Astérisque

HENRI CARAYOL

Preuve de la conjecture de Langlands locale pour GL_n : travaux de Harris-Taylor et Henniart

Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 857, p. 191-243

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1998-1999__41__191_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1999
51ème année, 1998-99, n° 857

PREUVE DE LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE POUR GL_n : TRAVAUX DE HARRIS–TAYLOR ET HENNIART

par **Henri CARAYOL**

1. INTRODUCTION

Soit K un corps local non archimédien ; il est donc isomorphe soit à un corps p–adique (extension finie de $\mathbf{Q}_p$), soit au corps $\mathbf{F}_q((t))$ des séries de Laurent formelles en une variable sur un corps fini. Nous noterons k le corps résiduel de K, de caractéristique p et de cardinal q. Nous désignerons par $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K et par ϖ une uniformisante. Enfin, *le groupe de Weil* W_K est le sous-groupe du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ constitué des éléments qui induisent sur le corps résiduel une puissance entière d'un élément de Frobenius ; notre convention pour les Frobenius dans la suite sera celle dite 'géométrique' : on désignera ainsi un élément de W_K qui induit sur le corps résiduel *l'inverse* d'une substitution de Frobenius $t \to t^q$.

La *théorie du corps de classes local* établit l'existence d'un isomorphisme canonique :

$$W_K^{\mathrm{ab}} \simeq K^*$$

(que nous normaliserons de telle sorte qu'à un Frobenius géométrique corresponde une uniformisante). Cet isomorphisme permet d'identifier l'ensemble des représentations continues irréductibles (bien sûr de degré 1) de $K^* = GL_1(K)$ à l'ensemble des représentations continues de degré 1 de W_K. Comme généralisation non-abélienne de la théorie du corps de classes local, Langlands a conjecturé l'existence pour chaque n de bijections naturelles entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_n(K)$ d'une part et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de degré n (Fr–semi-simples) du groupe de Weil–Deligne W'_K d'autre part (voir ci-dessous les définitions plus précises de ces objets). En fait, cette conjecture a été précisée au fil des ans. Les bijections cherchées doivent être caractérisées par certaines propriétés. On peut faire cela essentiellement de deux façons : soit dans un contexte purement local en termes de *facteurs locaux* L et ϵ, soit en relation avec la *théorie globale* reliant représentations automorphes et représentations de groupes de Galois de corps globaux. Le paragraphe suivant sera consacré à une discussion des propriétés purement locales que l'on attend d'une telle correspondance.

La conjecture locale de Langlands a été l'objet de nombreux travaux depuis le début des années 70. Depuis l'origine, deux voies d'attaque ont été explorées : l'une, purement locale, vise en gros à une description assez explicite des deux types d'objets considérés, en particulier à une classification fine de l'ensemble des représentations irréductibles de GL_n ; une fois les objets classifiés et en faisant éventuellement usage de fonctorialités de Langlands locales, on essaye (et on y parvient dans certains cas) de définir la bijection cherchée et de prouver qu'elle possède toutes les propriétés requises. L'autre voie d'attaque utilise la théorie globale : soit F un *corps global*, c'est-à-dire ou bien un corps de nombres de degré fini sur $\mathbf{Q}$, ou bien un corps de fonctions d'une variable (i.e. de degré de transcendance 1) sur un corps fini. Dans de nombreux cas, on sait associer à des *représentations automorphes* de groupes sur F des représentations (en général ℓ-adiques) du groupe de Galois global $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$; cela se fait en utilisant les variétés de Shimura (cas des corps de nombres), ou bien (dans le cas des corps de fonctions) les variétés modulaires (de modules elliptiques et de chtoukas) introduites par Drinfeld ainsi que leurs semblables ($\mathcal{D}$–faisceaux elliptiques de Laumon, Rapoport et Stuhler). Si K est l'un des complétés de F, on peut essayer d'utiliser cette construction globale pour en déduire une correspondance locale. Cela marche assez facilement dans le cas des corps de fonctions pour une raison que j'expliquerai dans le paragraphe 3, mais cela ne suffit pas sur un corps de nombres. On peut aussi tenter de procéder dans l'autre sens, partant d'une représentation galoisienne locale, et l'étendant en une représentation galoisienne globale ; dans certains cas, on sait construire une représentation automorphe associée dont on considère alors la composante locale en la place qui nous intéresse ...

La conjecture a d'abord été vérifiée pour GL_2 d'un corps local de caractéristique résiduelle $\neq 2$. Puis, vers le milieu des années 70, Tunnell l'a prouvée pour $GL_2(K)$, avec K le corps $\mathbf{Q}_2$ ou bien une extension contenant les racines cubiques de l'unité, tandis que Deligne l'établissait pour $n = 2$ et K d'égale caractéristique. Tous deux utilisaient des méthodes globales. Le premier résultat général remonte a Kutzko ([Ku]) qui la prouvait pour GL_2 (K quelconque) par des méthodes locales ; ensuite Henniart ([He1]) a démontré le résultat pour GL_3, toujours par des méthodes locales. Il faut ensuite attendre Laumon, Rapoport et Stuhler ([L-R-S]) en 1991 pour une preuve valide pour tout n, mais limitée aux corps locaux d'égale caractéristique p .

Au début de l'été 1998, Harris et Taylor [H-T] ont prouvé la conjecture pour n quelconque et K un corps p–adique par des méthodes géométriques. Entre-temps différents résultats partiels avaient été obtenus, essentiellement dans des cas 'modérés'. La méthode utilisée par Harris et Taylor est fondée sur une étude fine de la réduction aux mauvaises places des *variétés de Shimura* associées à certains groupes unitaires tordus. Ces variétés permettent d'associer des représentations galoisiennes globales à des formes automorphes, ce qui ne donne pas directement la correspondance voulue. L'essence de leur méthode consiste à établir en gros la chose suivante : si à la représentation automorphe Π correspond la représentation galoisienne Σ, alors la restriction de Σ à la place w que l'on regarde ne dépend (au moins à semi-simplification près) que de la composante locale Π_w de Π et se calcule au moyen d'objets locaux : des représentations définies en termes géométriques des groupes produits $GL_m(K)\times D^*_{m,K}\times W_K$, où $D_{m,K}$ désigne le corps gauche de centre K, de dimension m^2 et d'invariant $1/m$. Ces représentations locales avaient été considérées tout d'abord par Deligne (vers 1970) dans le cas où $m = 2$ et où $K = \mathbf{Q}_p$. Je les avais étudiées ensuite, toujours pour GL_2, dans le cas de corps p–adiques quelconques. Il s'agissait à l'époque d'étudier les courbes modulaires (puis les courbes de Shimura) aux mauvaises places et en particulier de déterminer à ces places les représentations galoisiennes associées. Langlands avait commencé cette étude pour les courbes modulaires, puis Deligne avait achevé le travail en introduisant comme outil fondamental cette représentation locale. J'avais ensuite procédé de façon semblable dans une étude sur les courbes de Shimura. Le travail de Harris et Taylor constitue ainsi une généralisation directe de ces idées à des variétés de Shimura de dimension > 1. De son côté, Drinfeld avait aussi obtenu vers la même époque des objets munis d'actions des groupes produits $GL_m(K)\times D^*_{m,K}\times W_K$, d'où une autre représentation locale. Que ces représentations possèdent la vertu de calculer la correspondance locale de Langlands, en même temps que la correspondance de Jacquet–Langlands locale (reliant représentations de $GL_m(K)$ et de $D^*_{m,K}$) était donc bien plausible et cela était probablement dans l'idée des spécialistes du sujet. J'avais précisé cela sous forme d'une conjecture ([Ca3]). Tout ceci constitue une généralisation non-abélienne de la théorie de Lubin–Tate (que l'on retrouve pour $m = 1$).

Vers Noël 1998, Henniart [He4] a proposé une autre démonstration plus simple et plus courte que celle de Harris et Taylor ; cependant elle va moins loin puisqu'elle n'établit pas, contrairement à la précédente, la compatibilité aux mauvaises places entre le résultat local et la construction de représentations ℓ-adiques à partir de certaines représentations automorphes. Si l'on veut, le résultat d'Henniart est l'exact analogue de celui de Kutzko pour GL_2 (et du sien dans le cas de GL_3), tandis que celui de Harris et Taylor contient la généralisation des résultats de Langlands, Deligne, et moi-même, dont il a été question ci-dessus. La méthode d'Henniart est aussi de nature globale : elle consiste en gros, à partir d'une représentation du côté galoisien, à la décomposer comme une somme virtuelle d'induites de caractères, puis à considérer dans un groupe convenable la somme correspondante d'hypothétiques 'induites automorphes locales'. Ces dernières, dont on ne sait pas a priori qu'elles existent, proviennent en réalité de constructions globales et le point crucial consiste à prouver que leur formation se localise aussi bien que possible.

Le dénominateur commun entre les deux méthodes se compose d'une part du théorème d'induction de Brauer et d'autre part de l'existence, sous certaines hypothèses, d'une 'induction automorphe non galoisienne'. L'induction automorphe (locale ou globale) est l'opération qui devrait correspondre, d'après la philosophie de Langlands, à l'opération d'induction du côté galoisien. On sait la construire essentiellement pour des extensions cycliques (si l'on excepte certains résultats qui découlent de la théorie des fonctions L), par des méthodes fondées sur la formule des traces d'Arthur–Selberg ; par itération, on les obtient donc aussi pour des extensions *galoisiennes résolubles.* Toutefois Harris avait remarqué dans [Ha2] qu'en combinant l'induction automorphe cyclique et le changement de base avec l'existence des représentations galoisiennes attachées aux formes automorphes, on pouvait attraper certains cas particuliers d'induction automorphe non galoisienne, pour des sous-extensions non galoisiennes dans des extensions galoisiennes résolubles. Cette idée joue un rôle crucial tant dans le travail de Harris et Taylor que dans celui d'Henniart. On remarquera que ceci fait intervenir les variétés de Shimura, puisqu'elles servent à construire les représentations galoisiennes ℓ-adiques. Ces variétés se retrouvent donc aussi, bien que moins visibles, dans le travail d'Henniart. La différence est qu'il ne les utilise qu'aux 'bonnes' places, récupérant ensuite des informations aux mauvaises par des arguments fondés sur les équations fonctionnelles des séries L, au contraire de Harris et Taylor qui attaquent courageusement ces places de mauvaise réduction, suivant en cela le seul principe de la théorie que l'on ait réussi à établir en toute généralité : 'We are in a forest whose trees will not fall with a few timid hatchet blows. We have to take up the double-bitted axe and the cross-cut saw, and hope that our muscles are equal to them' ([La]).

Remarquons enfin que tant le travail de Harris et Taylor que celui d'Henniart ne font qu'établir abstraitement l'existence de la bijection souhaitée. On peut penser que les méthodes locales parviendront sous peu à la rendre plus explicite et aussi à fournir une autre preuve de la conjecture. La théorie correspondante a été considérablement développée ces dernières années, essentiellement par Bushnell, Henniart et Kutzko. En particulier, ils ont construit une bijection explicite entre représentations cuspidales de $GL_n(K)$ et représentations irréductibles du groupe de Weil dans le cas (en principe le plus difficile) où n est une puissance de la caractéristique du corps résiduel, sans pouvoir cependant vérifier que cette bijection satisfaisait toutes les conditions requises. Il m'est impossible de décrire brièvement les derniers développements de cette théorie locale – développements qui justifieraient à eux seuls un autre exposé. C'est pourquoi il n'en sera plus question dans la suite. Je renvoie à [B-H] pour un état actualisé de la question.

Le plan de l'exposé est le suivant : le premier paragraphe est consacré à une description des catégories de représentations locales considérées, ce qui nous permet d'énoncer le théorème principal au paragraphe 2. Le suivant est consacré à un exposé très succinct de quelques points, utiles par la suite, de la théorie de Langlands (surtout globale), en particulier l'idée de l'induction automorphe. Au paragraphe 4 nous expliquons la méthode d'Henniart. Le paragraphe 5 raconte la 'théorie de Lubin–Tate non–abélienne', avec un peu plus d'informations que ce dont on aurait strictement besoin, mais c'est un sujet auquel le conférencier est attaché. Au paragraphe 6, on décrit les variétés de Shimura étudiées par Harris et Taylor, et au suivant on explique le fondement de leur méthode. Finalement, on donne quelques détails dans le dernier paragraphe, concernant surtout la géométrie de la mauvaise réduction. Je n'ai pas eu le temps ni le courage de donner des détails sur l'application des formules des traces de Selberg et de Lefschetz : cette partie du manuscrit repose de façon essentielle sur les résultats de Kottwitz sur les points des variétés de Shimura sur les corps finis, résultats qu'il aurait été trop long d'expliquer ici (et pour lesquels je renvoie à [Cl3]). Cet exposé a d'ailleurs déjà largement dépassé la taille que j'avais initialement prévue. Il a été écrit alors que les travaux en question étaient encore sous forme provisoire et mouvante (en gestation en ce qui concerne celui d'Henniart). Cela a entraîné de nombreux remaniements et revirements, et probablement quelques erreurs, imprécisions ou redites, pour lesquelles je sollicite l'indulgence du lecteur.

1. PRÉSENTATION DES ACTEURS

1.1. Le côté de GL_n

Pour chaque entier $n \geq 1$, le groupe $GL_n(K)$ est localement compact et totalement discontinu. Une représentation π de ce groupe sur un espace vectoriel complexe V est *lisse* si le stabilisateur de chaque vecteur est ouvert. Elle est dite *admissible* si de plus, pour chaque sous-groupe ouvert $H \subset GL_n(K)$, l'espace des invariants V^H est de dimension finie ; cela est d'ailleurs automatique pour π lisse et irréductible. Nous noterons $\mathcal{A}_n(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL_n(K)$. Remarquer que ces représentations sont en général de dimension infinie (sinon de dimension 1 et factorisées à travers le déterminant). Remarquer aussi qu'il s'agit d'une notion purement algébrique (la topologie de $\mathbf{C}$ ne jouant aucun rôle), de sorte que l'on peut se permettre de remplacer $\mathbf{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique 0. En fait, dans la suite, nous considérerons souvent des représentations à valeurs dans la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$.

Pour $\pi \in \mathcal{A}_n(K)$, le centre de $GL_n(K)$ (identifié à K^*) agit sur l'espace de π par un (quasi-)caractère que l'on appelle le *caractère central* de π. D'autre part, pour χ un quasi-caractère de K^*, on considère souvent la *tordue* $\pi \otimes \chi$: par définition $\pi \otimes \chi = \pi \otimes (\chi \circ \det)$.

Une façon de construire des représentations de $GL_n(K)$ est l'*induction* : partant d'une partition $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ et de représentations π_i des groupes $GL_{n_i}(K)$, on peut voir le groupe produit $GL_{n_1}(K) \times GL_{n_2}(K) \times \cdots \times GL_{n_r}(K)$ comme sous-groupe de Levi du parabolique supérieur $P_{n_1,n_2,\cdots n_r}$ de $GL_n(K)$ associé à la partition choisie de n. Le produit tensoriel des π_i s'étend de manière évidente en une représentation de $P_{n_1,n_2,\cdots n_r}$; par induction unitaire (c'est-à-dire qu'on multiplie avant induction par l'inverse $\delta^{-1}_{P_{n_1,n_2,\cdots n_r}}$ du module), on obtient alors une représentation de $GL_n(K)$ habituellement notée $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$. Une représentation irréductible de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle ne figure jamais comme sous-quotient d'une telle induite (à partir d'un sous-groupe parabolique propre).

On montre que toute représentation irréductible π est un sous-quotient de $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$ avec π_i des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{n_i}(K)$, pour certains entiers n_i de somme égale à n. Ces entiers ainsi que les π_i sont uniquement déterminés à l'ordre près par π. D'autre part, une induite de cuspidales irréductibles $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$, à défaut d'être toujours irréductible, est du moins de longueur finie et la suite de ses sous-quotients irréductibles ne dépend pas de l'ordre des π_i. Bernstein et Zelevinsky ont classifié de manière beaucoup plus précise les représentations admissibles irréductibles de $GL_n(K)$ et décomposé les induites $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$: voir par exemple l'exposé de Rodier ([R]) pour plus de détails.

Nous noterons $\mathcal{A}_n^0(K) \subset \mathcal{A}_n(K)$ le sous-ensemble constitué des classes d'équivalence de représentations *cuspidales.*

1.2. Le côté galoisien

On considère, d'un autre côté, le groupe de Weil W_K. Afin de pouvoir décrire les représentations galoisiennes locales ℓ–adiques de façon indépendante de la topologie de $\mathbf{Q}_\ell$, (voir [De2] pour des explications plus précises), on est amené à compliquer un tant soit peu le jeu et à introduire un '*groupe de Weil-Deligne*' W'_K qui possède différentes apparences mais qui de toute façon n'intervient que par la catégorie de ses représentations : une telle représentation (sur $\mathbf{C}$ ou plus généralement sur un corps de caractéristique 0) est un couple (ρ, N) constitué d'une représentation continue ρ de W_K dans un espace de dimension finie E (vu avec sa topologie discrète) et d'un endomorphisme nilpotent N de E qui commute à l'image par ρ du groupe d'inertie, et tel que l'on ait, pour Fr un élément de Frobenius 'géométrique', la relation : $\rho(\mathrm{Fr})N = q^{-1}N\rho(\mathrm{Fr})$. On dit qu'une telle représentation est 'Fr–semi-simple' si ρ est semi-simple.

Nous noterons $\mathcal{G}_n(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations Fr–semi-simples de dimension n complexes (même remarque que ci–dessus) du groupe W'_K ; le sous-ensemble constitué de celles pour lesquelles ρ est *irréductible* (ce qui entraîne $N = 0$) sera noté $\mathcal{G}_n^0(K)$.

1.3. Facteurs locaux

1.3.1. Du côté de GL_n, on définit pour chaque représentation complexe admissible irréductible π de $GL_n(K)$ des facteurs locaux $L(\pi, s)$ et $\epsilon(\pi, s, \psi)$, où $s \in \mathbf{C}$ et où ψ est un caractère complexe additif non trivial fixé de K. Ce sont des facteurs eulériens : $\epsilon(\pi, s, \psi)$ est le produit d'une constante et de $q^{-fs-f(\psi)ns}$, où $f(\psi)$ est le plus grand entier ν tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}^{-\nu}\mathcal{O}$ et f un entier que l'on appelle le *conducteur* de π. Quant à $L(\pi, s)$, c'est l'inverse d'un polynôme en q^{-s} de terme constant 1. Dans le cas où $n = 1$, ces facteurs avaient été définis dans la thèse de Tate, puis Jacquet et Langlands les avaient obtenus pour $n = 2$, et enfin Godement et Jacquet [G-J] dans le cas général. Ces derniers procèdent de façon assez semblable à ce que faisait Tate : ils considèrent, pour Φ une fonction localement constante à support compact sur $M_n(K)$ et pour c un 'coefficient matriciel' de π, la fonction Zéta locale :

$$Z(c,s,\phi)=\int_{GL_n(K)} c(g)\Phi(g)|\det(g)|^s \mathrm{d}^*g$$

(intégrale par rapport à une mesure de Haar sur GL_n). Cette fonction Zéta locale converge pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, et elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ (en fait une fraction rationnelle en q^{-s}). Le facteur $L(\pi,s)$ est alors caractérisé par le fait qu'il est le plus petit facteur eulérien tel que le quotient :

$$\frac{Z(c,s,\phi)}{L(s,\pi)}$$

soit toujours holomorphe pour chaque Φ et chaque coefficient c de π (en quelque sorte l'inverse du 'dénominateur commun') ; enfin la 'constante locale' $\epsilon(\pi,s,\psi)$ est définie par l'équation fonctionnelle suivante :

$$\frac{Z(c^\vee,1-s+\frac{n-1}{2},\hat{\Phi})}{L(\pi^\vee,1-s)}=\epsilon(\pi,s,\psi)\frac{Z(c,s+\frac{n-1}{2},\Phi)}{L(\pi,s)},$$

avec $c^\vee(g)=c(g^{-1})$, $\pi^\vee$ la représentation contragrédiente de π (dont $c^\vee$ est un coefficient), et enfin $\hat{\Phi}$ la transformée de Fourier de Φ (étant entendu que $M_n(K)$ est identifié à son dual par l'application $(x,y)\to\psi\circ\mathrm{tr}(xy)$ et que l'on prend sur $M_n(K)$ la mesure autoduale).

1.3.2. Lorsque $n\le 3$, une représentation admissible irréductible π de $GL_n(K)$ est déterminée si l'on connaît les facteurs locaux $L(\pi\otimes\chi,s)$ et $\epsilon(\pi\otimes\chi,s,\psi)$ de chacune des tordues de π par un quasi-caractère, mais cela n'est plus vrai si $n\ge 4$. On a cependant alors un résultat analogue en faisant intervenir les *facteurs locaux de paires* de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika ([JPPS1] [JPPS2]). Ces derniers ont associé à chaque couple $\pi\in\mathcal{A}_n(K),\pi'\in\mathcal{A}_{n'}(K)$ des facteurs eulériens $L(\pi\times\pi',s)$ et $\epsilon(\pi\times\pi',s,\psi)$ (que l'on ne définira pas ici). D'après Henniart, si $\pi\in\mathcal{A}_n(K)$ est 'générique', elle est caractérisée par ces facteurs lorsque π' décrit $\mathcal{A}_{n-1}(K)$. Cela est en particulier vrai pour π cuspidale et il suffit alors de faire varier π' dans la réunion des $\mathcal{A}^0_{n'}(K)$, avec $1\le n'\le n-1$.

1.3.3. On associe aussi des facteurs locaux $L(\sigma,s)$ et $\epsilon(\sigma,s,\psi)$ à une représentation $\sigma=(\rho,N)$ de degré n du groupe de Weil–Deligne. Le plus simple est de définir le facteur L :

$$L(\sigma,s)=\det(1-q^{-s}.\mathrm{Fr}\mid\sigma_N^{I_K}),$$

avec Fr un Frobenius géométrique et $\sigma_N^{I_K}$ le sous-espace de l'espace de la représentation constitué des vecteurs qui sont à la fois fixés par le groupe d'inertie I_K et tués par N.

Par contre, la définition des facteurs ϵ galoisiens est plus subtile et indirecte : pour $n = 1$, on se ramène par la théorie du corps de classe aux quasi-caractères de K^*, et on décide que le facteur ϵ galoisien est égal au facteur défini par Tate. C'est Langlands qui a ensuite compris comment étendre cela aux représentations de dimension quelconque du groupe de Weil d'un corps local K. Il a prouvé par des méthodes purement locales (puis Deligne a retrouvé cela par des méthodes globales) que l'on pouvait associer à une telle représentation ρ un facteur $\epsilon_K(\rho, s, \psi)$, ces facteurs vérifiant trois propriétés qui les caractérisent :

(i) *Additivité* : pour ρ une représentation de W_K, extension d'une représentation ρ' par une autre ρ'', on a :

$$\epsilon_K(\rho, s, \psi) = \epsilon_K(\rho', s, \psi)\epsilon_K(\rho'', s, \psi).$$

(Noter que cela permet de définir $\epsilon_K(\rho, s, \psi)$ pour ρ une représentation *virtuelle* de W_K.)

(ii) *Induction* : pour M une extension finie de K et ρ une représentation virtuelle de degré 0 de W_M, on a :

$$\epsilon_K(\mathrm{Ind}_M^K(\rho), s, \psi) = \epsilon_M(\rho, s, \psi \circ \mathrm{tr}_{M/K}).$$

(iii) *Degré* 1 : pour ρ une représentation de degré 1 de W_K, le facteur $\epsilon_K(\rho, s, \psi)$ est, via l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local, celui défini par Tate.

Finalement, pour $\sigma = (\rho, N)$ une représentation du groupe de Weil–Deligne W_K', on définit :

$$\epsilon_K(\sigma, s, \psi) = \epsilon_K(\rho, s, \psi)\det(-\mathrm{Fr} \mid (\sigma^{I_K}/\sigma_N^{I_K})\ ).$$

2. LE THÉORÈME ET QUELQUES CONSIDÉRATIONS ALENTOUR

On désigne toujours par K un corps local non archimédien et on conserve les notations des paragraphes précédents. La conjecture de Langlands locale pour GL_n peut s'énoncer sous la forme du théorème suivant, prouvé dans [H-T] et [He4] dans le cas où K est un corps p–adique, tandis que son analogue en égale caractéristique p avait été établi dans [L-R-S] :

2.1. THÉORÈME 1

Il existe une famille de bijections $\sigma_{n,K}$ (que nous noterons pour alléger σ_n , voire σ) :

$$\mathcal{A}_n^0(K) \to \mathcal{G}_n^0(K)$$
$$\pi \quad \to \quad \sigma_n(\pi)$$

vérifiant les propriétés suivantes qui les caractérisent :

(i) *Le déterminant de $\sigma_n(\pi)$ correspond par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local au caractère central de π. En particulier, σ_1 est donnée par cet isomorphisme (on identifiera souvent pour alléger $\sigma_1(\chi)$ à χ).*

(ii) (torsion) *Pour tout quasi-caractère $\chi \in \mathcal{A}_1(K)$, on a :*

$$\sigma_n(\pi \otimes \chi) = \sigma_n(\pi) \otimes \sigma_1(\chi).$$

(iii) *Pour chaque paire de représentations $\pi \in \mathcal{A}_n^0(K)$, $\pi' \in \mathcal{A}_{n'}^0(K)$, on a l'identité de facteurs locaux :*

$$L(\pi \times \pi', s) = L(\sigma_n(\pi) \otimes \sigma_{n'}(\pi'), s) \; ; \; \epsilon(\pi \times \pi', s, \psi) = \epsilon(\sigma_n(\pi) \otimes \sigma_{n'}(\pi'), s, \psi).$$

(iv) (contragrédiente) *Pour $\pi \in \mathcal{A}_n^0(K)$, on a : $\sigma_n(\pi^\vee) = \sigma_n(\pi)^\vee$.*

2.2. On peut établir diverses propriétés supplémentaires de ces bijections, la plus notable, qui apparaîtra plus loin comme conséquence de la théorie de Harris et Taylor, étant la compatibilité avec la construction des représentations ℓ–adiques attachées aux formes automorphes sur des formes de groupes unitaires.

Remarque.— Le théorème ci-dessus est énoncé sous l'hypothèse implicite que le corps des coefficients de nos représentations est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. La correspondance n'est pas compatible avec les automorphismes de $\mathbf{C}$ si $q^{\frac{n-1}{2}}$ est irrationnel : cela tient au décalage par $\frac{n-1}{2}$ dans les équations fonctionnelles (1.3.1), qui fait apparaître ce facteur. La géométrie des variétés de Shimura fournit plutôt (sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$) la correspondance (dite 'de Hecke') $r_n(\pi) = \sigma_n(\pi^\vee) \otimes | \, |^{\frac{1-n}{2}}$, qui est bien invariante et garde donc un sens sur tout corps algébriquement clos de caractéristique 0. Malheureusement, cette correspondance locale se comporte mal vis-à-vis de l'induction et des sommes directes de représentations galoisiennes (contrairement à celle de Langlands : cf. 2.4 ci-dessous). L'irrationalité de la correspondance de Langlands tient également au fait que le module qui sert à l'induction unitaire comporte des puissances de $q^{1/2}$.

2.3. Quelques réductions

2.3.1. L'*unicité* de la famille de bijections satisfaisant ces propriétés est due à Henniart ([He3] ; voir aussi 1.3.2 ci-dessus).

2.3.2. Il résulte de l'égalité des facteurs ϵ que le conducteur d'Artin de $\sigma_n(\pi)$ est égal au conducteur (cf. 1.3.1) de la représentation π.

L'égalité entre le cardinal de l'ensemble (fini) des classes d'équivalence de représentations cuspidales de GL_n de conducteur fixé modulo torsion par un caractère non ramifié et le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe de Weil de même conducteur, toujours modulo torsion non ramifiée, constitue ce que l'on appelle la *conjecture de Langlands numérique* ; cela avait été prouvé également par Henniart ([He2]) et constitue l'un des ingrédients clés de la preuve du théorème 1.

2.3.3. Pour prouver le théorème, il 'suffit' en fait de construire des applications :

$$\sigma_{n,K} : \mathcal{A}_n(K)^0 \to \mathcal{G}_n(K),$$

vérifiant (i) à (iv) ; en effet ces propriétés entraînent (comme l'avait remarqué Henniart) que l'image de $\sigma_{n,K}$ est incluse dans $\mathcal{G}_n^0(K)$, puis l'injectivité résulte du fait que les représentations cuspidales de GL_n sont déterminées par les facteurs ϵ de paires ; enfin, la surjectivité découle alors de la conjecture numérique.

2.4. Extension en une bijection entre $\mathcal{A}_n(K)$ et $\mathcal{G}_n(K)$

On sait étendre une famille de bijections $\sigma_{n,K}$ comme ci-dessus en une famille de bijections, que nous noterons encore $\sigma_{n,K}$, entre les ensembles $\mathcal{A}_n(K)$ et $\mathcal{G}_n(K)$, vérifiant les mêmes propriétés (i) à (iv). Cela est expliqué par Rodier [R] et repose sur les travaux de Bernstein et Zelevinsky. À vrai dire c'est l'existence de ces bijections entre les ensembles $\mathcal{A}_n(K)$ et $\mathcal{G}_n(K)$ tout entiers qu'avait conjecturée Langlands ; on s'est aperçu assez vite que le cœur du problème consistait à comparer les représentations cuspidales du côté de GL_n aux représentations irréductibles du côté galoisien.

Donnons une idée vague de la construction : à une représentation irréductible π de GL_n, qui apparaît comme sous-quotient d'une induite de cuspidales

$\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$ (associée à une partition $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$), on associe $\sigma_n(\pi) = (\rho, N)$, où ρ est simplement $\sigma_{n_1}(\pi_1) \oplus \sigma_{n_2}(\pi_2) \oplus \cdots \oplus \sigma_{n_r}(\pi_r)$. L'opérateur N dépend du sous-quotient que l'on considère et, pour le définir, on doit utiliser toute la finesse de la classification de Bernstein–Zelevinsky.

Cas particulier : l'induite est irréductible si et seulement si il n'existe pas deux entiers i et j distincts entre 1 et r tels que $n_i = n_j$ et que $\pi_j \simeq \pi_i \otimes |\ |$ (torsion par la valeur absolue normalisée de K). Alors $N = 0$, ce qui est d'ailleurs la seule possibilité pour le ρ alors obtenu.

Ce prolongement jouera un rôle important dans la version de Harris et Taylor de la preuve du théorème 1.

3. UN RAPIDE SURVOL DE LA 'PHILOSOPHIE'

3.1. Théorie globale : quelques mots sur les représentations automorphes

Un corps global F étant donné, on désigne par $\mathbf{A}_F$ son anneau d'adèles, produit restreint de tous les complétés F_v. Si G est un groupe réductif sur F, une *forme automorphe* sur $G(\mathbf{A}_F)$ est une fonction sur ce groupe, invariante à gauche par $G(F)$, et vérifiant les propriétés suivantes : elle doit être U-finie pour U un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{A}_F)$; elle doit être localement constante en les places non archimédiennes et (dans le cas où F est un corps de nombres) on demande qu'elle soit C^∞ aux places réelles et complexes et annulée par un idéal de codimension finie du centre de l'algèbre enveloppante de la partie archimédienne du groupe. On impose enfin des conditions de croissance qui importeront peu dans la suite de cet exposé dans la mesure où nous considérerons surtout des groupes anisotropes modulo le centre.

Sur l'espace des formes automorphes agissent le groupe $G(\mathbf{A}_F^\infty)$ des adèles finies ainsi que l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de la partie archimédienne. Un sous-quotient irréductible de l'espace de formes automorphes (pour le produit de ces deux actions) est appelé une *représentation automorphe* (irréductible) du groupe $G(\mathbf{A}_F)$ – à cet abus de langage près que la partie archimédienne n'agit qu'au travers de l'algèbre enveloppante.

Une telle représentation Π se décompose comme un produit tensoriel 'restreint' $\bigotimes \Pi_v$, v décrivant l'ensemble des places de F. Les contributions locales Π_v sont des représentations admissibles irréductibles des différents groupes $G(F_v)$ (de leurs algèbres enveloppantes aux places archimédiennes).

3.2. La 'philosophie de Langlands' prédit qu'à une représentation automorphe Π comme ci-dessus, dont on suppose la composante archimédienne Π_∞ d'un type raisonnable, on doit pouvoir associer un 'motif' sur un corps de nombres, et donc un système compatible ρ_λ de représentations ℓ-adiques d'un groupe de Galois global. Ce programme – que je laisserai vague afin de ne pas démesurément allonger cet exposé – a été réalisé dans certains cas, tant pour des corps de fonctions que pour des corps de nombres. On utilise des objets géométriques (variétés classifiant les modules elliptiques, les chtoukas ou les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques pour les corps de fonctions, variétés de Shimura dans le cas des corps de nombres) sur lesquels agissent des opérateurs de Hecke (liés au groupe $G(\mathbf{A}^\infty)$) ; la construction consiste à décomposer la cohomologie ℓ-adique des objets considérés sous l'action des opérateurs de Hecke. On prouve ensuite une relation entre Π et ρ_λ du type suivant : pour presque toute place (= toutes sauf un nombre fini) des fonctions L automorphes locales (analogues à celles définies plus haut) coïncident (à un décalage près) avec leur contreparties galoisiennes.

Il est important de signaler ici une différence essentielle entre corps de fonctions et corps de nombres : dans le cas des corps de fonctions, on sait par la théorie de Grothendieck–Deligne–Laumon des fonctions L qu'elles admettent des équations fonctionnelles globales dont la constante est le produit des constantes locales. On sait ceci aussi du côté automorphe pour certains groupes (en particulier les formes de groupes linéaires) et alors des arguments maintenant assez standards (dont nous verrons un exemple ci-dessous en exposant la méthode d'Henniart) permettent souvent d'en déduire l'égalité des facteurs L et ϵ à *chaque* place. Dans les cas des corps de fonctions, l'étude de ce que l'on nomme habituellement 'les mauvaises places', qui correspondent en fait aux places de mauvaise réduction de la variété modulaire, est donc plus ou moins automatique. Cela permet de définir une correspondance locale chaque fois que l'on dispose d'une correspondance globale 'faible' (i.e avec des renseignements portant sur le complémentaire d'un nombre fini de places). Dans le cas des corps de nombres au contraire, on ne connaît à l'heure actuelle aucune façon de prouver a priori que les fonctions L associées à des représentations ℓ-adiques admettent des équations fonctionnelles ; on en est réduit à seulement le constater quand on arrive, après bien des efforts à chacune des mauvaises places, à identifier finalement notre fonction L galoisienne à une fonction L automorphe.

Rendons ces idées un peu plus explicites dans le cas qui nous servira par la suite.

3.3. Résultats de Kottwitz et Clozel (complétés par Taylor)

Soit F un corps CM, que l'on suppose obtenu comme le composé d'un corps totalement réel F^+ et d'un corps quadratique imaginaire. Soit Π une représentation automorphe parabolique (c'est-à-dire en gros qui ne provient pas d'un sous-groupe parabolique propre) du groupe $GL_n(\mathbf{A}_F)$. On suppose que Π est isomorphe à $\overline{\Pi}^\vee$ (où $\overline{\Pi}$ désigne la représentation déduite de Π par composition avec l'automorphisme non trivial de $\mathrm{Gal}(F/F^+)$; on fait aussi l'hypothèse que la composante archimédienne Π_∞ a un caractère infinitésimal régulier ; on suppose enfin qu'il existe une place v de F^+ décomposée dans F telle que Π_v appartienne à la série discrète. Alors on peut associer à Π un système compatible $\rho_{\lambda,\Pi}$ de représentations ℓ-adiques de dimension n du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, caractérisé par la propriété suivante : en presque chaque place finie v de F, la composante Π_v et la restriction de $\rho_{\lambda,\Pi}$ au groupe de Galois local se correspondent au sens de la correspondance de Langlands (triviale pour les places non ramifiées) tordue par $|\ |^{\frac{1-n}{2}}$. Cela est essentiellement dû à Clozel [Cl1], qui, s'appuyant sur des travaux de Kottwitz ([Ko1] [Ko2]), obtenait une représentation de dimension an, puis a été complété par un argument de Taylor (non publié mais expliqué dans [Ha1]) prouvant que la représentation de Clozel était bien (après semi-simplification) une somme de a copies de la représentation voulue. La construction de la représentation de Clozel consiste à 'descendre' Π en une forme automorphe sur une forme de groupe unitaire (analogue à celle que nous rencontrerons plus loin) puis à travailler sur la variété de Shimura associée à ce dernier. Nous étudierons la géométrie de cette construction (y compris aux mauvaises places) très en détail plus loin dans cet exposé, puisqu'elle joue un rôle central dans le travail de Harris et Taylor.

3.4. Fonctorialités (cas cyclique)

Si l'on admet que la conjecture de Langlands locale est vraie, on voit que, pour K'/K une extension de corps locaux, il doit exister une application de 'changement de base' $\mathcal{A}_n(K) \to \mathcal{A}_n(K')$ qui reflète du côté de GL_n l'opération restriction du groupe de Weil–Deligne de K à celui de K' ; d'autre part l'opération d'induction associe à une représentation de degré n de $W'_{K'}$ une représentation de degré nd de W'_K (avec d le degré de l'extension) et cela nous permet de prédire l'existence d'une application ('induction automorphe') de $\mathcal{A}_n(K')$ vers $\mathcal{A}_{nd}(K)$. De plus ces opérations doivent se globaliser en des opérations analogues sur les représentations automorphes.

Le changement de base et l'induction automorphe pour GL_n ont été construites par voie globale (par des méthodes fondées sur la formule des traces de Selberg) dans le cas d'extensions K'/K *cycliques* (d'où aussi le cas galoisien résoluble) : le changement de base par Arthur et Clozel [A-C] en suivant la voie que Langlands avait explorée pour GL_2 ; l'induction automorphe par Henniart et Herb [H-H], à la suite de travaux de Kazhdan et aussi de résultats plus faibles dus à Arthur et Clozel. Ces applications sont caractérisées par des identités de caractères (tordus) et sont définies indépendamment de la conjecture de Langlands ; on vérifie simplement que ce sont bien les applications voulues là où cette conjecture est triviale, c'est-à-dire aux places non ramifiées.

3.5. Induction automorphe dans certains cas non galoisiens

La théorie dans son état actuel s'avère incapable d'aborder systématiquement l'induction automorphe pour des extensions qui ne sont pas composées d'extensions cycliques. Toutefois Harris a remarqué dans [Ha2] qu'en combinant l'induction automorphe cyclique avec l'existence des représentations galoisiennes décrites ci-dessus (3.3), on pouvait en attraper certains cas particuliers, pour des sous-extensions non galoisiennes dans des extensions galoisiennes résolubles. Cette idée joue un rôle crucial tant dans le travail de Harris et Taylor que dans celui d'Henniart (c'est essentiellement l'intersection des deux méthodes, si l'on excepte l'usage du théorème de Brauer). Expliquons l'idée dans le cas particulier le plus simple d'une extension cubique non galoisienne.

Soit donc F'/F une extension cubique non normale de corps de nombres CM, et soit $\tilde{F}$ la clôture normale de F ; c'est donc un corps de degré 6 sur F. On note F^0 l'unique extension de degré 2 de F contenue dans $\tilde{F}$. On suppose que tous ces corps sont obtenus comme composés de corps totalement réels notés respectivement $F^+, F'^+, F^{0+}, \tilde{F}^+$ et d'un même corps quadratique imaginaire. Donnons-nous un caractère algébrique χ du groupe des classes d'idèles de F' ; on désire construire une représentation automorphe Π de $GL_3(\mathbf{A}_F)$, que l'on puisse considérer comme l'induite automorphe de χ.

Considérons la restriction au groupe de Weil global W_{F^0} de l'induite $\rho = \mathrm{Ind}_{F'}^F(\chi)$ du caractère (encore noté χ) correspondant à χ par la théorie du corps de classes global : on voit que cette restriction coïncide avec l'induite ρ^0 de $W_{\tilde{F}}$ à W_{F^0} de la restriction $\tilde{\chi}$ de χ (vu comme caractère de $\mathbf{A}_{\tilde{F}}$, $\tilde{\chi} = \chi \circ N_{\tilde{F}/F'}$). Du côté automorphe, cela nous dit que le changement de base de F à F^0 de notre hypothétique Π doit coïncider avec l'induite automorphe $\Pi^0 = \mathrm{IA}_{\tilde{F}}^{F^0}(\tilde{\chi})$ (que l'on sait exister puisque l'extension $\tilde{F}/F^0$ est cyclique). Il nous reste à descendre cette dernière représentation de F^0 à F. La théorie du changement de base pour l'extension F^0/F nous dit que c'est possible parce que la représentation considérée est stable par la conjugaison de F^0 relativement à F. Malheureusement, on a deux possibilités Π' et Π'', qui diffèrent par torsion par le caractère d'ordre 2 de $\mathbf{A}_F^*$ défini par l'extension F^0, entre lesquelles on ne sait a priori pas choisir.

Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que le composé $\overline{\chi}$ de χ avec la conjugaison de F' relativement à F'^+ coïncide avec χ^{-1}. Alors il en est de même pour $\tilde{\chi}$, et Π^0 vérifie la propriété d'autodualité tordue de 3.3 ci-dessus. Supposons de plus qu'elle vérifie aussi les autres propriétés de 3.3, portant sur le caractère infinitésimal et sur l'existence d'une place finie v^0 où la représentation locale appartient à la série discrète. Dans ce cas les résultats de Clozel associent à Π^0 une représentation galoisienne qui n'est autre, après une torsion convenable, que ρ^0! Ajoutons encore parmi nos hypothèses que ρ^0 est irréductible et que v^0 est l'unique place de F^0 divisant une place v de F. Alors on peut montrer que Π' et Π'' vérifient encore les hypothèses de 3.3. Il leur correspond des représentations ρ' et ρ'' (avec la torsion convenable) du groupe $W_{F'}$ de mêmes restrictions ρ^0. Mais une représentation de restriction ρ^0 ne peut être que ρ ou sa tordue par le caractère d'ordre 2 défini par l'extension F^0/F. L'une des deux représentations ρ' ou ρ'', disons ρ', coïncide donc avec ρ : nous pouvons ainsi choisir entre Π' et Π'' et poser $\mathrm{IA}_{F'}^F(\chi) = \Pi'$: c'est l'induite automorphe cherchée. Elle correspond en presque chaque place à l'induite ρ, mais ceci ne nous dit rien de ce qui se passe aux mauvaises places (c'est ce qu'Harris nomme une induite automorphe 'faible'). En particulier on ne sait pas a priori que la composante de $\mathrm{IA}_{F'}^F(\chi)$ en une telle place $\mathfrak{p}$ ne dépend que des composantes $\chi_{\mathfrak{q}}$ en les places $\mathfrak{q}$ divisant $\mathfrak{p}$. On le saura une fois établis les résultats de Harris et Taylor.

Des arguments semblables permettent souvent, sous des hypothèses techniques compliquées, de construire l'induite automorphe $\mathrm{IA}_{F'}^F(\chi)$ pour des extensions non normales F'/F plus générales (mais contenues dans des extensions résolubles) : voir [Ha2].

3.7. La correspondance de Jacquet–Langlands

Il s'agit d'une des nombreuses fonctorialités prédites par la théorie. On considère l'ensemble des représentations de $GL_n(K)$ (lisses irréductibles) qui sont *essentiellement de carré intégrable*, c'est-à-dire dont les coefficients matriciels sont de carré intégrable modulo le centre. À torsion près, une telle représentation contribue discrètement à la formule de Plancherel du groupe. D'après Bernstein et Zelevinsky, on l'obtient comme l'unique quotient irréductible d'une induite $r \times r|\ | \times r|\ |^2 \times \cdots \times r|\ |^{t-1}$ associée à une représentation cuspidale r de $GL_s(K)$ pour s un diviseur de n. Notons $\mathcal{A}_n^d(K)$ leur ensemble ; il contient l'ensemble $\mathcal{A}_n^0(K)$ des cuspidales et n'est pas beaucoup plus gros si n est premier : on ajoute seulement les tordues d'une même représentation, la représentation spéciale. Il y en a un peu plus si n est divisible.

D'autre part, soit D un corps gauche de centre K et de dimension n^2 sur K. Les représentations lisses irréductibles du groupe multiplicatif D^* sont de dimension finie. On note $\mathcal{A}_D$ leur ensemble.

Tant les éléments de $\mathcal{A}_D$ que ceux de $\mathcal{A}_n^d(K)$ admettent des caractères : c'est clair pour les premiers, moins pour les seconds car il s'agit de représentations de dimension en général infinie. On procéde de façon habituelle, définissant d'abord un caractère distribution, dont on montre que sa restriction aux éléments semi-simples réguliers est une fonction.

D'autre part on a une bijection entre les classes de conjugaison régulières de D^* et les classes de conjugaison semi-simples régulières elliptiques de $GL_n(K)$, qui associe entre eux des éléments ayant le même polynôme minimal.

THÉORÈME.— *Il existe une bijection $\pi \to \mathrm{JL}(\pi)$ de $\mathcal{A}_n^d(K)$ sur $\mathcal{A}_D$, caractérisée par l'égalité suivante de caractères, pour $g \in GL_n(K)$ semi-simple elliptique régulier et $d \in D^*$ possédant le même polynôme minimal :*

$$\Theta_\pi(g) = (-1)^{n-1}\ \Theta_{\mathrm{JL}(\pi)}(d)\ .$$

La démonstration, due à Rogavski, Kazhdan, Vignéras ([Ro], [D-K-V] ; voir aussi [Ba] pour le cas d'égale caractéristique p), procède par voie globale et repose sur la formule des traces de Selberg. Le théorème admet d'ailleurs des variantes globales (correspondance entre représentations automorphes sur différentes formes intérieures de GL_n.)

Par souci d'économie, nous noterons également JL la bijection dans l'autre sens.

4. LA MÉTHODE D'HENNIART

4.1. Sa construction donne l'application $\sigma \to \pi(\sigma)$ des représentations galoisiennes vers les représentations de GL_n, alors que nous verrons dans la suite que Harris et Taylor procèdent plutôt dans l'autre direction.

Notons M_K le $\mathbf{Z}$–module libre de base la réunion $\bigsqcup_{m\geq 1} \mathcal{A}_m^0(K)$. À chaque représentation admissible irréductible π de $GL_n(K)$ on peut associer un élément de

M_K noté $[\pi]$, que l'on appelle son *support cuspidal* et qui n'est rien d'autre que la somme des classes des représentations cuspidales π_i (comptées avec leurs éventuelles multiplicités) telles que π figure dans leur induite $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$. On munit ce module du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ pour lequel la base qui a servi à le définir est orthonormée.

Réduite à sa plus simple expression, la méthode d'Henniart consiste en ceci : partons de $\sigma \in \mathcal{G}_n^0(K)$; on se ramène aisément à supposer que son déterminant est d'ordre fini, de sorte qu'elle se factorise à travers un groupe de Galois fini. Le théorème d'induction de Brauer permet d'exprimer σ comme une combinaison virtuelle d'induites :

$$\sigma = \sum n_i \mathrm{Ind}_{L_i}^K \chi_i \ ,$$

où les n_i sont des entiers relatifs, les L_i des extensions de K, avec des caractères d'ordres finis χ_i de leurs groupes multiplicatifs (identifiés par la théorie du corps de classes local à des caractères des groupes de Weil correspondants) ; enfin la notation $\mathrm{Ind}_{L_i}^K$ est l'abréviation usuelle pour désigner l'induction de W_{L_i} à W_K.

Les extensions L_i/K ne sont en général pas galoisiennes. Puisqu'il s'agit de corps locaux, on sait du moins que leurs clôtures galoisiennes sont des extensions *résolubles.* Il s'agit alors d'utiliser l'induction automorphe non galoisienne dont j'ai tenté de donner l'idée en 3.5 et d'associer à chaque couple (L_i, χ_i) une représentation 'induite automorphe locale' de $GL_{d_i}(K)$ (avec d_i le degré de l'extension L_i/K) ; la combinaison linéaire dans le groupe M_K des supports cuspidaux de ces 'induites', pondérés des coefficients n_i, doit être la classe de la représentation cherchée $\pi(\sigma)$.

4.2. Cette idée simple se heurte à des obstacles évidents, qu'Henniart parvient toutefois à surmonter. Le plus inquiétant est sans doute le fait que l'induction automorphe locale non galoisienne n'existe pas a priori. En effet l'induction automorphe non galoisienne est définie comme un procédé global ; moyennant certaines précautions, on peut voir χ_i comme la composante locale en une place w_i d'un corps global $\mathbf{L}_i$ d'un caractère $\boldsymbol{\chi}_i$ du groupe des classes d'idèles de $\mathbf{L}_i$; ce corps global doit être choisi de telle sorte qu'il contienne un sous-corps $\mathbf{K}$ d'indice d_i dont le complété en w_i s'identifie à K. On s'arrange d'autre part pour que soient satisfaites les propriétés qui autorisent l'induction automorphe (cf. 3.5) : en particulier, l'extension globale $\mathbf{L}_i/\mathbf{K}$ doit être sous-extension d'une extension galoisienne résoluble et obtenue à partir d'une extension de corps totalement réels par composition avec un corps quadratique imaginaire.

Quant au caractère $\boldsymbol{\chi}_i$, il doit être autodual (son inverse doit coïncider avec son composé par la conjugaison complexe), et vérifier des conditions de régularité à l'infini et à certaines places finies. Sous ces conditions, on peut construire l'induite automorphe $\mathrm{IA}^{\mathbf{K}}_{\mathbf{L}_i}(\boldsymbol{\chi}_i)$. C'est une représentation automorphe irréductible du groupe $GL_{d_i}(\mathbf{A_K})$; sa composante locale $\mathrm{IA}^{\mathbf{K}}_{\mathbf{L}_i}(\boldsymbol{\chi}_i)_{w_i}$ en w_i est une représentation irréductible de $GL_{d_i}(K)$. Moralement, ce doit être l'induite automorphe locale de χ_i, mais on ne sait rien de tel a priori : elle pourrait bien ne pas dépendre seulement de la composante locale χ_i, mais aussi de toutes les données globales que l'on a fixées.

4.3. On remédie partiellement à cela en commençant par ne considérer que des représentations galoisiennes σ factorisées à travers le groupe de Galois d'une extension fixée E/K. Dans ces conditions, Henniart prouve que l'on peut trouver un corps global $\mathbf{K}$ fixe (dépendant de E), admettant K comme complété en une place w et telles que les constructions précédentes puissent être effectuées, si on se limite aux représentations factorisées par $\mathrm{Gal}(E/K)$, en le prenant comme corps de base.

On prolonge donc comme ci-dessus les χ_i en des caractères $\boldsymbol{\chi}_i$ du groupe des classes d'idèles de certaines extensions $\mathbf{L}_i$ de $\mathbf{K}$, qui par la théorie du corps de classes global correspondent à des caractères (complexes continus) du groupe de Weil global de ces extensions ; on peut alors induire ces caractères en des représentations, notées R_i, du groupe de Weil global de $\mathbf{K}$. Par définition, l'induite automorphe $\Pi_i = \mathrm{IA}^{\mathbf{K}}_{\mathbf{L}_i}(\boldsymbol{\chi}_i)$ correspond à R_i, en presque chaque place de $\mathbf{K}$, par la correspondance de Langlands locale (triviale aux places non ramifiées). En particulier, les facteurs locaux L et ϵ du côté automorphe sont égaux aux facteurs galoisiens correspondants, sauf peut-être en un nombre fini de places. Mais alors l'existence d'équations fonctionnelles de part et d'autre, dont la constante globale est le produit des constantes locales, force alors les facteurs de part et d'autre à coïncider en *chaque* place. Nous allons mettre cela en œuvre plutôt pour les facteurs locaux de paires.

Fixons pour cela une autre représentation σ' de $GL_{n'}(K)$ et faisons-lui subir les mêmes constructions qu'à σ, ce qui fait apparaître des extensions locales L'_j et globales $\mathbf{L}'_j$, des entiers n'_j, des caractères χ'_j et $\boldsymbol{\chi}'_j$, des induites galoisiennes R'_j et automorphes Π'_j. Le fait que ces objets se correspondent comme précédemment en presque chaque place v de $\mathbf{K}$ se traduit en ces places par des égalités de facteurs L et ϵ de paires :

$$L((\Pi_i)_v \times (\Pi'_j)_v\ ,\ s) = L((R_i)_v \otimes (R'_j)_v\ ,\ s)\ ,$$

$$\epsilon((\Pi_i)_v \times (\Pi'_j)_v\ ,\ s\ ,\ \psi_v) = \epsilon((R_i)_v \otimes (R'_j)_v\ ,\ s\ ,\ \psi_v)\ ,$$

où $\psi = \otimes\psi_v$ désigne un caractère du groupe des classes d'idèles de $\mathbf{K}$, dont la composante ψ_w s'identifie à ψ. Les mêmes égalités valent d'ailleurs après passage aux contragrédientes, ou après torsion par un caractère du groupe des classes d'idèles de $\mathbf{K}$. Le point crucial est le fait que toutes les constructions ont été effectuées avec le même corps global de base $\mathbf{K}$.

4.4. Mais la fonction L globale de la paire $\Pi_i \times \Pi'_j$ et celle de la représentation $R_i \otimes R'_j$ (c'est-à-dire le produit des facteurs L locaux correspondants) admettent toutes deux des équations fonctionnelles, dont les constantes globales sont les produits des constantes locales associées. Pour la seconde, cela découle du fait qu'il s'agit de la fonction L associée à une représentation *complexe continue* du groupe de Weil. Par une technique bien connue (développée essentiellement par Henniart) de torsion par des caractères très ramifiés, ce qui fait dégénérer les facteurs ϵ en toute place sauf en celle où on désire les regarder, on obtient alors l'égalité en toute place des 'facteurs γ' locaux, et en particulier à la place w cela donne :

$$\gamma((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) = \gamma((\Pi_i)_w \times (\Pi'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) \ ,$$

avec par définition :

$$\gamma((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) = \frac{\epsilon((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) L((R_i)_w^\vee \otimes (R'_j)_w^\vee \ , \ 1-s)}{L((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s)}$$

et l'expression analogue pour $\gamma((\Pi_i)_w \times (\Pi'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w)$.

De cette égalité entre facteurs γ, on déduit les égalités entre leurs constituants respectifs :

$$\epsilon((\Pi_i)_w \times (\Pi'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) = \epsilon((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s \ , \ \psi_w) \ ,$$

$$L((\Pi_i)_w \times (\Pi'_j)_w \ , \ s) = L((R_i)_w \otimes (R'_j)_w \ , \ s) \ ,$$

$$L((\Pi_i)_w^\vee \times (\Pi'_j)_w^\vee \ , \ s) = L((R_i)_w^\vee \otimes (R'_j)_w^\vee \ , \ s) \ .$$

Pour pouvoir déduire ces trois égalités de l'égalité des facteurs γ, on utilise le fait que nos représentations $(\Pi_i)_w$ et $(\Pi'_j)_w$ sont 'tempérées'. On a même le résultat plus précis suivant, qui découle de la construction de l'induite automorphe :

Lemme : $(\Pi_i)_w$ *est une induite irréductible* $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ *de représentations cuspidales unitaires.*

Ceci correspond du côté galoisien au fait que $\mathrm{Ind}_{E_i}^{K}\chi_i$ est une représentation galoisienne semi-simple (car factorisée à travers un groupe fini), somme de représentations irréductibles unitaires. Il résulte du lemme que les expressions des facteurs γ sont des fractions rationnelles en q^{-s} écrites sous forme irréductible.

4.5. Les égalités qui précèdent vont nous servir de façon essentielle à prouver que nos constructions sont indépendantes des choix effectués, à l'exception peut-être du choix de $\mathbf{K}$: il s'agit du choix d'une expression de σ comme combinaison d'induites, choix des corps globaux $\mathbf{E_i}$ et des caractères $\boldsymbol{\chi}_i$.

Revenons à notre idée de départ en considérant l'élément suivant de M_K :

$$\pi(\sigma,\cdots) = \sum n_i[(\Pi_i)_w] \ .$$

Cet élément dépend des nombreux choix que nous avons effectués (et qui sont rappelés par les points de suspension dans la formule ci-dessus). La construction analogue en partant de σ' nous fournit

$$\pi(\sigma',\cdots) = \sum n'_j[(\Pi'_j)_w] \ .$$

De l'égalité des facteurs L locaux va résulter le résultat crucial suivant :

PROPOSITION 4.5.— *Le produit scalaire* $\langle \pi(\sigma,\cdots)\ ,\ \pi(\sigma',\cdots)\rangle$ *est égal au nombre d'entrelacements* $\dim.(Hom_{W_K}(\sigma,\sigma'))$.

Preuve : On sait que les fonctions L locales correspondant à une représentation galoisienne irréductible sont holomorphes en $s = 0$, à l'exception près de la représentation triviale pour laquelle on a un pôle simple. La dimension de l'espace des entrelacements entre σ et σ' est donc égal à l'ordre du pôle en $s = 0$ de la fonction L locale :

$$L(\sigma\otimes\sigma'^{\vee}, s) \ = = \ \prod_{i,j} L\big((R_i)_w\otimes(R'_j)_w^{\vee}, s\big)^{n_i n'_j}.$$

Souvenons-nous d'autre part que, d'après le lemme ci–dessus, $(\Pi_i)_w$ (resp. $(\Pi'_j)_w$) est une induite de cuspidales unitaires irréductibles $\pi_{i,1}\times\cdots\times\pi_{i,r}$ (resp. $\pi'_{j,1}\times\cdots\times\pi'_{j',r'}$), dont la somme dans le groupe M_K constitue le support $[(\Pi_i)_w]$ (resp. $[(\Pi'_j)_w]$). Les facteurs locaux de telles induites se calculent comme produits des facteurs des constituants, et il en est de même pour les facteurs locaux de paires. L'ordre du pôle en 0 de $L\big((R_i)_w\otimes(R'_j)_w{}^{\vee}, s\big) = L\big((\Pi_i)_w\times(\Pi'_j)_w{}^{\vee}, s\big)$ est donc celui du produit :

$$\prod_{\alpha,\beta} L\big(\pi_{i,\alpha}\times\pi'_{j,\beta}{}^{\vee}, s\big)^{n_i n'_j} \ .$$

Enfin il est connu que, pour un tel couple $\pi_{i,\alpha} \times {\pi'_{j,\beta}}^{\vee}$ de cuspidales irréductibles, l'ordre du pôle est ce qu'on attend par analogie avec le côté galoisien, c'est-à-dire 1 si $\pi_{i,\alpha}$ est isomorphe à $\pi'_{j,\beta}$ et 0 sinon. L'ordre du pôle du produit ci-dessus est donc égal au produit de $n_i n'_j$ et du produit scalaire $\langle\ [(\Pi_i)_w]\ ,\ [(\Pi'_j)_w]\ \rangle$.

Il en résulte finalement que la fonction $L(\sigma \otimes \sigma'^{\vee}, s)$ admet un pôle d'ordre

$$\sum n_i n'_j \langle\ [(\Pi_i)_w]\ ,\ [(\Pi'_j)_w]\ \rangle \ = \ \langle \pi(\sigma, \cdots)\ ,\ \pi(\sigma', \cdots) \rangle\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4.6. La proposition ci–dessus admet la conséquence suivante, qui nous rapproche considérablement du but :

PROPOSITION 4.6.— (i) *Pour $\sigma \in \mathcal{G}^0_n(K)$ (toujours supposée factorisée via $Gal(E/K)$), la représentation $\pi(\sigma, \cdots)$ ne dépend pas à isomorphisme près des choix effectués concernant la décomposition de σ en combinaison linéaire d'induites, les extensions globales $\mathbf{L}_i$ et le prolongement des χ_i en caractères idéliques ; par contre elle peut a priori dépendre du choix de $\mathbf{K}$. Nous la noterons désormais $\pi(\sigma, \mathbf{K})$.*

(ii) *Sous la même hypothèse, $\pi(\sigma, \mathbf{K})$ est la classe dans M_K d'un élément bien déterminé de $\mathcal{A}^0_n(K)$ que nous noterons encore $\pi(\sigma, \mathbf{K})$.*

(iii) *L'application qui à σ (factorisée par $Gal(E/K)$) associe $\pi(\sigma, \mathbf{K})$ est compatible au passage aux contragrédientes, à la torsion par un caractère de $Gal(E/K)$. Elle fait se correspondre les caractères centraux du côté automorphe et les déterminants du côté galoisien. Elle préserve les facteurs locaux de paires.*

Preuve : On commence par prouver le second point : pour σ irréductible, on applique la proposition précédente avec $\sigma = \sigma'$ et en faisant la construction pour un choix fixé des données $n_i, \chi_i, \mathbf{L}_i, \boldsymbol{\chi}_i$. On obtient $\pi \in M_K$ qui vérifie :

$$\langle \pi, \pi \rangle \ = \ \dim.(Hom(\sigma, \sigma)) \ = \ 1\ ,$$

ce qui force π à être à un signe ± 1 près la classe d'un élément de $\mathcal{A}^0_m(K)$ pour un certain entier m. On vérifie que le signe est $+1$ et que $m = n$ en utilisant l'application linéaire λ de M_K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie tout élément de $\mathcal{A}^0_d(K)$ sur d : il est facile de vérifier en effet que $\lambda(\pi(\sigma, \cdots)) = \dim(\sigma)$.

Pour montrer que la construction est indépendante des choix effectués, on applique encore la proposition 4.5 à $\pi(\sigma, \text{choix1})$ et $\pi(\sigma, \text{choix2})$; l'égalité

$$\langle \pi(\sigma, \text{choix1}), \pi(\sigma, \text{choix2}) \rangle \ = \ \dim.\text{Hom}(\sigma, \sigma) \ = \ 1$$

permet alors de conclure compte tenu de (ii).

Enfin (iii) est une conséquence de la compatibilité des constructions globales à la torsion et au passage aux contragrédientes, aux caractères centraux et aux déterminants ; l'égalité des facteurs locaux résulte des égalités de 4.4.

4.7. Il reste à ce stade à exorciser les deux ennuis restants (d'ailleurs liés entre eux), c'est-à-dire le fait que l'on se soit limité à ne considérer que les σ factorisées à travers un groupe fini fixe, correspondant à une extension E/F, et la dépendance de la construction par rapport au choix d'un corps global $\mathbf{K}$ adapté à cette extension. Ce que prouve Henniart, c'est l'indépendance du résultat pourvu que E *soit assez grand* (une condition qui dépend de σ) : il doit contenir une extension $E(\sigma)$. On s'attend bien sûr à ce que cette condition soit superflue. Il démontre cela par récurrence sur n, en même temps que l'énoncé final (c'est-à-dire le théorème 1).

Cette dernière idée est la suivante : pour σ fixée de degré n, l'égalité des facteurs ϵ, qui entraîne celle des conducteurs, et la connaissance du caractère central, ne laissent qu'un nombre fini de possibilités pour $\pi(\sigma, \mathbf{K})$. Si on avait deux résultats différents $\pi(\sigma, \mathbf{K})$ et $\pi(\sigma, \mathbf{K}')$, il existerait $m < n$ et $\tau \in \mathcal{A}_m^0(K)$ tels que les facteurs ϵ locaux des paires $\pi(\sigma, \mathbf{K}) \times \tau$ et $\pi(\sigma, \mathbf{K}') \times \tau$ soient distincts. Mais par hypothèse de récurrence, τ (dont on peut supposer le caractère central d'ordre fini) est l'image de $\sigma' \in \mathcal{G}_m^0(K)$. La connaissance des facteurs ϵ des paires $\pi(\sigma, \mathbf{K}') \times \pi(\sigma')$ pour un ensemble fini fixé (en fonction de σ) de représentations $\sigma' \in \mathcal{G}_m^0(K)$ (avec des entiers $m < n$) discrimine donc entre les diverses possibilités.

Prenons alors pour $E(\sigma)$ le corps composé du corps fixé par $\mathrm{Ker}(\sigma)$ et des $E(\sigma')$ (supposés définis par récurrence). Si E contient $E(\sigma)$, tout corps global adapté permet aussi de réaliser les $\pi(\sigma')$, ceci sans ambiguïté d'après l'hypothèse de récurrence. Pour deux choix possibles $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$, on a, d'après la proposition 4.6 ((iii) :

$$\epsilon(\pi(\sigma), \mathbf{K}') \times \pi(\sigma'), s, \psi) = \epsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \epsilon(\pi(\sigma), \mathbf{K}') \times \pi(\sigma'), s, \psi);$$

il en résulte que $\pi(\sigma, \mathbf{K}) = \pi(\sigma, \mathbf{K}')$.

Ceci donne finalement une construction 'stable' sans ambiguïté de $\pi(\sigma)$. L'injectivité découle facilement de ce qui précède, puis la surjectivité résulte de la conjecture numérique.

5. OBJETS GÉOMÉTRIQUES LOCAUX : LA THÉORIE DE LUBIN–TATE NON ABÉLIENNE

5.1. On appelle *$\mathcal{O}$–module formel* sur une $\mathcal{O}$–algèbre R un groupe formel Σ de dimension 1, muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}$, de telle sorte que l'action dérivée sur $Lie(\Sigma)$ soit donnée par le morphisme structural $\mathcal{O} \to R$. Dans le cas où R est un corps extension du corps résiduel k de K, on peut définir la *hauteur* h de Σ de la façon suivante : une uniformisante ϖ de K ainsi qu'une coordonnée X sur le groupe formel étant choisies, q^h est alors l'ordre de la série formelle en X qui exprime l'action de ϖ (dans la suite cet ordre et donc la hauteur seront toujours finis). On ne confondra pas cette notion avec la hauteur de Σ vu simplement comme groupe formel (dans le cas où K est un corps p–adique, la hauteur du groupe est égale à $h.\deg[K : \mathbf{Q}_p]$).

C'est Drinfeld qui le premier a étudié ces objets. Ils constituent une généralisation facile de la théorie usuelle des groupes formels (théorie que l'on retrouve dans le cas particulier où $K = \mathbf{Q}_p$). Les résultats habituels se transposent sans mal : en particulier, il existe sur $\overline{k}$, clôture algébrique du corps résiduel de K, un module formel Σ_h de hauteur h unique à isomorphisme près. L'anneau des endomorphismes de Σ_h est isomorphe à l'ordre maximal du corps gauche $D_{K,h}$ de centre K de dimension h^2 et d'invariant $1/h$ dans le groupe de Brauer.

On s'intéresse à la théorie des *déformations* de Σ_h : c'est-à-dire au foncteur Def qui à une $\mathcal{O}$–algèbre artinienne R de corps résiduel $\overline{k}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de Σ_h sur R ($\mathcal{O}$–modules formels sur R munis d'un isomorphisme entre leur réductions modulo l'idéal maximal de R et Σ_h). Comme Lubin l'avait fait pour les groupes formels, on montre que Def est (pro-)représentable par une algèbre locale complète $R_{K,h}$, en fait isomorphe simplement à l'algèbre des séries formelles en $h-1$ indéterminées sur $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$, anneau des entiers du complété d'une extension non-ramifiée maximale K^{nr} de K. Sur le spectre formel de $R_{K,h}$, on a donc la déformation universelle $\tilde{\Sigma}_h$ de Σ_h.

5.2. Soit $m \geq 1$ un entier (le niveau). Au-dessus de la fibre générique de $\mathrm{Spf}(R_{K,h})$, le sous-groupe de ϖ^m–torsion $(\tilde{\Sigma}_h)_{\varpi^m}$ est étale localement isomorphe à $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$. Si x est un point de cette fibre générique, la donnée d'une *structure de niveau m* en ce point consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$\phi : (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h \to (\tilde{\Sigma}_h)_{\varpi^m}(x).$$

Drinfeld a étendu cette notion de structure de niveau au cas d'un point quelconque, où le groupe $(\tilde{\Sigma}_h)_{\varpi^m}$ n'est donc plus nécessairement étale : c'est la notion de *'base de Drinfeld'*, pour laquelle on renvoie à [Dr1] et [K-M].

Le foncteur qui à une $R_{K,h}$-algèbre artinienne R associe l'ensemble des bases de Drinfeld de niveau m sur $(\tilde{\Sigma}_h)|_{\mathrm{Spec} R}$ est pro-représentable par un anneau local complet $R_{K,h,m}$. D'autre part, pour $m_1 \geq m_2$, une base de Drinfeld de niveau m_1 se restreint en une base de niveau m_2 : cela est clair au moins au niveau des fibres génériques. Les schémas formels $\mathrm{Spf}(R_{K,h,m})$ constituent donc, m variant, un système projectif. En particulier, l'oubli de la structure de niveau définit une projection :

$$\mathrm{Spf}(R_{K,h,m}) \to \mathrm{Spf}(R_{K,h,0}) = \mathrm{Spf}(R_{K,h}).$$

Enfin on a une action du groupe $GL_h(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$ sur $\mathrm{Spf}(R_{K,h,m})$, compatible à la projection ci-dessus. Cette projection est ainsi un revêtement galoisien de groupe $GL_h(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$, étale en fibre générique, mais au contraire très ramifié au-desssus de la fibre spéciale.

5.3. Les objets locaux fondamentaux sont les espaces de *cycles évanescents* ℓ-adiques (avec $\ell \neq p$ un nombre premier fixé), notés $\Psi^i_{K,\ell,h,m}$, associés par la théorie de Berkovich (cf. [Be1] [Be2] [Be3]) aux schémas formels $\mathrm{Spf}(R_{K,h,m})$. La définition de Berkovich utilise la théorie des espaces analytiques p-adiques (la fibre générale d'un schéma formel appartient à cette catégorie). Lorsque K et ℓ seront fixés, nous les éliminerons de la notation pour alléger. Ces espaces constituent pour m variant un système inductif (à morphismes injectifs), dont nous noterons $\Psi^i_{K,\ell,h}$ ou plutôt Ψ^i_h la limite (réunion).

5.4. On dispose sur les $\Psi^i_{h,m}$, et donc sur leur limite, d'actions (qui commutent entre elles) des trois groupes suivants :

(i) Le groupe $GL_h(\mathcal{O})$ qui agit via son quotient $GL_h(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$ comme expliqué ci-dessus (action sur la structure de niveau).

(ii) Le groupe $\mathcal{O}^*_{D_h}$ des éléments inversibles de l'ordre maximal $\mathcal{O}_{D_h}$ du corps gauche $D_h = D_{K,h}$: en effet ce groupe est le groupe des automorphismes de Σ_h et en tant que tel il agit sur l'espace de la déformation universelle et sur $\tilde{\Sigma}_h$.

(iii) Enfin le groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{\mathrm{nr}})$.

On renvoie le lecteur à [Ca3] ou [H-T] pour une explication du fait suivant : le produit des trois actions considérées peut s'étendre en une action sur la limite Ψ^i_h du sous-groupe $A_h \subset GL_h(K) \times D^*_h \times W_K$ constitué des triples (g, d, w) qui vérifient la relation : $det(g)^{-1}N(d)\mathrm{Cl}(w) \in \mathcal{O}^*$, où N désigne la norme réduite et Cl $: W_K \to K^*$ l'application de réciprocité. En utilisant la théorie de Berkovich, on peut montrer que l'action de A_h est admissible.

5.5. Soit τ une représentation admissible irréductible de D_h^*. On note

$$\Psi_h^i(\tau) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{D_h}^*}(\tau, \Psi_h^i),$$

la composante isotypique pour la restriction de τ à $\mathcal{O}_{D_h}^*$. On obtient ainsi une représentation du produit $GL_h(K) \times W_K$: un couple (g, w) étant donné, on le complète en un triple $(g, d, w) \in A_h$ et on définit comme suit l'action de (g, w) sur $\phi \in \Psi_h^i(\tau)$:

$$(g, w).\phi(t) = (g, d, w).\phi(d^{-1}.t).$$

Si l'on préfère, on peut aussi considérer la représentation induite $\mathrm{Ind}_{A_h}^{GL_h(K)\times D_h^* \times W_K}(\Psi_h^i)$ et alors $\Psi_h^i(\tau)$ s'identifie à la composante τ-isotypique dans cette induite.

Soit τ choisie de telle sorte que $\pi = \mathrm{JL}(\tau)$ soit cuspidale (cf. (3.7) ci-dessus). La conjecture énoncée dans [Ca3] prédit que l'on doit avoir alors une équivalence :

$$\Psi_h^{h-1}(\tau) = \mathrm{JL}(\tau)^\vee \otimes \left(\sigma_h(\mathrm{JL}(\tau) \otimes |\ |^{\frac{1-h}{2}}\right).$$

D'autre part, toujours sous l'hypothèse que $\pi = \mathrm{JL}(\tau)$ est cuspidale, on s'attend à ce que les $\Psi_h^i(\tau)$ soient nuls pour $i \neq h-1$. Lorsque $h = 1$, vérifier tout cela constitue un exercice facile de traduction de la théorie de Lubin–Tate (en particulier, $R_{K,1}$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}$, $(\tilde{\Psi}_h)$ à un groupe de Lubin–Tate et enfin $R_{K,1,m}$ à l'anneau des entiers de l'extension abélienne de K^{nr} engendrée par les points de ϖ^m–torsion du Lubin–Tate). Lorsque $h = 2$ et que K est un corps p–adique, j'avais vérifié cette conjecture ([Ca2]) en généralisant certaines idées que Deligne avait développées dans le cas du corps $\mathbf{Q}_p$ et en utilisant ensuite le changement de base automorphe.

Harris et Taylor considèrent plutôt la représentation virtuelle dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longueur finie de $GL_h(K) \times W_K$:

$$\Psi_h^*(\tau) = (-1)^{h-1}\sum(-1)^i[\Psi_h^i(\tau)].$$

Une des étapes importantes de leur article consiste à démontrer le théorème suivant (pour K un corps p–adique) :

5.6. THÉORÈME 2.— *Soit τ comme ci-dessus, telle que $\pi = \mathrm{JL}(\tau)^\vee$ soit cuspidale. Alors il existe une 'vraie' représentation*

$$r_h(\pi) : W_K \to GL_h(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

telle que l'on ait l'égalité dans le groupe de Grothendieck :

$$\Psi_h^*(\tau) = [\pi \otimes r_h(\pi)].$$

On définira alors

$$\sigma_h(\pi^\vee) = r_h(\pi) \otimes |\ |^{\frac{h-1}{2}}$$

et il 'reste' alors à prouver que cela possède les propriétés que l'on attend de la correspondance de Langlands locale. Je crois qu'il est assez facile ensuite d'en déduire la conjecture telle que je l'avais énoncée (pour Ψ_h^{h-1} plutôt que pour Ψ_h^*).

5.7. Bien qu'ils n'interviennent pas directement dans l'article de Harris et Taylor, on a aussi étudié une autre sorte d'objets locaux : les espaces habituellement notés Ω_K^h sont des espaces analytiques rigides sur le corps local K qui constituent pour $h = 2$ un analogue p–adique du demi-plan de Poincaré (et une généralisation en dimension supérieure si $h > 2$). L'ensemble des points sur $\hat{\overline{K}}$ de Ω_K^h est le complémentaire dans l'espace projectif $\mathbf{P}^{h-1}(\hat{\overline{K}})$ de la réunion des hyperplans K–rationnels. On voit (au moins ensemblistement) que Ω_K^h est muni d'une action du groupe $GL_n(K)$.

Drinfeld ([Dr2]) a interprété Ω_K^h comme classifiant d'une certaine famille de groupes formels et en a déduit la construction d'un système projectif de revêtements rigides analytiques $GL_n(K)$–équivariants :

$$\mathrm{Rev}_K^{h,m} \to \Omega_K^h \otimes_F \hat{F}^{\mathrm{nr}}$$

galoisiens de groupes $[\mathcal{O}_{D_h}/\varpi^m\mathcal{O}_{D_h}^*]^*$. La situation est en quelque sorte inversée par rapport à nos revêtements précédents $\mathrm{Spf}(R_{K,h,m}) \to \mathrm{Spf}(R_{K,h})$ où c'était $\mathcal{O}_{D_h}^*$ qui opérait sur la base, et $GL_h(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$ le groupe de Galois.

On peut considérer la cohomologie ℓ–adique à support propre (définie par Berkovich) de ces revêtements :

$$\Psi'^i_{h,m} = H_c^i(\mathrm{Rev}_K^{h,m}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

ainsi que leur limite Ψ'^i_h. On vérifie que c'est un espace où opère le sous-groupe $A'_h \subset GL_h(K) \times D_h^* \times W_K$ constitué des triples (g, d, w) qui vérifient la relation :

$det(g)N(d)\mathrm{Cl}(w)^{-1} \in \mathcal{O}^*$. On considère alors l'induite de A'_h à $GL_h(K) \times D_h^* \times W_K$ de Ψ'^i_h, puis, pour π une représentation cuspidale de $GL_h(K)$, la composante π–isotypique dans cette induite que nous noterons $\Psi'^i_h(\pi)$. J'avais conjecturé dans le même article ([Ca3]) que l'on devait avoir

$$\Psi'^{h-1}_h(\pi) = \mathrm{JL}(\pi) \otimes (\sigma_h(\pi^\vee) \otimes |\ |^{\frac{1-h}{2}}) \ .$$

Dans [Ha1], Harris avait prouvé partiellement (une variante de) cette conjecture. C'est-à-dire qu'il ne déterminait pas complètement dans tous les cas la représentation galoisienne associée à π. Combiné maintenant avec le présent travail, cela permet de traiter tous les cas et de prouver cette conjecture complètement.

5.8. Pour résumer les choses : l'une et l'autre des deux représentations locales ainsi définies Ψ^{h-1}_h et Ψ'^{h-1}_h doivent constituer une construction géométrique simultannée des correspondances de Langlands et de Jacquet–Langlands locales pour les cuspidales. Noter toutefois la légère différence entre la formule donnant $\Psi^{h-1}_h(\pi)$ et celle exprimant $\Psi'^{h-1}_h(\pi)$. Ce qu'il advient des autres représentations (en particulier des séries discrètes non cuspidales) n'est pas encore clair. Voir toutefois [S-S] pour un calcul complet de la cohomologie de Ω^h_K.

Pour $h = 1$, tout cela n'est que la théorie de Lubin–Tate. À partir de $h = 2$, la plupart des résultats s'obtiennent par des méthodes globales ; voir toutefois Faltings [Fa] pour une étude purement locale de la représentation virtuelle Ψ'^*_h somme alternée des Ψ'^i_h (mais sans l'action galoisienne).

Dans le cas des corps locaux d'égale caractéristique p, Boyer [Boy] vient de démontrer dans sa thèse la conjecture pour la représentation Ψ^{h-1}_h. On peut espérer faire de même pour la représentation Ψ'^{h-1}_h (travail en cours d'un de mes étudiants).

La relation entre les représentations Ψ^i_h et Ψ'^i_h constitue un autre mystère. Tant les espaces définis en 3.2 que les espaces de Drinfeld sont d'ailleurs des cas particuliers d'objets locaux construits par Rapoport et Zink et destinés à décrire localement les variétés de Shimura (voir [R-Z] et [Bo]).

6. VARIÉTÉS DE SHIMURA

6.1. On fixe un corps de nombres F de degré $2d$, composé d'un corps totalement réel F^+ de degré d et d'un corps quadratique imaginaire E. Le lien avec le corps local K précédemment considéré est le suivant : K s'identifie au complété de F^+ en une place (au-dessus de p) notée $v = v_1$. On désigne par $v_2, \cdots v_r$ les autres places de F^+ divisant p. D'autre part on suppose que p se décompose dans E en deux places $\mathfrak{p}$ et $\overline{\mathfrak{p}}$. Les places de F divisant p sont notées $w = w_1, w_2, \cdots w_r$ (au-dessus de $\mathfrak{p}$ et de $v_1, v_2, \cdots v_r$) et $\overline{w} = \overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots \overline{w}_r$ (leurs conjuguées complexes), de sorte que K s'identifie aussi au complété de F en w ou en $\overline{w}$.

B désigne une algèbre à division de centre F et de dimension n^2 sur F munie d'une involution de seconde espèce positive $*$. On fait aussi quelques hypothèses techniques (susceptibles d'évoluer dans les versions successives de l'article [H-T]) : le fait qu'en chaque place B soit déployée ou soit un corps gauche ; cela est rendu nécessaire par l'état actuel de la théorie de la correspondance de Jacquet–Langlands globale. Conjuguant l'involution $*$ par un élément $*$–antisymétrique $\beta \in B$, on obtient une autre involution $\sharp$.

Intéressons-nous au groupe associé à l'involution $\sharp$: c'est un groupe réductif G sur $\mathbf{Q}$ dont l'ensemble des points à valeurs dans une $\mathbf{Q}$–algèbre R est donné par :

$$G(R) = \{g \in B^{op} \otimes R \ ; \ bb^\sharp \in R^*\}.$$

C'est une forme du groupe des similitudes unitaires de degré n associé au corps F. On fixe β de telle sorte *qu'à l'infini ce groupe soit de type* $(n-1, 1)$ *en une place* τ_1 *de* F^+ *et* $(n, 0)$ *aux autres.* L'autre hypothèse fondamentale est que B *est déployée en* w. On fixe un isomorphisme : $B \otimes F_w \simeq M_n(F_w)$.

On considère alors les variétés de Shimura associées au groupe G. Elles dépendent pour leur définition du choix d'une classe de conjugaison d'homomorphismes $h : \mathbf{C}^* \to G(\mathbf{R})$ (voir Deligne [Del] pour le formalisme) et d'un sous–groupe compact ouvert $U \subset G(\mathbf{A}^\infty)$. Ce sont des variétés algébriques projectives S_U définies sur le corps F, dont l'ensemble des points complexes ($\mathbf{C}$ étant vu comme une $\mathbf{Q}$–algèbre par le plongement τ_1 combiné avec un plongement complexe de E) est donné par :

$$S_U(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q}) \setminus [\mathcal{X} \times G(\mathbf{A}^\infty)/U],$$

avec $\mathcal{X}$ l'espace symétrique associé à $G(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire la boule unité de $\mathbf{C}^{n-1}$). Plus concrètement, c'est une réunion de quotients $\Gamma \setminus \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ par des groupes de congruence Γ de $G(\mathbf{R})$.

Sous les hypothèses qui précèdent (essentiellement le type archimédien de G et son déploiement en w), on peut décrire la réduction de la variété S_U à la place w, par une théorie qui généralise en quelque sorte la théorie des courbes modulaires. L'objet de ce paragraphe est d'expliquer comment.

Pour alléger, nous noterons désormais simplement S_U la variété $S_U \otimes F_w$ sur $F_w \simeq K$.

6.2. On sait d'après Shimura et Deligne que S_U représente un foncteur défini en termes de variétés abéliennes : il s'agit de classifier des variétés abéliennes A à isogénie près de dimension dn^2, munies d'une action de B et d'une polarisation, telles que l'involution de Rosati associée induise l'involution $*$ sur B ; une certaine condition décrivant l'algèbre de Lie de A doit être satisfaite et on ajoute en plus une structure de niveau que nous détaillerons ci-dessous. À vrai dire, on obtient ainsi un problème de modules représentable par S_U seulement dans le cas où n est pair, tandis que dans le cas où n est impair on obtient une somme X_U de copies de S_U. Je décrirai ci-dessous X_U sans trop me soucier de ces questions liées à des obstructions au principe de Hasse (pour des tores).

Le point central qui permet de décrire la réduction (éventuellement mauvaise) des variétés étudiées tient en la forme particulière que prend dans ce cas la condition sur $Lie(A)$, pour une variété abélienne sur une F_w-algèbre R. On utilise la décomposition :

$$F \otimes \mathbf{Q}_p = F_{w_1} \oplus F_{w_2} \oplus \cdots \oplus F_{w_r} \oplus F_{\overline{w}_1} \oplus F_{\overline{w}_2} \oplus \cdots \oplus F_{\overline{w}_r},$$

ce qui induit une décomposition semblable sur tout $F \otimes \mathbf{Q}_p$-module L et le décompose en sous-modules que nous noterons L_{w_i} et $L_{\overline{w}_i}$. En particulier, tout $B \otimes \mathbf{Q}_p$ module L se décompose en la somme de B_{w_i}-modules L_{w_i} et de $B_{\overline{w}_i}$-modules $L_{\overline{w}_i}$. On peut aller plus loin dans la décomposition du $M_n(F_w)$-module L_{w_1}, qui définit un F_w-module eL_{w_1} par l'action de l'idempotent

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ . & . & . & . \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} ;$$

réciproquement, on récupère L_{w_1} comme $M_n(eL_{w_1})$.

On peut appliquer cela à l'algèbre $Lie(A)$ pour A une variété abélienne sur une F_w-algèbre R, munie d'une action de B. Cette algèbre de Lie est un R-module projectif muni d'une action de $B \otimes \mathbf{Q}_p$, et donc par restriction de $F \otimes \mathbf{Q}_p$. La condition mentionnée ci-dessus est alors que :

(i) pour $i \geq 2$: $Lie(A)_{w_i}$ est nul.

(ii) $eLie(A)_w$ est un R–module (projectif) de rang 1, l'action de F_w qui provient de la décomposition coïncidant avec celle qui provient de l'inclusion $F_w \hookrightarrow R$.

6.3. Supposons le sous-groupe U décomposé en un produit $U^p \times U_p$, avec $U^p \subset G(\mathbf{A}^{p,\infty})$ (adèles finies sans la composante en p) et

$$U_p \subset G(\mathbf{Q}_p) \simeq \mathbf{Q}_p^* \times GL_n(F_{w_1}) \times B_{w_2}^* \times \cdots \times B_{w_r}^* \ ,$$

que l'on supposera également décomposé en le produit du sous-groupe $\mathbf{Z}_p^*$ de $\mathbf{Q}_p^*$ et de sous-groupes $U_{w_1} \subset GL_n(F_{w_1})$ et $U_{w_i} \subset B_{w_i}^*$.

D'autre part, V désigne l'espace vectoriel B, muni de la forme alternée $(b_1, b_2) = \mathrm{tr}_{B/\mathbf{Q}}(b_1 \beta b_2^*)$. Pour A une variété abélienne (en caractéristique 0) polarisée et munie d'une action compatible de B, une *structure de niveau* U est la donnée, localement pour la topologie étale, d'une classe modulo U d'isomorphismes symplectiques B–linéaires $\prod V_l(A) \simeq V \otimes \mathbf{A}^\infty$, avec V_l le module de Tate tensorisé par $\mathbf{Q}$.

Fixons quelques structures entières : soit $\mathcal{O}_{F(p)}$ l'ensemble des éléments de F qui sont entiers en p ; on choisit un $\mathcal{O}_{F(p)}$–ordre $\mathcal{O}_B \subset B$ stable par l'involution $*$, tel que sa complétion en p soit maximale et tel que $\mathcal{O}_{B,w_1} = M_n(\mathcal{O}_{F,w_1})$. On choisit aussi un réseau $\Lambda \subset V$ stable par $\mathcal{O}_B$, tel que $\Lambda_{w_i} = \mathcal{O}_{Bw_i}$ et tel que la forme (,) induise une autodualité parfaite (à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$) sur $\Lambda \otimes \mathbf{Z}_p$. On suppose enfin que les U_{w_i} sont inclus dans les $\mathcal{O}_{B,w_i}^*$.

Plaçons-nous dans un premier temps sous l'hypothèse que $U_{w_1} = U_w$ *coïncide avec le sous-groupe compact maximal* $GL_n(\mathcal{O}_{F,w}) \subset GL_n(F_w)$. On montre alors que X_U a *bonne réduction.* Plus précisément, le foncteur $\mathcal{F}$ qui suit, défini sur les $\mathcal{O}_{F,w} \simeq \mathcal{O}$–algèbres, est représentable par un $\mathcal{O}$–schéma projectif lisse de fibre générique X_U. Pour alléger, nous continuerons à noter X_U le $\mathcal{O}$–schéma ainsi obtenu.

$\mathcal{F}(R)$ est l'ensemble des classes de $(r+3)$–uples $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}^p, \bar{\phi}_2, \cdots \bar{\phi}_r)$ avec :

- *A un schéma abélien sur R de dimension relative dn^2.*
- *λ une polarisation de A.*
- *$\iota : \mathcal{O}_B \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$ une action.*
- *On impose que : $\lambda \circ \iota(b) = \iota(b^*)^\vee \circ \lambda$ et les conditions sur $Lie(A)$ analogues à* (i) *et* (ii) *ci-dessus. Noter en effet que l'on a une décomposition de $\mathcal{O}_{F(p)} \otimes \mathbf{Z}_p$ analogue à la décomposition précédente de $F \otimes \mathbf{Q}_p$, de sorte que la décomposition ci-dessus de $Lie(A)$ vaut aussi sur les entiers.*

• $\bar{\eta}^p$ *est la donnée, localement pour la topologie étale, d'une classe modulo* U^p *de similitudes symplectiques* $\mathcal{O}_B$*-linéaires :*

$$\eta^p : \prod_{l \neq p} V_l(A) \simeq V \otimes \mathbf{A}^{p,\infty}.$$

• $\bar{\phi}_j$ *(pour* $2 \leq j \leq r$*) la donnée, localement pour la topologie étale, d'une classe modulo* U_{w_i} *d'isomorphismes (avec des notations que nous clarifierons ci-dessous) :*

$$\phi_j : T_p(A)_{w_i} \simeq \Lambda_{w_i}.$$

On identifie deux tels $r+3$*-uples* $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}^p, \bar{\phi}_2, \cdots \bar{\phi}_r)$ *et* $(A', \lambda', \iota', \bar{(\eta^p)}', \bar{\phi}'_2, \cdots \bar{\phi}'_r)$ *s'il existe une isogénie d'ordre premier à p qui échange toutes les structures (seulement à un élément de* $\mathbf{Z}^*_{(p)}$ *près en ce qui concerne la polarisation).*

6.4. Le point crucial de toute la théorie de la réduction de notre variété à la place w est le suivant : on a pour le groupe p–divisible A_{p^∞} associé à A une décomposition :

$$A_{p^\infty} = A_{w_1^\infty} \oplus A_{w_2^\infty} \oplus \cdots \oplus A_{w_r^\infty} \oplus A_{\overline{w}_1^\infty} \oplus A_{\overline{w}_2^\infty} \oplus \cdots \oplus A_{\overline{w}_r^\infty}$$

où l'on a noté $A_{w_i^\infty}$ et $A_{\overline{w}_i^\infty}$ les composants de la décomposition (comme ci–dessus) du groupe sous l'action de $\mathcal{O}_{F(p)} \otimes \mathbf{Z}_p \subset \mathcal{O}_B \otimes \mathbf{Z}_p$. Les conditions imposées sur l'algèbre de Lie forcent les groupes $A_{w_2^\infty} \cdots A_{w_r^\infty}$ à être ind-étales (ce qui fait que les structures de niveau sont les 'mêmes' qu'en caractéristique 0 : on peut en particulier définir (pour $i \geq 2$) les modules de Tate partiels $T_p(A)_{w_i}$ déjà utilisés ci-dessus). D'autre part, la partie $eA_{w_1^\infty}$ de $A_{w_1^\infty}$ doit être un groupe p–divisible $\mathcal{G}_A$ muni d'une action de $\mathcal{O}_{F,w} = \mathcal{O}$, dont la partie formelle $\mathcal{G}_A^0$ (on se place ici dans le cas où R est un anneau local artinien de caractéristique résiduelle p) doit être de dimension 1, l'action dérivée se factorisant à travers le morphisme structural. C'est ce genre d'objets que Drinfeld nomme '$\mathcal{O}$–modules divisibles' ; la partie formelle est alors un $\mathcal{O}$–module formel au sens du paragraphe 5. Enfin, pour R un corps de caractéristique p, la hauteur totale de $\mathcal{G}_A$ est égale à n : cette hauteur se répartit entre la partie formelle, de hauteur $n-h$, et le quotient étale $\mathcal{G}_A^{\mathrm{et}}$ de hauteur h (c'est-à-dire localement isomorphe à $(K/\mathcal{O})^h$) ; ici h est un entier compris entre 0 et $n-1$.

La remarque essentielle est qu'il 'revient au même' de déformer $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}^p, \bar{\phi}_2, \cdots \bar{\phi}_r)$ ou de déformer $\mathcal{G}$ (avec sa structure de $\mathcal{O}$–module) : en effet, d'après le théorème de Serre et Tate, déformer A revient à déformer son groupe p–divisible (muni des différentes structures déduites de celles de A). Mais les $A_{w_j^\infty}$ pour $j \geq 2$

étant étales, leurs déformations sont triviales. Une fois $\mathcal{G}$ déformé, on obtient une déformation de $A_{w_1^\infty} = M_n(\mathcal{G})$ et donc une de $\oplus_{j=1}^r A_{w_j^\infty}$. D'autre part, les conditions imposées font que la polarisation met les deux groupes p–divisibles $\oplus_{j=1}^r A_{w_j^\infty}$ et $\oplus_{j=1}^r A_{\overline{w}_j^\infty}$ en dualité de Cartier. Si l'on a déformé la première moitié, on récupère donc automatiquement une déformation de la seconde.

Le '$\mathcal{O}$–module divisible' $\mathcal{G}_A$ gouverne donc la théorie des déformations de A. C'est cela qui permet d'étudier localement le problème de modules ci-dessus. C'est aussi ce qui permet de comparer la structure locale de X_U au voisinage d'un point aux espaces locaux considérés au paragraphe précédent. Ces idées jouaient déjà un rôle crucial dans mon étude [Ca1] des courbes de Shimura, et elles sont ici généralisées à des variétés de dimension supérieure.

Ceci étant, on peut alors introduire des structures de niveau en w : supposons que $U_{w_1} = U_w$ est maintenant le sous–groupe de congruence de niveau m de $GL_n(O_{F,w})$, constitué des matrices congrues à 1 modulo ϖ^m. Dans ce cas, on considère le problème de modules obtenu en rajoutant au précédent la structure supplémentaire suivante :

- $\phi_1 : (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n \to (\mathcal{G}_A)_{\varpi^m}(R)$, *une base de Drinfeld de niveau* m *(c'est-à-dire dont l'image en tant que sous-schéma coïncide avec* $(\mathcal{G}_A)_{\varpi^m}|_R)$.

Ce problème de modules est alors représentable par un $\mathcal{O}$–schéma $X_U = X_{U^w,m}$ projectif (mais non plus lisse) (où l'on note U^w le produit de U^p et des U_{w_j} pour $j \geq 2$).

6.5. La fibre spéciale $\overline{X}_{U^w,m}$ de $X_U = X_{U^w,m}$ admet une filtration par des sous-variétés fermées $\overline{X}^{[h]}_{U^w,m}$: le lieu où la hauteur de la partie étale est $\leq h$. On note $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m} = \overline{X}^{[h]}_{U^w,m} - \overline{X}^{[h-1]}_{U^w,m}$. Ce sont des sous-ensembles localement fermés de dimension h, lisses si $m = 0$. En particulier, les *'points supersinguliers'* sont ceux pour lesquels $\mathcal{G}_A$ est purement infinitésimal et ils constituent un ensemble fini $\overline{X}^{[0]}_{U^w,m}$. D'après ce qui a été dit plus haut, le complété de l'anneau local de $X_{U^w,m}$ en un tel point géométrique de la fibre spéciale est isomorphe à l'anneau $R_{K,n,m}$ de 5.2. Les cycles évanescents formels (mais on sait d'après Berkovich qu'ils coïncident avec les cycles évanescents usuels de la géométrie algébrique) sont donc exprimables en termes des espaces $\Psi^i_{K,n,m}$ de 5.3.

7. LE PRINCIPE DE LA MÉTHODE D'HARRIS ET TAYLOR

7.1. Soit Π une représentation automorphe du groupe $G(\mathbf{A})$. Lorsque la composante archimédienne Π_∞ de Π est une certaine représentation de la série discrète, Π 'apparaît' dans la cohomologie $H^{n-1}(X_{U^w,m} \times \overline{F}, \mathcal{L}_\xi)$, où $\mathcal{L}_\xi$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$–faisceau lisse associé à une représentation algébrique du groupe G. La composante $G(\mathbf{A}^\infty)$–isotypique correspondant à Π^∞ dans

$$\varinjlim_{U^w,m} H^{n-1}(X_{U^w,m} \times \overline{F} \ , \ \mathcal{L}_\xi)$$

est alors une représentation ℓ–adique du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. C'est à peu près ainsi que l'on définit les représentations $\rho_{\lambda,\Pi}$ dont il a été question plus haut (cf. 3.3), à deux détails près : d'une part, dans la notation de 3.3, Π désignait la représentation automorphe de $GL_n(\mathbf{A}_F)$ correspondant par changement de base à notre présente Π ; d'autre part, ainsi qu'on l'a déja remarqué, on récupère ainsi (après semi-simplification) un multiple de $\rho_{\lambda,\Pi}$ par un entier a dont on ne sait pas montrer qu'il est égal à 1.

Aux bonnes places v, on montre que $(\rho_{\lambda,\Pi})_v$ et Π_v se correspondent par la correspondance 'de Hecke' locale (2.2). Cela provient d'une comparaison entre des formules des traces de Lefschetz et de Selberg, en utilisant les résultats de Kottwitz, lesquels contiennent une description de l'ensemble des points de la fibre spéciale (la variété considérée a alors bonne réduction).

Pour aller plus loin, c'est-à-dire obtenir un résultat analogue aux mauvaises places, il est naturel de faire usage de la suite spectrale des cycles évanescents pour $X_{U^w,m}/\mathcal{O}$:

$$H^i(\overline{X} \otimes_k \overline{k} \ , \ R\Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi) \Longrightarrow H^{i+j}(X \times \overline{F}_w \ , \ \mathcal{L}_\xi),$$

où $\overline{X}$ désigne la fibre spéciale de $X = X_{U^w,m}$ et $R\Phi^j$ les faisceaux de cycles évanescents ; en fait $R\Phi^j$ est concentré sur la strate fermée $\overline{X}^{[n-1-j]}$. Il est facile de voir (supposant bien sûr que $\ell \neq p$) que les faisceaux $\mathcal{L}_\xi$ sont lisses sur le $\mathcal{O}$–schéma X tout entier, de sorte que le calcul des cycles évanescents se ramène au cas du faisceau constant, ce qui justifie les notations que nous avons employées.

7.2. On a déja observé plus haut le lien aux points supersinguliers entre les groupes de cycles évanescents Φ^j et les espaces $\Psi^j_{K,n,m}$ définis à partir des objets locaux du paragraphe 5. L'idée originelle de Deligne ([De3]) concernait les points supersinguliers des courbes modulaires. Il calculait le groupe de sections (sur la strate supersingulière) $H^0(\overline{X}, R\Phi^1)$ en termes de la représentation locale Ψ^1_2 de 5.3 et obtenait de la sorte un avatar du théorème 2 ci-dessus (dans le cas $h = 2$). Mais il ne savait montrer que la représentation galoisienne obtenue $r_h(\pi)$ était bien donnée par la correpondance 'de Hecke' que pour π induite automorphe d'un caractère multiplicatif d'une extension quadratique (on disait alors 'ordinaire'). L'argument de Deligne avait été complété par un lemme de Brylinski [Br] – qui remplaçait pour les courbes les résultats de Berkovich dont on a besoin en dimension supérieure. Je l'avais généralisé aux courbes de Shimura, ce qui donnait l'analogue du th. 2 pour $h = 2$ et K un corps p–adique quelconque, puis, par des arguments de changement de base, le fait que $\pi \to r_2(\pi)$ était bien la correspondance voulue.

Je crois que la méthode de Deligne peut s'appliquer telle quelle aux variétés que nous considérons ici. J'avais suggéré cette possibilité dans [Ca3]. Personne ne l'a écrite pour les corps p–adiques dans le cas $n > 2$; comme on le verra, Harris et Taylor obtiennent un résultat plus général par une méthode qui consiste à considérer toutes les strates à la fois et qui repose sur un calcul de traces (alors que Deligne avait un argument direct). En égale caractéristique p, Boyer [Boy] a développé l'idée (pour n quelconque) d'une façon assez proche de sa forme initiale. Son application ici donnerait un analogue du théorème 2 : on obtiendrait de la sorte une application qui à $\pi \in \mathcal{A}_n^0$ associe une représentation galoisienne de dimension n : $r_n(\pi)$ satisfaisant au th. 2 et 'calculant' localement la correspondance globale en le sens suivant : si à une représentation automorphe Π, de composante locale Π_w *cuspidale*, correspond la représentation ℓ–adique Σ , alors la restriction Σ_w de Σ au groupe de galois local est donnée par : $\Sigma_w = r_n(\Pi_w)$ Cette relation entre le local et le global force alors, ainsi qu'on le voit sans peine, la correspondance ainsi obtenue (après torsion idoine et passage à la contragrédiente) $\pi \to \sigma_n(\pi)$ à être compatible avec toutes les opérations et fonctorialités locales qui admettent une extension globale (changement de base et induction automorphe, torsion par un caractère et passage aux contragrédientes). De cela il résulte alors par des arguments dus à Henniart que c'est une bijection, puis d'après Harris ([Ha2]) que, lorsque $n < p$, c'est bien la correspondance voulue.

À vrai dire Harris étudiait dans ce dernier article la même correspondance (du moins rétrospectivement !), mais définie autrement : à partir des espaces de Drinfeld dont nous avons un peu parlé ci-dessus (3.7), autrement dit avec la représentation locale ${\Psi'}_n^{n-1}$ remplaçant Ψ_n^{n-1}. La méthode d'étude est formellement analogue à celle de Deligne, à ceci près que l'objet global que l'on considère dans ce cas est une variété de Shimura analogue à celles considérées ci-dessus, mais provenant d'une algèbre B dont la complétée en $w = w_1$ est maintenant *un corps gauche d'invariant* $1/n$. La relation entre le local et le global transite alors par un *théorème d'uniformisation*

p–*adique* (Rapoport, Rapoport–Zink, Varshavsky). Ce résultat (qui généralise celui de Čerednik pour les courbes) affirme que les variétés de Shimura considérées sont analytiquement isomorphes (en tant qu'espaces rigides p–adiques) à des réunions de quotients des espaces $\mathrm{Rev}_K^{n,m}$ de 3.7 par des sous-groupes discrets de $GL_n(K)$.

Par l'une ou l'autre de ces méthodes, le résultat obtenu n'est toutefois pas assez fort pour entraîner le théorème 1 dans des cas trop sauvages : on ne sait pas montrer que la correspondance obtenue préserve les facteurs ϵ de paires. C'est alors que Harris a eu l'idée (en écrivant [Ha2]) qu'on obtiendrait les propriétés voulues si l'on établissait des résultats semblables, mais en ne se limitant ni aux représentations cuspidales ni à la strate supersingulière. Cela demandait de revenir aux variétés du type de celles que nous regardons ici, parce que celles dont on vient de dire quelques mots admettent en w une fibre spéciale qui ne possède que la strate supersingulière, et sont associées à un groupe dont la composante en w est anisotrope modulo le centre (ses représentations correspondent donc seulement au spectre discret de $GL_n(F_w)$).

7.3. Pour expliquer l'idée, supposons démontré le théorème 2 de 3.6. On associe donc à chaque $\pi \in \mathcal{A}_n^0(K)$ une représentation galoisienne ℓ–adique de dimension n notée $\sigma_n(\pi)$; comme on l'a déjà dit ci-dessus, c'est une *bijection* de $\mathcal{A}_n^0(K)$ sur $\mathcal{G}_n^0(K)$ dont il faut voir qu'elle préserve les facteurs locaux de paires.

Étendons σ_n à des représentations non cuspidales de la façon suivante (ainsi que le suggère ce qui a été dit en 2.4) : soit $\pi \in \mathcal{A}_n(K)$ que l'on suppose être une induite irréductible de cuspidales : $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_t$, associée à une partition $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ (on laisse donc de côté les représentations obtenues comme des sous-quotients plus compliqués). Associons alors à une telle π la représentation suivante du groupe de Weil :

$$\tilde{\sigma}_n(\pi) = \sigma_{n_1}(\pi_1) \oplus \sigma_{n_2}(\pi_2) \oplus \cdots \oplus \sigma_{n_t}(\pi_t),$$

ainsi que $\tilde{r}_n(\pi) = \tilde{\sigma}_n(\pi^\vee) \otimes |\ |^{\frac{1-n}{2}}$.

PROPOSITION ([Ha2]).— *Considérons une représentation automorphe* Π *comme en* 7.1, *telle que sa composante locale* Π_w *soit une induite irréductible de cuspidales :* $\Pi_w = \pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_t$ *comme ci-dessus.*

Supposons que l'on sache prouver que, pour chaque Π *ainsi considérée, la semi-simplifiée de la restriction de* ρ_Π *au groupe de Weil local en* w *est isomorphe à* $\tilde{r}_n(\pi)$. *Alors les bijections* σ_n *préservent les facteurs* ϵ *de paires.*

Donnons quelques indications sur la preuve de ce résultat. Puisque les σ_n sont bijectives, on peut poser pour $\rho \in \mathcal{G}_n^0(K)$ et $\rho' \in \mathcal{G}_{n'}^0(K)$:

$$\epsilon_A(\rho \times \rho', s, \psi) = \epsilon(\sigma_n^{-1}(\rho) \times \sigma_{n'}^{-1}(\rho'), s, \psi).$$

Il s'agit de prouver l'identité :

$$\epsilon_A(\rho \times \rho', s, \psi) = \epsilon(\rho \otimes \rho', s, \psi).$$

Or on peut évidemment étendre (de façon unique) ϵ_A aux couples (ρ, ρ') de représentations semi-simples mais non nécessairement irréductibles de telle sorte que le résultat soit bi-additif en le couple (transforme somme directe sur l'un ou l'autre des facteurs en produit), une propriété déjà satisfaite par ϵ. Si l'on veut, on peut même étendre ϵ et ϵ_A aux représentations virtuelles.

En vertu du théorème d'induction de Brauer, il suffit alors d'établir l'égalité entre ϵ et ϵ_A pour deux représentations induites de caractères $\rho = \mathrm{Ind}_L^K(\chi)$ et $\rho' = \mathrm{Ind}_{L'}^K(\chi')$. Pour ce faire, on globalise la situation en considérant deux extensions $\tilde{L}/F$ et $\tilde{L}'/F$ (changeant éventuellement le corps global F !) se localisant à une place au-desssus de w en nos extensions locales, deux caractères $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\chi}'$ des groupes des classes d'idèles admettant χ et χ' comme composantes en w, et tels que les conditions nécessaires soient remplies (voir 3.5) pour que les induites automorphes $\mathrm{IA}_{\tilde{L}}^F(\tilde{\chi})$ et $\mathrm{IA}_{\tilde{L}'}^F(\tilde{\chi}')$ existent et se descendent en des représentations automorphes Π et Π' sur $G(\mathbf{A})$, auxquelles sont associées des représentations ℓ-adiques $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$. On peut voir que dans ce cas les composantes locales Π_w (resp. Π'_w) sont des induites de cuspidales. Les représentations galoisiennes $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$ coïncident à torsion et passage aux contragrédientes près aux induites galoisiennes $\mathrm{Ind}_{\tilde{L}}^F(\tilde{\chi})$ et $\mathrm{Ind}_{\tilde{L}'}^F(\tilde{\chi}')$ et donc leurs facteurs locaux (de paires) coïncident ainsi (après torsion et passage aux contragrédientes) presque partout avec ceux de Π et Π' ; en vertu d'un argument déjà expliqué en 4.4, ces facteurs coïncident donc *partout*, et en particulier en w.

D'autre part, notre hypothèse appliquée à Π (resp. Π') nous dit que $\rho_w = \tilde{r}_n(\Pi_w)$ et que ${\rho'}_w = \tilde{r}_{n'}({\Pi'}_w)$. L'égalité des facteurs ϵ galoisiens et automorphes à la place w signifie donc que l'on a l'égalité voulue entre ϵ_A et ϵ pour un tel couple (ρ, ρ') de représentations induites.

Le théorème 1 résultera alors du th. 2 et du th. 3 ci–dessous. Pour $\mathcal{L}_\xi$ un faisceau ℓ–adique fixé comme en 4.3 sur nos variétés de Shimura, la limite inductive des groupes de cohomologie $H^i(X_{U^w,m} \times \overline{F}\ ,\ \mathcal{L}_\xi)$ est munie d'une action admissible du groupe $G(\mathbf{A}^\infty)$. Une représentation (irréductible admissible) Π^∞ de $G(\mathbf{A}^\infty)$ étant donnée, on désigne par $R^i(\Pi^\infty)$ la composante isotypique correspondante et par $[R(\Pi^\infty)]$ la représentation virtuelle $(-1)^{n-1}\sum_i(-1)^i[R^i(\Pi^\infty)]$. En fait, cet usage des représentations virtuelles est commode parce que l'on veut appliquer des formules de traces. Toutefois, lorsque le plus haut poids de la représentation ξ est suffisamment régulier, on sait que la cohomologie est concentrée en degré $n-1$, et dans ce cas $[R(\Pi^\infty)]$ est simplement la classe de $R^{n-1}(\Pi^\infty)$; cette dernière représentation est non nulle si et seulement si Π^∞ est la composante finie d'une représentation automorphe d'un certain type archimédien (dépendant de ξ), et c'est alors un multiple par l'entier a (7.1) de la représentation ρ_Π associée.

Le théorème qui suit assure que les hypothèses de la proposition ci-dessus sont bien satisfaites. Il en résultera finalement qu'on a bien attrapé la correspondance de Langlands locale.

THÉORÈME 3.— *Soit Π^∞ une représentation admissible irréductible dont la composante locale en w est une induite de cuspidales $\Pi_w = \pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_t$ comme ci-dessus. Alors la représentation (virtuelle) $[R(\Pi^\infty)]$, restreinte au groupe de Weil local en w (ce qu'on note par un indice w), est donnée par la formule :*

$$n[R(\Pi^\infty)_w] = \dim([R(\Pi^\infty)])[\tilde{r}_n(\Pi_w)].$$

Ce dernier résultat proviendra lui-même du suivant. On ne suppose plus que la composante locale soit nécessairement une pure induite de cuspidales (i.e. on l'autorise à être un sous-quotient d'une induite réductible).

THÉORÈME 4.— *On a, dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles du produit $GL_n(F_w) \times W_{F_w}$, la formule :*

$$n[\Pi_w \otimes R(\Pi^\infty)_w] = \dim([R(\Pi^\infty)]) \sum_{h=0}^{n-1} \mathrm{Ind}_{P_h}^{GL_n(F_w)}$$
$$\left\{\sum_{\tau,\beta} m^{(h)}(\Pi_w;\tau,\beta)[(\Psi^*_{n-h}(\tau) \otimes |\ |^{-\frac{h}{2}}) \times \beta]\right\},$$

où l'on a utilisé les notations suivantes :

P_h désigne le sous-groupe parabolique de $GL_n(F_w)$ constitué des matrices triangulaires inférieures par blocs, avec deux blocs diagonaux de taille respective (en descendant vers la droite) $(n-h)\times(n-h)$ et $h\times h$ (cas particulier : $P_0 = GL_n(F_w)$) ; on note Ind *l'induction unitaire (d'une représentation du sous-groupe de Levi $GL_{n-h}(F_w) \times GL_h(F_w)$, étendue à P_h de façon usuelle).*

β décrit l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_h(F_w)$ et τ celles du groupe multiplicatif du corps gauche D^*_{n-h} de centre F_w et d'invariant $1/(n-h)$. On a noté Ψ^*_{n-h} la représentation locale définie en 5.3 *(relative au corps local $K = F_w$) et $\Psi^*_{n-h}(\tau)$ la composante τ-isotypique* (5.5) *(c'est une représentation virtuelle du produit $GL_{n-h}(F_w) \times W_{F_w}$) ; la torsion $|\ |^{-\frac{h}{2}}$ porte sur le groupe de Weil.*

Enfin, $m^{(h)}(\Pi_w; \tau, \beta)$ désigne la multiplicité avec laquelle la représentation $\mathrm{JL}(\tau)^\vee \otimes \beta$ *de $GL_{n-h}(F_w) \times GL_h(F_w)$ figure dans le module de Jacquet* $\mathrm{J}_{U_h}(\Pi_w)$ *(avec U_h le radical unipotent de P_h), augmenté de termes (qui n'interviennent pas dans l'application que nous avons en vue) correspondant à des composants $\alpha \otimes \beta$ de* $\mathrm{J}_{U_h}(\Pi_w)$ *tels que α soit non tempérée.*

Rappelons que le module de Jacquet est l'espace des coïnvariants sous U_h , tordu par la racine carrée du module de P_h. Il est facile de déduire le th. 3 du th. 4. On utilise pour cela une formule tirée de [B-Z] donnant $\mathrm{J}_{U_h}(\pi)$ pour π une induite $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_t$ de cuspidales (associée à une partition $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$) :

$$\mathrm{J}_{U_h}(\pi) = \sum_I (\times_{i \in I} \pi_i) \otimes (\times_{i \notin I} \pi_i) \ ,$$

(égalité dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longueur finie de $GL_{n-h}(F_w) \times GL_h(F_w)$) ; la somme est indexée par les sous-ensembles $I \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ tels que $\sum_{i \in I} n_i = n - h$, de telle sorte que $(\times_{i \in I} \pi_i)$ (resp. $(\times_{i \notin I} \pi_i)$) est une représentation alors bien définie de $GL_{n-h}(F_w)$ (resp. $GL_h(F_w)$)), en fait irréductible (et indépendante de l'ordre des facteurs) ainsi qu'on le voit en utilisant la propriété analogue pour $\times_{1 \le i \le n} \pi_i$. On voit aussi que $(\times_{i \in I} \pi_i)$ ne peut appartenir à la série discrète que si I est réduit à un élément. Il en résulte que, sous l'hypothèse du théorème 3, ne peuvent intervenir dans la formule donnée par le th. 4 que des triples $\alpha = \pi_i$ (avec $n_i = n - h$) , $\tau = \mathrm{JL}(\alpha)^\vee$ et β tels que l'induite de $\alpha \times \beta$ redonne Π_w. Si l'on admet le th. 2 , on voit que la contribution galoisienne de ce triple est donnée par :

$$r_{n_i}(\pi_i) |\ |^{-\frac{n-n_i}{2}} = \sigma_{n_i}(\pi_i^\vee) |\ |^{\frac{1-n}{2}} \ ;$$

la somme de ces contributions est $\tilde{\sigma}_n(\pi^\vee) |\ |^{\frac{1-n}{2}} = \tilde{r}_n(\pi)$. Le théorème 3 résulte ainsi du théorème 4.

D'autre part le théorème 2 lui-même résulte aussi du théorème 4 : pour Π_w *cuspidale*, tous les modules de Jacquet non triviaux s'annulent et il ne reste plus dans la formule ci–dessus que le terme correspondant à $h = 0$, soit :

$$n[\Pi_w \otimes R(\Pi^\infty)_w] = \dim([R(\Pi^\infty)])(\Psi_n^*(\tau)) ,$$

avec $\tau = \mathrm{JL}(\Pi_w)^\vee$.

8. QUELQUES INDICATIONS SUR LA PREUVE DU THÉORÈME 4

8.1. Il s'agit de calculer la cohomologie ℓ-adique (relativement au faisceau $\mathcal{L}_\xi$) des variétés $X_{U^w,m} \times_F \overline{F}_w$. Pour cela on commence par étudier la géométrie de leur (mauvaise) réduction $\overline{X}_{U^w,m}$ et on calcule les faisceaux de cycles évanescents $\Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi$ en fonction des espaces locaux $\Psi^j_{(n-h)}$ du paragraphe 5. Nous noterons $\mathcal{H}^*_{\xi,U^w,m}$ la représentation virtuelle (dans un groupe de Grothendieck convenable) somme alternée (normalisée de sorte que H^{n-1} soit affecté du signe $+$) des $H^i(X_{U^w,m} \times_F \overline{F}_w \ , \ \mathcal{L}_\xi)$ et $\mathcal{H}^*_\xi$ la somme alternée des limites inductives. En utilisant la suite spectrale des cycles évanescents (7.1), on peut voir que cette représentation est une somme suivant h (variant de 0 à $n-1$) de sommes correspondant aux diverses strates $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m}$:

$$\mathcal{H}^*_\xi = \sum_h \sum_{i,j} (-1)^{n-1+i+j} \varinjlim_{U^w,m} H^i_c(\overline{X}^{(h)}_{U^w,m} \times \overline{k} \ , \ \Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi),$$

où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique du corps résiduel k de $K = F_w$. Ceci 'explique' déjà la sommation sur h dans l'énoncé du th.4.

On peut aussi facilement donner une interprétation de l'induction depuis le parabolique P_h : en un point géométrique x de $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m}$, la base de Drinfeld définit (avec les notations du paragraphe 6) un homomorphime surjectif de $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n$ vers $(\mathcal{G}_A)_{\varpi^m}(x)$, lequel est isomorphe à $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$, d'où un noyau qui est un sous-$(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$- module libre de rang $(n-h)$ dans $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n$. Ceci définit une partition de $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m}$ en sous-variétés $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m}$ (lieu où ce noyau coïncide avec un sous-module M_m donné.)

Prenons pour M_m le sous-module constitué des éléments de $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n$ dont les h premières coordonnées sont nulles. Les sous-variétés correspondantes constituent un système projectif sur lequel opère le groupe P_h (ainsi que le groupe $G(\mathbf{A}^\infty)$ privé de sa composante en w). Posons alors :

$$\mathcal{H}^{i,j,(h)}_{\xi\ ,M} = \varinjlim_{U^w,m} H^i_c(\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m} \times \overline{k} \ , \ \Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi) \ .$$

C'est un $G(\mathbf{A}^{w,\infty})\times P_h\times W_K$ –module admissible, et il est assez formel de vérifier qu'il redonne par induction la cohomologie à support de $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m}$ à valeurs dans $\Phi^j\otimes\mathcal{L}_\xi$: un élément c de ce dernier espace de cohomologie étant donné, considérer la fonction sur $GL_n(F_w)$ à valeurs dans $\mathcal{H}^{i,j,(h)}_{\xi\ ,M}$ qui à g associe la restriction de gc au système projectif des $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m}$ $\cdots$

On obtient de cette façon la formule :

$$\mathcal{H}^*_\xi=\sum_h\sum_{i,j}(-1)^{n-1+i+j}\mathrm{I}^{GL_n(K)}_{P_h}\mathcal{H}^{i,j,(h)}_{\xi\ ,M}$$

où l'on a noté I l'induction naïve (non unitaire).

8.2. On étudie la fibre spéciale $\overline{X}_{U^w,m}$ au moyen des *variétés d'Igusa de première espèce* (généralisant les courbes du même nom qui servent dans la théorie de la réduction des courbes modulaires) ; on nomme ainsi, pour U^w , m et h comme ci-dessus, le revêtement étale galoisien (de groupe $GL_h(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$) :

$$I^{(h)}_{U^w,m}\to\overline{X}^{(h)}_{U^w,0}$$

qui classifie les isomorphismes (structures de niveau partielles) :

$$\alpha^{\mathrm{et}}:(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h\to(\mathcal{G}_A)^{\mathrm{et}}_{\varpi^m}$$

vers le quotient étale de $(\mathcal{G}_A)_{\varpi^m}$. Ce sont des variétés sur k. On les envoie dans la fibre spéciale $\overline{X}_{U^w,m}$ par une application j_* semilinéaire définie comme suit : à un point de $I^{(h)}_{U^w,m}$ à valeurs dans un k–schéma S, défini par des données $(A,\lambda,\iota,\bar{\eta}^p,\bar{\phi}_2,\cdots\bar{\phi}_r)$ comme au paragraphe 6, plus la donnée supplémentaire α^{et}, on associe le point de $\overline{X}_{U^w,0}$ suivant : $(A^{p^{mf(n-h)}},\lambda^{p^{mf(n-h)}},\iota,\bar{\eta}^p,\bar{\phi}_2,\cdots\bar{\phi}_r)$, (où f désigne le degré de k sur $\mathbf{F}_p$) ; puis on le munit de l'unique base de Drinfeld qui relève le composé de $\alpha^{p^{mf(n-h)}}$ avec la projection de $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^n$ sur $(\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ donnée par les h dernières coordonnées ; un tel relèvement existe parce que l'extension $(\mathcal{G}_A)_{\varpi^m}$ de $(\mathcal{G}_A)^{\mathrm{et}}_{\varpi^m}$ par $(\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^m}$ se scinde après le changement de base que nous avons effectué. Ces morphismes j_* vont en fait dans la sous-variété $\overline{X}_{U^w,m,M_m}$ et sont définis de telle façon qu'ils s'insèrent dans des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} I^{(h)}_{U^w,m} & \xrightarrow{j_*} & \overline{X}_{U^w,m,M_m} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \overline{X}^{(h)}_{U^w,0} & \xrightarrow{\mathrm{Fr}^{mf(n-h)}} & \overline{X}^{(h)}_{U^w,0}. \end{array}$$

j_* ainsi défini est un isomorphisme sur le schéma réduit $\overline{X}^{\mathrm{red}}_{U^w,m,M_m}$.

Lorsque U^w et m varient, les $I^{(h)}_{U^w,m}$ constituent de façon évidente un système projectif (à morphismes de transition étales). Harris et Taylor considèrent parfois une variante de ce système projectif, avec le morphisme de $I^{(h)}_{U^w,m}$ vers $I^{(h)}_{U^w,m'}$ composé par $\mathrm{Fr}^{f(n-h)(m-m')}$, de façon à les rendre compatibles avec les morphismes j_*.

8.3. Les variétés d'Igusa admettent des *extensions formelles* $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge$: on désigne ainsi l'extension étale (relevant $I^{(h)}_{U^w,m}/\overline{X}^{(h)}_{U^w,0}$) du schéma formel $(\overline{X}^{(h)}_{U^w,0})^\wedge$, restriction à $\overline{X}^{(h)}_{U^w,0}$ du complété de $X_{U^w,0}$ le long de sa fibre spéciale ; c'est aussi comme plus haut le classifiant – mais cette fois-ci au-desssus de $(\overline{X}^{(h)}_{U^w,0})^\wedge$ – des structures de niveau partielles (vers la partie étale). On dénote alors par $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(t)$ le schéma au-dessus de $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge$ (un revêtement cette fois-ci très ramifié) qui classifie les bases de Drinfeld partielles :

$$\alpha^0 : (\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^{n-h} \to (\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^t}$$

vers la partie formelle $(\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^t}$ de $(\mathcal{G}_A)_{\varpi^t}$. La fibre spéciale réduite de $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(t)$ s'identifie à $I^{(h)}_{U^w,m}$.

On définit ensuite un morphisme $j_*^\wedge : (I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(m) \to (\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m})^\wedge$ étendant le morphisme j_* précédent. Pour cela on part de données $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}^p, \bar{\phi}_2, \cdots \bar{\phi}_r)$ comme ci-dessus (mais cette fois-ci sur un $(\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})$–schéma S), plus les données supplémentaires α^0 et α^{et} , et on doit leur associer une déformation de la structure déjà définie par j_*, avec en plus d'une base de Drinfeld : on prend comme déformation celle associée à la déformation $\mathcal{G}_A/(\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^m}$ de $(\mathcal{G}_A)^{p^{mf(n-h)}}_{|\mathrm{Spec}(k)}$, munie de la base de Drinfeld définie à partir de α^0, α^{et}, et du scindage :

$$(\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^m} \times (\mathcal{G}_A)^{\text{et}}_{\varpi^m} \to \big(\mathcal{G}_A/(\mathcal{G}_A)^0_{\varpi^m}\big)_{\varpi^m}$$

défini par :

$$(x,y) \to \varpi^{-m}x + y \ .$$

Le morphisme $j_*^\wedge$ ainsi obtenu est un *isomorphisme.* Noter que sa construction dépend du choix de l'uniformisante ϖ.

8.4. Il s'agit ensuite – et c'est là le point le plus fastidieux du manuscrit – de décrire des actions sur le système projectif des variétés d'Igusa. On a une action plus ou moins évidente du groupe $G(\mathbf{A}^{p,\infty})$; rappelons d'autre part que $G(\mathbf{Q}_p)$ est isomorphe au produit $\mathbf{Q}_p^* \times GL_n(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^*$.

Harris et Taylor définissent une action de $\mathbf{Q}_p^*\times\big(GL_{n-h}(F_w)\times GL_h(F_w)\big)^+\times\prod_{i\geq 2} B_{w_i}^*$ sur le système projectif des variétés d'Igusa $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(m)$, où $\big(GL_{n-h}(F_w)\times GL_h(F_w)\big)^+$ désigne le sous-monoïde du produit constitué des couples (g,g') pour lesquels il existe $a\in F_w^*$ tel que $a^{-1}g^{-1}$ et ag' soient tous deux à coefficients entiers. L'action de $\mathbf{Q}_p^*$ se factorise en fait via la valuation. D'autre part, l'action sur le système projectif des fibres spéciales réduites $I^{(h)}_{U^w,m}$ se factorise (via val.det(g)) à travers $\mathbf{Q}_p^*\times\big(\mathbf{Z}\times GL_h(F_w)\big)^+\times\prod_{i\geq 2} B_{w_i}^*$, où $\big(\mathbf{Z}\times GL_h(F_w)\big)^+$ désigne le sous-monoïde défini de manière analogue, comme l'ensemble des couples (c,g') tels que $\varpi^E g'$ soit à coefficients entiers, avec E la partie entière de $-c/(n-h)$.

Notons $\tilde{\mathrm{Fr}}_q$ l'élément $(q^{-1},-1,1)$ de $\mathbf{Q}_p^*\times\big(\mathbf{Z}\times GL_h(F_w)\big)^+$. On vérifie que l'action sur les $I^{(h)}_{U^w,m}$ de cet élément coïncide avec celui du Frobenius $\mathrm{Fr}_q = \mathrm{Fr}^f$. Ceci est une généralisation au cas présent de la classique 'relation de congruence', sous la forme que lui a donnée Piatetski–Shapiro [PS]. $\tilde{\mathrm{Fr}}_q^{\,n-h}$ se relève en l'élément $(q^{h-n},\varpi^{-1},1)$ de $\mathbf{Q}_p^*\times\big(GL_{n-h}(F_w)\times GL_h(F_w)\big)^+$, noté $\tilde{\mathbf{Fr}}_q^{\,n-h}$ (qui dépend du choix de ϖ) ; la notation est trompeuse car $\tilde{\mathbf{Fr}}_q$ n'existe pas.

La relation entre les morphismes $j_*^\wedge$ et les actions d'un élément

$$\gamma\in G(\mathbf{A}^{p,\infty})\times\mathbf{Q}_p^*\times\big(GL_{n-h}(F_w)\times GL_h(F_w)\big)^+\times\prod_{i\geq 2} B_{w_i}^* \ \subset\ G(\mathbf{A}^\infty)$$

sur chacun des systèmes projectifs des $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(m)$ et $(\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m})^\wedge$ se traduit par la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(m) & \xrightarrow{\gamma\ \ \tilde{\mathbf{Fr}}_q^{(n-h)(m-m')}} & (I^{(h)}_{U'^w,m'})^\wedge(m') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle j_*^\wedge} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_*^\wedge} \\
(\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m})^\wedge & \xrightarrow{\gamma} & (\overline{X}^{(h)}_{U'^w,m',M_{m'}})^\wedge
\end{array}$$

(chaque fois que U^w, m, U'^w, m' sont tels que cela ait un sens). Noter que pour $\gamma = 1$ on retrouve après restriction aux fibres spéciales la commutativité du diagramme écrit plus haut.

8.5. Considérons les faisceaux de cycles évanescents sur $I^{(h)}_{U^w,m}$ que la théorie de Berkovich associe au schéma formel $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(t)$. Nous les notons encore $\Phi^j(t)$. Le théorème de comparaison de Berkovich permet de voir qu'ils coïncident (lorsque $t = m$), via les morphismes $j_*^\wedge$, avec les faisceaux du même nom définis (par la théorie usuelle) sur $\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m}$. Les actions que nous (n') avons (pas) définies ci-dessus permettent de faire opérer

$$G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times \big(GL_{n-h}(F_w) \times GL_h(F_w)\big)^+ \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i}$$

sur la limite inductive

$$H^i_c(I^{(h)}\ , \Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi) = \varinjlim_{U_w,m,t} H^i_c(I^{(h)}_{U^w,m} \otimes \overline{k}\ ,\ \Phi^j(t) \otimes \mathcal{L}_\xi\ );$$

et c'est une action admissible. Comme on peut voir que l'action de $\tilde{\mathbf{Fr}}_q^{(n-h)}$ est inversible, et que l'adjonction de cet élément permet d'engendrer le groupe $G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times GL_{n-h}(F_w) \times GL_h(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i}$ tout entier, notre action se prolonge à ce dernier. Enfin, ces espaces se trouvent également munis d'une action du groupe de Weil W_{F_w}.

On obtient des isomorphismes :

$$H^i_c(I^{(h)}\ , \Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi) \simeq \mathcal{H}^{i,j,(h)}_{\xi\ ,M}$$

par image réciproque par les applications $\tilde{\mathbf{Fr}}_q^{(n-h)m} \circ (j_*^\wedge)^{-1}$ de $(I^{(h)}_{U^w,m})^\wedge(m)$ vers $(\overline{X}^{(h)}_{U^w,m,M_m})^\wedge$. Cette torsion par $\tilde{\mathbf{Fr}}_q^{(n-h)m}$ possède la vertu, d'après ce qu'on a vu plus haut, de rendre ces isomorphismes compatibles avec l'action du groupe considéré ci-dessus. On montre enfin que l'action sur $H^i_c(I^{(h)}\ ,\Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi)$ du radical unipotent de P_h est triviale.

De tout cela, il résulte que l'on peut récrire la formule donnée en 8.1 sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}^*_\xi = \sum_h \sum_{i,j} (-1)^{n-1+i+j} \mathrm{I}_{P_h}^{GL_n(K)} H^i_c(I^{(h)}\ ,\Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi)\ .$$

8.6. L'objectif est maintenant de calculer les faisceaux $\Phi^j(t)$ en fonction des espaces locaux $\Psi^j_{(n-h),t}$ du paragraphe 5. Si x est un point géométrique algébrique de $I^{(h)}_{U^w,m}$, alors le complété de l'anneau local en x s'identifie à l'espace des déformations $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}_x)$ du groupe p–divisible $\mathcal{G}_x = (\mathcal{G}_A)_x$, munies d'une base de Drinfeld partielle α^0 de niveau t (l'autre α^{et} se déforme uniquement). Cet espace de déformations est fibré sur l'espace des déformations (avec base de Drinfeld) $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}^0_x)$ de la partie formelle $\mathcal{G}^0_x$. Vu comme schéma au-dessus de $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}^0_x)$, notre espace $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}_x)$ classifie les extensions du groupe constant $\mathcal{G}^{\mathrm{et}}$ par la déformation universelle $\tilde{\mathcal{G}}^0$ et un calcul classique montre que cet espace d'extensions est isomorphe à $\big(\tilde{\mathcal{G}}^0\big)^h$; en particulier $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}_x)$ est formellement lisse au-dessus de $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}^0_x)$; on en déduit que le calcul de $\Phi^j(t)$ se ramène au calcul des cycles évanescents pour $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}^0_x)$, lequel est isomorphe au schéma formel $\mathrm{Spf}(R_{K,(n-h),t})$ du paragraphe 5. Tout choix d'un isomorphisme entre $\mathcal{G}^0_x$ et $\Sigma_{(n-h)}$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{Def}_t(\mathcal{G}^0_x)$ et $\mathrm{Spf}(R_{K,(n-h),t})$, d'où un isomorphisme entre $\Phi^j(t)$ et $\Psi^j_{(n-h),t}$.

Parce que le groupe $\mathcal{G}^0$ n'est pas constant sur les variétés d'Igusa $I^{(h)}_{U^w,m}$ (ni même sur leur limite), un tel isomorphisme n'existe pas globalement. Pour remédier à cela, on introduit des revêtements visant à trivialiser partiellement $\mathcal{G}^0$. Les *variétés d'Igusa de deuxième espèce* sont des revêtements étales galoisiens :

$$J^{(h)}_{U^w,m,s} \longrightarrow I^{(h)}_{U^w,m} \otimes_k \overline{k}$$

de groupe $\big(\mathcal{O}_{D_{(n-h)}}/\varpi^s\mathcal{O}_{D_{(n-h)}}\big)^*$.

Ils sont définis en considérant pour chaque s le classifiant Isom_s, au-dessus de $I^{(h)}_{U^w,m} \otimes_k \overline{k}$, des isomorphismes entre le groupe $(\Sigma_{(n-h)})_{\varpi^s}$ des points de ϖ^s–torsion du groupe $\Sigma_{(n-h)}$ (vu par changement de base comme groupe sur $I^{(h)}_{U^w,m} \otimes_k \overline{k}$) et le groupe $(\mathcal{G}^0)_{\varpi^s}$. Pour $s' \geq s$, on dispose de morphismes évidents de $\mathrm{Isom}_{s'}$ dans Isom_s, dont on note Y_s l'intersection des images (s' variant). Finalement, $J^{(h)}_{U^w,m,s}$ est défini comme le schéma réduit Y_s^{red} associé. D'une façon un peu vague, il classifie les trivialisations 'modulo ϖ^s' de $\mathcal{G}^0$.

Lorsque s varie, les $J^{(h)}_{U^w,m,s}$ constituent un système projectif de revêtements étales de $I^{(h)}_{U^w,m} \otimes_k \overline{k}$, dont le groupe de Galois est $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$. Cela permet d'associer (de manière usuelle) à chaque représentation ρ (ℓ–adique admissible) de ce groupe un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$–faisceau lisse $\mathcal{F}(\rho)$, obtenu comme quotient du faisceau constant de fibre ρ sur la 'limite projective' (mais cela se formule aisément sur un cran fini) par l'action de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$. En particulier, si on se souvient que $\Psi^j_{(n-h),t}$ est muni d'une action de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$, on peut former le faisceau associé $\mathcal{F}(\Psi^j_{(n-h),t})$. Explicitons ce qui se passe en un point géométrique algébrique x de $I^{(h)}_{U^m,m} \otimes_k \overline{k}$: on considère tous les relèvements possibles x_∞ de x à la limite projective (c'est-à-dire les systèmes compatibles de relèvements aux crans finis) ; ils sont permutés par $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$. Par définition, la donnée d'un élément de la fibre $\left(\mathcal{F}(\Psi^j_{(n-h),t})\right)_x$ correspond à la donnée pour chaque relèvement x_∞ d'un élément de $\Psi^j_{(n-h),t}$, de façon compatible à l'action de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$.

Mais par construction des $J^{(h)}_{U^w,m,s}$, la donnée de x_∞ correspond à la donnée d'un isomorphisme entre $\mathcal{G}^0_x$ et $\Sigma_{(n-h)}$; d'après ce qu'on a dit plus haut, cela nous donne un isomorphisme entre $(\Phi^j(t))_x$ et $\Psi^j_{(n-h),t}$. Un élément de $(\Phi^j(t))_x$ étant fixé, on associe ainsi à chaque x_∞ un élément de $\Psi^j_{(n-h),t}$, de façon compatible à l'action de groupe (par définition de l'action de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$ sur $\Psi^j_{(n-h),t}$). On voit finalement que l'on a obtenu de la sorte un isomorphisme canonique entre les fibres :

$$(\Phi^j(t))_x \simeq \left(\mathcal{F}(\Psi^j_{(n-h),t})\right)_x .$$

Berkovich a fourni une preuve du fait que cet isomorphisme de fibres provient d'un isomorphisme entre les faisceaux $\Phi^j(t)$ et $\mathcal{F}(\Psi^j_{(n-h),t})$. Il s'agit d'un passage à la limite assez délicat qui utilise sa théorie (laquelle ne s'applique pas directement car les limites projectives que nous considérons ne sont pas de type fini).

Décomposons maintenant l'action de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$ sur $\Psi^j_{(n-h),t}$ en la somme des composantes isotypiques $\Psi^j_{(n-h),t}(\rho)$ (pour t fixé, seul un nombre fini interviennent), ρ

décrivant l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathcal{O}^*_{D_{(n-h)}}$ (ou, ce qui revient au même, de représentations de $D^*_{(n-h)}$ modulo torsion non ramifiée). Il en résulte une décomposition du faisceau associé :

$$\mathcal{F}(\Psi^j_{(n-h),t}) = \bigoplus_\rho \mathcal{F}(\rho) \otimes \Psi^j_{(n-h),t}(\rho) ,$$

le second facteur du produit tensoriel étant vu comme un faisceau constant. Joint à l'isomorphisme ci-dessus, cela permet d'exprimer autrement les espaces de cohomologie des faisceaux $\Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi$ sur les variétés d'Igusa :

$$H^i_c(I^{(h)} , \Phi^j \otimes \mathcal{L}_\xi) = \bigoplus_\rho H^i_c(I^{(h)} , \mathcal{F}(\rho) \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Psi^j_{(n-h),t}(\rho),$$

où l'on a noté $H^i_c(I^{(h)} , \mathcal{F}(\rho)\otimes\mathcal{L}_\xi)$ la limite inductive des $H^i_c(I^{(h)}_{U^w,m}\otimes\overline{k} , \mathcal{F}(\rho)\otimes\mathcal{L}_\xi)$. Ceci permet de donner une autre forme à la formule de (8.1) exprimant $\mathcal{H}^*_\xi$:

$$\mathcal{H}^*_\xi = \sum_\rho \sum_h \sum_{i,j} (-1)^{n-1+i+j} \, \mathrm{I}_{P_h}^{GL_n(K)}\{H^i_c(I^{(h)} , \mathcal{F}(\rho) \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Psi^j_{(n-h)}(\rho)\} .$$

Soit encore :

$$\mathcal{H}^*_\xi = \sum_\rho \sum_h \mathrm{I}_{P_h}^{GL_n(K)} \mathcal{H}^{(h)}_{\xi,\rho} \otimes \Psi^*_{(n-h)}(\rho) ,$$

avec $\mathcal{H}^{(h)}_{\xi,\rho}$ la somme alternée $\sum(-1)^{h+i}(H^i_c(I^{(h)} , \mathcal{F}(\rho) \otimes \mathcal{L}_\xi)$.

8.7. Actions

Harris et Taylor relèvent l'action du semi-groupe

$$G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}^*_p \times (\mathbf{Z} \times GL_h(F_w))^+ \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i}$$

sur le système projectif des variétés d'Igusa $I^{(h)}_{U^w,m}$ en une action de

$$G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}^*_p \times (\mathbf{Z} \times GL_h(F_w))^+ \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i} \times D^*_{(n-h)}$$

sur le système des $J^{(h)}_{U^w,m,s}$. Il en résulte que les faisceaux $\mathcal{F}(\rho)$ sont équivariants sous l'action du semi-groupe ci-dessus, qui opère donc sur les groupes de cohomologie $\mathcal{H}^{(h)}_{\xi,\rho}$.

Comme plus haut, cette action se prolonge au groupe $G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times \mathbf{Z} \times GL_h(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^*$. Rappelons d'autre part que $\Psi_{(n-h)}^*(\rho)$ est un $(GL_{(n-h)}(F_w) \times W_{F_w})$ – module virtuel.

Munissons alors $\mathcal{H}_{\xi,\rho}^{(h)} \otimes \Psi_{(n-h)}^*(\rho)$ d'une action de

$$G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times GL_{(n-h)}(F_w) \times GL_h(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^* \times W_{F_w}$$

ainsi définie : un élément $(g^p, k, g_w^0, g_w^{\text{et}}, g_{w_i}, \tau)$ agit sur le premier facteur du produit tensoriel par $(g^p, k|\tau|, \text{val.det}(g_w^0) - \text{val.}(\tau), g_w^{\text{et}}, g_{w_i})$ et par (g_w^0, τ) sur le second ; on a noté val.(τ) et $|\tau|$ la valuation et la valeur absolue de l'élément de K^* qui correspond à τ par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local. Par induction, on obtient donc une action (virtuelle) de

$$G(\mathbf{A}^{\infty}) \times W_{F_w} = G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times \times GL_n(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^* \times W_{F_w}$$

qui correspond, par l'égalité exprimée en 8.6, à celle que l'on a sur $\mathcal{H}_\xi^*$.

8.8. La preuve du théorème 4 est ainsi ramenée au calcul de la représentation $\mathcal{H}_{\xi,\rho}^{(h)}$ du groupe $G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times \mathbf{Z} \times GL_h(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^*$: il s'agit de la limite inductive de cohomologies à support de variétés lisses (mais non propres) sur $\overline{k}$, à valeurs dans un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$–faisceau lisse. Si ϕ est une fonction sur l'algèbre de Hecke du groupe ci-dessus (privé de son facteur $\mathbf{Z}$), on peut la translater par une puissance assez grande de l'élément $\tilde{\text{Fr}}_q$ considéré plus haut ; notons $\tilde{\text{Fr}}_q^N(\phi)$ la fonction qui à g associe $\phi(\tilde{\text{Fr}}_q^{-N} g)$. Harris et Taylor obtiennent une description à la Langlands–Kottwitz (cf. [Ko1], [Ko2]) de l'ensemble des points sur $\overline{k}$ des variétés $J_{U^w,m,s}^{(h)}$, avec les différentes actions mentionnées ci-dessus. La formule des traces de Lefschetz permet alors le calcul de la trace de l'action de $\tilde{\text{Fr}}_q^N(\phi)$ pour N assez grand. On utilise ici le fait, conjecturé par Deligne et prouvé par Fujiwara [Fu], qu'il existe une formule des traces simple et sans terme à l'infini (pour la cohomologie à support), valide après torsion par une assez grande puissance de Frobenius.

On utilise ensuite la formule des traces de Selberg pour calculer la trace sur l'espace des formes automorphes d'une fonction $\phi'(N)$ sur le groupe

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \mathbf{Q}_p^* \times GL_n(F_w) \times \prod_{i\geq 2} B_{w_i}^* \times G(\mathbf{R})$$

obtenue ainsi : supposant la fonction ϕ considérée ci-dessus décomposée en le produit d'une fonction $\phi^{w,\infty}$ sur $G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i}$, d'une fonction ϕ_0 sur $\mathbf{Q}_p^*$ et enfin d'une fonction ϕ_w^{et} sur $GL_h(F_w)$, on pose :

$$\phi'(N) = \phi^{w,\infty} \times \phi'_w(\phi_w^{\text{et}}, \rho, -N) \times \phi_0^{(N)} \times \phi_{\infty,\xi}$$

où $\phi_0^{(N)}(x) = \phi_0(q^N x)$, où $\phi_{\infty,\xi}$ est l'habituelle fonction sur $G(\mathbf{R})$ qui isole les représentations figurant dans la cohomologie de $\mathcal{L}_\xi$, tandis que $\phi'_w(\phi_w^{\text{et}}, \rho, -N)$ est une fonction sur $GL_n(F_w)$ (dépendant de ϕ_w^{et} , de ρ et de N) qui possède la vertu suivante : pour π une représentation irréductible de $GL_n(F_w)$ et π' une représentation irréductible de $GL_{(n-h)}(F_w)$, notons $\pi^{(h)}[\pi']$ la représentation de $GL_h(F_w)$ telle que $\pi' \otimes \pi^{(h)}[\pi']$ soit la composante π'–isotypique du module de Jacquet $J_{U_h}(\pi)$ semi-simplifié. On a alors :

$$\text{tr}(\pi)(\phi'_w(\phi_w^{\text{et}}, \rho, -N)) = \sum_\mu \mu(-N)\text{tr}(\pi^{(h)}[\text{JL}^\vee(\rho) \otimes (\mu \circ \text{val.det})])(\phi_w^{\text{et}}) ,$$

où μ décrit l'ensemble des quasi–caractères de $\mathbf{Z}$.

La comparaison des deux formules donne pour N grand l'égalité, à un facteur près, entre la trace (donnée par la formule de Selberg) de $\phi'(N)$ sur l'espace des formes automorphes et celle (donnée par Lefschetz) de $\tilde{\text{Fr}}_q^N(\phi)$ sur la cohomologie $\mathcal{H}^{(h)}_{\xi,\rho}$. Elle utilise divers ingrédients : des résultats de [D-K-V] sur la correspondance de Jacquet–Langlands, des résultats de Labesse ([L1], [L2]), en particulier sur le fait que la trace de certaines fonctions sépare différents sous–quotients d'une induite, de Clozel ([Cl1], [Cl2]) sur les représentations automorphes des groupes unitaires tordus, de Clozel-Labesse ([C-L]) ...

8.9. L'égalité de traces ainsi obtenue se traduit alors par la proposition qui suit.

Fixons une représentation admissible $\Pi^{w,\infty}$ du groupe $G(\mathbf{A}^{p,\infty}) \times \prod_{i\geq 2} B^*_{w_i}$. Notons $\mathcal{H}^{(h)}_{\xi,\rho}(\Pi^{w,\infty})$ la composante isotypique correspondante, qui est donc une représentation du groupe $\mathbf{Q}_p^* \times \mathbf{Z} \times GL_h(F_w)$. D'autre part, notons $\mathcal{H}^*_\xi(\Pi^{w,\infty})$ la composante isotypique dans la représentation globale $\mathcal{H}^*_\xi$: il s'agit cette fois d'une représentation de $\mathbf{Q}_p^* \times GL_n(F_w)$. Décomposons le module de Jacquet (relativement à P_h) de cette dernière (toujours après semi-simplification) :

$$J_{U_h}(\mathcal{H}^*_\xi(\Pi^{w,\infty})) = \sum_{\chi,\alpha,\beta} m_\xi^{(h)}(\chi,\alpha,\beta)\chi \otimes \alpha \otimes \beta ,$$

avec χ (resp. α, resp. β) décrivant les représentations admissibles de $\mathbf{Q}_p^*$ (resp. $GL_{(n-h)}(F_w)$, resp. $GL_h(F_w)$), et $m_\xi^{(h)}(\chi,\alpha,\beta)$ la multiplicité de $\chi\otimes\alpha\otimes\beta$.

PROPOSITION.— *On a la formule :*

$$\mathcal{H}_{\xi,\rho}^{(h)}(\Pi^{w,\infty}) = n^{-1}\sum_{\chi,\alpha,\beta,\mu} m_\xi^{(h)}(\chi,\alpha,\beta)(\mathrm{tr}\alpha)(\phi_{\mathrm{JL}^\vee(\rho\otimes(\mu^{-1}\mathrm{o val.det}))})[\chi\otimes\mu\otimes\beta],$$

où χ,α,β sont comme ci-dessus, et où μ décrit l'ensemble des quasi-caractères de $\mathbf{Z}$; d'autre part $\phi_{\mathrm{JL}^\vee(\rho)}$ est un pseudo-coefficient de la représentation $\mathrm{JL}^\vee(\rho)$: pour α tempérée, $(\mathrm{tr}\alpha)(\phi_{\mathrm{JL}^\vee(\rho)})$ vaut 1 si α est isomorphe à $\mathrm{JL}^\vee(\rho)$ et 0 sinon.

On combine alors cette expression de $\mathcal{H}_{\xi,\rho}^{(h)}(\Pi^{w,\infty})$ avec le résultat de 8.6, qui donne $\mathcal{H}_\xi(\Pi^{w,\infty})$ comme la somme des induites des $\mathcal{H}_{\xi,\rho}^{(h)}(\Pi^{w,\infty})\otimes\Psi_{(n-h)}^*(\rho)$, pour obtenir finalement le théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

[A-C] J. Arthur et L. Clozel - *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press (1989).

[Ba] A. Badulescu - *Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle*, thèse, Université de Paris-Sud (janvier 1999).

[Be1] V.G. Berkovich - *Etale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **78** (1993), 5–161.

[Be2] V.G. Berkovich - *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. **115** (1994), 539–571.

[Be3] V.G. Berkovich - *Vanishing cycles for formal schemes II*, Invent. Math. **125** (1996), 367–390.

[B-H] C.J. Bushnell et G. Henniart - *Davenport–Hasse relations and an explicit Langlands correspondence, II : an interim report*, prépublication (Janvier 99).

[Bo] J.-F. Boutot - *Uniformisation p–adique des variétés de Shimura*, Séminaire Bourbaki exp. 831 (1996–1997), Astérisque **245** (1997), 307–322.

[Boy] P. Boyer - *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et conjecture de Langlands locale*, thèse, Université de Paris 11 Orsay (Oct. 1998).

[Br] J. Brylinski, *Un lemme sur les cycles évanescents en dimension relative 1*, Appendice à [Ca2].

[B-Z] I.N. Bernstein et A.V. Zelevinsky - *Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups I*, Ann. Sci. ENS **10** (1977), 441–472.

[Ca1] H. Carayol - *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Comp. Math. **59** (1986), 151–230.

[Ca2] H. Carayol - *Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. ENS **19** (1986), 409–467.

[Ca3] H. Carayol - *Non-abelian Lubin-Tate theory*, dans 'Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions' vol II (L. Clozel et J.S. Milne, eds), Academic Press (1990).

[Ca4] H. Carayol - *Variétés de Drinfeld compactes, d'après Laumon, Rapoport et Stuhler*, Séminaire Bourbaki exp. 756 (1991–1992), Astérisque **206** (1992), 369–409.

[Cart] P. Cartier - *La conjecture de Langlands pour $GL(2)$ et la démonstration de Ph. Kutzko*, Séminaire Bourbaki exp. 550 (1979–1980), Springer Lecture Notes in Math. **842** (1981), 112–138.

[Cl1] L. Clozel - *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$*, Publ. Math. IHES **73** (1991), 97–145.

[Cl2] L. Clozel - *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties*, Duke Math. J. **72** (1993), 757–795.

[Cl3] L. Clozel - *Nombre de points des variétés de Shimura sur un corps fini (d'après R. Kottwitz)*, Séminaire Bourbaki, exp. 766 (1992–1993), Astérisque **216** (1993), 121–149.

[C-L] L. Clozel et J.-P. Labesse - *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*, Appendice à [L2], prépublication.

[De1] P. Deligne - *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki exp. 389 (1970–1971), Springer Lecture Notes in Math. **244** (1971), 123–165.

[De2] P. Deligne - *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, dans : Modular functions of one variable II, Springer Lectures Notes in Math. **349** (1973).

[De3] P. Deligne - Lettre à Piatetski-Shapiro (1973).

[D-K-V] P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras - *Représentations des algèbres simples p-adiques*, dans I.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras : 'Représentations des groupes réductifs sur un corps local', Hermann (1984).

[Dr1] V.G. Drinfeld - *Elliptic modules*, Math. Sbornik **23** (1974), 561–592.

[Dr2] V.G. Drinfeld - *Coverings of p-adic symmetric domains*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 107–115.

[Fa] G. Faltings - *The trace formula and Drinfeld's upper halfplane*, Duke Math. J.

76 (1994), 467–481.

[Fu] K. Fujiwara - *Rigid geometry, Lefschetz–Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), 489–533.

[G-J] P. Godement et H. Jacquet - *Zeta functions of simple algebras*, Springer Lectures Notes in Math. **260** (1972).

[Ha1] M. Harris - *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces : elaboration of Carayol's program*, Invent. Math. **129** (1997), 75–120.

[Ha2] M. Harris - *The local Langlands conjecture for $GL(n)$ over a p-adic field, $n < p$*, Invent. Math. **134** (1998), 177–210.

[H-T] M. Harris et R. Taylor - *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, version préliminaire (1998).

[He1] G. Henniart - *La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$*, Mémoire S.M.F. n° 11/12 (1984).

[He2] G. Henniart - *La conjecture de Langlands locale numérique pour $GL(n)$*, Ann. Sci. ENS **21** (1988), 497–544.

[He3] G. Henniart - *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires*, Invent. Math. **113** (1993), 339–350.

[He4] G. Henniart - *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p–adique*, manuscrit (Jan. 1999).

[H-H] G. Henniart et R. Herb - *Automorphic induction for GL_n (over local nonarchimedean fields)*, Duke Math. J. **78** (1995), 131–192.

[JPSS1] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika - *Facteurs L et ϵ du groupe linéaire*, C.R.A.S. Paris t. 289 (1980), 59–61.

[JPSS2] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika - *Rankin–Selberg convolutions*, Am. J. of Math. **105** (1983), 367–483.

[K-M] N.M. Katz et B. Mazur - *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies **108**, Princeton University Press (1985).

[Ko1] R. Kottwitz - *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. of the A.M.S. **5** (1992), 373–444.

[Ko2] R. Kottwitz - *On the λ–adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), 653–665.

[Ku] Ph. Kutzko - *The Langlands conjecture for $GL(2)$ of a local field*, Annals of Math. **112** (1980), 381–412.

[L1] J.P. Labesse - *Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990), 519–530.

[L2] J.P. Labesse - *Changement de base conditionnel pour les groupes réductifs*, prépublication.

[La] R.P. Langlands - *On the Zeta-functions of some simple Shimura varieties* Canadian J. of Math **31** n° 6 (1979), 1121–1216.

[L-R-S] G. Laumon, M. Rapoport et U. Stuhler - *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), 217–338.

[PS] I.I. Piatetski-Shapiro - *Zeta functions of modular curves*, dans : Modular functions of one variable II, Springer Lectures Notes in Math. **349** (1973).

[R] F. Rodier - *Représentations de $GL(n,k)$ où k est un corps p-adique*, Séminaire Bourbaki exp. 587 (1981–1982), Astérisque **92–93** (1982), 201–218.

[Ro] J. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p-adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), 161–196.

[R-Z] M. Rapoport et T. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Math. Studies **141**, Princeton University Press (1996).

[S-S] P. Schneider and U. Stuhler, *The cohomology of p-adic symmetric spaces*, Invent. Math. **105** (1991), 47–122.

Henri CARAYOL

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C. N. R. S.
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
adresse électronique : carayol@math.u-strasbg.fr