour tout $x \notin S_\sigma$ on a l'égalité

$$\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_{\ell',\lambda',x})T) = \lambda' \left(\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x)T) \right) \in \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}[T].$$

THÉORÈME (Conjecturé par Deligne, [De] (1.2.10)). — Soient Y un schéma normal de type fini sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{L}$ un système local ℓ -adique de rang r sur Y . On suppose que $\mathcal{L}$ est irréductible et que sa puissance extérieure maximale $\det(\mathcal{L})$ est d'ordre fini ($\det(\mathcal{L})^{\otimes N}$ est isomorphe au faisceau ℓ -adique constant de valeur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur Y pour tout entier $N \geq 1$ assez divisible). Alors $\mathcal{L}$ est pur de poids 0.

Une conséquence plus indirecte du théorème principal est l'énoncé dit « de descente » dans la première construction de Drinfeld (cf. [Dr 12], [F-G-K-V], [Lau 5], [Lau 6]) des faisceaux automorphes partout non ramifiés pour GL_r sur une courbe lisse, projective et géométriquement connexe sur un corps arbitraire (éventuellement de caractéristique nulle).

1.4. Historique

L'outil principal, inventé par Drinfeld et utilisé par Drinfeld et Lafforgue pour démontrer le théorème principal, est le champ modulaire des chtoucas. Avant de découvrir ce champ, Drinfeld avait introduit des variétés modulaires sur les corps de fonctions très semblables aux variétés de Shimura sur les corps de nombres : les variétés de *modules elliptiques* (ou de *faisceaux elliptiques*). L'utilisation de ces variétés avait permis de construire $\sigma(\pi)$ sous certaines conditions sur la représentation locale π_∞ en une place donnée $\infty \in |X|$. Ainsi, Drinfeld ([Dr 9] et [Dr 10]) avait construit $\sigma(\pi)$ quand $r = 2$ et π_∞ est dans la série discrète, et Flicker et Kazhdan, puis moi-même,

avons généralisé cette construction de Drinfeld, pour r arbitraire, dans les cas où π_∞ est soit supercuspidale ([F-K]), soit la représentation de Steinberg ([Lau 1], [Lau 2]).

L'assertion d'unicité du théorème principal était connue depuis longtemps : elle est en effet une conséquence immédiate du théorème de densité de Čebotarev ([Se]). Il en était de même de l'injectivité de l'application $\pi \rightarrow \sigma(\pi)$ qui est automatique d'après le théorème de multiplicité un fort de Piatetski-Shapiro ([PS 2]).

Deligne avait remarqué un principe de récurrence permettant de déduire la surjectivité de l'application $\pi \rightarrow \sigma(\pi)$ de son existence. Plus précisément, si pour tout $r' = 1, \dots, r-1$, on a construit une application $\pi' \rightarrow \sigma'(\pi')$ de $\mathcal{A}_{r'} \rightarrow \mathcal{G}_{r'}$ telle que, quel que soit $\pi' \in \mathcal{A}_{r'}$, on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$\iota(L(\sigma'(\pi')_x, T)) = L(\pi'_x, T)$$

pour presque tout $x \notin S_{\sigma'(\pi')} \cup S_{\pi'}$, alors l'équation fonctionnelle de Grothendieck ([Gr]), la formule du produit pour la constante de cette équation fonctionnelle ([Lau 7]) et le théorème inverse de Hecke, Weil et Piatetski-Shapiro ([PS 1], [C-PS]) permettent de définir une application

$$\mathcal{G}_r \rightarrow \mathcal{A}_r, \sigma \mapsto \pi(\sigma),$$

telle que, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_r$, on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$\iota(L(\pi(\sigma)_x, T)) = L(\sigma_x, T)$$

pour presque tout $x \notin S_\sigma \cup S_{\pi(\sigma)}$.

Lafforgue avait obtenu auparavant un énoncé très proche de la conjecture de Ramanujan-Petersson ([La 1]) comme une conséquence de la description adélique de Drinfeld des chtoucas sur les corps finis ([Dr 6]), de la formule des traces d'Arthur-Selberg ([Ar]), de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz ([Gr]), du théorème de pureté de Deligne ([De]) et des estimées de Jacquet-Shalika pour les valeurs propres de Hecke des représentations automorphes cuspidales irréductibles ([J-S 1]).

1.5. La stratégie

La stratégie utilisée par Drinfeld et Lafforgue pour définir l'application $\pi \rightarrow \sigma(\pi)$ de $\mathcal{A}_r$ dans $\mathcal{G}_r$ est inspirée des travaux de Shimura, Ihara, Deligne, Langlands, ... Sous sa forme la plus naïve elle peut se décrire comme suit :

On construit un schéma V sur F muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ de telle sorte que la cohomologie ℓ -adique à supports compacts

$$H_c^*(\overline{F} \otimes_F V, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

soit une représentation du produit de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et du groupe de Galois Γ_F .

Puis on calcule la trace de cette représentation par la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz.

Enfin on compare cette formule des points fixes avec la formule des traces d'Arthur-Selberg pour prouver que la représentation

$$\bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi \otimes \sigma(\pi)$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \Gamma_F$ que l'on cherche est exactement la partie « cuspidale » de $H_c^*(\overline{F} \otimes_F V, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

En fait, comme la cohomologie ℓ -adique ci-dessus est automatiquement définie sur $\mathbb{Q}_\ell$, il y a une obstruction (de rationalité) à mener à bien un tel programme (cf. [Ka]) et la stratégie doit être légèrement modifiée. Comme l'a proposé Drinfeld, c'est plutôt la représentation

$$\bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi \otimes \sigma(\pi)^\vee \otimes \sigma(\pi)$$

du produit $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \Gamma_F \times \Gamma_F$, où $\sigma(\pi)^\vee$ est la représentation contragrédiente de $\sigma(\pi)$, que l'on peut espérer obtenir comme la partie cuspidale de la cohomologie ℓ -adique à supports compacts d'un schéma sur $F \otimes F$.

2. CHTOUCAS DE DRINFELD

2.1. Le champ des chtoucas

Tous les schémas (ou champs) considérés seront sur $\mathbb{F}_q$; on dira donc schéma (ou champ) au lieu de $\mathbb{F}_q$ -schéma (ou $\mathbb{F}_q$ -champ) et on notera simplement $U \times T$ le produit $U \times_{\mathbb{F}_q} T$ de deux tels schémas (ou champs). Pour tout schéma (ou champ) U , on notera $\mathrm{Frob}_U : U \rightarrow U$ son endomorphisme de Frobenius relativement à $\mathbb{F}_q$: si U est un schéma, Frob_U est donc l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à U et l'élévation à la puissance q -ième sur le faisceau structural $\mathcal{O}_U$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Module, on notera ${}^\tau \mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Module $(\mathrm{Frob}_U \times \mathrm{Id}_X)^* \mathcal{M}$.

DÉFINITION (Drinfeld). — *Un chtouca à droite (resp. à gauche) $\tilde{\mathcal{E}}$ de rang $r \geq 1$ sur un schéma U est un diagramme dans la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^\tau \mathcal{E} \quad (\text{resp. } \mathcal{E} \xleftarrow{t} \mathcal{E}' \xrightarrow{j} {}^\tau \mathcal{E})$$

où :

- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont localement libres de rang r ,
- j et t sont injectifs,
- les conoyaux de j et t sont supportés par les graphes $\Gamma_\infty \subset U \times X$ et $\Gamma_o \subset U \times X$ de deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, et sont localement libres de rang 1 sur leurs supports.

Les morphismes ∞ et o sont appelés respectivement le pôle et le zéro du chtouca.

En d'autres termes, un chtouca à droite de rang r est la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r , d'une modification élémentaire supérieure $j : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, d'une modification élémentaire inférieure $j' : \mathcal{E}'' \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}'$ et d'un isomorphisme $u : {}^\tau \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$. On a bien sûr une description similaire pour les chtoucas à gauche.

En faisant varier U , on définit de manière évidente le champ Cht^r des chtoucas à droite de rang r , un morphisme $(\infty, o) : \text{Cht}^r \rightarrow X \times X$ et un chtouca à droite de rang r universel sur $\text{Cht}^r \times X$ de pôle et de zéro les deux composantes de ce morphisme. De même, on a le champ ${}^r\text{Cht}$ des chtoucas à gauche de rang r , un morphisme $(\infty, o) : {}^r\text{Cht} \rightarrow X \times X$ et un chtouca à gauche de rang r universel.

On a des morphismes de Frobenius partiels

$$\text{Frob}_\infty : {}^r\text{Cht} \rightarrow \text{Cht}^r \text{ et } \text{Frob}_o : \text{Cht}^r \rightarrow {}^r\text{Cht}$$

au-dessus de $(\infty, o) \mapsto (\infty, \text{Frob}_X(o))$ et $(\infty, o) \mapsto (\text{Frob}_X(\infty), o)$, qui envoient $\tilde{\mathcal{E}}$ sur $(\mathcal{E}' \xrightarrow{j} {}^\tau \mathcal{E} \xleftarrow{{}^\tau \mathcal{E}'} \mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}' \xleftarrow{{}^\tau \mathcal{E}} \mathcal{E} \xrightarrow{{}^\tau \mathcal{E}'} \mathcal{E}')$ respectivement.

Dans la suite et sauf mention explicite du contraire, les chtoucas seront tous à droite, et on dira simplement « chtouca » pour « chtouca à droite ». Les résultats démontrés pour les chtoucas à droite ont bien entendu des analogues pour les chtoucas à gauche.

PROPOSITION (Drinfeld). — *Le champ Cht^r est algébrique au sens de Deligne-Mumford. Le morphisme $(\infty, o) : \text{Cht}^r \rightarrow X \times X$ est lisse, purement de dimension relative $2r - 2$.*

Le champ Cht^r s'écrit comme réunion disjointe

$$\text{Cht}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \text{Cht}^{r,d}$$

où $\text{Cht}^{r,d}$ classifie les chtoucas de degré

$$d = \deg \mathcal{E} = \deg \mathcal{E}' - 1.$$

Exemple. — Pour tout entier d , $\text{Cht}^{1,d}$ peut être défini comme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Cht}^{1,d} & \longrightarrow & \text{Fib}^{1,d} \\ \downarrow & \square & \downarrow L \\ X \times X & \xrightarrow{J} & \text{Fib}^{1,0} \end{array}$$

où $\text{Fib}^{1,d}$ est le champ algébrique des fibrés en droites de degré d sur X , J est l'application d'Abel-Jacobi qui envoie $(\infty, o) \in (X \times X)(U)$ sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{U \times X}(\infty - o)$, et L est l'isogénie de Lang qui envoie un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $U \times X$ sur le fibré en droites $\mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{U \times X}} {}^\tau \mathcal{L}$.

En particulier, $\text{Cht}^{1,d}$ est de type fini et admet un espace grossier qui est un revêtement fini étale galoisien de $X \times X$.

Mais, mis à part le cas $r = 1$, aucun des champs $\text{Cht}^{r,d}$ n'est de type fini.

2.2. Troncatures

Soient k un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ un chtouca sur (le spectre de) k . On appelle *sous-objet* de $\tilde{\mathcal{E}}$, et on note simplement

$$\tilde{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{E}},$$

la donnée de deux sous- $\mathcal{O}_{k \otimes X}$ -Modules $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ soient localement libres de même rang et que $j(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ et $t({}^\tau \mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$; à un tel sous-objet on peut associer son *rang*

$$\text{rg } \tilde{\mathcal{F}} = \text{rg } \mathcal{F} = \text{rg } \mathcal{F}'$$

et, pour chaque nombre réel α , son degré (d'indice α)

$$\deg_\alpha \tilde{\mathcal{F}} = (1 - \alpha) \deg \mathcal{F} + \alpha \deg \mathcal{F}'.$$

Si $0 = \tilde{\mathcal{F}}_0 \subsetneq \tilde{\mathcal{F}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \tilde{\mathcal{F}}_s = \tilde{\mathcal{E}}$ est une filtration de $\tilde{\mathcal{E}}$ par des sous-objets comme ci-dessus, on peut lui associer son polygone (d'indice α) qui est la fonction affine par morceaux

$$p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

avec $p(0) = p(r) = 0$, dont les seules ruptures de pentes interviennent en les entiers $\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, s-1$, et qui prend en ces entiers-là la valeur

$$p(\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma) = \deg_\alpha \tilde{\mathcal{F}}_\sigma - \frac{\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma}{r} \deg_\alpha \tilde{\mathcal{E}}.$$

PROPOSITION. — *Fixons un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$. Alors, parmi tous les polygones attachés aux filtrations de $\tilde{\mathcal{E}}$ comme ci-dessus, il en existe un plus grand que tous les autres, et parmi toutes les filtrations qui définissent ce polygone maximal il en existe une moins fine que tous les autres.*

Le polygone et la filtration dont la proposition ci-dessus assurent l'existence sont appelés respectivement le *polygone de Harder-Narasimhan* et la *filtration de Harder-Narasimhan* d'indice α du chtouca $\tilde{\mathcal{E}}$.

Nous appellerons *paramètre de troncature* toute fonction continue, convexe, affine par morceaux $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $p(0) = p(r) = 0$ dont les points de ruptures de pente ont des abscisses entières.

PROPOSITION. — *Étant donnés $\alpha \in [0, 1]$ et un paramètre de troncature p , il existe un unique ouvert $\text{Cht}^{r; \leq \alpha p}$ du champ Cht^r tel qu'un chtouca sur un corps algébriquement clos est dans cet ouvert si et seulement si son polygone de Harder-Narasimhan d'indice α est majoré par p .*

De plus, pour chaque entier d , l'ouvert

$$\text{Cht}^{r,d; \leq \alpha p} := \text{Cht}^{r; \leq \alpha p} \cap \text{Cht}^{r,d}$$

du champ $\text{Cht}^{r,d}$ est de type fini.

On voit donc que, pour chaque entier d , le champ algébrique localement de type fini $\text{Cht}^{r,d}$ est réunion filtrante des ouverts de type fini $\text{Cht}_\alpha^{r,d;\leq p}$.

2.3. Structures de niveau sur les chtoucas

Comme les courbes elliptiques, les chtoucas admettent des structures de niveau. Un *niveau* est ici un sous-schéma fermé fini

$$N = \text{Spec}(\mathcal{O}_N) \subset X.$$

Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur $U \times X$ pour un schéma (ou un champ) U , on notera simplement $\mathcal{E}_N$ la restriction de $\mathcal{E}$ au fermé $U \times N \subset U \times X$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{U \times N}$ -Module on notera encore ${}^\tau \mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_{U \times N}$ -Module $(\text{Frob}_U \times \text{Id}_N)^* \mathcal{M}$. Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $U \times X$ on a évidemment ${}^\tau(\mathcal{E}_N) \cong ({}^\tau \mathcal{E})_N$.

On considère le champ algébrique

$$\text{Tr}_N^r$$

qui associe au schéma U la catégorie des couples $(\mathcal{F}, u)$ formés d'un fibré vectoriel de rang r sur $U \times N$ et d'un isomorphisme de fibrés vectoriels $u : {}^\tau \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. Si l'on note $\text{GL}_r^N = \text{Res}_{N/\text{Spec}(\mathbb{F}_q)} \text{GL}_r$ le schéma en groupes sur $\mathbb{F}_q$ restriction à la Weil du schéma en groupes linéaire GL_r sur N et par $h \mapsto \tau(h) = \text{Frob}_{\text{GL}_r}(h)$ son endomorphisme de Frobenius (relatif à $\mathbb{F}_q$), ce champ n'est autre que le quotient

$$\text{Tr}_N^r = [\text{GL}_r^N / {}^\tau \text{Ad}(\text{GL}_r^N)]$$

de GL_r^N par l'action de GL_r^N sur lui-même par la conjugaison tordue

$${}^\tau \text{Ad}(h)(g) = \tau(h)^{-1}gh.$$

Comme l'*isogénie de Lang*

$$L : \text{GL}_r^N \rightarrow \text{GL}_r^N, h \mapsto L(h) = \tau(h)^{-1}h,$$

est un tore sous le groupe fini $\text{GL}_r(\mathcal{O}_N) = \text{GL}_r^N(\mathbb{F}_q)$ (pour son action par translation à droite sur GL_r^N), Tr_N^r est canoniquement isomorphe au champ classifiant $[\text{Spec}(\mathbb{F}_q)/\text{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$.

On ne munira ici de structures de niveau que les chtoucas dont le pôle et le zéro ne rencontrent pas N . Si

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xleftarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^\tau \mathcal{E})$$

est un tel chtouca sur U on remarque que les restrictions

$$j_N : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}'_N \text{ et } t_N : {}^\tau(\mathcal{E}_N) \cong ({}^\tau \mathcal{E})_N \rightarrow \mathcal{E}'_N$$

des flèches j et t sont des isomorphismes de $\mathcal{O}_{U \times N}$ -Modules. On a donc un morphisme de champs algébriques

$$\text{Cht}^r \times_{X^2} (X - N)^2 \longrightarrow \text{Tr}_N^r, \tilde{\mathcal{E}} \mapsto (\mathcal{E}_N, j_N^{-1} \circ t_N).$$

DÉFINITION (Drinfeld). — Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ un chtouca de rang r sur un schéma U dont le pôle et le zéro se factorisent par l'immersion ouverte $X - N \hookrightarrow X$. Une structure (principale) de niveau N sur ce chtouca est la donnée d'un isomorphisme

$$\iota : \mathcal{O}_{U \times N}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_N$$

tel que

$$\iota = (j_N^{-1} \circ t_N) \circ {}^\tau \iota : \mathcal{O}_{U \times N}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_N.$$

On définit de manière évidente le champ Cht_N^r des chtoucas de rang r , dont le pôle et le zéro ne rencontrent pas N , et avec structures de niveau N . On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Cht}_N^r & \xrightarrow{\quad} & \text{Tr}_N^{r,\tau} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Cht}^r \times_{X^2} (X - N)^2 & \longrightarrow & \text{Tr}_N^r \end{array}$$

où la flèche horizontale du bas est la flèche de restriction à N définie ci-dessus, où $\text{Tr}_N^{r,\tau}$ est le champ qui associe au schéma U la catégorie des triplets $(\mathcal{F}, u, \iota)$ formés d'un objet $(\mathcal{F}, u)$ de $\text{Tr}_N^r(U)$ et d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{U \times N}$ -Modules $\iota : \mathcal{O}_{U \times N}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ tel que $\iota = u \circ {}^\tau \iota$, et où la flèche verticale de droite est l'oubli de la composante ι . On remarquera que la composante ι de $(\mathcal{F}, u, \iota)$ détermine uniquement la composante u et donc que $\text{Tr}_N^{r,\tau}$ est canoniquement isomorphe au champ $[\text{GL}_r^N / \text{GL}_r^N]$ quotient de GL_r^N par l'action de GL_r^N sur lui-même par translation à droite, c'est-à-dire au schéma réduit à un point $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Par conséquent, la flèche verticale de droite du carré ci-dessus se décrit encore, soit comme la flèche $[\text{GL}_r^N / \text{GL}_r^N] \rightarrow [\text{GL}_r^N / {}^\tau \text{Ad}(\text{GL}_r^N)]$ induite par l'isogénie de Lang L , soit comme le $\text{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ -torseur canonique $\text{Spec}(\mathbb{F}_q) \rightarrow [\text{Spec}(\mathbb{F}_q) / \text{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$.

La flèche verticale de gauche est donc un $\text{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ -torseur et Cht_N^r est un champ algébrique, lisse purement de dimension $2r - 2$ sur $(X - N)^2$.

3. HOMOMORPHISMES COMPLETS ET CHTOUCAS ITÉRÉS

3.1. Homomorphismes complets

Soient k un corps et V et W deux k -espaces vectoriels de dimension r . On notera $H(V, W)$ le schéma des uplets

$$(u_1, \dots, u_r; \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$$

où, pour $\rho = 1, \dots, r$, u_ρ est une application linéaire non nulle de $\wedge^\rho V$ dans $\wedge^\rho W$ et où $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sont des scalaires. Les conditions

- u_1 est un isomorphisme,
- $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sont inversibles,
- $\wedge^\rho u_1 = \lambda_1^{\rho-1} \lambda_2^{\rho-2} \cdots \lambda_{\rho-1} u_\rho$ pour $\rho = 2, \dots, r$,

définissent un sous-schéma localement fermé $\Omega^\circ(V, W)$ de ce schéma affine et la projection $(u_1; \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ identifie $\Omega^\circ(V, W)$ au schéma $\text{Isom}(V, W) \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}$. Nous noterons

$$\Omega(V, W) \subset H(V, W)$$

l'adhérence schématique de $\Omega^\circ(V, W)$ dans $H(V, W)$.

Le schéma $\mathbb{A}_k^{r-1}$ est naturellement muni d'un diviseur à croisements normaux, réunion de $r-1$ diviseurs lisses, à savoir les diviseurs $\{\lambda_\rho = 0\}$ pour $\rho = 1, \dots, r-1$. Ce diviseur à croisement normaux définit de la manière habituelle une stratification localement fermée de $\mathbb{A}_k^{r-1}$, indexée par les parties R de $[r-1] = \{1, \dots, r-1\}$ et de R -ième strate

$$\mathbb{A}_{k,R}^{r-1} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \mid \lambda_\rho = 0 \Leftrightarrow \rho \in R\} \cong \mathbb{G}_{m,k}^{[r-1]-R}.$$

Par construction, on dispose d'un morphisme

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) : \Omega(V, W) \rightarrow \mathbb{A}_k^{r-1}.$$

et on peut relever à $\Omega(V, W)$ le diviseur et la stratification de $\mathbb{A}_k^{r-1}$ que l'on vient d'introduire. En particulier, pour tout sous-ensemble $R \subset [r-1]$, on notera

$$\Omega_R(V, W) \subset \Omega(V, W)$$

l'image réciproque par ce morphisme de la strate localement fermée $\mathbb{A}_{k,R}^{r-1} \subset \mathbb{A}_k^{r-1}$. On vérifie que $\Omega_\emptyset(V, W) = \Omega^\circ(V, W)$.

PROPOSITION. — *Pour chaque $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{s-1}\} \subset [r-1]$ où $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$, $\Omega_R(V, W)$ est isomorphe au schéma des uplets*

$$(V^\bullet, W_\bullet, (v_\sigma)_{\sigma=1, \dots, s-1}; (\lambda_\rho)_{\rho \in [r-1]-R})$$

où :

- les λ_ρ sont des scalaires inversibles ;
- $V^\bullet = (V = V^0 \supsetneq V^1 \supsetneq \dots \supsetneq V^s = (0))$ est une filtration décroissante par des sous-espaces vectoriels de codimensions $0 = r_0, r_1, \dots, r_s = r$;
- $W_\bullet = ((0) = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_s = W)$ est une filtration croissante par des sous-espaces vectoriels de dimensions $0 = r_0, r_1, \dots, r_s = r$;
- $v_\sigma : V^{\sigma-1}/V^\sigma \xrightarrow{\sim} W_\sigma/W_{\sigma-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

A fortiori, le morphisme $(\lambda_\rho)_{\rho \in [r-1]-R} : \Omega_R(V, W) \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{[r-1]-R}$ est lisse de dimension relative r^2 .

Remarque. — L'écriture $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{s-1}\}$ où $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$ identifie les parties de $[r-1]$ aux décompositions $r = (r_1 - r_0) + (r_2 - r_1) + \dots + (r_s - r_{s-1})$ de r en entiers strictement positifs.

COROLLAIRE. — *Le morphisme $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ est lisse purement de dimension relative r^2 et $\Omega^\circ(V, W) \subset \Omega(V, W)$ est l'ouvert complémentaire d'un diviseur à croisements normaux, réunion des $r-1$ diviseurs lisses $\{\lambda_\rho = 0\}$ pour $\rho = 1, \dots, r-1$.*

Le tore $\mathbb{G}_{m,k}^{r-1} = \{(\mu_1, \dots, \mu_{r-1})\}$ agit librement sur $\Omega(V, W)$ par

$$u_1 \mapsto u_1, \quad u_2 \mapsto \mu_1^{-1} u_2, \quad u_3 \mapsto \mu_1^{-2} \mu_2 u_3, \quad \dots, \quad u_r \mapsto \mu_1^{1-r} \mu_2^{2-r} \dots \mu_{r-1} u_r,$$

et

$$\lambda_1 \mapsto \mu_1 \lambda_1, \quad \lambda_2 \mapsto \mu_2 \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_{r-1} \mapsto \mu_{r-1} \lambda_{r-1},$$

et le quotient

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) := \Omega(V, W) / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}$$

est un schéma quasi-projectif et lisse, qui contient comme ouvert dense $\text{Isom}(V, W)$ avec pour fermé complémentaire une réunion de $r - 1$ diviseurs lisses à croisements normaux. C'est par définition le *schéma des homomorphismes complets de V dans W* . Par construction, on a un morphisme représentable, lisse et purement de dimension relative r^2 , de champs algébriques

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) \rightarrow [\mathbb{A}_k^{r-1} / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}],$$

et le diviseur à croisements normaux ci-dessus est l'image réciproque par ce morphisme du diviseur à croisements normaux évident sur le champ algébrique $[\mathbb{A}_k^{r-1} / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}]$.

Si $V = W = k^r$ on notera encore $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}$ le k -schéma $\widetilde{\text{Hom}}(k^r, k^r)$ des *endomorphismes complets* de k^r . La strate ouverte de $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}$ est bien entendu $\text{GL}_{r,k}$.

Remarque. — (i) Le morphisme

$$u_1 : \widetilde{\text{Hom}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W) - \{0\}$$

peut aussi être obtenu comme le composé

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) = H_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 = \text{Hom}(V, W) - \{0\}$$

où $H_1 \rightarrow H_0$ est l'éclatement de H_0 le long du fermé des homomorphismes de rang 1 et où, pour $\rho = 2, \dots, r-1$, $H_\rho \rightarrow H_{\rho-1}$ est l'éclatement de $H_{\rho-1}$ le long du transformé strict du fermé de H_0 formé des homomorphismes de rang $\leq \rho$.

(ii) Le groupe multiplicatif agit par homothétie sur les homomorphismes complets. Le quotient $\widetilde{\text{gl}}_{r,k} / \mathbb{G}_{m,k}$ est un schéma projectif, isomorphe à la compactification de De Concini et Procesi de $\text{PGL}_{r,k}$.

Pour tout k -schéma U , la catégorie $[\mathbb{A}_k^{r-1} / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}](U)$ a pour objets les uplets

$$((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$$

où $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$ sont des $\mathcal{O}_U$ -Modules inversibles et où $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sont des sections globales de ces fibrés en droites. On peut donc voir un U -homomorphisme complet de V dans W , c'est-à-dire un U -point de $\widetilde{\text{Hom}}(V, W)$, comme un uplet

$$u = (u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$$

où $((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})) \in \text{ob} [\mathbb{A}_k^{r-1} / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}](U)$ et où

$$u_\rho : \bigwedge^\rho V \otimes_k \mathcal{L}_1^{\otimes(\rho-1)} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes(\rho-2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\rho-1} \rightarrow \bigwedge^\rho W$$

est un homomorphisme partout non nul de $\mathcal{O}_U$ -Modules pour $\rho = 1, \dots, r$. Un homomorphisme complet u est donc bien un homomorphisme u_1 complété par des données supplémentaires et peut être noté commodément $u : V \Rightarrow W$.

Soient maintenant S un k -schéma et $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ deux $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres de rang constant r . Si U est un S -schéma, on peut considérer plus généralement les uplets

$$u = (u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$$

où $((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})) \in \text{ob}[\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{m,k}^{r-1}](U)$ et où

$$u_\rho : \bigwedge^\rho \mathcal{V}_U \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes(\rho-1)} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes(\rho-2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\rho-1} \rightarrow \bigwedge^\rho \mathcal{W}_U,$$

est un homomorphisme partout non nul de $\mathcal{O}_U$ -Modules pour $\rho = 1, \dots, r$. (On a noté $\mathcal{V}_U$ et $\mathcal{W}_U$ les restrictions de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ à U .) On dira alors qu'un tel uplet est un *U -homomorphisme complet de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$* , et on utilisera la notation $u : \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$, si, pour toutes trivialisations locales $\mathcal{V} \cong V \otimes_k \mathcal{O}_S$ et $\mathcal{W} \cong W \otimes_k \mathcal{O}_S$, ce uplet est un U -homomorphisme complet de V dans W .

On définit ainsi un S -schéma $\widetilde{\text{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, muni d'un morphisme représentable, lisse et purement de dimension relative r^2 , de champs algébriques

$$\widetilde{\text{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow S \times_k [\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{m,k}^{r-1}]$$

Le S -schéma quasi-projectif $\widetilde{\text{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ contient le S -schéma $\text{Isom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ comme un ouvert dense, et le fermé complémentaire est un diviseur à croisement normaux relatifs sur S , réunion de $r - 1$ diviseurs lisses.

3.2. Chtoucas itérés

DÉFINITION. — *Un pré-chtouca itéré de rang r sur un schéma U est la donnée :*

– *d'un diagramme*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}''$$

et de deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang r sur $U \times X$, j est une modification élémentaire supérieure de $\mathcal{E}$ le long du graphe de o , et j' est une modification élémentaire inférieure de $\mathcal{E}'$ le long du graphe de o ,

- *de $\mathcal{O}_U$ -Modules inversibles $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$ munis de sections globales $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$,*
- *pour chaque entier $\rho = 1, \dots, r$, d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules*

$$u_\rho : \wedge^\rho(\tau \mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)(\rho-1)} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes(q-1)(\rho-2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\rho-1}^{\otimes(q-1)} \rightarrow \wedge^\rho \mathcal{E}'',$$

de telle sorte que le uplet

$$u = (u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)}, \lambda_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(q-1)}, \lambda_{r-1}^{q-1})) : \tau \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}''$$

soit un homomorphisme complet.

En faisant varier U , on définit de manière évidente le champ $\mathcal{C}^r$ des pré-*chtoucas* itérés de rang r . Il n'est pas difficile de vérifier que c'est un champ algébrique (au sens d'Artin), localement de type fini, muni d'un morphisme de champs

$$((\infty, o), ((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))) : \mathcal{C}^r \rightarrow X \times X \times [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}].$$

En particulier, pour tout $R \subset [r-1]$, on dispose de la strate localement fermée $\mathcal{C}_R^r \subset \mathcal{C}^r$ image réciproque de la strate $[\mathbb{A}_R^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] \subset [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$.

D'après la proposition du paragraphe 3.1, si $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\}$ où $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$, la donnée d'un U -point de $\mathcal{C}_R^r$ au-dessus d'un U -point $((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$ de $[\mathbb{A}_R^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ équivaut aux données suivantes :

– un diagramme

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}''$$

et deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang r sur $U \times X$, j est une modification élémentaire supérieure de $\mathcal{E}$ le long du graphe de ∞ et j' est une modification élémentaire inférieure de $\mathcal{E}'$ le long du graphe de o ;

– une filtration décroissante

$${}^\tau \mathcal{E} = \mathcal{F}^0 \supsetneq \mathcal{F}^1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{F}^{s-1} \supsetneq \mathcal{F}^s = (0)$$

de ${}^\tau \mathcal{E}$ par des sous- $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules localement facteurs directs, de corangs $0 = r_0, r_1, \dots, r_{s-1}, r_s = r$;

– une filtration croissante

$$(0) = \mathcal{E}_0'' \subsetneq \mathcal{E}_1'' \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}_{s-1}'' \subsetneq \mathcal{E}_s'' = \mathcal{E}''$$

de $\mathcal{E}''$ par des sous- $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules localement facteurs directs, de rangs $0 = r_0, r_1, \dots, r_{s-1}, r_s = r$;

– une famille d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules

$$v_\sigma : (\mathcal{F}^{\sigma-1}/\mathcal{F}^\sigma) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=1}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_\sigma''/\mathcal{E}_{\sigma-1}'') \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right), \quad \sigma = 1, \dots, s.$$

Pour un tel U -point notons

$$\mathcal{E}'_\sigma = j'(\mathcal{E}''_\sigma) \subset \mathcal{E}', \quad \mathcal{E}_\sigma = j^{-1}(\mathcal{E}'_\sigma) \subset \mathcal{E}, \quad \forall \sigma = 0, 1, \dots, s-1, \text{ et } \mathcal{E}'_s = \mathcal{E}', \quad \mathcal{E}_s = \mathcal{E},$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{G}'_1 = \mathcal{E}'_1 \text{ et } \mathcal{G}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma/\mathcal{E}_{\sigma-1}, \quad \mathcal{G}'_\sigma = \mathcal{F}^{\sigma-1} \cap {}^\tau \mathcal{E}_\sigma, \quad \forall \sigma = 2, \dots, s.$$

On dispose de l'homomorphisme $\mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}'_1$ induit par j et du composé

$${}^\tau \mathcal{G}_1 \hookrightarrow {}^\tau \mathcal{E} \twoheadrightarrow {}^\tau \mathcal{E}/\mathcal{F}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1'' \xrightarrow{j'} \mathcal{G}'_1,$$

et, pour chaque $\sigma = 2, \dots, r$, on dispose du composé

$$\mathcal{G}'_\sigma \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \hookrightarrow \mathcal{F}^{\sigma-1} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \twoheadrightarrow (\mathcal{F}^{\sigma-1}/\mathcal{F}^\sigma) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

$$\xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}''_{\sigma}/\mathcal{E}''_{\sigma-1}) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \xrightarrow{\bar{j}'} (\mathcal{E}'_{\sigma}/\mathcal{E}'_{\sigma-1}) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

où $\bar{j}'$ est induite par j' , de l'homomorphisme

$$\bar{j} : \mathcal{G}_{\sigma} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \rightarrow (\mathcal{E}'_{\sigma}/\mathcal{E}'_{\sigma-1}) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

induit par j , et du composé

$$\mathcal{G}'_{\sigma} \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma} \twoheadrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma}/{}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma-1} = {}^{\tau}\mathcal{G}_{\sigma}.$$

On a donc des diagrammes

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = (\mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}'_1 \hookleftarrow {}^{\tau}\mathcal{G}_1)$$

et

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{G}_{\sigma} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \\ \downarrow \\ (\mathcal{E}'_{\sigma}/\mathcal{E}'_{\sigma-1}) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \hookleftarrow \mathcal{G}'_{\sigma} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{G}_{\sigma} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \end{array} \right)$$

pour $\sigma = 2, \dots, s$.

LEMME. — Pour tout $\rho = 1, \dots, r$, notons u_{ρ}° la restriction de u_{ρ} à l'ouvert de $U \times X$ complémentaire des graphes des morphismes ∞ et o , et identifions les restrictions de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}''$ à cet ouvert à l'aide de $j'^{-1} \circ j$. Avec ces notations les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :

(a) il n'existe aucun point géométrique de U tel que la fibre en ce point d'un des u_{ρ}° soit nilpotente.

(a') pour tout $\sigma = 1, \dots, s-1$, on a $({}^{\tau}j)(\mathcal{F}^{\sigma}) \cap {}^{\tau}\mathcal{E}'_{\sigma} = (0)$ dans ${}^{\tau}\mathcal{E}'$.

De plus, si ces conditions équivalentes sont vérifiées, le plus grand ouvert de $U \times X$ où toutes les flèches des diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma}$ ci-dessus sont des isomorphismes rencontre chaque fibre de la projection canonique $U \times X \rightarrow U$ suivant un ouvert dense.

La condition (a) a été introduite par Drinfeld en rang $r = 2$.

Suivant Lafforgue considérons les conditions supplémentaires suivantes :

(b) $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_{\sigma}$ est un $\mathcal{O}_{U \times S}$ -Module localement libre pour $\sigma = 0, 1, \dots, s-1$,

(c) pour tout $\sigma = 1, \dots, s$, l'homomorphisme composé $\mathcal{E}''_{\sigma} \xrightarrow{j'} \mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{E}'/j(\mathcal{E})$ est surjectif,

(d) pour tout $\sigma = 1, \dots, s-1$, on a $\mathcal{F}^{\sigma-1} + {}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma} = {}^{\tau}\mathcal{E}$,

La condition (c) assure en particulier que

$$\bar{j} : \mathcal{G}_\sigma \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \rightarrow (\mathcal{E}'_\sigma / \mathcal{E}'_{\sigma-1}) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

est un isomorphisme. On peut donc récrire les diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$, $\sigma = 2, \dots, s$, sous la forme

$$\tilde{\mathcal{G}}_\sigma = \left(\mathcal{G}_\sigma \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \hookrightarrow \mathcal{G}'_\sigma \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \hookrightarrow {}^\tau \mathcal{G}_\sigma \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^\tau \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \right).$$

LEMME. — (i) Sous les conditions (a), (b), (c) et (d) le diagramme $\tilde{\mathcal{G}}_1$ est un chtouca à droite de rang r_1 et de pôle ∞ , les diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_s$ sont des chtoucas à gauche, le zéro de $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$ est le pôle de $\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma+1}$ pour $\sigma = 1, \dots, s-1$ et le zéro de $\tilde{\mathcal{G}}_s$ est 0.

(ii) Il existe un unique sous-champ ouvert $\overline{\text{Cht}}^r \subset \mathcal{C}^r$ tel que pour chaque $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\}$ comme ci-dessus la trace de cet ouvert sur $\mathcal{C}_R^r$ soit définie par les conditions (a), (b), (c) et (d).

Le champ $\overline{\text{Cht}}^r$ est par définition le champ des *chtoucas itérés* de rang r . Il contient comme ouvert dense le champ des chtoucas Cht^r . Tout comme un chtouca ordinaire, un chtouca itéré admet un degré, à savoir le degré du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$, et on a un découpage de $\overline{\text{Cht}}^r$ en composantes

$$\overline{\text{Cht}}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \overline{\text{Cht}}^{r,d}$$

indexées par ce degré. Bien sûr, pour chaque entier d , $\text{Cht}^{r,d}$ est un ouvert dense de $\overline{\text{Cht}}^{r,d}$.

Pour chaque $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\} \subset [r-1]$ on notera $\overline{\text{Cht}}_R^r$ l'intersection de $\overline{\text{Cht}}^r$ avec la strate $\mathcal{C}_R^r$. C'est un sous-champ localement fermé de $\overline{\text{Cht}}^r$, qui n'est autre que l'ouvert Cht^r pour $R = \emptyset$, et $\overline{\text{Cht}}^r$ est la réunion disjointes des $\overline{\text{Cht}}_R^r$.

Il résulte du dernier lemme que l'on a un morphisme fini, surjectif et radiciel de champs

$$\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2-r_1} \text{Cht} \cdots \times_X {}^{r_s-r_{s-1}} \text{Cht}.$$

De plus on a un morphisme de Frobenius partiel (au-dessus de l'endomorphisme $\text{Id}_X \times \text{Frob}_X$ de $X \times X$)

$$\begin{aligned} & \text{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2-r_1} \text{Cht} \cdots \times_X {}^{r_s-r_{s-1}} \text{Cht} \\ & \rightarrow \text{Cht}^R := \text{Cht}^{r_1} \times_X \text{Cht}^{r_2-r_1} \times_{X, \text{Frob}_X} \cdots \times_{X, \text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s-r_{s-1}} \end{aligned}$$

qui envoie $(\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_s)$ sur

$$(\tilde{\mathcal{G}}_1, \text{Frob}_o(\tilde{\mathcal{G}}_2), \dots, \text{Frob}_o(\tilde{\mathcal{G}}_s))$$

qui est lui aussi fini, surjectif et radiciel. Par composition on a donc un morphisme fini, surjectif et radiciel de champs

$$\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^R.$$

Le but de ce dernier morphisme est un champ de Deligne-Mumford séparé et lisse purement de dimension relative

$$(2r_1 - 2) + (2(r_2 - r_1) - 2) + \cdots + (2(r_s - r_{s-1}) - 2) = 2r - 2s$$

au-dessus de $X \times X^{s-1} \times X$ par le morphisme $(\infty = \infty_1, \infty_2, \dots, \infty_s, o_s = o)$. Il se décompose en

$$\text{Cht}^R = \coprod_{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s} \text{Cht}^{R, d_\bullet}.$$

où

$$\text{Cht}^{R, d_\bullet} := \text{Cht}^{r_1, d_1} \times_X \text{Cht}^{r_2 - r_1, d_2} \times_{X, \text{Frob}_X} \cdots \times_{X, \text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s - r_{s-1}, d_s}.$$

On notera

$$\overline{\text{Cht}}_R^r = \coprod_{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s} \overline{\text{Cht}}_R^{r, d_\bullet}$$

la décomposition correspondante de la source. On vérifie que

$$\overline{\text{Cht}}_R^{r, d} := \overline{\text{Cht}}_R^r \cap \overline{\text{Cht}}^{r, d} = \coprod_{\substack{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s \\ d_1 + \cdots + d_s = d - s + 1}} \overline{\text{Cht}}_R^{r, d_\bullet}$$

(le décalage $-s + 1$ provient des Frobenius partiels).

3.3. Chtoucas itérés et troncature

Soient d un entier et $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ un paramètre de troncature. Pour chaque $\rho = 0, 1, \dots, r$, notons $\tilde{p}(\rho)$ l'unique entier appartenant à l'intervalle de longueur 1

$$]p(\rho) + \frac{\rho}{r}d - 1, p(\rho) + \frac{\rho}{r}d].$$

On définit alors des entiers $d_1, \dots, d_s$ par

$$d_1 = \tilde{p}(r_1) \text{ et } d_\sigma = \tilde{p}(r_\sigma) - \tilde{p}(r_{\sigma-1}) - 1, \forall \sigma = 2, \dots, s,$$

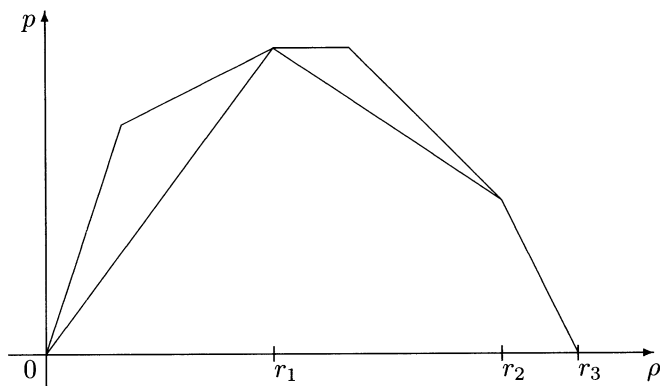
et des paramètres de troncature $p_1 : [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}, \dots, p_s : [0, r_s - r_{s-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ en imposant que

$$p_1(\rho_1) = \tilde{p}(\rho_1) - \frac{\rho_1}{r_1}d_1, \forall \rho_1 = 1, \dots, r_1 - 1,$$

et

$$p_\sigma(\rho_\sigma) = \tilde{p}(r_{\sigma-1} + \rho_\sigma) - \tilde{p}(r_{\sigma-1}) - 1 - \frac{\rho_\sigma}{r_\sigma - r_{\sigma-1}}d_\sigma, \forall \rho_\sigma = 1, \dots, r_\sigma - r_{\sigma-1}.$$

À décalage et normalisation près, les p_σ sont essentiellement les restrictions de p aux intervalles $[r_{\sigma-1}, r_\sigma]$ comme dans la figure ci-dessous :



On note

$$\begin{aligned} \text{Cht}^{R,d;\leq p} &= \text{Cht}^{r_1,d_1;\leq p_1} \times_X \text{Cht}^{r_2-r_1,d_2;\leq p_2} \times_{X,\text{Frob}_X} \cdots \\ &\quad \cdots \times_{X,\text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s-r_{s-1},d_s;\leq p_2} \subset \text{Cht}^R. \end{aligned}$$

DÉFINITION. — Un paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ est dit μ -convexe pour un nombre réel $\mu \geq 0$ si l'on a

$$(p(\rho) - p(\rho - 1)) - (p(\rho + 1) - p(\rho)) \geq \mu, \quad \forall 1 \leq \rho \leq r - 1.$$

Une propriété est dite vraie « pour tout paramètre de troncature assez convexe » s'il existe un nombre réel $\mu \geq 0$ tel que la propriété soit vraie pour tout paramètre de troncature qui est μ -convexe.

On remarquera que les paramètres de troncature p_σ définis ci-dessus sont automatiquement $(\mu - 2)$ -convexes dès que p est μ -convexe.

THÉORÈME. — Pour tout entier d et tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2-convexe, il existe un ouvert

$$\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \subset \overline{\text{Cht}}^{r,d}$$

de la composante d -ième du champ des chtoucas itérés ayant les propriétés suivantes :

– pour tout $R \subset [r - 1]$, $\overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p} := \overline{\text{Cht}}_R^{r,d} \cap \overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p}$ est l'image réciproque par le morphisme fini, surjectif et radiciel $\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^R$ de l'ouvert $\text{Cht}^{R,d;\leq p}$;

– le morphisme de champs $(\infty, o) : \overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} = \overline{\text{Cht}}^{r;\leq p} \cap \overline{\text{Cht}}^{r,d} \rightarrow X \times X$ est propre (et donc séparé et de type fini) ;

– si l'on suppose de plus que p est assez convexe relativement au genre de la courbe X , le morphisme de champs (∞, o) ci-dessus est lisse purement de dimension relative $2r - 2$ et le fermé complémentaire dans $\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p}$ de la strate ouverte $\text{Cht}^{r,d;\leq p} = \overline{\text{Cht}}_\emptyset^{r,d;\leq p}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $X \times X$, qui est réunion de $r - 1$ diviseurs lisses et dont la stratification canonique est celle par les $\overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p}$ pour R parcourant les parties non vides de $[r - 1]$.

On posera

$$\overline{\text{Cht}}^{r; \leq p} = \prod_{d \in \mathbb{Z}} \overline{\text{Cht}}^{r, d; \leq p} \subset \overline{\text{Cht}}^r$$

et

$$\overline{\text{Cht}}_R^{r; \leq p} = \prod_{d \in \mathbb{Z}} \overline{\text{Cht}}_R^{r, d; \leq p} \subset \overline{\text{Cht}}^{r; \leq p}.$$

3.4. Structures de niveau « sans facteur carré » sur les chtoucas itérés

Soit

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}'' \xleftarrow{u} {}^\tau \mathcal{E},$$

un chtouca itéré sur un schéma U ;

$$u = (u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)}, \lambda_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(q-1)}, \lambda_{r-1}^{q-1}))$$

est donc un homomorphisme complet de ${}^\tau \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}''$. Si le pôle et le zéro de ce chtouca itéré ne rencontrent pas N , les restrictions

$$j_N : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}'_N \text{ et } j'_N : \mathcal{E}''_N \rightarrow \mathcal{E}'_N$$

des flèches j et j' sont des isomorphismes de $\mathcal{O}_{U \times N}$ -Modules localement libres de rang r et la restriction

$$u_N = (u_{1,N}, \dots, u_{r,N}; (\mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)}, \lambda_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(q-1)}, \lambda_{r-1}^{q-1})) : {}^\tau \mathcal{E}_N \Longrightarrow \mathcal{E}_N$$

est un homomorphisme complet. Le morphisme de restriction à N

$$\text{Cht}^r \times_{X^2} (X - N)^2 \rightarrow \text{Tr}_N^r$$

se prolonge donc en un morphisme

$$\overline{\text{Cht}}^r \times_{X^2} (X - N)^2 \rightarrow \overline{\text{Tr}}_N^r$$

où $\overline{\text{Tr}}_N^r$ est le champ qui associe au schéma U la catégorie des uplets

$$(\mathcal{F}, u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$$

formés d'un fibré $\mathcal{F}$ de rang r sur $U \times N$, de fibrés en droites $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur U munis de sections globales $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ et d'un homomorphisme complet

$$u = (u_1, \dots, u_r; (\mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)}, \lambda_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(q-1)}, \lambda_{r-1}^{q-1})) : {}^\tau \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}.$$

L'ouvert $\overline{\text{Tr}}_N^r$ de $\overline{\text{Tr}}_N^r$ est l'image réciproque par le morphisme

$$((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})) : \overline{\text{Tr}}_N^r \rightarrow [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$$

de la strate ouverte $\text{Spec}(\mathbb{F}_q) = [\mathbb{G}_m^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] \subset [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$.

THÉORÈME. — *Considérons le morphisme de champs algébriques*

$$\overline{\text{Cht}}^r \times_{X^2} (X - N)^2 \rightarrow \overline{\text{Tr}}_N^r \times (X - N)^2$$

de composante le morphisme précédant et la seconde projection canonique.

Pour tout entier d et tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ assez convexe par rapport à X et N , la restriction

$$\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \times_{X^2} (X - N)^2 \rightarrow \overline{\text{Tr}}_N^r \times (X - N)^2$$

de ce morphisme à l'ouvert $\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \subset \overline{\text{Cht}}^r$ est lisse purement de dimension relative $2r - 2$.

Supposons maintenant que N soit « sans facteur carré », c'est-à-dire réduit. Le cas essentiel est alors celui d'un niveau N réduit à un seul point fermé de X que l'on supposera ici rationnel sur le corps fini de base $\mathbb{F}_q$ pour alléger les notations. Dans ce cas, on a simplement $\text{GL}_r^N = \text{GL}_r$ et le champ $\overline{\text{Tr}}_N^r$ est le produit fibré

$$\overline{\text{Tr}}_N^r = [\widetilde{\text{gl}}_r / {}^\tau\text{Ad}(\text{GL}_r)] \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$$

où $\widetilde{\text{gl}}_r$ est le schéma des endomorphismes complets du $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel $\mathbb{F}_q^r$, où le morphisme $[\widetilde{\text{gl}}_r / {}^\tau\text{Ad}(\text{GL}_r)] \rightarrow [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ est induit par le morphisme canonique $\widetilde{\text{gl}}_r \rightarrow [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ et où $\langle q-1 \rangle$ est l'endomorphisme de $[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ induit par l'élévation à la puissance $q-1$ des coordonnées.

Lafforgue définit alors le champ $\overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p}$ de *chtoucas itérés avec structure de niveau N* (sans facteur carré) par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \times_{X^2} (X - N)^2 & \longrightarrow & \overline{\text{Tr}}_N^r \end{array}$$

où la flèche verticale de droite

$$\begin{aligned} \overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau} &:= [\widetilde{\text{gl}}_r^\tau / \text{GL}_r] \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] \\ &\rightarrow [\widetilde{\text{gl}}_r / {}^\tau\text{Ad}(\text{GL}_r)] \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] = \overline{\text{Tr}}_N^r \end{aligned}$$

est induite par un morphisme projectif équivariant $\overline{L} : \widetilde{\text{gl}}_r^\tau \rightarrow \widetilde{\text{gl}}_r$ qui prolonge l'isogénie de Lang $L : \text{GL}_r \rightarrow \text{GL}_r$.

Par construction, le schéma $\widetilde{\text{gl}}_r^\tau$ est muni d'un morphisme lisse vers un « champ torique » (voir la sous-section suivante) $\mathcal{T}^{r,\tau}$, qui relève le morphisme $\widetilde{\text{gl}}_r \rightarrow [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$. On a donc un morphisme lisse de champs

$$\overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau} \rightarrow \mathcal{T}^{r,\tau} \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$$

et il résulte du théorème ci-dessus que $\overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p}$ est lisse sur le champ

$$\left(\mathcal{T}^{r,\tau} \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] \right) \times (X - N)^2.$$

En particulier, comme on sait résoudre les singularités d'un champ torique en raffinant l'éventail qui le définit, on sait aussi résoudre les singularités du champ $\overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p}$.

La section suivante est consacrée à la construction de $\widetilde{\text{gl}}_r^\tau$.

4. COMPACTIFICATION DE L'ISOGÉNIE DE LANG POUR PGL_r

4.1. Champ des pavages

Pour prolonger l'isogénie de Lang pour GL_r au-dessus du schéma des endomorphismes complets, Lafforgue est amené à construire une famille de champs toriques $(T^{r,n})_{n \geq 0}$ qu'il appelle les *champs des pavages*.

Une *variété torique* est un triplet formé d'un tore T , d'une immersion ouverte $T \hookrightarrow \overline{T}$ d'image dense de T dans un schéma de type fini normal $\overline{T}$, et d'une action de T sur $\overline{T}$ qui prolonge l'action de T sur lui-même par translation. Une telle variété torique est associée à un éventail. Rappelons tout d'abord rapidement cette construction.

Soient Y un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini et $Y_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Y$. Un *cône convexe polyédral rationnel* est une partie localement fermée σ de $Y_{\mathbb{R}}$ de la forme

$$\sigma = \mathbb{R}_{>0} y_1 + \cdots + \mathbb{R}_{>0} y_n \subset Y_{\mathbb{R}}$$

pour des vecteurs $y_1, \dots, y_n \in Y \subset Y_{\mathbb{R}}$. L'adhérence $\overline{\sigma}$ de σ est le cône convexe fermé

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} y_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} y_n \subset Y_{\mathbb{R}}.$$

On définit les faces de σ comme les cônes convexes polyédraux rationnels τ de la forme $\tau = H \cap \overline{\sigma}$ pour un hyperplan H de $Y_{\mathbb{R}}$ ne rencontrant pas σ . Un *éventail* est une famille finie E de cônes convexes polyédraux rationnels deux à deux disjoints, appelés les *cellules* de E et ayant les propriétés suivantes :

- toute face d'une cellule de E est encore une cellule de E ,
- tout couple (σ_1, σ_2) de cellules de E admet une face commune $\tau \in E$ telle que $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2 = \tau$.
- le cône convexe polyédral rationnel $\{0\}$ est une cellule de E .

Si $\sigma = \mathbb{R}_{>0} y_1 + \cdots + \mathbb{R}_{>0} y_n \subset Y_{\mathbb{R}}$ est un cône convexe polyédral rationnel ne contenant aucune droite vectorielle de $Y_{\mathbb{R}}$, la collection formée de σ et de toutes ses faces est un éventail. On associe à cet éventail particulier la variété torique affine

$$T = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_m = \text{Spec}(\mathbb{F}_q[Y^\vee]) \hookrightarrow \overline{T}(\sigma) = \text{Spec}(\mathbb{F}_q[Y^\vee \cap \sigma^\vee])$$

où $Y^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y, \mathbb{Z})$ et

$$\sigma^\vee = \{y^\vee : Y_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \mid y^\vee(y_1), \dots, y^\vee(y_n) \geq 0\} \subset Y_{\mathbb{R}}^\vee$$

est le cône fermé dual de σ . On vérifie que $Y^\vee \cap \sigma^\vee$ est un monoïde à engendrement fini, saturé et contenant un système de générateurs du groupe $Y^\vee$. L'exemple type est

bien entendu le plongement torique affine standard $\mathbb{G}_m^{r-1} \hookrightarrow \mathbb{A}^{r-1}$ qui est obtenu par la construction ci-dessus pour $Y = \mathbb{Z}^{r-1}$ et $\sigma = (\mathbb{R}_{>0})^{r-1} \subset \mathbb{R}^{r-1} = Y_{\mathbb{R}}$.

Si τ est une face de σ , on a $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ et l'immersion ouverte $T \hookrightarrow \bar{T}(\sigma)$ se factorise par l'immersion ouverte $T \hookrightarrow \bar{T}(\tau)$ en

$$T \hookrightarrow \bar{T}(\tau) \hookrightarrow \bar{T}(\sigma).$$

En particulier, si σ_1 et σ_2 sont deux cellules de E et si $\bar{\tau} = \bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$, on a une donnée de recollement

$$\bar{T}(\sigma_1) \leftarrow \bar{T}(\tau) \hookrightarrow \bar{T}(\sigma_2)$$

pour les variétés toriques affines $T \hookrightarrow \bar{T}(\sigma_1)$ et $T \hookrightarrow \bar{T}(\sigma_2)$.

La variété torique $T \hookrightarrow \bar{T}$ associée à l'éventail E est obtenue en recollant les variétés toriques affines $T \hookrightarrow \bar{T}(\sigma)$ pour $\sigma \in E$ à l'aide des données de recollements ci-dessus.

Les orbites pour l'action de T sur $\bar{T}$ sont en nombre fini et forment une stratification en parties localement fermées de $\bar{T}$. On peut indexer ces orbites par les cellules de E : l'orbite $\bar{T}_\sigma$ est contenue dans la carte affine $\bar{T}(\sigma)$ et est en fait l'unique orbite fermée pour l'action de T sur cette variété torique affine. L'orbite $\bar{T}_\sigma$ est dans l'adhérence de l'orbite $\bar{T}_\tau$ si et seulement si τ est une face de σ . En particulier, $\bar{T}_{\{0\}} = T$ est l'unique orbite ouverte dans $\bar{T}$. Chaque orbite $\bar{T}_\sigma$ a par construction un point marqué $\bar{t}_\sigma$.

Le *champ torique* associé à l'éventail E est le champ algébrique quotient

$$\bar{\mathcal{T}} = [\bar{T}/T].$$

Ce champ algébrique, qui est normal, de type fini et de dimension 0, n'a qu'un nombre fini de points, à savoir les points définis par les $\bar{t}_\sigma \in \bar{T}$. La gerbe résiduelle d'un tel point est le classifiant du fixateur de $\bar{t}_\sigma$ dans T .

Soient maintenant k un corps et n un entier ≥ 0 . Considérons l'espace affine $\mathbb{R}^{r,n} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \dots + x_n = r\}$ et son réseau $\mathbb{Z}^{r,n} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \dots + x_n = r\}$. On a le simplexe

$$S_{\mathbb{R}}^{r,n} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \dots + x_n = r\} \subset \mathbb{R}^{r,n}$$

et l'ensemble de ses points entiers

$$S^{r,n} = \mathbb{Z}^{r,n} \cap S_{\mathbb{R}}^{r,n}.$$

On appelle *pavé entier* toute partie P de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ d'intérieur P° non vide et de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{r,n} \mid \sum_{j \in J} x_j \geq d_J, \forall J\}$$

pour (d_J) une famille d'entiers indexés par les parties J de $\{0, 1, \dots, n\}$ qui est convexe au sens où

$$d_\emptyset = 0, \quad d_{\{0,1,\dots,n\}} = r \quad \text{et} \quad d_{J'} + d_{J''} \leq d_{J' \cup J''} + d_{J' \cap J''}, \quad \forall J', J''.$$

On appelle *pavage entier* de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ toute famille $\mathbf{P}$ de pavés entiers telle que

$$S_{\mathbb{R}}^{r,n} = \bigcup_{P \in \mathbf{P}} P$$

et que $P_1^\circ \cap P_2^\circ = \emptyset$ pour tous $P_1 \neq P_2$ dans $\mathbf{P}$.

Une application $S_{\mathbb{R}}^{r,n} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite affine si elle est la restriction d'une application affine $\mathbb{R}^{r,n} \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $Y_{\mathbb{R}}^{r,n}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quotient de $\mathbb{R}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}} = \{S_{\mathbb{R}}^{r,n} \rightarrow \mathbb{R}\}$ par le sous-espace des applications affines, et $Y^{r,n}$ l'image dans ce quotient du réseau $\mathbb{Z}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}} \subset \mathbb{R}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}}$.

Pour tout pavage entier $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$, notons $\sigma_{\mathbf{P}} \subset Y_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des classes y de fonctions $S_{\mathbb{R}}^{r,n} \rightarrow \mathbb{R}$ qui, pour chaque pavé $P \in \mathbf{P}$, admettent un représentant $y_P : S_{\mathbb{R}}^{r,n} \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives tel que

$$P = \{x \in S_{\mathbb{R}}^{r,n} \mid y_P(x) = 0\}.$$

Le pavage entier $\mathbf{P}$ est dit *admissible* si $\sigma_{\mathbf{P}}$ est non vide.

LEMME (Lafforgue). — *Pour chaque pavage entier admissible $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$, $\sigma_{\mathbf{P}}$ est un cône convexe polyédral rationnel dans $Y_{\mathbb{R}}$. De plus, $\sigma_{\mathbf{Q}}$ est une face de $\sigma_{\mathbf{P}}$ si et seulement si le pavage entier admissible $\mathbf{Q}$ est plus grossier que $\mathbf{P}$.*

La famille des $\sigma_{\mathbf{P}}$, pour $\mathbf{P}$ parcourant l'ensemble des pavages entiers admissibles de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$, est un éventail.

On appellera *champ des pavages* le k -champ torique

$$\mathcal{T}^{r,n} = [\overline{T}^{r,n} / T^{r,n}]$$

associé à cet éventail. On vérifie que l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}} \rightarrow T^{r,n} \rightarrow 1$$

où la deuxième flèche envoie z sur $(z, \dots, z; z^r)$ et la troisième est donnée par

$$(u_0, u_1, \dots, u_n; z) \mapsto (u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} z^{-1})_{i \in S_{\mathbb{R}}^{r,n}}.$$

Par construction, le k -schéma $\overline{T}^{r,n}$ est normal de type fini et l'action de $T^{r,n}$ sur $\overline{T}^{r,n}$ n'a qu'un nombre fini d'orbites. Ces orbites sont indexées par les pavages entiers admissibles de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ et chacune a un point marqué $\bar{t}_{\mathbf{P}}$. Le champ des pavages $\mathcal{T}^{r,n}$ est donc algébrique normal de type fini et n'a qu'un nombre fini de points définis par les points $\bar{t}_{\mathbf{P}}$. Le point défini par $\bar{t}_{\mathbf{P}}$ est dans l'adhérence du point défini par $\bar{t}_{\mathbf{Q}}$ si le pavage entier admissible $\mathbf{P}$ raffine le pavage entier admissible $\mathbf{Q}$. Le point ouvert correspond au pavage le plus grossier, c'est-à-dire au pavage trivial (un seul pavé).

Exemple. — (i) Pour $n = 0$, $S_{\mathbb{R}}^{r,n} = S_{\mathbb{R}}^{r,n} = \{0\}$ et le champ des pavages est simplement $\text{Spec}(k)$. Pour $n = 1$ on peut identifier $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ à l'intervalle $[0, r] \subset \mathbb{R}$ et les pavés entiers

sont précisément les intervalles $[i, j]$ où $i < j$ sont des entiers compris entre 0 et r . Un pavage entier est donc une décomposition

$$[0, r] = [0, r_1] \cup [r_1, r_1 + r_2] \cup \cdots \cup [r_1 + \cdots + r_{s-1}, r_1 + \cdots + r_{s-1} + r_s]$$

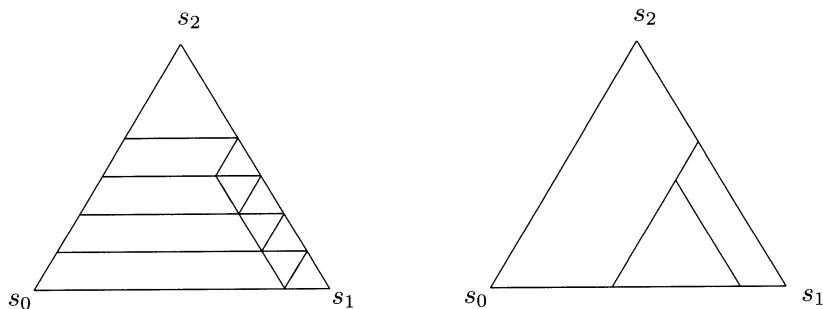
de l'intervalle $[0, r]$ où $r_1 + \cdots + r_s = r$ est une décomposition de r en entiers strictement positifs. Le champ des pavages n'est autre dans ce cas que le champ torique $[\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{m,k}^{r-1}]$.

(ii) Pour $n = 2$ on peut identifier $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ à un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^2$ dont les trois côtés sont de longueur r . On numérote les sommets $s_0 = s_3, s_1, s_2$ de ce triangle et, pour $i = 0, 1, 2$, on désigne par x_i la distance au sommet s_i d'un point du côté $s_i s_{i+1}$. Par tout point de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ passent trois droites D_{12}, D_{20} et D_{01} parallèles aux côtés du triangle $s_1 s_2, s_2 s_0$ et $s_0 s_1$, et on peut repérer un tel point par les coordonnées x_0, x_1 et x_2 des intersections $D_{12} \cap s_0 s_1, D_{20} \cap s_1 s_2$ et $D_{01} \cap s_2 s_0$. Par définition, $S^{r,n} \subset S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ est formé des points à coordonnées (x_0, x_1, x_2) entières.

Appelons droite entière toute droite qui est parallèle à l'un des trois côtés du triangle $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ et qui passe par un point de $S^{r,n}$; appelons segment entier tout segment d'une droite entière dont les deux extrémités sont des points de $S^{r,n}$.

Si l'on trace toutes les droites entières, on obtient un pavage constitué de petits triangles équilatéraux de côtés de longueur 1 qui est entier admissible. Il est plus fin que tout autre pavage entier : tout pavé entier est une réunion d'une famille de ces petits triangles équilatéraux et est un hexagone, éventuellement dégénéré, dont les côtés sont des segments entiers. La variété torique $T^{r,n} \hookrightarrow \bar{T}^{r,n}$ est donc affine (Cette dernière propriété n'est plus satisfaite dès que $n \geq 3$).

Des deux pavages entiers ci-dessous, seul celui de gauche (qui joue un rôle dans la compactification de l'isogénie de Lang) est admissible.



(iii) Si $r = 2$, le champ torique $T^{r,n}$ est lisse, mais ce n'est plus le cas dès que $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

Pour chaque entier $0 \leq m < n$ et chaque application injective $\{0, 1, \dots, m\} \hookrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, on a une identification induite de $S_{\mathbb{R}}^{r,m}$ à une face de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ et tout pavage entier admissible de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ induit par restriction un pavage entier admissible de $S_{\mathbb{R}}^{r,m}$. Dualelement, on en déduit des projections $T^{r,n} \rightarrow T^{r,m}$, $\overline{T}^{r,n} \rightarrow \overline{T}^{r,m}$ et $\mathcal{T}^{r,n} \rightarrow \mathcal{T}^{r,m}$.

4.2. Compactifications toroïdales des $\mathrm{PGL}_r^{n+1} / \mathrm{PGL}_r$ pour $n \leq 2$

Considérons un espace vectoriel V de dimension r sur un corps k , que l'on verra aussi comme un k -schéma affine isomorphe à $\mathbb{A}_k^r$, et notons $G = \mathrm{GL}(V)$ le k -schéma des automorphismes linéaires de V . Pour tout entier $n \geq 0$, le k -schéma en groupes G^{n+1} agit de manière évidente sur V^{n+1} et donc sur $\bigwedge^r V^{n+1}$.

On peut décomposer la représentation $\bigwedge^r V^{n+1}$ de G^{n+1} en la somme directe de représentations irréductibles

$$\bigwedge^r V^{n+1} = \bigoplus_{i \in S^{r,n}} \bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V$$

où $S^{r,n}$ est l'ensemble des points entiers du simplexe introduit dans la sous-section précédente. Le tore $\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$ agit sur $\bigwedge^r V^{n+1}$ par

$$(t = (t_i)_{i \in S^{r,n}}, x = \bigoplus_{i \in S^{r,n}} x_i) \mapsto \bigoplus_{i \in S^{r,n}} t_i x_i,$$

et cette action commute à celle de G^{n+1} . On en déduit une action du k -schéma en groupes produit $G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\bigwedge^r V^{n+1})$ des droites de $\bigwedge^r V^{n+1}$.

On envoie le produit $G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}$ dans $G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$ par

$$(g; u_0, u_1, \dots, u_n; z) \mapsto (u_0^{-1}g, u_1^{-1}g, \dots, u_n^{-1}g; (u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} z^{-1})_{i \in S^{r,n}}).$$

L'homomorphisme ainsi défini n'est pas injectif (il admet pour noyau $\mathbb{G}_{m,k}$ plongé par $z \mapsto (z \mathrm{Id}_V; z, \dots, z, z^r)$), mais on notera quand même $(G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}) / (G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k})$ le quotient de $G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$ par l'image de cet homomorphisme.

Le plongement diagonal $V \hookrightarrow V^{n+1}$ induit un plongement

$$\bigwedge^r V \hookrightarrow \bigwedge^r V^{n+1}$$

et définit un point $\omega \in \mathbb{P}(\bigwedge^r V^{n+1})$ dont le fixateur est précisément l'image de $G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}$ dans $G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$. On a donc un plongement localement fermé de k -schémas

$$(G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}) / (G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}) \hookrightarrow \mathbb{P} \left(\bigwedge^r V^{n+1} \right), \quad (g, t) \mapsto (g, t) \cdot \omega.$$

Par construction l'image de ce plongement est contenue dans l'ouvert

$$\left[\prod_{i \in S^{r,n}} \left(\left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right) - \{0\} \right) \right] / \mathbb{G}_{m,k} \subset \mathbb{P} \left(\bigwedge^r V^{n+1} \right).$$

des droites de $\bigwedge^r V^{n+1}$ dont la projection sur chaque facteur direct $\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V$ n'est pas nulle.

Considérons alors le morphisme

$$(G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}})/(G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}) \\ \hookrightarrow \overline{T}^{r,n} \times_k \left[\prod_{i \in S^{r,n}} \left(\left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right) - \{0\} \right) \right] / \mathbb{G}_{m,k}$$

dont les composantes sont le composé de la projection

$$(G^{n+1} \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}})/(G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}) \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}/(\mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}) = T^{r,n}$$

et de l'immersion ouverte

$$T^{r,n} \hookrightarrow \overline{T}^{r,n},$$

et l'immersion localement fermée ci-dessus. Ce morphisme est une immersion localement fermée. Notons

$$\Omega^n(V) \subset \left(\left[\prod_{i \in S^{r,n}} \left(\left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right) - \{0\} \right) \right] / \mathbb{G}_{m,k} \right) \times_k \overline{T}^{r,n}$$

l'adhérence schématique de son image. et

$$\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow \prod_{i \in S^{r,n}} \mathbb{P} \left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right)$$

le quotient de $\Omega^n(V)$ par l'action libre du tore $\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}/\mathbb{G}_{m,k}$ (où $\mathbb{G}_{m,k}$ est plongé diagonalement dans $\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}$).

THÉORÈME. — *La première projection*

$$\Omega^n(V) \rightarrow \left[\prod_{i \in S^{r,n}} \left(\left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right) - \{0\} \right) \right] / \mathbb{G}_{m,k}$$

et son quotient par les actions libres du tore $\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}/\mathbb{G}_{m,k}$

$$\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow \prod_{i \in S^{r,n}} \mathbb{P} \left(\bigwedge^{i_0} V \otimes \bigwedge^{i_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{i_n} V \right)$$

sont projectives. Le k -schéma $\overline{\Omega}^n(V)$ est donc une compactification projective de $\overline{G}^{n+1}/\overline{G}$, où on a noté $\overline{G} = \mathrm{PGL}(V)$.

La seconde projection

$$\Omega^n(V) \rightarrow \overline{T}^{r,n}$$

est équivariante relativement au morphisme de tores $\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}/\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow T^{r,n}$ et induit par passage au quotient un morphisme de k -champs algébriques

$$\overline{\Omega}^n(V) = \Omega^n(V)/(\mathbb{G}_{m,k}^{S^{r,n}}/\mathbb{G}_{m,k}) \rightarrow [\overline{T}^{r,n}/T^{r,n}] = \mathcal{T}^{r,n}.$$

Plus généralement, pour tout entier $0 \leq m < n$ et toute application injective $\{0, 1, \dots, m\} \hookrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, l'inclusion $S^{r,m} \hookrightarrow S^{r,n}$ et la projection $G^{n+1} \twoheadrightarrow G^{m+1}$ correspondantes induisent un épimorphisme de tores $T^{r,n} \twoheadrightarrow T^{r,m}$, un prolongement torique $\overline{T}^{r,n} \rightarrow \overline{T}^{r,m}$ de cet épimorphisme, un morphisme de champs toriques

$$T^{r,n} = [\overline{T}^{r,n}/T^{r,n}] \rightarrow [\overline{T}^{r,m}/T^{r,m}] = T^{r,m}$$

et des morphismes de k -schémas $\Omega^n(V) \rightarrow \Omega^m(V)$ et $\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow \overline{\Omega}^m(V)$, dits *de face*, au-dessus de $\overline{T}^{r,n} \rightarrow \overline{T}^{r,m}$ et $T^{r,n} \rightarrow T^{r,m}$ respectivement.

En particulier, les $\overline{\Omega}^n(V)$ et les morphismes de face $\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow \overline{\Omega}^m(V)$ sont sous-jacents à un k -schéma simplicial $\overline{\Omega}^\bullet(V)$ qui contient comme ouvert dense le k -schéma simplicial classifiant $\overline{G}^{\bullet+1}/\overline{G}$.

THÉORÈME. — Pour $n = 0, 1, 2$, la seconde projection

$$\Omega^n(V) \rightarrow \overline{T}^{r,n}$$

est lisse, purement de dimension relative nr^2 , et le morphisme de champs qu'on en déduit par passage au quotient

$$\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow T^{r,n}$$

est lisse, purement de dimension relative $n(r^2 - 1)$.

Plus généralement, pour tous entiers $0 \leq m < n \leq 2$ et toute application injective $\{0, 1, \dots, m\} \hookrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, les morphismes « de face »

$$\Omega^n(V) \rightarrow \Omega^m(V) \times_{\overline{T}^{r,m}} \overline{T}^{r,n} \text{ et } \overline{\Omega}^n(V) \rightarrow \overline{\Omega}^m(V) \times_{T^{r,m}} T^{r,n}$$

sont lisses, purement de dimensions relatives $(n-m)r^2$ et $(n-m)(r^2 - 1)$ respectivement.

Remarques. — (o) Dans [La 8], Lafforgue a cru avoir démontré ce dernier théorème quel que soit l'entier $n \geq 0$, mais la preuve de l'assertion (i) du lemme 3 de loc. cit. contient un erreur. En fait la projection $\Omega^n(V) \rightarrow \overline{T}^{r,n}$ n'est pas lisse en général (le plus « petit » contre-exemple intervient pour $n = 3$ et $r = 4$).

(i) Pour $n = 0$, $\Omega^n(V)$ n'est autre que $\text{Spec}(k)$. Pour $n = 1$, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\text{GL}(V)^2 \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{r+1}) / (\text{GL}(V) \times_k \mathbb{G}_{m,k}^2 \times_k \mathbb{G}_{m,k}) & \xrightarrow{\sim} & \text{GL}(V) \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_{m,k}^{r+1} / (\mathbb{G}_{m,k}^2 \times_k \mathbb{G}_{m,k}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{G}_{m,k}^{r-1} \end{array}$$

où les deux flèches horizontales

$$(g_0, g_1, (\mu_\rho)_{\rho=0,\dots,r}) \mapsto \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} g_0 g_1^{-1}, \frac{\mu_0 \mu_2}{\mu_1^2}, \dots, \frac{\mu_{r-2} \mu_r}{\mu_{r-1}^2} \right)$$

et

$$(\mu_\rho)_{\rho=0,1,\dots,r} \mapsto \left(\frac{\mu_0 \mu_2}{\mu_1^2}, \dots, \frac{\mu_{r-2} \mu_r}{\mu_{r-1}^2} \right)$$

sont des isomorphismes, se prolonge en un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(V) & \xrightarrow{\sim} & \Omega(V, V) \\ \downarrow & + & \downarrow \\ \overline{T}^{r,1} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}_k^{r-1} \end{array}$$

où, de nouveau, les deux flèches horizontales sont des isomorphismes. (La première flèche verticale est celle du théorème ci-dessus et la seconde $\Omega(V, V) \rightarrow \mathbb{A}_k^{r-1}$ a été construite dans la section 3.) En particulier, on peut identifier le k -schéma $\widetilde{\text{End}}(V)$ des endomorphismes complets de V à un quotient de $\Omega^1(V)$ par un tore $\mathbb{G}_{m,k}^r$ et, en divisant en plus par les homothéties, on en déduit un isomorphisme

$$\overline{\Omega}^1(V) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{End}}(V)/\mathbb{G}_{m,k}$$

qui échange les projections

$$\overline{\Omega}^1(V) \rightarrow \mathcal{T}^{r,n} \text{ et } \widetilde{\text{End}}(V)/\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow [\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{m,k}^{r-1}].$$

Le k -schéma projectif $\overline{\Omega}^1(V)$ est donc la compactification de De Concini et Procesi de $\text{PGL}(V)$.

(ii) Le morphisme $\overline{\Omega}^n(V) \rightarrow (\overline{\Omega}^1(V))^{n+1}$ produit des morphismes induits par les applications injectives $\{0, 1\} \hookrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ données par $\{0, 1\} \mapsto \{0, 1\}$, $\{0, 1\} \mapsto \{1, 2\}, \dots, \{0, 1\} \mapsto \{n, 0\}$, envoie $\overline{G}^{n+1}/\overline{G}$ sur le fermé d'équation $g_0 g_1 \cdots g_n = 1$ dans $(\overline{G}^2/\overline{G})^{n+1} \cong \overline{G}^{n+1}$. Ainsi, $\overline{\Omega}^n(V)$ réalise une « compactification » du morphisme de multiplication de n éléments dans $\overline{G}$.

Rappelons que le k -schéma $\overline{T}^{r,n}$ est stratifié par les orbites de $T^{r,n}$ et que ces orbites sont indexées par les pavages entiers admissibles $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$ et possèdent chacune un point marqué $\bar{t}_{\mathbf{P}} \in \overline{T}^{r,n}$. L'image réciproque par la projection $\Omega^n(V) \rightarrow \overline{T}^{r,n}$ de cette stratification est évidemment une stratification de $\Omega^n(V)$ par des parties localement fermées $\Omega_{\mathbf{P}}^n(V)$, indexées elles aussi par les pavages entiers admissibles $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$. L'inclusion dans la strate $\Omega_{\mathbf{P}}^n(V)$ de la fibre $\Omega^n(V)_{\bar{t}_{\mathbf{P}}}$ de $\Omega^n(V) \rightarrow \overline{T}^{r,n}$ en $\bar{t}_{\mathbf{P}}$ induit un isomorphisme de schémas

$$(\Omega^n(V)_{\bar{t}_{\mathbf{P}}} \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}})/(\mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}})_{\bar{t}_{\mathbf{P}}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{P}}^n(V)$$

où $(\mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}})_{\bar{t}_{\mathbf{P}}}$ est le stabilisateur de $\bar{t}_{\mathbf{P}}$ dans $\mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}}$.

En particulier, si $\mathbf{P}$ est le pavage trivial, $\Omega^n(V)_{\bar{t}_{\mathbf{P}}} = G^{n+1}/G$ et $\Omega_{\mathbf{P}}^n$ est l'ouvert $(G^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k}^{S_{\mathbb{R}}^{r,n}})/(G \times \mathbb{G}_{m,k}^{n+1} \times \mathbb{G}_{m,k})$ de $\Omega^n(V)$.

Lafforgue appelle k -schéma des graphes recollés dans V^{n+1} associé à un pavage entier admissible $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$, et note $\text{Gr}_{\mathbf{P}}^n(V)$, le schéma de modules des familles $(W_P)_{P \in \mathbf{P}}$ de sous-espaces de dimension r dans V^{n+1} indexés par les pavés P de $\mathbf{P}$ telles que :

– pour tout pavé $P \in \mathbf{P}$ et tout $J \subset \{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$\dim(W_P \cap V^J) = \min_{i \in P \cap S^{r,n}} \left\{ \sum_{j \in J} i_j \right\},$$

– pour tous pavés $P', P'' \in \mathbf{P}$ ayant en commun un bord d'équation $\sum_{j \in J} x_j = d_J$ pour un certain $J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$d_J = \min_{i' \in P' \cap S^{r,n}} \left\{ \sum_{j \in J} i'_j \right\} = \max_{i'' \in P'' \cap S^{r,n}} \left\{ \sum_{j \in J} i''_j \right\},$$

on a

$$i_J^{-1}(W_{P'}) = \text{pr}_J(W_{P''}) \text{ et } \text{pr}_{J^c}(W_{P'}) = i_{J^c}^{-1}(W_{P''})$$

– où J^c est le complémentaire de J dans $\{0, 1, \dots, n\}$ et $i_J : V^J \hookrightarrow V^{n+1}$, $i_{J^c} : V^{J^c} \hookrightarrow V^{n+1}$ et $\text{pr}_J : V^{n+1} \twoheadrightarrow V^J$, $\text{pr}_{J^c} : V^{n+1} \twoheadrightarrow V^{J^c}$ sont les inclusions et projections canoniques.

THÉORÈME. — Pour $n = 0, 1, 2$ et pour chaque pavage entier admissible $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,n}$, les coordonnées de Plücker induisent un isomorphisme du k -schéma des graphes recollés $\text{Gr}_{\mathbf{P}}^n(V)$ sur la fibre $\Omega^n(V)_{\bar{t}_{\mathbf{P}}}$.

4.3. Compactification de l'isogénie de Lang

Le corps de base est de nouveau $\mathbb{F}_q$. On notera encore simplement τ l'endomorphisme de Frobenius d'un schéma.

Rappelons que l'on a défini un éventail $(\sigma_{\mathbf{P}})_{\mathbf{P}}$ dans l'espace vectoriel réel $Y_{\mathbb{R}}^{r,2}$ quotient de $\mathbb{R}^{S^{r,2}} = \{S^{r,2} \rightarrow \mathbb{R}\}$ par le sous-espace des applications affines et que l'on a noté $T^{r,2} \hookrightarrow \bar{T}^{r,2}$ la variété torique correspondante.

Considérons maintenant le sous-espace de $\mathbb{R}^{S^{r,2}}$ formé des applications

$$y : S^{r,2} = \{(i_0, i_1, i_2) \in \mathbb{N}^3 \mid i_0 + i_1 + i_2 = r\} \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que

$$y(0, i_1, i_2) = qy(i_1, 0, i_2), \quad \forall (0, i_1, i_2) \in S^{r,2},$$

et son image $Y_{\mathbb{R}}^{r,\tau}$ dans $Y_{\mathbb{R}}^{r,2}$. On remarquera que la donnée d'une telle application y équivaut à la donnée de sa restriction à

$$S^{r,\tau} = \{(i_0, i_1, i_2) \in \mathbb{N}^3 \mid i_0 + i_1 + i_2 = r \text{ et } i_0 \neq 0\} \subset S^{r,2}$$

Appelons *pavage entier q -admissible* tout pavage $\mathbf{P}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,2}$ tel que le cône convexe polyédral rationnel $\sigma_{\mathbf{P}} \subset Y_{\mathbb{R}}^{r,2}$ rencontre le sous-espace $Y_{\mathbb{R}}^{r,\tau}$. La famille des intersections $\sigma_{\mathbf{P}}^{\tau} := \sigma_{\mathbf{P}} \cap Y_{\mathbb{R}}^{r,\tau}$ pour $\mathbf{P}$ parcourant l'ensemble des pavages entiers q -admissibles est un éventail dans $Y_{\mathbb{R}}^{r,\tau}$ et définit donc une variété torique normale

$$T^{r,\tau} \hookrightarrow \bar{T}^{r,\tau}.$$

De la même façon que l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow (\mathbb{G}_m^3 \times \mathbb{G}_m) / \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m^{S^{r,2}} \rightarrow T^{r,2} \rightarrow 1$$

on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} \rightarrow T^{r,\tau} \rightarrow 1$$

où la deuxième flèche envoie u sur $(u^{i_0+qi_1})_{i \in S^{r,\tau}}$. On vérifie que le plongement

$$\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} \hookrightarrow \mathbb{G}_m^{S^{r,2}}$$

qui envoie $(t_i)_{i \in S^{r,\tau}}$ sur $(t_i)_{i \in S^{r,2}}$, où $t_{(0,i_1,i_2)} = t_{(i_1,0,i_2)}^q$ si $i_1 \neq 0$ et $t_{(0,0,r)} = 1$, induit un plongement $T^{r,\tau} \hookrightarrow T^{r,2}$ qui se prolonge en une immersion fermée

$$\overline{T}^{r,\tau} \hookrightarrow \overline{T}^{r,2}.$$

On identifiera dans la suite $\overline{T}^{r,\tau}$ à l'image de cette immersion fermée.

On a vu que les trois applications strictement croissantes $\{0,1\} \hookrightarrow \{0,1,2\}$, $(0,1) \mapsto (1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, induisent trois morphismes toriques $p_0, p_1, p_2 : \overline{T}^{r,2} \rightarrow \overline{T}^{r,1}$ et trois morphismes de face $\pi_0, \pi_1, \pi_2 : \Omega^{r,2} \rightarrow \Omega^{r,1}$ au-dessus de ceux-ci. Par construction, la relation

$$p_0 = \tau \circ p_1$$

est vérifiée sur le fermé $\overline{T}^{r,\tau}$ de $\overline{T}^{r,2}$.

Soit alors

$$\Omega^{r,\tau} \subset \Omega^{r,2} \times_{\overline{T}^{r,2}} \overline{T}^{r,\tau}$$

le sous-schéma fermé défini par l'équation $\pi_0 = \tau \circ \pi_1$ dans $\Omega^{r,1}$. L'action évidente du sous-tore $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} \subset \mathbb{G}_m^{S^{r,2}}$ sur $\Omega^{r,2} \times_{\overline{T}^{r,2}} \overline{T}^{r,\tau}$ stabilise ce fermé. On notera π_1^τ, π_2^τ les restrictions des morphismes π_1, π_2 à $\Omega^{r,\tau}$. Elles relèvent les restrictions $p_1^\tau, p_2^\tau : \overline{T}^{r,\tau} \rightarrow \overline{T}^{r,1}$ de p_1, p_2 et sont $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}}$ -équivariantes.

THÉORÈME. — *La seconde projection $\Omega^{r,\tau} \rightarrow \overline{T}^{r,\tau}$ est $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}}$ -équivariante et lisse purement de dimension relative r^2 .*

La stratification par les $T^{r,\tau}$ -orbites de $\overline{T}^{r,\tau}$ induit par image réciproque une stratification de $\Omega^{r,\tau}$ dont les strates $\Omega_{\mathbf{P}}^{r,\tau}$ sont indexées par les pavages entiers q -admissibles. Un tel pavage $\mathbf{P}$ induit des pavages entiers convexes admissibles $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ sur les côtés $\{x_0 = 0\}$, $\{x_1 = 0\}$ et $\{x_2 = 0\}$ de $S_{\mathbb{R}}^{r,2}$ identifiés à $S_{\mathbb{R}}^{r,1}$ et on a des morphismes de face $p_i : \Omega_{\mathbf{P}}^{r,\tau} \rightarrow \Omega_{\mathbf{Q}_i}^{r,1}$ pour $i = 0, 1, 2$. Ces strates et ces morphismes de face admettent des descriptions en termes des schémas de graphes recollés $\text{Gr}_{\mathbf{P}}^{r,2}$ et $\text{Gr}_{\mathbf{Q}}^{r,1}$.

En particulier, pour le pavage trivial, on vérifie que la strate ouverte $\Omega_{\mathbf{P}}^{r,\tau}$ est isomorphe au fermé

$$(\{(g_0, g_1, g_2) \mid g_1 g_2^{-1} = \tau(g_0 g_2^{-1})\} \times \mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}}) / (\text{GL}_r \times \mathbb{G}_m) \subset (\text{GL}_r^3 \times \mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}}) / (\text{GL}_r \times \mathbb{G}_m)$$

où le quotient est pris pour le plongement $(g, u) \mapsto ((u^{-1}g, u^{-q}g, g), (u^{i_0+qi_1})_{i \in S^{r,\tau}})$. On peut identifier ce fermé au schéma

$$\mathrm{GL}_r \times (\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} / \mathbb{G}_m)$$

par le morphisme $((g_0, g_1, g_2), t) \mapsto (g_2 g_0^{-1}, t)$. Si l'on identifie $\Omega^{r,1}$ à $\mathrm{GL}_r \times (\mathbb{G}_m^{S^{r,1}} / \mathbb{G}_m)$ par le morphisme $((g_0, g_1), t) \mapsto (g_1 g_0^{-1}, t)$, les projections $p_1, p_2 : \Omega_{\mathbf{P}}^{r,\tau} \rightarrow \Omega_{\mathbf{Q}}^{r,1}$, où $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ est le pavage trivial de $S_{\mathbb{R}}^{r,1}$, sont induites par les morphismes $\mathrm{GL}_r \rightarrow \mathrm{GL}_r$ qui envoient g sur g et sur $\tau(g)^{-1}g$ respectivement et les morphismes $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} \rightarrow \mathbb{G}_m^{S^{r,1}}$ qui envoient t sur $(t_{(i_0,0,i_1)})_{i \in S^{r,1}}$ (avec $t_{(0,0,r)} = 1$) et sur $(t_{(i_0,i_1,0)})_{i \in S^{r,1}}$ (avec $t_{(0,r,0)} = t_{r,0,0}^q$) respectivement.

Soit $S^{r,\tau,\circ} = S^{r,\tau} - \{(1,0,r-1)\}$. L'inclusion $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau,\circ}} \subset \mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}}$ est une section de l'épimorphisme $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau}} \twoheadrightarrow T^{r,\tau}$.

THÉORÈME. — *Le quotient $\widetilde{\mathrm{gl}}_r^\tau$ de $\Omega^{r,\tau}$ par l'action libre du tore $\mathbb{G}_m^{S^{r,\tau,\circ}}$ contient GL_r comme un ouvert dense. Il est lisse sur le champ torique $T^{r,\tau} = [\widetilde{T}^{r,\tau} / T^{r,\tau}]$ et il est muni de deux morphismes projectifs sur le schéma des homomorphismes complets $\widetilde{\mathrm{gl}}_r$ qui s'insèrent dans les deux carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_r & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{gl}}_r^\tau \\ \mathrm{Id} \downarrow & + & \downarrow \\ \mathrm{GL}_r & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{gl}}_r \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_r & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{gl}}_r^\tau \\ L \downarrow & + & \downarrow \\ \mathrm{GL}_r & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{gl}}_r \end{array}$$

où $L : g \rightarrow \tau(g)^{-1}g$ est l'isogénie de Lang.

Remarque. — En passant au quotient par l'action libre du tore $\mathbb{G}_m^{r,\tau}$ tout entier, on obtient un schéma projectif $\overline{\Omega}^{r,\tau}$, muni d'un morphisme vers la compactification de De Concini et Procesi de PGL_r qui prolonge l'isogénie de Lang $g \mapsto \tau(g)^{-1}g$ de ce schéma en groupes.

5. ALLURE DES NOMBRES DE LEFSCHETZ

On fixe dans toute cette section un niveau arbitraire $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$.

5.1. Correspondances de Hecke et endomorphismes de Frobenius partiels

Tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ définit une correspondance dite *de Hecke*

$$c = (c_1, c_2) : \mathrm{Cht}_N^r(g) \rightarrow \mathrm{Cht}_N^r \times_{(X-N)^2} \mathrm{Cht}_N^r$$

où $\mathrm{Cht}_N^r(g)$ est un champ de Deligne-Mumford et c_1, c_2 sont des morphismes représentables étales. Cette correspondance ne dépend que de la double classe $K_N g K_N$ où K_N est le sous-groupe d'indice fini $\mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N))$ de $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$. Si S_g est la réunion du support $|N| \subset |X|$ de N et de l'ensemble fini des places x de X telles

que $g_x \notin F_x^\times K_{N,x} \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$, c_1 et c_2 sont finies au-dessus de l'ouvert $(X - S_g)^2$ de $(X - N)^2$.

Si $a \in \mathbb{A}^\times$, la double classe $F^\times a \mathrm{Ker}(\mathcal{O}^\times \twoheadrightarrow \mathcal{O}_N^\times)$ dans $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathrm{Ker}(\mathcal{O}^\times \twoheadrightarrow \mathcal{O}_N^\times)$ est la classe d'isomorphie d'un $\mathcal{O}_X$ -Module inversible $\mathcal{L}$ muni d'une trivialisation de sa restriction à N . Si $g \in aK_N \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a $\mathrm{Cht}_N^r(g) = \mathrm{Cht}_N^r$, c_1 est l'identité et c_2 est l'automorphisme de Cht_N^r qui envoie un chtouca $\tilde{\mathcal{E}}$ muni d'une structure de niveau N sur le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \tilde{\mathcal{E}}$ muni de la structure de niveau N évidente. On notera simplement a cet automorphisme.

Soit Λ_X le schéma intersection de tous les ouverts de $X \times X$ complémentaires des images réciproques de la diagonale par les endomorphismes $\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X^n$ de $X \times X$ pour tous les entiers $n \geq 0$. Au-dessus de Λ_X , il n'y a plus de différence entre chtoucas à gauche et chtoucas à droite : un chtouca à droite $\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^\tau \mathcal{E}$ dont le couple pôle-zéro (∞, o) se factorise par $\Lambda_X \subset X \times X$ définit un chtouca à gauche $\mathcal{E} \xleftarrow{t'} \mathcal{E}'' \xrightarrow{j'} {}^\tau \mathcal{E}$ de pôle $\infty' = \infty$ et de zéro $o' = o$, où $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times_{j, \mathcal{E}', t} {}^\tau \mathcal{E}$ et t', j' sont les deux projections, et vice versa. Au-dessus de Λ_X , les morphismes de Frobenius partiels introduits en 2.1 peuvent donc être vus comme des endomorphismes, dits encore de Frobenius partiels,

$$\mathrm{Frob}_\infty \text{ et } \mathrm{Frob}_o : \Lambda_X \times_{X^2} \mathrm{Cht}_N^r \rightarrow \Lambda_X \times_{X^2} \mathrm{Cht}_N^r$$

au-dessus de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ respectivement.

On fixe dans la suite un élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré $\deg(a) > 0$ et on considère le quotient

$$\mathrm{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}} \cong \prod_{d=1}^{r \deg(a)} \mathrm{Cht}_N^{r,d}.$$

Les correspondances de Hecke et les endomorphismes de Frobenius partiels que nous venons d'introduire passent au quotient par $a^{\mathbb{Z}}$.

Pour tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in [0, 1]$, $a^{\mathbb{Z}}$ stabilise l'ouvert $\mathrm{Cht}_N^{r; \leq \alpha p}$ de Cht_N^r et l'ouvert quotient

$$\mathrm{Cht}_N^{r; \leq \alpha p} / a^{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}}$$

est de type fini. *Par contre, cet ouvert n'est stabilisé ni par les endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ , Frob_o , ni par les correspondances de Hecke (sauf celles qui sont associées à des $g \in \mathbb{A}^\times K$).* C'est la difficulté majeure qu'a dû surmonter Lafforgue.

5.2. Nombres de Lefschetz

Si ∞ et o sont deux points fermés de X le sous-schéma fini $\infty \times o \subset X \times X$ a exactement $\delta(\infty, o)$ points fermés, où $\delta(\infty, o)$ est le plus grand commun diviseur de $\deg(\infty)$ et $\deg(o)$. Le corps résiduel $\kappa(\xi)$ de chaque $\xi \in \infty \times o$ est une extension

composée de $\kappa(\infty)$ et $\kappa(o)$, et son degré $\deg(\xi)$ sur $\mathbb{F}_q$ est le plus petit commun multiple

$$\mu(\infty, o) = \frac{\deg(\infty) \deg(o)}{\delta(\infty, o)}$$

de $\deg(\infty)$ et $\deg(o)$. Pour chaque $\xi \in \infty \times o$, les suites de points fermés de $X \times X$,

$$n \mapsto (\text{Frob}_X^n \times \text{Id}_X)(\xi) \text{ et } n \mapsto (\text{Id}_X \times \text{Frob}_X^n)(\xi)$$

sont en fait à valeurs dans $\infty \times o$ et sont périodiques de périodes $\deg(\infty)$ et $\deg(o)$ respectivement.

Fixons $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$, deux points fermés distincts ∞ et o de $X - S_g$, un entier t , deux entiers $n_\infty, n_o \geq 1$ tels que $\deg(o)n_o - \deg(\infty)n_\infty = t$, un point fermé ξ de $\infty \times o$, un paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$.

On note $\text{Cht}_{N, \xi}^r / a^{\mathbb{Z}}$ la fibre en ξ de la projection canonique $\text{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2$. C'est un champ algébrique de Deligne-Mumford lisse purement de dimension relative $2r - 2$ sur le corps fini $\kappa(\xi)$. On note

$$c_\xi = (c_{1, \xi}, c_{2, \xi}) : \text{Cht}_{N, \xi}^r(g) / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Cht}_{N, \xi}^r / a^{\mathbb{Z}} \times_{\kappa(\xi)} \text{Cht}_{N, \xi}^r / a^{\mathbb{Z}}$$

la fibre en ξ de la correspondance de Hecke définie par g . Les deux composantes $c_{1, \xi}$ et $c_{2, \xi}$ sont représentables finies étales.

Puisque ∞ et o sont distincts, le point fermé ξ est dans $\Lambda_X \subset X^2$. Les puissances $\text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ et $\text{Frob}_o^{\deg(o)}$ des endomorphismes de Frobenius partiels sont donc définies sur la fibre $\text{Cht}_{N, \xi}^r / a^{\mathbb{Z}}$ et elles la stabilisent.

DÉFINITION. — *Le nombre de Lefschetz*

$$\text{Lef}_\xi(g \times \text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)n_\infty} \times \text{Frob}_o^{\deg(o)n_o}, \text{Cht}_N^{r; \leq \alpha p} / a^{\mathbb{Z}})$$

est la somme

$$\sum_y \frac{1}{|\text{Aut}(y)|}$$

où y parcourt l'ensemble des classes d'isomorphie de points dans $\text{Cht}_{N, \xi}^r(g) / a^{\mathbb{Z}}$ munis d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} c_{1, \xi}(y) &\cong (\text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)n_\infty} \circ \text{Frob}_o^{\deg(o)n_o})(c_{2, \xi}(y)) \\ (1) \quad &\cong (\text{Frob}_o^{\deg(o)n_o} \circ \text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)n_\infty})(c_{2, \xi}(y)) \end{aligned}$$

et tels que

$$c_{1, \xi}(y) \in \text{Cht}_{N, \xi}^{r; \leq \alpha p} / a^{\mathbb{Z}} \subset \text{Cht}_{N, \xi}^r / a^{\mathbb{Z}},$$

et où $\text{Aut}(y)$ est le groupe fini des automorphismes du point fixe y .

En utilisant

- la description adélique de Drinfeld des points de $\text{Cht}_{N, \xi}^r$ ([Dr 5], [La 1]),
- le cas particulier du « Lemme Fondamental » prouvé par Drinfeld ([Lau 1]),

– la décomposition spectrale de Langlands ([Lan 2], [Mo-Wa]) et la formule des traces d'Arthur-Selberg ([Ar], [La 1]),

– la formule de Cauchy pour calculer les intégrales qui apparaissent dans la formule des traces,

Lafforgue démontre alors :

THÉORÈME. — *Si $\deg(\infty)$ et $\deg(o)$ sont assez grands en fonction de la double classe $K_N g K_N$ et de l'entier t et si p est assez convexe en fonction du niveau N et de la double classe $K_N g K_N$, la moyenne de chacune des deux suites périodiques*

$$k \mapsto \text{Lef}_{(\text{Frob}_X^k \times \text{Id}_X)(\xi)}(g \times \text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)n_\infty} \times \text{Frob}_o^{\deg(o)n_o}, \text{Cht}_N^{r; \leq \alpha p} / a^{\mathbb{Z}})$$

et

$$k \mapsto \text{Lef}_{(\text{Id}_X \times \text{Frob}_X^k)(\xi)}(g \times \text{Frob}_\infty^{\deg(\infty)n_\infty} \times \text{Frob}_o^{\deg(o)n_o}, \text{Cht}_N^{r; \leq \alpha p} / a^{\mathbb{Z}}),$$

de période le p.g.c.d. de $\deg(o)$, $\deg(\infty)$ et $r!$, est égale à l'expression spectrale suivante

$$(2) \quad \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_\pi(a)=1}} \text{Tr}_\pi(1_{K_N g K_N}) q^{(\deg(\infty)n_\infty + \deg(o)n_o) \frac{r-1}{2}} S_\infty^{(-n_\infty)}(\pi) S_o^{(n_o)}(\pi) \\ + \sum_{\substack{1 \leq r' < r \\ 1 \leq r'' < r}} \sum_{\substack{\pi' \in \mathcal{A}_{r'}(K_N) \\ \pi'' \in \mathcal{A}_{r''}(K_N)}} \text{Tr}_{\pi', \pi''}^{\leq \alpha p}(1_{K_N g K_N}, \deg(\infty)n_\infty) S_\infty^{(-n_\infty)}(\pi') S_o^{(n_o)}(\pi'')$$

où

– $\mathcal{A}_r(K_N) \subset \mathcal{A}_r$ est un système de représentants des classes d'isomorphie de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ qui admettent au moins un vecteur non nul fixe sous K_N ,

– $1_{K_N g K_N}$ est la fonction caractéristique de $K_N g K_N \subset \text{GL}_r(\mathbb{A})$ et $\text{Tr}_\pi(1_{K_N g K_N})$ est la trace de l'opérateur $\pi(1_{K_N g K_N})$,

– pour $x = \infty, o$ et ν un entier positif, $S_x^{(\nu)}(\pi) = z_1(\pi_x)^\nu + \cdots + z_r(\pi_x)^\nu$ est la somme des ν -ièmes puissances des valeurs propres de Hecke de la composante locale non ramifiée π_x de π ,

– $\nu \mapsto \text{Tr}_{\pi', \pi''}^{\leq \alpha p}(1_{K_N g K_N}, \nu)$ est une fonction complexe de l'entier ν , qui ne dépend pas des places $o, \infty \in |X| - S_g$, qui est de la forme

$$\sum_{z \in \mathbb{C}^\times} P_z(\nu) z^\nu$$

pour une famille à support fini de polynômes $P_z(u) \in \mathbb{C}[u]$, $z \in \mathbb{C}^\times$, et qui est identiquement nulle sauf pour un nombre fini de couples (π', π'') .

6. REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

6.1. Représentations de Galois r -négligeables

Rappelons que F est le corps des fonctions rationnelles sur la courbe X et que l'on a fixé une clôture séparable $\overline{F}$ de F . On désignera par $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans $\overline{F}$. On identifiera le groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ à $\widehat{\mathbb{Z}}$ en choisissant pour générateur topologique de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ l'élément de Frobenius géométrique (l'inverse de l'élévation à la puissance q -ième dans $\overline{\mathbb{F}}_q$).

Notons E le corps des fractions de $F \otimes F$, c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles sur la surface $X \times X$, et fixons une clôture algébrique $\overline{E}$ de E et un plongement $\overline{F} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \overline{F} \hookrightarrow \overline{E}$ au-dessus du plongement $F \otimes F \hookrightarrow E$. On a donc défini un point géométrique $\overline{\delta} : \text{Spec}(\overline{E}) \rightarrow X \times X$ localisé en le point générique $\delta = \text{Spec}(E)$ de $X \times X$ et tel que ses images par les deux projections canoniques de $X \times X$ se factorisent par le point géométrique $\overline{\eta} : \text{Spec}(\overline{F}) \rightarrow X$ localisé au point générique η de X .

Pour tout ouvert non vide U de X , le groupe fondamental de Grothendieck $\pi_1(U, \overline{\eta})$ est le quotient de $\Gamma_F = \text{Gal}(\overline{F}/F)$ qui classe les extensions finies de F dans $\overline{F}$ qui sont non ramifiées en toutes les places $x \in |U|$. Il admet comme quotient le groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q} = \widehat{\mathbb{Z}}$. De même, pour tout ouvert non vide V de $X \times X$, le groupe fondamental de Grothendieck $\pi_1(V, \overline{\delta})$ est un quotient du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{E}/E)$ et admet $\widehat{\mathbb{Z}}$ comme quotient.

Soit V un ouvert non vide de $X \times X$ de la forme $U_1 \times U_2$ pour des ouverts U_1 et U_2 de X . Cet ouvert est stable par les endomorphismes $\text{Frob}_X \times \text{Id}_X$ et $\text{Id}_X \times \text{Frob}_X$ de $X \times X$ et les foncteurs « images réciproques » par ces endomorphismes sont des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, de la catégorie des revêtements finis étales de V sur elle-même (le foncteur image réciproque par $\text{Frob}_V = \text{Frob}_{U_1} \times \text{Frob}_{U_2}$ est canoniquement isomorphe à l'identité). On peut donc considérer la catégorie des revêtements finis étales V' de V munis d'un isomorphisme $(\text{Frob}_{U_1} \times \text{Id}_{U_2})^* V' \xrightarrow{\sim} V'$ ou, ce qui revient au même, d'un isomorphisme $(\text{Id}_{U_1} \times \text{Frob}_{U_2})^* V' \xrightarrow{\sim} V'$. Le foncteur fibre en $\overline{\delta}$ identifie cette catégorie à la catégorie des ensembles finis munis de l'action d'un groupe pro-fini $\tilde{\pi}_1(U_1 \times U_2, \overline{\delta})$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(U_1 \times U_2, \overline{\delta}) & \longrightarrow & \tilde{\pi}_1(U_1 \times U_2, \overline{\delta}) & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^2 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

à lignes exactes et à flèches verticales surjectives. Tout revêtement fini étale V' de $V = U_1 \times U_2$ de la forme $V' = U'_1 \times U'_2$ où chaque U'_i est un revêtement fini étale de U_i , est canoniquement muni d'un isomorphisme $(\text{Frob}_{U_1} \times \text{Id}_{U_2})^* V' \xrightarrow{\sim} V'$. On a donc un homomorphisme de $\tilde{\pi}_1(U_1 \times U_2, \overline{\delta})$ dans $\pi_1(U_1, \overline{\eta}) \times \pi_1(U_2, \overline{\eta})$ qui prolonge l'homomorphisme $\pi_1(U_1 \times U_2, \overline{\delta}) \rightarrow \pi_1(U_1, \overline{\eta}) \times \pi_1(U_2, \overline{\eta})$ défini par les deux projections

canoniques de $U_1 \times U_2$, et qui induit l'identité entre les quotients $\widehat{\mathbb{Z}}^2$ de sa source et de son but.

PROPOSITION (Drinfeld). — *L'homomorphisme défini ci-dessus*

$$\tilde{\pi}_1(U_1 \times U_2, \bar{\delta}) \rightarrow \pi_1(U_1, \bar{\eta}) \times \pi_1(U_2, \bar{\eta}),$$

est un isomorphisme.

On a fixé dans la section 1 un nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$.

Rappelons que, pour tout ouvert non vide U de X (resp. V de $X \times X$), le foncteur fibre en $\bar{\eta}$ (resp. $\bar{\delta}$) est une équivalence de la catégorie des systèmes locaux ℓ -adiques (c'est-à-dire des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceaux lisses) sur U (resp. V) sur la catégorie des représentations ℓ -adiques de $\pi_1(U, \bar{\eta})$ (resp. $\pi_1(V, \bar{\delta})$). Pour tout système local ℓ -adique L sur U (resp. M sur V) et tout point fermé x de U (resp. y de V), la classe de conjugaison dans $\pi_1(U, \bar{\eta})$ (resp. $\pi_1(V, \bar{\delta})$) des éléments de Frobenius géométriques en x (resp. y) définit donc une classe de conjugaison d'endomorphismes de $L_{\bar{\eta}}$ (resp. $M_{\bar{\delta}}$). On note $\text{Tr}(\text{Frob}_x, L)$ (resp. $\text{Tr}(\text{Frob}_y, M)$) sa trace et $\det(1 - T \text{Frob}_x, L)$ (resp. $\det(1 - T \text{Frob}_y, M)$) son polynôme caractéristique.

Soient U un ouvert non vide de X et M un système local ℓ -adique irréductible sur $U \times U$. On considère les propriétés suivantes :

– M est de la forme $L_1 \boxtimes L_2$ pour des systèmes locaux ℓ -adiques (irréductibles) L_1 sur L_2 sur U et, en particulier, il existe des fonctions $\Delta_1, \Delta_2 : |U \times U| \rightarrow 1 + T\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T]$ telles que

$$\det(1 - T \text{Frob}_\xi, M) = \Delta_1(\infty) * \Delta_2(o)$$

pour tout $\xi \in |U \times U|$ de projections $\infty, o \in |U|$, où l'opération $*$ est définie par

$$\prod_{i_1=1}^{r_1} (1 - \alpha_{1,i_1} T) * \prod_{i_2=1}^{r_2} (1 - \alpha_{2,i_2} T) = \prod_{i_1, i_2} (1 - \alpha_{1,i_1} \alpha_{2,i_2} T).$$

– Il existe un isomorphisme $(\text{Frob}_U \times \text{Id}_U)^* M \xrightarrow{\sim} M$ et, en particulier, la fonction $\xi \mapsto \det(1 - T \text{Frob}_\xi, M)$ est constante sur $|\infty \times o|$ pour chaque couple (∞, o) de points fermés de U .

La propriété (i) implique évidemment la propriété (ii) et il devrait résulter de la proposition de Drinfeld que les propriétés (i) et (ii) sont en fait équivalentes.

Lafforgue démontre un résultat partiel dans cette direction.

PROPOSITION. — *On suppose de plus que M est ponctuellement pur au sens de [De] et qu'il existe des fonctions $\Delta_1, \Delta_2 : |U \times U| \rightarrow 1 + T\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T]$ telles que*

$$\det(1 - T \text{Frob}_\xi, M) = \Delta_1(\infty) * \Delta_2(o)$$

pour tout $\xi \in |U \times U|$ dont les projections $\infty, o \in |U|$ sont distinctes.

Alors, la propriété (ii) implique la propriété (i).

DÉFINITION. — Si U est un ouvert de X , un système local ℓ -adique sur $U \times U$ est dit r -négligeable si tous ses sous-quotients irréductibles sont des facteurs directs de systèmes locaux de la forme $L_1 \boxtimes L_2$ où L_1 et L_2 sont des systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles de rangs $\leq r - 1$ sur U .

Si λ est une unité ℓ -adique, on notera par $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(\lambda)}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ défini par le caractère $\widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, $1 \mapsto \lambda$, du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Si F est un faisceau ℓ -adique sur un $(\mathbb{F}_q)$ -schéma S , on notera suivant Deligne $F^{(\lambda)}$ le produit tensoriel de F par l'image réciproque sur S de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(\lambda)}$. En particulier, $F^{(q^{-1})}$ n'est autre que la torsion à la Tate $F(1)$ de F . Rappelons que tout système local ℓ -adique L sur un schéma S normal de type fini peut s'écrire sous la forme $L = M^{(\lambda)}$ où λ est une unité ℓ -adique et M est un système local ℓ -adique dont le déterminant (c'est-à-dire la puissance extérieure maximale) est d'ordre fini.

Remarque. — Comme $\pi_1(X \times X, \bar{\delta})$ diffère du produit $\pi_1(X, \bar{\eta}) \times \pi_1(X, \bar{\eta})$ par une copie de $\widehat{\mathbb{Z}}$, il arrive que, pour deux systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles L_1 et L_2 sur X , le système local $L_1 \boxtimes L_2$ sur $X \times X$ ne soit pas irréductible. C'est le cas si on a $L_1 \cong L_1^{(\lambda)}$ et $L_2 \cong L_2^{(\lambda^{-1})}$ pour une racine de l'unité $\lambda \neq 1$ d'ordre divisant à la fois le rang de L_1 et celui de L_2 . Cependant un tel système local $L_1 \boxtimes L_2$ est toujours semi-simple et ses facteurs irréductibles sont images les uns des autres par les puissances de $\text{Frob}_X \times \text{Id}_X$.

6.2. La récurrence

Soient $N \subset X$ un niveau « sans facteur carré », $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ un paramètre de troncature assez convexe par rapport au genre de la courbe X et à N , et d un entier. On a vu dans la section 3 comment Lafforgue construit un morphisme de champs algébriques

$$\overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p} \rightarrow \overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau} \times (X - N)^2$$

lisse purement de dimension relative $2r - 2$, dont le composé avec la projection sur $(X - N)^2$ est propre, et dont la restriction au-dessus de l'ouvert $\text{Spec}(\mathbb{F}_q) = \text{Tr}_N^{r,\tau} \subset \overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau}$ est le morphisme pôle-zéro $\text{Cht}_N^{r,d;\leq p} \rightarrow (X - N)^2$.

Par construction (cf. 3.4), le champ $\widetilde{\text{Tr}}_N^{r,\tau}$ est lisse sur $\mathcal{T}^{r,\tau} \times_{[\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}], \langle q-1 \rangle} [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ où $\mathcal{T}^{r,\tau}$ est un champ torique. On sait donc construire des résolutions des singularités $\widetilde{\text{Tr}}_N^{r,\tau} \rightarrow \overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau}$. Fixons-en une et notons

$$\widetilde{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p} = \overline{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p} \times_{\overline{\text{Tr}}_N^{r,\tau}} \widetilde{\text{Tr}}_N^{r,\tau}.$$

Le morphisme de champs

$$\widetilde{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p} \rightarrow (X - N)^2$$

prolonge le morphisme pôle-zéro $\text{Cht}_N^{r,d;\leq p} \rightarrow (X - N)^2$ et est encore propre. Il est de plus lisse purement de dimension relative $2r - 2$, et le fermé complémentaire de l'ouvert

$\text{Cht}_N^{r,d;\leq p} \subset \widetilde{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $(X - N)^2$ qui est réunion de diviseurs lisses sur $(X - N)^2$.

En prenant la réunion disjointe sur les entiers d des champs $\widetilde{\text{Cht}}_N^{r,d;\leq p}$ et en divisant par l'action de $a^{\mathbb{Z}}$, on obtient un morphisme de champs

$$\widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2$$

qui prolonge le morphisme pôle-zéro $\text{Cht}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2$, qui est propre et lisse purement de dimension relative $2r - 2$, et pour lequel le fermé complémentaire de l'ouvert $\text{Cht}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}} \subset \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $(X - N)^2$ qui est réunion de diviseurs lisses sur $(X - N)^2$.

Le théorème suivant est une description partielle de la cohomologie ℓ -adique des variétés de chtoucas compactifiées.

THÉORÈME. — *Pour tout niveau « sans facteur carré » N et tout paramètre de troncature p assez convexe par rapport au genre de la courbe X et à N , les images directes supérieures du faisceau constant de valeur $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ par le morphisme canonique $\widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2$ sont toutes des systèmes locaux ℓ -adiques $(r+1)$ -négligeables.*

Lafforgue prouve le théorème principal de la section 1 et le théorème ci-dessus (convenablement généralisé à des niveaux N arbitraires) par une récurrence simultanée sur r . Plus précisément, pour tout entier $r' \geq 1$, il considère les propriétés suivantes :

– $P_1(r')$ Quel que soit $\pi' \in \mathcal{A}_{r'}$, il existe $\sigma(\pi') \in \mathcal{G}_{r'}$ tel que l'on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$\iota(L(\sigma(\pi')_x, T)) = L(\pi'_x, T)$$

pour presque toute place $x \notin S_{\sigma(\pi')} \cup S_{\pi'}$.

– $P_2(r')$ Quel que soit $\sigma' \in \mathcal{G}_{r'}$, il existe $\pi(\sigma') \in \mathcal{A}_{r'}$ tel que l'on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$L(\pi(\sigma')_x, T) = \iota(L(\sigma'_x, T))$$

pour presque toute place $x \notin S_{\pi(\sigma')} \cup S_{\sigma'}$.

– $P_3(r')$ Quels que soient $\pi' \in \mathcal{A}_{r'}$ et $x \in |X| - S_{\pi'}$, les valeurs propres de Hecke $z_1(\pi'), \dots, z_{r'}(\pi')$ sont toutes de valeur absolue 1.

– $P_4(r')$ Le théorème ci-dessus (convenablement généralisé à des niveaux N arbitraires) est démontré en rang r' .

Et il prouve :

THÉORÈME. — *Fixons un entier $r \geq 1$. Alors les propriétés $P_1(r')$, $P_3(r')$ et $P_4(r')$ pour $r' = 1, \dots, r - 1$ impliquent ces mêmes propriétés pour $r' = r$.*

Comme on l'a déjà signalé en 1.4, les propriétés $P_1(1), \dots, P_1(r-1)$ impliquent les propriétés $P_2(1), \dots, P_2(r-1), P_2(r)$, et en particulier la correspondance de Langlands en tout rang $r' < r$. Le théorème ci-dessus implique donc bien le théorème principal de 1.3. Ces mêmes propriétés impliquent aussi des propriétés renforcées où l'on impose que $S_{\sigma(\pi')} = S_{\pi'}$ et les égalités de facteurs L locaux pour toutes les places $x \notin S_{\pi'}$.

Nous terminerons cet exposé en esquisant la preuve du théorème ci-dessus. *Nous nous restreindrons aux niveaux N « sans facteur carré » et aux représentations automorphes $\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \subset \mathcal{A}_r$.* Dans la suite de cette section nous nous concentrerons sur les aspects galoisiens.

6.3. Les strates du bord sont r -négligeables

On fixe pour toute la suite de la section 6 un niveau N « sans facteur carré ».

Pour tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ assez convexe en fonction du genre de la courbe X et de N et pour tout entier ν , on note

$$H_N^{r; \leq p, \nu}, \tilde{H}_N^{r; \leq p, \nu} \text{ et } \tilde{\widetilde{H}}_N^{r; \leq p, \nu}$$

les ν -ièmes images directes supérieures à supports compacts du faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par les morphismes de champs

$$\mathrm{Cht}_N^{r; \leq p} / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2, \widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r; \leq p} / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2$$

et

$$\left(\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r; \leq p} - \mathrm{Cht}_N^{r; \leq p} \right) / a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (X - N)^2.$$

Ce sont des systèmes locaux ℓ -adiques sur $(X - N)^2$ nuls pour $\nu \notin \{0, 1, \dots, 4r - 4\}$ (et même pour $\nu \notin \{0, 1, \dots, 4r - 6\}$ dans le cas de $\tilde{H}_N^{r; \leq p, \nu}$), et on a une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_N^{r; \leq p, \nu} \rightarrow \tilde{H}_N^{r; \leq p, \nu} \rightarrow \tilde{\widetilde{H}}_N^{r; \leq p, \nu} \rightarrow H_N^{r; \leq p, \nu+1} \rightarrow \dots$$

Le diviseur à croisements normaux relatif $\left(\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r; \leq p} - \mathrm{Cht}_N^{r; \leq p} \right) / a^{\mathbb{Z}}$ sur $(X - N)^2$ est réunion d'une famille finie de diviseurs lisses. Il est donc muni d'une stratification canonique. Une *strate fermée du bord* est une intersection d'une sous-famille non vide de cette famille. La relation d'inclusion définit une relation d'ordre sur les strates fermées du bord. Une *strate ouverte du bord* est le complémentaire dans une strate fermée du bord de la réunion des strates fermées du bord strictement plus petite. Par exemple, pour $N = \emptyset$, les strates ouvertes du bord sont les $\widetilde{\mathrm{Cht}}_R^{r; \leq p} / a^{\mathbb{Z}}$ pour $\emptyset \neq R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\} \subset [r - 1]$ définies en 3.3, et les strates fermées du bord sont les adhérences des strates ouvertes du bord.

Toute strate du bord (fermée ou ouverte) est lisse sur $(X - N)^2$, et les images directes supérieures à supports compacts de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par la restriction à une telle strate du morphisme pôle-zéro sont toutes des systèmes locaux ℓ -adiques sur $(X - N)^2$, qu'il est commode d'appeler *images directes supérieures de la strate*.

PROPOSITION. — Supposons que les propriétés $P_1(1) \dots, P_1(r-1)$ soient vérifiées. Alors, les systèmes locaux ℓ -adiques

- images directes supérieures des strates fermées du bord,
- images directes supérieures des strates ouvertes du bord
- $\tilde{H}_{N,\partial}^{r;\leq p,\nu}$, $0 \leq \nu \leq 4r-6$,

sont tous r -négligeables.

Esquissons la preuve de cette proposition pour $N = \emptyset$. On procède par récurrence sur r . Compte tenu de la suite exacte longue ci-dessus, les hypothèses de la proposition et de récurrence assurent que les images directes supérieures par les morphismes

$$\text{Cht}^{r',d';\leq p'} \rightarrow X \times X$$

sont toutes $(r'+1)$ -négligeables quels que soient les entiers $1 \leq r' < r$ et d' et le paramètre de troncature p' assez convexe par rapport au genre de X .

Chaque strate $\overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p}$, $\emptyset \neq R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\} \subset [r-1]$, est finie et radicielle sur un champ $\text{Cht}^{R,d;\leq p}$ et lui est donc équivalente du point de vue de la cohomologie ℓ -adique. Par hypothèse de récurrence, tous les sous-quotients irréductibles des images directes supérieures par le morphisme

$$(\infty = \infty_1, o_1 = \infty_2, \dots, o_{s-1} = \infty_s, o_s = o) : \text{Cht}^{R,d;\leq p} \rightarrow X \times X^{s-1} \times X$$

sont des facteurs directs de faisceaux de la forme

$$L'_1 \boxtimes \left(\bigotimes_{j=1}^{s-1} (L''_j \otimes L'_{j+1}) \right) \boxtimes L''_s$$

pour des systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles L'_1, L''_1 de rangs $\leq r_1 < r$, L'_2, L''_2 de rangs $\leq r_2 - r_1 < r$, ... et L'_s, L''_s de rangs $\leq r - r_{s-1} < r$ sur la courbe X . Par suite, les images directes supérieures par le morphisme $(\infty, o) : \overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p} \rightarrow X \times X$ se décomposent en systèmes locaux ℓ -adiques qui sont des facteurs directs de faisceaux de la forme

$$(L'_1 \boxtimes L''_s) \otimes H^\nu \left(\overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} X^{s-1}, \bigotimes_{j=1}^{s-1} (L''_j \otimes L'_{j+1}) \right),$$

et tous leurs sous-quotients irréductibles sont des facteurs directs de systèmes locaux de la forme $(L'_1 \boxtimes L''_s)^{(\lambda)}$ où λ est une valeur propre de Frob_q agissant sur $H^\nu(\overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} X^{s-1}, \bigotimes_{j=1}^{s-1} (L''_j \otimes L'_{j+1}))$; la proposition s'en suit.

Le cas général est un peu plus difficile mais similaire en utilisant le fait essentiel que les $\overline{\text{Cht}}_N^{r;\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ et $\widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ sont construits à partir des $\overline{\text{Cht}}^{r;\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ en formant un produit fibré au-dessus du champ $\overline{\text{Tr}}_N^r$. On a besoin d'une formule de comptage supplémentaire où interviennent les fonctions d'Euler-Poincaré introduites par Kottwitz (cf. [Lau 1]) et un argument inspiré de [Ha-Ta].

6.4. Séparation de la partie cuspidale de la cohomologie

Soit S un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Un système local ℓ -adique *virtuel* M sur $U \times U$ est une combinaison linéaire formelle $M = \sum_L m_M(L)[L]$ où L parcourt un ensemble de représentants des classes d'isomorphie de systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles sur S (fixé une fois pour toute) et où $L \mapsto m_M(L)$ est une fonction sur cet ensemble à valeurs *rationnelles* et à support fini. Le coefficient $m_M(L) \in \mathbb{Q}$ est appelé la *multiplicité* de L dans M . On dit que L *intervient dans* M ou encore que L *est un constituant de* M si $m_M(L) \neq 0$. Un système local ℓ -adique M définit un système local ℓ -adique virtuel $[M] : m_M(L)$ est la multiplicité de L dans n'importe quelle filtration de Jordan-Hölder de M .

On dira qu'un système local ℓ -adique virtuel $M = \sum_L m_M(L)[L]$ sur S est effectif si $m_M(L) \geq 0$ quel que soit L . On dira qu'il est *pur de poids* un entier w si tous les L qui interviennent dans M sont ponctuellement purs de poids w . On dira qu'il est *mixte de poids contenus dans* un ensemble W d'entiers si chaque L qui intervient dans M est ponctuellement pur de poids appartenant à W .

Soit maintenant U un ouvert non vide de X . Un système local ℓ -adique *virtuel* M sur $U \times U$ est dit *r -négligeable* si tous les L qui interviennent dans M sont *r -négligeables*. Si $M = \sum_L m_M(L)[L]$ est un système local ℓ -adique virtuel sur $U \times U$, on appellera *morceau non r -négligeable* de M et on notera $M_{\text{cusp}} = \sum_L m_{M_{\text{cusp}}}(L)[L]$ le système local ℓ -adique virtuel sur $U \times U$ défini par $m_{M_{\text{cusp}}}(L) = 0$ si L est *r -négligeable* et $m_{M_{\text{cusp}}}(L) = m_M(L)$ sinon.

En confrontant la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz ([Gr])

$$\text{Lef}_{\xi} \left(\text{Frob}_{\text{Cht}_N^{r; \leq p} / a^z}^{\deg(\xi)n} \right) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \text{Tr}(\text{Frob}_{\xi}^n, H_N^{r; \leq p, \nu})$$

et le cas particulier $g = 1$ et $\deg(\infty)n_{\infty} = \deg(o)n_o = \deg(\xi)n$ de la formule pour la moyenne de nombres de Lefschetz énoncée en 5.2, on voit que sans changer la valeur de l'expression

$$\sum_{\substack{1 \leq r' < r \\ 1 \leq r'' < r}} \sum_{\substack{\pi' \in \mathcal{A}_{r'}(K_N) \\ \pi'' \in \mathcal{A}_{r''}(K_N)}} \text{Tr}_{\pi', \pi''}^{\leq p}(1_{K_N}, \deg(\xi)n) S_{\infty}^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(\infty)}n\right)}(\pi') S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi'')$$

on peut y remplacer les fonctions $\nu \mapsto \text{Tr}_{\pi', \pi''}^{\leq p}(1_{K_N}, \nu)$ par des fonctions de la forme $\sum_{z \in \mathbb{C}^{\times}} c_z z^{\nu}$ pour une famille à support fini de scalaires $c_z \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{C}^{\times}$.

L'hypothèse de récurrence permet de remplacer les π' et π'' qui interviennent dans cette même expression par des systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles et purs de poids 0 sur $X - N$. Compte tenu du théorème de pureté de Deligne ([De]) on en déduit :

PROPOSITION. — Si $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ est un paramètre de troncature assez convexe en fonction du genre de la courbe X et de N , il existe un système local ℓ -adique virtuel

mixte de poids entiers $\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}$ sur $(X - N)^2$ tel que la différence

$$\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p} - \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^r \sum_{\nu} (-1)^{\nu} [(\text{Frob}_X^k \times \text{Id}_X)^* H_N^{r;\leq p, \nu}]$$

soit r -négligeable et que, pour tout couple (∞, o) de points fermés distincts de $X - N$, tout point fermé $\xi \in \infty \times o$ et tout entier $n \geq 1$, on ait

$$\text{Tr}(\text{Frob}_{\xi}^n, \tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}) = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_{\pi}(a)=1}} q^{(r-1)\deg(\xi)n} \text{Tr}_{\pi}(1_{K_N}) S_{\infty}^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(\infty)}n\right)}(\pi) S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi).$$

L'encadrement de Jacquet et Shalika ([J-S 1])

$$q^{-\frac{1}{2}} < |z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}} < q^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad \forall x \in |X - N|,$$

pour les valeurs propres de Hecke de tout $\pi \in \mathcal{A}_r(K_N)$ assure que $\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}$ est mixte de poids contenus dans $\{2r - 3, 2r - 2, 2r - 1\}$ et qu'il a des constituants de poids $2r - 3$ si et seulement si il en a de poids $2r - 1$.

Par des arguments de fonctions L pour les système locaux ℓ -adiques sur la surface $(X - N)^2$, Lafforgue déduit de la proposition ci-dessus, du théorème de pureté de Deligne et des résultats de 6.3 :

COROLLAIRE. — (i) Le système local ℓ -adique virtuel $\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}$ sur $(X - N)^2$ est effectif, pur de poids $2r - 2$ et n'admet aucun constituant r -négligeable.

(ii) Les systèmes locaux ℓ -adiques $\tilde{H}_N^{r;\leq p, \nu}$, $\nu \neq 2r - 2$, sont tous r -négligeables et $\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}$ est exactement le morceau non r -négligeable du système local ℓ -adique virtuel

$$\frac{1}{r!} \sum_{k=1}^r [(\text{Frob}_X^k \times \text{Id}_X)^* \tilde{H}_N^{r;\leq p, 2r-2}].$$

Pour tous paramètres de troncatures $p \leq q$ qui sont assez convexes par rapport au genre de X et au niveau N , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_N^{r;\leq q, *} & \longrightarrow & \tilde{H}_N^{r;\leq q, *} \\ \uparrow & + & \downarrow \\ H_N^{r;\leq p, *} & \longrightarrow & \tilde{H}_N^{r;\leq p, *} \end{array}$$

où les deux flèches horizontales et la flèche verticale montante de gauche sont les prolongements par zéro pour les inclusions de $\text{Cht}_N^{r;\leq p} \subset \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p}$, $\text{Cht}_N^{r;\leq q} \subset \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq q}$ et $\text{Cht}_N^{r;\leq p} \subset \text{Cht}_N^{r;\leq q}$ et la flèche verticale descendante de droite est induite par la correspondance dans $\widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} \times \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq q}$ qui est l'adhérence du graphe de l'inclusion $\text{Cht}_N^{r;\leq p} \subset \text{Cht}_N^{r;\leq q}$. La proposition de 6.3, le corollaire ci-dessus et l'existence de ce carré commutatif impliquent facilement le lemme suivant qui est crucial pour la suite.

LEMME. — Pour tous paramètres de troncatures $p \leq q$ qui sont assez convexes par rapport au genre de X et au niveau N , les noyau et conoyau de l'homomorphisme de prolongement par zéro

$$H_N^{r; \leq p, 2r-2} \rightarrow H_N^{r; \leq q, 2r-2}$$

sont r -négligeables.

En utilisant ce lemme, Lafforgue prouve que le ind-système local ℓ -adique « de rang infini » sur $(X - N)^2$

$$H_N^{r; 2r-2} = \varinjlim_p H_N^{r; \leq p, 2r-2},$$

où p parcourt l'ensemble des paramètres de troncature qui sont assez convexes par rapport au genre de la courbe X et à N , a la propriété suivante :

LEMME. — Il existe une unique filtration finie

$$F^\bullet = ((0) = F^0 \subseteq F^1 \subsetneq F^2 \subsetneq \dots \subsetneq F^{2u+1} \subsetneq F^{2u} \subsetneq \dots \subsetneq F^T = H_N^{r; 2r-2})$$

telle que :

– pour tout entier $u \geq 0$ tel que $2u + 1 \leq T$, F^{2u+1}/F^{2u} est la somme de tous les sous-systèmes locaux ℓ -adiques (de rang fini) r -négligeables de $H_N^{r; 2r-2}/F^{2u}$,

– pour tout entier $u \geq 0$ tel que $2u + 2 \leq T$, F^{2u+2}/F^{2u+1} est la somme de tous les sous-systèmes locaux ℓ -adiques (de rang fini) $H_N^{r; 2r-2}/F^{2u+1}$ dont aucun sous-quotient n'est r -négligeable,

– si p est un paramètre de troncature assez convexe par rapport au genre de X et au niveau N et si on note $F^{\leq p, \bullet}$ la filtration sur $H_N^{r; \leq p, 2r-2}$ induite par $F^\bullet$, alors, pour tout entier $u \geq 0$, le plongement

$$F^{\leq p, 2u+2}/F^{\leq p, 2u+1} \hookrightarrow F^{2u+2}/F^{2u+1}$$

est un isomorphisme.

Considérons alors le système local ℓ -adique (de rang fini) sur $(X - N)^2$

$$H_{N, \text{cusp}}^r = \bigoplus_{u \geq 0} F^{2u+2}/F^{2u+1}.$$

Rassemblant les résultats de cette sous-section, on obtient finalement :

PROPOSITION. — (i) Pour tout paramètre de troncature p assez convexe par rapport au genre de X et au niveau N , on a l'égalité de systèmes locaux ℓ -adiques virtuels

$$\tilde{H}_{N, \text{cusp}}^{r; \leq p} = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{r!} [(\text{Frob}_{X-N}^k \times \text{Id}_{X-N})^* H_{N, \text{cusp}}^r].$$

(ii) Le système local ℓ -adique $H_{N, \text{cusp}}^r$ est ponctuellement pur de poids $2r - 2$.

(iii) Pour tout couple (∞, o) de points fermés distincts de $X - N$, tout point fermé ξ de $\infty \times o$ et tout entier n , on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{r!} \text{Tr}(\text{Frob}_{\xi}^n, (\text{Frob}_{X-N}^k \times \text{Id}_{X-N})^* H_{N, \text{cusp}}^r) \\ &= q^{(r-1) \deg(\xi)n} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_{\pi}(a)=1}} \text{Tr}_{\pi}(1_{K_N}) S_{\infty}^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(\infty)}n\right)}(\pi) S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi). \end{aligned}$$

7. UNE VARIANTE D'UN THÉORÈME DE PINK

7.1. Le cas des schémas

Soient S un schéma de type fini et lisse (sur $\mathbb{F}_q$) et $p : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas propre et lisse purement de dimension relative d . On se donne un diviseur $Y \subset X$ à croisements normaux relatif sur S qui est réunion $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ de m diviseurs lisses sur S . Pour toute partie I de $\{1, \dots, m\}$ on note $Y_I = \bigcap_{i \in I} Y_i$ et $X_I = Y_I - \bigcup_{J \supsetneq I} Y_J$. On a donc $X_{\emptyset} = X - Y \subset Y_{\emptyset} = X$ et X est la réunion disjointe de ses parties localement fermées X_I . De plus, pour chaque $I \subset \{1, \dots, m\}$, la restriction p_I de p à Y_I est propre et lisse purement de dimension relative $d - |I|$, et X_I est un ouvert dense de Y_I .

On considère un endomorphisme $f : S \rightarrow S$ et un morphisme fini de schémas

$$\Gamma_{\emptyset} \rightarrow Z_{\emptyset} := X_{\emptyset} \times_{f,S} X_{\emptyset} \subset X_{\emptyset} \times X_{\emptyset}$$

où « $\times_{f,S}$ » est une notation abrégée pour « $\times_{p_{\emptyset} \circ f, S, p_{\emptyset}}$ ». On suppose que la première projection $\text{pr}_{\emptyset,1} : \Gamma_{\emptyset} \rightarrow X_{\emptyset}$ est étale. Le S -schéma est donc lisse purement de dimension relative d sur S . En particulier il est normal.

Alors, si s est un point fermé de S et si $n \geq 1$ est un entier tel que

$$\text{Frob}_S^n(f(s)) = f(\text{Frob}_S^n(s)) = s,$$

la fibre $\Gamma_{\emptyset,s} \rightarrow Z_{\emptyset,s} \subset X_{\emptyset,f(s)} \times X_{\emptyset,s}$ en s de $\Gamma_{\emptyset}$ coupe transversalement la fibre $X_{\emptyset,f(s)} \rightarrow X_{\emptyset,s} \times X_{\emptyset,f(s)}$ en $(s, f(s))$ du graphe $\delta_{\emptyset}^n = (\text{Frob}_{X_{\emptyset}}^n, \text{Id}_{X_{\emptyset}}) : X_{\emptyset} \rightarrow X_{\emptyset} \times X_{\emptyset}$. On note

$$\text{Lef}_s(\Gamma_{\emptyset} \times \text{Frob}_{X_{\emptyset}}^n, X_{\emptyset})$$

le nombre des points d'intersection.

On note $\Gamma \rightarrow Z := X \times_{f,S} X \subset X \times X$ le morphisme fini de schémas obtenu par normalisation de Z dans $\Gamma_{\emptyset}$. On se propose de donner une interprétation cohomologique de $\text{Lef}_s(\Gamma_{\emptyset} \times \text{Frob}_X^n, X_{\emptyset})$ sous une hypothèse de « stabilité de l'ouvert $X_{\emptyset} \subset X$ au voisinage des points fixes de Γ ».

7.2. Stabilité au voisinage des points fixes

On note $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \Gamma \rightarrow X$ les deux projections canoniques de Γ et, pour chaque entier $n \geq 0$, δ^n le graphe $(\mathrm{Frob}_X^n, \mathrm{Id}_X) : X \rightarrow X \times X$.

DÉFINITION. — On dira que Γ stabilise $X_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes s'il existe un ouvert $U \subset X \times X$ contenant toutes les intersections de l'image de Γ dans $Z \subset X \times X$ avec les images des graphes de Frobenius $\delta^n(X) \subset X \times X$, $n \geq 0$, et tel que

$$\mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(X_\emptyset) \cap U_\Gamma) \subset X_\emptyset$$

où $U_\Gamma \subset \Gamma$ est la trace de U sur Γ .

LEMME. — Pour que Γ stabilise $X_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes, il faut et il suffit que Γ satisfasse au critère valuatif suivant :

(*) Pour tout anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et de corps résiduel k et pour tout point $\gamma : \mathrm{Spec}(A) \rightarrow \Gamma$ tel que $\mathrm{pr}_1(\gamma(\mathrm{Spec}(K))) \in Y(K)$ et $\mathrm{pr}_2(\gamma(\mathrm{Spec}(K))) \in X_\emptyset(K)$, l'image de $\gamma(\mathrm{Spec}(k)) \in \Gamma(k)$ dans $Z \subset X \times X$ n'est dans l'image d'aucun des graphes de Frobenius δ^n , $n \in \mathbb{N}$.

Comme l'a fait Pink dans [Pi], Lafforgue introduit l'éclatement $\pi : \tilde{Z} \rightarrow Z$ de $Z = X \times_{f,S} X$ le long du fermé réunion des $Y_i \times_{f,S} Y_i$, $1 \leq i \leq m$. Cet éclatement est aussi le produit fibré au-dessus de Z des éclatements $\tilde{Z}_i \rightarrow Z$, $1 \leq i \leq m$, de Z le long des $Y_i \times_{f,S} Y_i$. Il est donc muni de diviseurs E_i , $1 \leq i \leq m$, qui sont les images réciproques dans $\tilde{Z}$ des diviseurs exceptionnels dans les $\tilde{Z}_i$. Pour toute partie non vide $I \subset \{1, \dots, m\}$, on vérifie que

$$E_I := \bigcap_{i \in I} E_i \subset \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(Y_i \times_{f,S} Y_i) = \pi^{-1}(Y_I \times_{f,S} Y_I),$$

que E_I est le produit fibré sur Z des diviseurs exceptionnels dans les $\tilde{Z}_i$ pour $i \in I$ et des $\tilde{Z}_i$ pour $i \notin I$, que E_I est lisse sur S purement de dimension relative $2d - |I|$ et que la restriction de $\pi_I : E_I \rightarrow Y_I \times_{f,S} Y_I$ au-dessus de l'ouvert $X_I \times_{f,S} X_I$ est un fibré projectif de rang $|I|$. Les E_i sont donc des diviseurs lisses sur S et leur réunion $E = E_1 \cup \dots \cup E_m$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur S .

Par construction $\pi : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est un isomorphisme au-dessus de $Z_\emptyset$. On notera $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{Z}$ la normalisation de $\Gamma_\emptyset$ dans $\tilde{Z}$. Bien entendu π « envoie » $\tilde{\Gamma}$ dans Γ .

Pour tout point fermé $s \in S$ la fibre $\pi_s : \tilde{Z}_s \rightarrow Z_s$ en s de π est l'éclatement de Z_s le long de la réunion des fermés $Y_{i,s} \times_{f,f(s)} Y_{i,f(s)}$ de $Z_s = X_s \times_{f,f(s)} X_{f(s)}$. Pour tout point fermé $s \in S$ et tout entier $n \geq 0$ tel que $\mathrm{Frob}_S^n(f(s)) = f(\mathrm{Frob}_S^n(s)) = s$, la fibre $\delta_{(s,f(s))}^n : X_{f(s)} \rightarrow Z_s \subset X_s \times X_{f(s)}$ en $(s, f(s))$ du graphe de Frobenius se relève canoniquement en un morphisme

$$\tilde{\delta}_{(s,f(s))}^n : X_{f(s)} \rightarrow \tilde{Z}_s$$

puisque, pour chaque $i = 1, \dots, m$, l'image réciproque par $\delta_{(s, f(s))}^n$ du fermé $Y_{i,s} \times_{f, f(s)}$ $Y_{i, f(s)} \subset Z_s$ est le diviseur $Y_{i, f(s)} \subset X_{f(s)}$.

La proposition suivante prolonge un résultat de Pink ([Pi]).

PROPOSITION. — *Supposons que Γ stabilise $X_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes. Alors, quitte à remplacer f par*

$$f^{(n_0)} := \text{Frob}_S^{n_0} \circ f = f \circ \text{Frob}_S^{n_0}$$

et $\Gamma_\emptyset$ par

$$\Gamma_\emptyset^{(n_0)} := (X_\emptyset \times X_\emptyset) \times_{\text{Frob}_{X_\emptyset}^{n_0} \times \text{Id}_{X_\emptyset, X_\emptyset \times X_\emptyset}} \Gamma_\emptyset.$$

pour un entier $n_0 \geq 0$ assez grand, la normalisation $\tilde{\Gamma}$ vérifie la propriété suivante : pour tout point fermé $s \in S$ et tout entier $n > 0$ tel que $\text{Frob}_S^n(f(s)) = f(\text{Frob}_S^n(s)) = s$, l'image de $\tilde{\delta}_{f, f(s)}^n$ dans $\tilde{Z}_s$ ne rencontre pas l'image de $\tilde{\Gamma}_s$ en dehors de $Z_{\emptyset, s} \subset \tilde{Z}_s$.

7.3. Formule des points fixes

Rappelons que l'on a fixé un nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$. Considérons la cohomologie ℓ -adique de X et Z au-dessus de S

$$Rp_*\mathbb{Q}_\ell \text{ et } Rq_*\mathbb{Q}_\ell \in D_c^b(S, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $q : X \times_{f, S} X \rightarrow S$ est la projection canonique, et plus généralement les cohomologies ℓ -adique des Y_I au-dessus de S

$$Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell \text{ et } Rq_{I,*}\mathbb{Q}_\ell \in D_c^b(S, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $q_I : Y_I \times_{f, S} Y_I \rightarrow S$ est la projection canonique. La formation de ces cohomologies commute aux changements de base $S' \rightarrow S$. En particulier, la fibre en un point géométrique $\bar{s}$ de S de $Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell$ est la cohomologie ℓ -adique $R\Gamma(Y_{I, \bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$ de la fibre de p_I en ce point.

Nos hypothèses assurent que les faisceaux de cohomologie $R^j p_{I,*}\mathbb{Q}_\ell$ (resp. $R^j q_{I,*}\mathbb{Q}_\ell$) sont tous lisses sur S et qu'ils sont nuls pour les j qui ne sont pas dans l'intervalle $[0, 2(d - |I|)]$ (resp. $[0, 4(d - |I|)]$).

Soient $I \subset \{0, 1, \dots, m\}$, n un entier ≥ 1 et $u_I \in H^0(S, R^{2(d-|I|)} q_{I,*}\mathbb{Q}_\ell)(d - |I|)$ une classe de cohomologie. Alors :

– l'endomorphisme de Frobenius $\text{Frob}_{Y_I}^n$ qui relève Frob_S^n , induit un homomorphisme

$$\text{Frob}_{Y_I}^n : (\text{Frob}_S^n)^* Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell \rightarrow Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell,$$

– d'après la formule de Künneth et la dualité de Poincaré, u_I peut être vu comme un homomorphisme

$$u_I : f^* Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell \rightarrow Rp_{I,*}\mathbb{Q}_\ell,$$

– les homomorphismes composés

$$\mathrm{Frob}_{Y_I}^n \circ (\mathrm{Frob}_S^n)^*(u_I) : (\mathrm{Frob}_S^n)^* f^* R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell$$

et

$$u_I \circ f^*(\mathrm{Frob}_{Y_I}^n) : f^*(\mathrm{Frob}_S^n)^* R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell$$

coïncident.

On notera

$$u_I \times \mathrm{Frob}_{Y_I}^n : (\mathrm{Frob}_S^n)^* f^* R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell = f^*(\mathrm{Frob}_S^n)^* R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow R p_{I,*} \mathbb{Q}_\ell$$

ces homomorphismes composés. Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de S qui vérifie $f(\mathrm{Frob}_S^n(\bar{s})) = \mathrm{Frob}_S^n(f(\bar{s})) = \bar{s}$, $u_I \times \mathrm{Frob}_{Y_I}^n$ induit un endomorphisme de la cohomologie $R\Gamma(Y_{I,\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$ de la fibre en $\bar{s}$ de $p_I : Y_I \rightarrow S$ dont on notera

$$\mathrm{tr}(u_I \times \mathrm{Frob}_{Y_I}^n, R\Gamma(Y_{I,\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)) \in \mathbb{Q}_\ell$$

la trace.

Le « cycle de codimension d » Γ sur $X \times_{f,S} X$ admet une classe de cohomologie

$$\mathrm{cl}(\Gamma) \in H^0(S, R^{2d} q_* \mathbb{Q}_\ell)(d).$$

De même, si on note $\tilde{q} = q \circ \pi : \tilde{Z} \rightarrow S$, $\tilde{\Gamma}$ admet une classe de cohomologie

$$\mathrm{cl}(\tilde{\Gamma}) \in H^0(S, R^{2d} \tilde{q}_* \mathbb{Q}_\ell)(d).$$

Pour chaque $I \subset \{1, \dots, m\}$ non vide, on a un homomorphisme de faisceaux

$$R^{2d} \tilde{q}_* \mathbb{Q}_\ell(d) \rightarrow R^{2d} \tilde{q}_{I,*} \mathbb{Q}_\ell(d) \rightarrow R^{2(d-|I|)} q_{I,*} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$$

où $\tilde{q}_I : E_I \rightarrow S$ est la projection canonique, où la première flèche est l'homomorphisme de restriction au fermé $E_I \subset \tilde{Z}$ et où la seconde flèche est duale de l'homomorphisme

$$\pi_I^* : R^{2(d-|I|)} q_{I,*} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|) \rightarrow R^{2(d-|I|)} \tilde{q}_{I,*} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|).$$

On note $\mathrm{cl}(\Gamma)_I$ l'image de $\mathrm{cl}(\tilde{\Gamma})$ par cet homomorphisme composé.

Plus généralement on peut refaire cette construction après avoir remplacé f par $f^{(n_0)}$ et $\Gamma_\emptyset$ par $\Gamma_\emptyset^{(n_0)}$ pour un entier $n_0 \geq 0$ (cf. la proposition de 7.2). Pour chaque $I \subset \{1, \dots, m\}$ non vide, on obtient une section globale $\mathrm{cl}(\Gamma^{(n_0)})_I$ de $R^{2(d-|I|)} q_{I,*}^{(n_0)} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$, où $q_I^{(n_0)} : Y_I \times_{f^{(n_0)}, S} Y_I \rightarrow S$ est la projection canonique. L'image directe de cette section globale par le morphisme radiciel $\mathrm{Frob}_{Y_I}^{n_0} \times \mathrm{Id}_{Y_I} : Y_I \times_{f^{(n_0)}, S} Y_I \rightarrow Y_I \times_{f, S} Y_I$ est une section globale notée $\mathrm{cl}(\Gamma)_I^{(n_0)}$ de $R^{2(d-|I|)} q_{I,*} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$.

Avec ces notations, Lafforgue prouve la généralisation suivante de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz ([Gr]).

THÉORÈME. — Supposons que Γ stabilise l'ouvert $X_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes et soit $n_0 \geq 0$ un entier vérifiant la conclusion de la proposition de 7.3.

Alors, pour tout point fermé s de S et tout entier $n > n_0$ tels que $\text{Frob}_S^n(f(s)) = f(\text{Frob}_S^n(s)) = s$, on a

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{Lef}_s(\Gamma_\emptyset \times \text{Frob}_{X_\emptyset}^n, X_\emptyset) &= \text{tr}(\text{cl}(\Gamma) \times \text{Frob}_X^n, R\Gamma(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)) \\ &+ \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \text{tr}(\text{cl}(\Gamma)_I^{(n_0)} \times \text{Frob}_{Y_I}^n, R\Gamma(Y_{I, \bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)). \end{aligned}$$

7.4. Extension à certains champs algébriques

Comme le montre Lafforgue, les résultats de cette section valent encore après avoir remplacé le S -schéma $p : X \rightarrow S$, le diviseur $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ et le morphisme de schémas $\Gamma_\emptyset \rightarrow Z_\emptyset$ par un S -champ algébrique $p : \mathcal{X} \rightarrow S$, un diviseur $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$ et un morphisme de champs algébriques $\Gamma_\emptyset \rightarrow \mathcal{Z}_\emptyset$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- le morphisme $p : \mathcal{X} \rightarrow S$ est de type fini,
- au voisinage de chacun de ses points le champ $\mathcal{X}$ admet un recouvrement fini et plat par un espace algébrique muni de l'action d'un groupe fini qui agit transitivement sur les fibres de ce recouvrement,
- le morphisme p satisfait au critère valuatif de propreté,
- le morphisme p est lisse purement de dimension relative d ,
- $\mathcal{Y}$ est une réunion de diviseurs $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ qui sont lisses sur S et est à croisement normaux relatif sur S ,
- $\mathcal{X}_\emptyset$ est un S -champ algébrique de Deligne-Mumford, le morphisme $\Gamma_\emptyset \rightarrow \mathcal{Z}_\emptyset = \mathcal{X}_\emptyset \times_{f, S} \mathcal{X}_\emptyset$ est représentable fini et la première projection de $\Gamma_\emptyset$ sur $\mathcal{X}_\emptyset$ est étale.

8. FIN DE LA RÉCURRENCE

8.1. Ce qu'il reste à démontrer

Soit $N \subset X$ un niveau « sans facteur carré ». Pour tout $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ la correspondance de Hecke

$$c = (c_1, c_2) : \text{Cht}_N^r(g)/a^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\text{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}) \times_{(X-N)^2} (\text{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$$

envoie $\text{Cht}_N^{r; \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\text{Cht}_N^{r; \leq q}/a^{\mathbb{Z}}$ dès que $q - p$ est assez convexe en fonction de $K_N g K_N$. Par conséquent, le ind-système local ℓ -adique $H_N^{r; 2r-2}$ défini en 6.4 est muni d'une action de la $\mathbb{Q}_\ell$ -algèbre de Hecke $\mathcal{H}(K_N) = \mathcal{C}_c(\text{GL}_r(\mathbb{A})//K_N)$ des fonctions à

valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, K_N -invariantes à gauche et à droite et à supports compacts sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

De même, les morphismes de Frobenius partiels induisent un isomorphisme

$$(\mathrm{Frob}_{X-N} \times \mathrm{Id}_{X-N})^* H_N^{r; 2r-2} \xrightarrow{\sim} H_N^{r; 2r-2}$$

qui commute à l'action de $\mathcal{H}(K_N)$.

Comme la construction faite en 6.4 du système local ℓ -adique $H_{N,\mathrm{cusp}}^r$ à partir de $H_N^{r; 2r-2}$ est canonique, $H_{N,\mathrm{cusp}}^r$ est lui aussi muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(K_N)$ et d'un isomorphisme $(\mathrm{Frob}_{X-N} \times \mathrm{Id}_{X-N})^* H_{N,\mathrm{cusp}}^r \xrightarrow{\sim} H_{N,\mathrm{cusp}}^r$. Dans l'énoncé de la dernière proposition de la section 6.4, on peut donc remplacer la moyenne $\frac{1}{r!} \sum_{k=1}^r [(\mathrm{Frob}_{X-N}^k \times \mathrm{Id}_{X-N})^* H_{N,\mathrm{cusp}}^r]$ par $[H_{N,\mathrm{cusp}}^r]$.

Dans cette dernière section nous allons montrer :

PROPOSITION. — *Pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, tout couple (∞, o) de points fermés distincts de $X - S_g$ (où $S_g \supset |N|$ est l'ensemble fini de points fermés de X défini en 5.1), tout point fermé ξ de $\infty \times o$ et tout entier n , on a*

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}(1_{K_N g K_N} \times \mathrm{Frob}_\xi^n, H_{N,\mathrm{cusp}}^r) \\ &= q^{(r-1) \deg(\xi)n} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_\pi(a)=1}} \mathrm{Tr}_\pi(1_{K_N g K_N}) S_\infty^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(\infty)}n\right)}(\pi) S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi). \end{aligned}$$

Cette proposition généralise la partie (iii) de la dernière proposition de la sous-section 6.4 et des arguments standard permettent d'en déduire les propriétés $P_1(r)$, $P_2(r)$ (pour les $\pi \in \mathcal{A}_r(K_N)$) et $P_3(r)$ (pour les N « sans facteur carré »).

8.2. Trace des opérateurs de Hecke sur $\tilde{H}_{N,\mathrm{cusp}}^{r; \leq p}$

LEMME. — *Soient U un ouvert non vide de X et M un système local ℓ -adique sur $U \times U$ muni d'un endomorphisme $h : M \rightarrow M$. Alors, une fois fixé un ensemble de représentants des classes d'isomorphie de systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles sur $U \times U$, il existe une unique application à support fini $L \mapsto \lambda_L$ de cet ensemble dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ telle que*

$$\mathrm{Tr}(h \circ \gamma, M_{\bar{\delta}}) = \sum_L \lambda_L \mathrm{Tr}(\gamma, L_{\bar{\delta}})$$

pour tout $\gamma \in \pi_1(U \times U, \bar{\delta})$.

Si $[M] = \sum_L m_M(L)[L]$ est le système local ℓ -adique virtuel sur $U \times U$ associé à M et si $M_{\mathrm{cusp}} = \sum_L m_{M_{\mathrm{cusp}}}(L)[L]$ est son morceau non r -négligeable (cf. 6.4), on notera

$$\mathrm{Tr}_{M_{\mathrm{cusp}}}(h \circ \gamma) = \sum_{\substack{L \\ m_M(L) \neq 0}} \frac{m_{M_{\mathrm{cusp}}}(L)}{m_M(L)} \lambda_L \mathrm{Tr}(\gamma, L_{\bar{\delta}})$$

pour tout $\gamma \in \pi_1(U \times U, \bar{\delta})$.

Bien entendu, on va appliquer ceci au morceau non r -négligeable $\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}$ de la cohomologie ℓ -adique $\tilde{H}_N^{r;\leq p,*}$ et à l'endomorphisme de $\tilde{H}_N^{r;\leq p,2r-2}$ induit par une correspondance de Hecke.

Plus précisément, soit $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ un paramètre de troncature assez convexe par rapport au genre de la courbe X et à N et soit $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$. D'une part, on a déjà vu que la correspondance de Hecke $c : \text{Cht}_N^r(g) \rightarrow \text{Cht}_N^r \times_{(X-N)^2} \text{Cht}_N^r$ envoie $\text{Cht}_N^{r;\leq p}$ dans $\text{Cht}_N^{r;\leq q}$ pour un paramètre de troncature $q \geq p$ convenable et qu'elle induit un morphisme entre les cohomologies à supports compacts $h : H_N^{r;\leq p,*} \rightarrow H_N^{r;\leq q,*}$. D'autre part, cette correspondance induit par restriction un cycle

$$c^{\leq p} : \text{Cht}_N^{r;\leq p}(g) \rightarrow \text{Cht}_N^{r;\leq p} \times_{(X-N)^2} \text{Cht}_N^{r;\leq p},$$

puis par normalisation une correspondance

$$\widetilde{c}^{\leq p} : \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p}(g) \rightarrow \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} \times_{(X-N)^2} \widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p},$$

et donc un endomorphisme noté $\tilde{h}$ de la cohomologie ℓ -adique $\tilde{H}_N^{r;\leq p,*}$, d'où une trace

$$\text{Tr}_{\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}}(\tilde{h} \circ \gamma)$$

pour tout $\gamma \in \pi_1((X-N)^2, \bar{\delta})$.

Quitte à agrandir q , on peut supposer que q est assez convexe par rapport au genre de la courbe X et à N . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_N^{r;\leq q,*} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \tilde{H}_N^{r;\leq q,*} \\ h \uparrow & & \downarrow \\ H_N^{r;\leq p,*} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \tilde{H}_N^{r;\leq p,*} \xrightarrow{\tilde{h}} \tilde{H}_N^{r;\leq p,*} \end{array}$$

où les flèches h et $\tilde{h}$ sont celles définies ci-dessus et les autres flèches sont les mêmes que dans le carré commutatif de 6.4. Par un argument facile utilisant les résultats de 6.4, Lafforgue en déduit :

PROPOSITION. — *Pour tout paramètre de troncature p assez convexe en fonction de N , tout point fermé ξ de $(X-N)^2$ et tout entier n , on a*

$$\text{Tr}(1_{K_N g K_N} \times \text{Frob}_\xi^n, H_{N,\text{cusp}}^r) = \text{Tr}_{\tilde{H}_{N,\text{cusp}}^{r;\leq p}}(\tilde{h} \circ \text{Frob}_\xi^n).$$

8.3. Application de la variante du théorème de Pink

Fixons un paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ assez convexe par rapport au genre de la courbe X et à N , et un élément $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$. On a défini un ensemble fini $S_g \supset |N|$ de points fermés de X .

On cherche à appliquer les résultats généraux du chapitre 7 à

$$S = (X - S_g)^2, \quad f = \text{Id}_S : S \rightarrow S,$$

$$\mathcal{X}_\emptyset = (X - S_g)^2 \times_{(X-N)^2} (\text{Cht}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}}) \subset (X - S_g)^2 \times_{(X-N)^2} (\widetilde{\text{Cht}}_N^{r;\leq p} / a^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{X},$$

$$(c_1, c_2) : (X - S_g)^2 \times_{(X-N)^2} (\text{Cht}_N^r(g)/a^{\mathbb{Z}}) = \Gamma_{\emptyset} \rightarrow \mathcal{X}_{\emptyset} \times_S \mathcal{X}_{\emptyset},$$

et

$$\Gamma \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$$

la normalisation de $\mathcal{X}_{\emptyset} \times_S \mathcal{X}_{\emptyset}$ dans $\Gamma_{\emptyset}$. Le fermé complémentaire $\mathcal{Y} = \mathcal{X} - \mathcal{X}_{\emptyset}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $(X - S_g)^2$, qui est réunion $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \mathcal{Y}_m$ de diviseurs lisses sur $(X - S_g)^2$.

Pour chaque entier $n_0 \geq 0$, on dispose des classes de cohomologie suivantes :

- $\text{cl}(\Gamma)$ dans la cohomologie de $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ au-dessus de $(X - S_g)^2$,
- $\text{cl}(\Gamma)_I^{(n_0)}$ dans la cohomologie de $\mathcal{Y}_I \times_S \mathcal{Y}_I$ au-dessus de $(X - S_g)^2$ pour tout $I \subset \{1, \dots, m\}$ non vide.

Pour tout ouvert U de X notons Λ_U le schéma intersection de tous les ouverts de $U \times U$ complémentaires des images réciproques de la diagonale par les endomorphismes $\text{Frob}_U^n \times \text{Id}_U$ et $\text{Id}_U \times \text{Frob}_U^n$ de $U \times U$ pour tous les entiers $n \geq 0$, c'est-à-dire l'intersection de $\Lambda_X \subset X \times X$ avec $U \times U$.

Nous avons besoin du théorème suivant de Lafforgue, qui prolonge en rang arbitraire un résultat établi par Drinfeld en rang 2 ([Dr 7]).

THÉORÈME. — *Supposons que p est assez convexe et $U \subset X - S_g$ est assez petit relativement à N et à $K_N g K_N$. Il existe alors un ouvert de Zariski $V \subset U \times U$, contenant Λ_U , tel que, après avoir remplacé $S = (X - S_g)^2$ par V et $\mathcal{X}_{\emptyset} \subset \mathcal{X}$ et $\Gamma_{\emptyset} \subset \Gamma$ par leurs restrictions à cet ouvert de S , la correspondance Γ stabilise l'ouvert $\mathcal{X}_{\emptyset}$ au voisinage de ses points fixes.*

En d'autres termes, l'hypothèse du théorème de la sous-section 7.3 est vérifiée au-dessus de $V \supset \Lambda_U$. Par conséquent, si $n_0 \geq 0$ est l'entier de loc. cit., pour tout point géométrique $\bar{\xi}$ localisé en un point fermé ξ de Λ_U et tout entier n tel que $\deg(\xi)n > n_0$, on a la formule de points fixes

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{Lef}_{\xi}(\Gamma_{\emptyset} \times \text{Frob}_{\mathcal{X}_{\emptyset}}^{\deg(\xi)n}, \mathcal{X}_{\emptyset}) &= \text{tr}(\text{cl}(\Gamma) \times \text{Frob}_{\mathcal{X}}^{\deg(\xi)n}, R\Gamma(\mathcal{X}_{\bar{\xi}}, \mathbb{Q}_{\ell})) \\ &+ \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \text{tr}(\text{cl}(\Gamma)_I^{(n_0)} \times \text{Frob}_{\mathcal{Y}_I}^{\deg(\xi)n}, R\Gamma(\mathcal{Y}_{I, \bar{\xi}}, \mathbb{Q}_{\ell})). \end{aligned}$$

On remarquera que, pour chaque $I \subset \{1, \dots, m\}$ non vide, il existe une famille $(m_I(L))_L$ de scalaires dans $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$, indexée par un ensemble de représentants des systèmes locaux ℓ -adiques irréductibles sur $(X - S_g)^2$, à support fini, telle que

$$\text{tr}(\text{cl}(\Gamma)_I^{(n_0)} \times \text{Frob}_{\mathcal{Y}_I}^{\deg(\xi)n}, R\Gamma(\mathcal{Y}_{I, \bar{\xi}}, \mathbb{Q}_{\ell})) = \sum_L m_I(L) \text{Tr}(\text{Frob}_{\xi}^n, L),$$

et que $m_I(L) = 0$ pour tout L qui n'est pas r -négligeable d'après 6.3.

Dans la suite de cette sous-section, on identifie $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme fixé en 1.3.

Dans la formule de points fixes ci-dessus, on peut remplacer $\bar{\xi}$ par $(\text{Frob}_X^k \times \text{Id}_X)(\bar{\xi})$ pour $k = 1, \dots, r!$ et faire la moyenne des $r!$ expressions obtenues. Le premier membre de cette moyenne est égal à

$$(5) \quad \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_\pi(a)=1}} \text{Tr}_\pi(1_{K_N g K_N}) q^{(r-1) \deg(\xi)n} S_\infty^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi) S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi) \\ + \sum_{\substack{1 \leq r' < r \\ 1 \leq r'' < r}} \sum_{\substack{\pi' \in \mathcal{A}_{r'}(K_N) \\ \pi'' \in \mathcal{A}_{r''}(K_N)}} \text{Tr}_{\pi', \pi''}^{\leq \alpha p}(1_{K_N g K_N}, \deg(\xi)n) S_\infty^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi') S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi'')$$

d'après 5.2. Compte tenu de la proposition de la sous-section précédente et de l'hypothèse de récurrence $P_1(r')$ pour tout $r' < r$ (cf. 6.2), on a donc une expression pour la différence

$$\text{Tr}(1_{K_N g K_N} \times \text{Frob}_\xi^n, H_{N, \text{cusp}}^r) \\ - q^{(r-1) \deg(\xi)n} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}_r(K_N) \\ \omega_\pi(a)=1}} \text{Tr}_\pi(1_{K_N g K_N}) S_\infty^{\left(-\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi) S_o^{\left(\frac{\deg(\xi)}{\deg(o)}n\right)}(\pi)$$

de la forme

$$\sum_L P_L(n \deg(\xi)) \text{Tr}(\text{Frob}_\xi^n, L)$$

où $(\nu \mapsto P_L(\nu))_L$ est une famille à support fini de fonctions complexes de l'entier ν de la forme

$$P_L(\nu) = \sum_z P_{L,z}(\nu) z^\nu$$

pour une famille à support fini de polynômes $P_{L,z}(u) \in \mathbb{C}[u]$, $z \in \mathbb{C}^\times$, qui sont identiquement nuls quand L n'est pas r -négligeable.

En développant les polynômes $P_{L,z}(u)$ et en utilisant l'indépendance linéaire des fonctions $\nu \mapsto \nu^k z^\nu$ de l'entiers ν pour $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^\times$, on voit tout d'abord que l'on ne perd rien en remplaçant chaque $P_{L,z}(u)$ par son terme constant $P_{L,z}(0)$.

En utilisant la correspondance de Langlands et la conjecture de Ramanujan-Petersson déjà connues en les rangs $< r$ et un dernier argument de fonctions L , Lafforgue conclut alors la preuve de la proposition de 8.1 et la récurrence.

RÉFÉRENCES

Travaux de L. Lafforgue

- [La 1] L. LAFFORGUE – *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, *Astérisque*, 243 (1997).
- [La 2] L. LAFFORGUE – Sur la conjecture de Ramanujan-Petersson pour les corps de fonctions. I : Étude géométrique, *C. R. Acad. Sci. Paris* 322 (1996), 605-608.
- [La 3] L. LAFFORGUE – Sur la conjecture de Ramanujan-Petersson pour les corps de fonctions. II : Étude spectrale, *C. R. Acad. Sci. Paris* 322 (1996), 707-710.
- [La 4] L. LAFFORGUE – Sur la dégénérescence des chtoucas de Drinfeld, *C. R. Acad. Sci. Paris* 323 (1996), 491-494.
- [La 5] L. LAFFORGUE – Compactification de l'isogénie de Lang et dégénérescence des structures de niveau simple des chtoucas de Drinfeld, *C. R. Acad. Sci. Paris* 325 (1997), 1309-1312.
- [La 6] L. LAFFORGUE – Chtoucas de Drinfeld et applications, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, Doc. Math., (1998), 563-570.
- [La 7] L. LAFFORGUE – Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), 1001-1036.
- [La 8] L. LAFFORGUE – Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1} / \mathrm{PGL}_r$, *Invent. Math.* 136 (1999), 233-271.
- [La 9] L. LAFFORGUE – La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions, manuscrit final, (2000).

Articles de V.G. Drinfeld sur les chtoucas

- [Dr 1] V. G. DRINFELD – Commutative subrings of certain noncommutative rings, *Funct. Anal. and its Appl.* 11 (1977), 9-12.
- [Dr 2] V. G. DRINFELD – Proof of the global Langlands conjecture for $\mathrm{GL}(2)$ over a function field, *Funct. Anal. and its Appl.* 11 (1977), 223-225.
- [Dr 3] V. G. DRINFELD – A proof of Petersson's conjecture for function fields, *Uspehi Mat. Nauk* 32 (1977), 209-210.
- [Dr 4] V. G. DRINFELD – Langlands' conjecture for $\mathrm{GL}(2)$ over functional fields, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, (1980), 565-574.
- [Dr 5] V. G. DRINFELD – Moduli varieties of F -sheaves, *Funct. Anal. and its Appl.* 21 (1987), 107-122.
- [Dr 6] V. G. DRINFELD – Proof of the Petersson conjecture for $\mathrm{GL}(2)$ over a global field of characteristic p , *Funct. Anal. and its Appl.* 22 (1988), 28-43.

- [Dr 7] V. G. DRINFELD – Cohomology of compactified moduli varieties of F -sheaves of rank 2, *J. of Soviet Math.* 46 (1989), 1789-1821.
- [Dr 8] V. G. DRINFELD – On my paper : “Cohomology of compactified moduli varieties of F -sheaves of rank 2”, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii.* 9 168 (1988), 45-47.

Autres publications sur la correspondance de Langlands

- [Ca] H. CARAYOL – Variétés de Drinfeld compactes, d’après Laumon, Rapoport et Stuhler, dans *Séminaire Bourbaki* 1991/92, Astérisque 206, (1992), 369-409.
- [D-H] P. DELIGNE, D. HUSEMOLLER – Survey of Drinfeld modules, dans *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, 1985)*, Contemp. Math. 67, (1987), 25-91.
- [Dr 9] V.G. DRINFELD – Elliptic modules, *Math. USSR Sbornik* 23 (1974), 561-592.
- [Dr 10] V.G. DRINFELD – Elliptic modules II, *Math. USSR Sbornik* 31 (1977), 159-170.
- [Dr 11] V. G. DRINFELD – Number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field, *Functional Anal. and its Appl.* 15 (1982), 294-295.
- [F-K] Y. FLICKER, D. KAZHDAN – Geometric Ramanujan conjecture and Drinfeld reciprocity law, dans *Number theory, trace formulas and discrete groups*, Academic Press, (1989), 201-218.
- [H-K] G. HARDER, D. KAZHDAN – Automorphic forms on GL_2 over function fields (after V. G. Drinfeld), *Proc. Sym. Pure Math.* 33, Part 2 (1979), 357-379.
- [Ka] D. KAZHDAN – An introduction to Drinfeld’s “shtuka”, *Proc. Sym. Pure Math.* 33, Part 2 (1979), 347-356.
- [Lau 1] G. LAUMON – *Cohomology of Drinfeld modular varieties, Part I (Geometry, counting of points and local harmonic analysis)*, Cambridge University Press (1995).
- [Lau 2] G. LAUMON – *Cohomology of Drinfeld modular varieties, Part II (Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence)*, Cambridge University Press (1996).
- [Lau 3] G. LAUMON – Drinfeld Shtukas, dans *CIME Session “Vector bundles on Curves. New Directions” (Cetraro, juin 1995)*, Lecture Notes in Mathematics 1649, (1996), 50-109.
- [Lau 4] G. LAUMON – The Langlands Correspondence for Function Fields following Laurent Lafforgue, dans *Current Developments in Mathematics Conference (Harvard University, novembre 1999)*.
- [L-R-S] G. LAUMON, M. RAPOPORT ET U. STUHLER – D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence, *Inv. Math.* 113 (1993), 217-338.

Sur la correspondance de Langlands géométrique

- [Dr 12] V. G. DRINFELD – Two-dimensional ℓ -adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on $GL(2)$, *Amer. J. Math.* 105 (1983), 85-114.
- [Dr 13] V. G. DRINFELD – Two-dimensional ℓ -adic representations of the Galois group of a global field of characteristic p and automorphic forms on $GL(2)$, *J. of Soviet Math.* 36 (1987), 93-105.
- [F-G-K-V] E. FRENKEL, D. GAITSGORY, D. KAZHDAN, K. VILONEN – Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), 451-484.
- [Lau 5] G. LAUMON – Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, *Duke Math. J.* 54 (1987), 309-359.
- [Lau 6] G. LAUMON – Faisceaux automorphes pour GL_n : la première construction de Drinfeld, prépublication électronique, réf. alg-geom/9511004.

Autres références de géométrie algébrique

- [De] P. DELIGNE – La conjecture de Weil. II, *Publ. Math. IHES* 52 (1980), 137-252.
- [DC-P] C. DE CONCINI, C. PROCESI – Complete symmetric varieties, dans *CIME Session "Invariant Theory" (Montecatini)*, Lecture Notes in Math. 996. Springer-Verlag, (1982), 1-44.
- [Fa] G. FALTINGS – Explicit resolution of local singularities of moduli-spaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 483 (1997), 183-196.
- [Gr] A. GROTHENDIECK – Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Sémin. Bourbaki 1964/65, exp. n° 279, collection hors série Astérisque 9 (1995), 41-55, et dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, (1968), 31-45.
- [H-N] G. HARDER, M.S. NARASIMHAN – On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, *Math. Ann.* 212 (1975), 215-248.
- [H-T] M. HARRIS, R. TAYLOR – On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 227, (1999).
- [Lak] D. LAKSOV – Completed quadrics and linear maps, dans *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math.. 46, Part 2, Amer. Math. Soc., (1987), 371-387.
- [Lau 7] G. LAUMON – Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publ. Math. I.H.E.S.* 65 (1987), 131-210.
- [L-M] G. LAUMON, L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Springer-Verlag (1999).
- [Pi] R. PINK – On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne, *Ann. Math.* 135 (1992), 483-525.

- [SD] B. SAINT-DONAT – Affine Embeddings, dans *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, (1973), 1-40.
- [Se] J.-P. SERRE – *Abelian ℓ -Adic Representations and Elliptic Curves*, Addison-Wesley (1988).

Autres références automorphes

- [Ar] J. ARTHUR – A trace formula for reductive groups I : terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, *Duke Math. J.* 45 (1978), 911-953.
- [C-PS] J. W. COGDELL, I. I. PIATETSKI-SHAPIRO – Converse theorems for GL_n , *Publ. Math. IHES* 79 (1994), 157-214.
- [G-J] R. GODEMENT, H. JACQUET – Zeta functions of simple algebras, Lecture Notes in Math. 260, Springer-Verlag, (1972).
- [J-PS-S] H. JACQUET, I. I. PIATETSKI-SHAPIRO, J.A. SHALIKA – Rankin-Selberg convolutions, *Amer. J. Math.* 105 (1983), 367-464.
- [J-S 1] H. JACQUET, J.A. SHALIKA – On Euler products and the classification of automorphic representations I, *Amer. J. Math.* 103 (1981), 499-558.
- [J-S 2] H. JACQUET, J.A. SHALIKA – On Euler products and the classification of automorphic representations II, *Amer. J. Math.* 103 (1981), 777-815.
- [Lan 1] R.P. LANGLANDS – Problems in the theory of automorphic forms, dans *Lectures in modern analysis and applications III*, Lecture Notes in Math. 170, Springer-Verlag, (1970), 18-61.
- [Lan 2] R.P. LANGLANDS – *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math. 544, Springer-Verlag (1976).
- [M-W] C. MOEGLIN, J.-L. WALDSPURGER – *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, Une paraphrase de l'Écriture*, Birkhäuser (1994).
- [PS 1] I.I. PIATETSKI-SHAPIRO – Zeta functions of $GL(n)$, prépublication de l'université du Maryland, (1976).
- [PS 2] I.I. PIATETSKI-SHAPIRO – Multiplicity one theorem, *Proc. Sym. Pure Math.* 33, Part 1 (1979), 209-212.
- [Sh] J.A. SHALIKA – The multiplicity one theorem for GL_n , *Ann. of Math.* 100 (1974), 171-193.

Gérard LAUMON

Université de Paris-Sud

et CNRS, UMR 8628

Mathématiques, Bât. 425

F-91405 Orsay Cedex (France)

E-mail : Gerard.Laumon@math.u-psud.fr