Astérisque

FRANÇOIS LOESER

Exposants p-adiques et théorèmes d'indice pour les équations différentielles p-adiques

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 822, p. 57-81
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__57_0>

Séminaire BOURBAKI
49ème année, 1996-97, n° 822

Novembre 1996

EXPOSANTS P-ADIQUES ET THÉORÈMES D'INDICE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES P-ADIQUES

[d'après G. Christol et Z. Mebkhout]

par **François LOESER**

Introduction

Commençons par un bref rappel de résultats classiques. Soit P un opérateur différentiel algébrique à coefficients complexes, i.e. un élément de $\mathbf{C}[x, \frac{d}{dx}]$. Le comportement local de P en un point, disons l'origine, est bien compris, cf. l'exposé de D. Bertrand à ce même séminaire [Be]. Ecrivons P sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

où les a_i sont des polynômes et a_m est non nul. Par le théorème de l'indice local (cf. [K],[Ma]) l'opérateur P est à indice dans l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine d'indice égal à $m - v(a_m)$ et il est également à indice dans l'anneau des séries formelles d'indice $m - v(a_m) + irr_0(P)$ avec $irr_0(P) = \sup(i - v(a_i) - (m - v(a_m))$. Ici v désigne la valuation à l'origine. Il y a également des théorèmes d'indice plus fins dus à Ramis [R] dans des espaces de Gevrey faisant intervenir les pentes du polygône de Newton de P.

Ecrivons maintenant, quitte à multiplier par une puissance de x, P sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{m} b_i(x)(x\frac{d}{dx})^i$$

avec b_i des polynômes et b_m non nul. Supposons que l'origine soit un point singulier de P (i.e. $a_m(0) = 0$). Rappelons que les exposants de P à l'origine sont les racines du polynôme indiciel $\sum_{i=0}^{m} b_i(0)s^i$. Si le polynôme indiciel est de degré m, ce qui est équivalent à la relation $irr_0(P) = 0$, on dit que P est à singularité régulière à l'origine ou encore qu'il est fuchsien. Les solutions locales de P ont alors un développement de la forme

$$\sum \lambda_{\alpha,i}\, x^{\alpha} (\log x)^i$$

avec α parcourant l'ensemble des exposants, i des entiers positifs $\leq m-1$ et $\lambda_{\alpha,i}$ des germes de fonctions méromorphes à l'origine. De plus les fonctions $\lambda_{\alpha,i}$ convergent jusqu'à la singularité de P la plus proche.

Les énoncés précédents ne s'étendent pas tels quels aux corps p-adiques. Ainsi un opérateur aussi anodin que $x\frac{d}{dx} - \alpha$ peut être sans indice dans les germes de fonctions analytiques si α est un nombre de Liouville p-adique. Une échappatoire naturelle serait de décréter qu'on ne s'intéressera qu'aux opérateurs à exposants qui ne sont pas de Liouville. Cette solution est cependant illusoire comme le montre l'exemple de l'opérateur de Monsky

$$M_a = p(1-x)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - a$$

avec a dans $\mathbf{Z}_p$. Algébriquement cet opérateur n'a pas de singularité dans le disque ouvert $D(0,1^-)$. Néanmoins, les solutions de cet opérateur ne convergent pas assez pour qu'il soit analytiquement trivial sur tout le disque. Une explication superficielle est que, modulo p, l'opérateur est singulier à l'origine. De façon plus profonde, considérons l'opérateur

$$M'_a = x\frac{d^2}{dx^2} - (x^p + p - 2)\frac{d}{dx} - apx^{p-1}$$

que l'on obtient à partir de M_a par image inverse par le morphisme de Frobenius $x \mapsto (x-1)^p$. Les racines p-ièmes de l'unité sont des singularités p-adiques de M'_a qui ne se voient pas modulo p et n'apparaissent que dans son antécédent M_a. Dans la théorie de Christol et Mebkhout a apparaîtra effectivement comme exposant p-adique de M_a. Dans cet exemple on voit également en filigrane deux outils fondamentaux de la théorie des équations différentielles p-adiques : les antécédents de Frobenius et les propriétés de convergence des solutions, en particulier dans les disques génériques.

Contrairement au cas complexe, il ne suffit pas d'effectuer l'étude locale sur des disques, mais il convient de traiter également les couronnes, pour pouvoir recoller (i.e. pour avoir un bon recouvrement rigide). C'est dans les travaux de Dwork et de Robba qu'apparaît l'importance de la croissance du rayon de convergence des solutions dans les disques génériques. En particulier, Robba a compris (cf. [R5]) que l'analogue p-adique dans une couronne de la condition de régularité de Fuchs est que le rayon de convergence des solutions dans les disques génériques soit maximal (condition dite de Robba). Dans cette situation, Christol et Mebkhout sont récemment parvenus [C-M2] à définir des exposants p-adiques par un procédé d'approximation reposant sur les antécédents de Frobenius de Christol et Dwork [C-D]. Les exposants de Christol et Mebkhout ne sont pas en général des entiers p-adiques modulo $\mathbf{Z}$. Il y a une subtilité qui provient du fait que le groupe symétrique agit à chaque niveau du processus d'approximation. Cette finesse disparait a posteriori quand les différences des exposants p-adiques ne sont pas de Liouville. Mais il est nécessaire de les définir avant de pouvoir demander que leurs différences ne soient pas de Liouville ! Sous l'hypothèse que les différences des exposants p-adiques ne sont pas de Liouville, Christol et Mebkhout obtiennent alors l'existence d'une forme normale de Fuchs sur la couronne, toujours par un procédé élaboré d'approximation utilisant les antécédents de Frobenius (théorème 3.3.1).

Il reste encore à comprendre la partie irrégulière des équations différentielles p-adiques. C'est ce que réalisent Christol et Mebkhout dans l'article [C-M3] en définissant la filtration par les pentes p-adiques d'un module soluble. Ces pentes p-adiques sont décrites par le comportement au bord de la couronne du rayon de convergence des solutions dans les disques génériques. Un résultat fondamental est alors le théorème de décomposition (théorème 4.3.2) qui permet de séparer un module différentiel soluble en une partie régulière et une partie totalement irrégulière.

Le plan de l'exposé est le suivant. Dans la première section, on présente les concepts et les résultats fondamentaux concernant les équations différentielles sur les couronnes qui sont utilisés de façon essentielle dans l'exposé : estimation de Dwork-Robba, rayons de convergence génériques, théorème de Christol-Dwork sur les antécédents de Frobenius, condition de Robba.

La seconde section est consacrée à l'étude des approximations des entiers p-adiques et à l'action du groupe symétrique sur ces approximations. Cette étude est fondamentale dans la construction des exposants p-adiques qui est présentée dans la section 3. Ici nous ne suivons pas la présentation initiale de Christol et Mebkhout [C-M2], mais donnons plutôt la présentation simplifiée découverte ultérieurement par Dwork [D9] (voir aussi [C-M4] dont nous nous sommes largement inspirés). Nous présentons aussi dans cette section l'analogue p-adique du théorème de Fuchs.

Les sections 4, 5, et 6 sont consacrées respectivement aux pentes p-adiques, à la finitude de l'indice et à la formule de l'indice local. Enfin dans la section 7, nous présentons une application remarquable de la théorie précédente, qui en était en fait une motivation importante. Il s'agit du théorème de finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer que Mebkhout [Me] a su déduire du théorème de finitude de l'indice pour les modules avec structure de Frobenius. Ce même énoncé a été également démontré par P. Berthelot [B1] en utilisant une approche toute différente basée sur les résultats de de Jong sur les altérations (cf. [B2]).

Faute de place, nous ne parlerons pas d'une autre application importante, à savoir de l'utilisation qu'ont fait Christol et Mebkhout de leur théorie pour construire une catégorie de coefficients p-adiques sur les courbes. Ils démontrent en particulier un théorème de prolongement local des faisceaux analytiques cohérents à connexion dont ils déduisent un théorème d'algébrisation d'une classe de fibrés analytiques p-adiques. Nous renvoyons à [C-M3] § 9 pour plus de détails.

Le présent texte ne rend justice que très imparfaitement aux travaux fondateurs de Dwork et de Robba sur les équations différentielles p-adiques. Nous ne pouvons que recommander au lecteur leur étude et regretter qu'un exposé du séminaire n'ait pas déjà été consacré à ce sujet.

Terminologie. — Soit $\mathcal{A}$ un anneau de fonctions d'une variable x sur lequel l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx}$ agit naturellement. On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur un corps K. Par définition un $\mathcal{A}$-module différentiel sera un $\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]$-module (à gauche) $\mathcal{M}$ qui est libre de rang fini comme $\mathcal{A}$-module. On dira également que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module à connexion.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]$-modules, on dira que $\mathcal{M}$ admet un indice dans $\mathcal{N}$ si les K-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ sont de dimension finie. On pose alors

$$\chi(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M},\mathcal{N}) - \dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M},\mathcal{N}).$$

1. Équations différentielles sur les couronnes

1.1. Fonctions analytiques sur une couronne

Dans tout ce texte on appelle corps p-adique une extension K de $\mathbf{Q}_p$ munie d'une norme $|-|$ prolongeant la norme usuelle de $\mathbf{Q}_p$. Soit K un tel corps. On supposera dans la suite que K est complet. On note $\tilde{K}$ le complété d'une clôture algébrique de K. Pour tout intervalle I de $\mathbf{R}_+$ on note $C(I)$ la couronne

$$C(I) = \{x \in \tilde{K} \mid |x| \in I\},$$

et $\mathcal{A}_K(I)$ le K-espace vectoriel des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k x^k$ à coefficients dans K qui convergent dans la couronne $C(I)$. Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k x^k \in \mathcal{A}_K(I)$, on posera $||f||_\rho = \sup |a_k|\rho^k$ pour ρ dans I. Comme la fonction $\rho \mapsto ||f||_\rho$ est logarithmiquement convexe (on dira qu'une fonction réelle $F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ a logarithmiquement une propriété si la fonction $x \mapsto \log F(\exp x)$ a cette propriété), la topologie sur $\mathcal{A}_K(I)$ définie par la famille des normes $||-||_\rho$ est celle de la convergence uniforme sur les sous-couronnes fermées. L'algèbre $\mathcal{A}_K(I)$ est ainsi munie d'une structure d'espace de Fréchet. Les normes $||-||_\rho$ sont multiplicatives et se prolongent naturellement au corps des fractions de $\mathcal{A}_K(I)$, que l'on notera $\mathcal{A}'_K(I)$, ainsi qu'aux matrices à coefficients dans $\mathcal{A}'_K(I)$. Si r est un réel > 0, on notera $\mathcal{A}_K(r)$ et $\mathcal{A}'_K(r)$ pour $\mathcal{A}_K([0,r[)$ et $\mathcal{A}'_K([0,r[)$.

On note $\mathcal{R}_K(r)$ la limite inductive des algèbres de Fréchet $\mathcal{A}_K(]r-\varepsilon,r[)$, pour $\varepsilon > 0$ et on définit l'algèbre $\mathcal{H}^\dagger_K(r)$ par la suite exacte de $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$-modules

$$0 \to \mathcal{A}_K(r) \to \mathcal{R}_K(r) \to \mathcal{H}^\dagger_K(r) \to 0.$$

Soit $\mathcal{H}_K(]\infty, r-\varepsilon[)$ l'algèbre de Fréchet des fonctions analytiques sur le disque $\{x \mid |x| > r\} \cup \{\infty\}$ nulles à l'infini. L'algèbre $\mathcal{H}^\dagger_K(r)$ s'identifie naturellement à la limite inductive des algèbres $\mathcal{H}_K(]\infty, r-\varepsilon[)$ et de plus $\mathcal{R}_K(r)$ est somme directe topologique de $\mathcal{A}_K(r)$ et de $\mathcal{H}^\dagger_K(r)$.

1.2. Estimation de Dwork-Robba

La majoration suivante est essentielle. Une présentation agréable de la démonstration (élémentaire) de [D-R2] est donnée dans le livre [D-G-S].

THÉORÈME 1.2 ([D-R2]). — *Soit* $Y \in \mathrm{GL}(m, \mathcal{A}'_K(r))$.
On pose $A_n = \frac{1}{n!}(\frac{d^n}{dx^n}Y)Y^{-1}$. *Alors*

$$||A_n||_\rho \leq \rho^{-m}\{n, m-1\}_p \sup_{0\leq i\leq m-1} \rho^i ||i!A_i||_\rho$$

pour $\rho < r$, avec

$$\{n, m-1\}_p = \sup\left\{ \frac{1}{|\lambda_1 \cdots \lambda_{m-1}|_p} \;\middle|\; 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{m-1} \leq n \text{ et } \lambda_i \in \mathbf{N}^\times \right\}.$$

En particulier $\{n, m-1\}_p \leq n^{m-1}$.

1.3. Rayon de convergence

On suppose K algébriquement clos et on considère une extension normée complète algébriquement close Ω avec $|\Omega| = \mathbf{R}_+$ de corps résiduel transcendant sur K. Soit $r > 0$. Un disque générique est un disque ouvert $D(t_r, r^-)$ de Ω avec $|t_r| = r$ ne rencontrant pas $\mathbf{C}_p$. Il est possible de trouver Ω tel qu'un tel t_r existe pour tout r.

Dans la suite on désignera par $\mathcal{B}_K(]r, R[)$ l'un des deux anneaux $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ ou $\mathcal{A}'_K(]r, R[)$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}_K(]r, R[)$-module différentiel. Pour ρ dans $]r, R[$, on définit le rayon de convergence $R_\rho(\mathcal{M})$ dans le disque générique de rayon ρ comme le minimum de ρ et du rayon de convergence des solutions de $\mathcal{M}$ dans les disques génériques de rayon ρ. Plus concrètement, fixons une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$ et notons G la matrice de $\frac{d}{dx}$ dans cette base, G_i celle de $(\frac{d}{dx})^i$. On a la relation

$$G_{i+1} = \frac{d}{dx} G_i + G_i G.$$

De plus la matrice fondamentale du système $\frac{d}{dx} - G$ au voisinage de t_r est donnée par la série

$$Y_G(t_r, x) = \sum_{i \geq 0} G_i(t_r) \frac{(x - t_r)^i}{i!}.$$

On en tire que $R_\rho(\mathcal{M})$ est donné par formule suivante (ne faisant pas intervenir Ω) :

$$R_\rho(\mathcal{M}) = \inf(\rho, \liminf_{i \to \infty} ||G_i/i!||_\rho^{-1/i}).$$

On déduit du théorème de Lutz que $R_\rho(\mathcal{M})$ n'est pas nul.

PROPOSITION 1.3.1 ([C-D][Y]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}_K(]r, R[)$-module différentiel.*

(1) Si $\mathcal{B}_K(]r, R[) = \mathcal{A}_K(]r, R[)$, la fonction $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$ est logarithmiquement concave sur l'intervalle $]r, R[$.

(2) On suppose que $\mathcal{M}$ est de la forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}_K(]r, R[)[\frac{d}{dx}]/P\mathcal{B}_K(]r, R[)[\frac{d}{dx}]$$

pour $P = (x\frac{d}{dx})^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x\frac{d}{dx})^i$, avec a_i dans $\mathcal{B}_K(]r, R[)$.

(a) Soit ρ dans $]r, R[$. Si, pour un indice i_0, $||a_{i_0}||_\rho > 1$, alors

$$R_\rho(\mathcal{M}) = \rho p^{-1/(p-1)} \min_{0 \leq i \leq m-1} ||a_i||_\rho^{-1/(i+1)}.$$

(b) Soit ρ dans $]r, R[$. Si, pour tout i, $||a_i||_\rho \leq 1$, alors $R_\rho(\mathcal{M}) \geq \rho p^{-1/(p-1)}$.

On renvoie à [C-D] et [Y] pour la démonstration de cette proposition. L'énoncé (1) est conséquence du fait que $\rho \mapsto ||f||_\rho$ est logarithmiquement convexe et l'énoncé (2) est déjà dans des travaux anciens de Dwork; son analogue x-adique a été utilisé par Katz [Ka] dans sa démonstration du théorème de Turritin.

1.4. Antécédents de Frobenius : le théorème de Christol-Dwork

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}_K(]r, R[)$-module différentiel. Un antécédent de Frobenius de $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{B}_K(]r^p, R^p[)$-module différentiel dont l'image inverse par le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ est isomorphe à $\mathcal{M}$. On définit de même, en remplaçant p par p^h, les antécédents de Frobenius d'ordre h. Comme on le verra dans la suite de cet exposé, l'énoncé suivant est fondamental.

THÉORÈME 1.4.1 ([C-D]).

(1) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel tel que $R_\rho(\mathcal{M}) > p^{-\frac{1}{p}}\rho$ pour tout ρ dans l'intervalle $]r, R[$. Il existe un antécédent de Frobenius $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tel que $R_{\rho^p}(\mathcal{N}) = R_\rho(\mathcal{M})^p$ pour tout ρ dans $]r, R[$. De plus un tel $\mathcal{A}_K(]r^p, R^p[)$-module différentiel est unique à isomorphisme près.

(2) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel tel que $R_\rho(\mathcal{M}) > p^{-\frac{1}{p-1}}\rho$ pour tout ρ dans l'intervalle $]r, R[$. Il existe un antécédent de Frobenius $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}'_K(]r, R[)$ tel que $R_{\rho^p}(\mathcal{N}) = R_\rho(\mathcal{M})^p$ pour tout ρ dans $]r, R[$. De plus un tel $\mathcal{A}'_K(]r^p, R^p[)$-module différentiel est unique à isomorphisme près.

Remarques. —

1) Localement, un module différentiel possède en général p antécédents distincts. C'est la condition portant sur le rayon de convergence qui garantit l'unicité.

2) Dans (2) les singularités de l'antécédent $\mathcal{N}$ sont au pire apparentes.

Différents résultats sur l'existence d'antécédents de Frobenius avaient déjà été obtenus dans des disques et des circonférences par Christol [C1], [C2], [C3]. Pour démontrer le théorème 1.4.1 Christol et Dwork commencent par démontrer, en raffinant les méthodes utilisées dans [C3] et en utilisant 1.2 et son analogue x-adique, que l'intervalle $]r, R[$ est recouvert par de petits intervalles sur lesquels un antécédent de Frobenius existe. Ils parviennent ensuite à recoller les divers antécédents en utilsant leur unicité et l'analogue p-adique de la décomposition de Birkhoff. Une difficulté technique provient de l'utilisation du lemme du vecteur cyclique qui introduit des singularités apparentes.

Une situation où le théorème de Christol-Dwork prend une forme particulièrement agréable est celle où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel tel que $R_\rho(\mathcal{M}) = \rho$ pour tout ρ dans $]r, R[$. On dira alors que $\mathcal{M}$ a la propriété de Robba. Cette condition a été mise en évidence par Robba, qui a été le le premier à voir que cette condition est l'analogue p-adique de la régularité au sens de Fuchs (cf. [R5]).

COROLLAIRE 1.4.2. — *L'image inverse par le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\mathcal{A}_K(]r^p, R^p[)$-modules différentiels vérifiant la condition de Robba et celle des $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-modules différentiels vérifiant la condition de Robba.*

2. Approximation des nombres p-adiques

Dans cette section $|-|$ désignera la norme usuelle sur $\mathbf{R}$ et $|-|_p$ la norme usuelle sur $\mathbf{Z}_p$. Pour tout réel x, on notera $\langle x \rangle$ la distance de x à $\mathbf{Z}$. Les résultats de cette section sont dus à Christol et Mebkhout ([C-M2] § 4).

2.1. Approximation

On considère les sous-groupes $\mathcal{N}$ (suites négligeables) et $\mathcal{E}$ (suites cohérentes) de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définis par

$$\mathcal{N} = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \langle a_i \rangle = O(ip^{-i})\}$$

et

$$\mathcal{E} = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \langle pa_{i+1} - a_i \rangle = O(p^{-i})\}.$$

Soit α dans $\mathbf{Z}_p$. Une suite (α_i) d'entiers avec α_i congru à α modulo p^i pour tout i sera appelée approximation de α. Si (α_i) est une approximation de α, la suite $(p^{-i}\alpha_i)$ appartient à $\mathcal{E}$. De plus si (α'_i) est une autre approximation de α, la suite $(p^{-i}(\alpha_i - \alpha'_i))$ appartient à $\mathcal{N}$. D'autre part, si α est entier, la suite $(p^{-i}\alpha_i)$ appartient à $\mathcal{N}$, car $\langle p^{-i}\alpha_i \rangle \leq p^{-i}|\alpha_i|$. En associant à la classe de α celle de la suite $(p^{-i}\alpha_i)$, on obtient donc un morphisme de groupes $\theta : \mathbf{Z}_p/\mathbf{Z} \to \mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E}$.

THÉORÈME 2.1.1. — *Le morphisme θ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit α dans $\mathbf{Z}_p$. On considère l'approximation (α_i) telle que α_i est dans l'intervalle $]-\frac{p^i}{2}, \frac{p^i}{2}]$ pour tout i. Si α n'est pas entier, on a $\alpha_i \neq \alpha_{i-1}$ pour une infinité d'entiers i. Comme $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ est divisible par p^{i-1}, on a $\langle p^{-i}\alpha_i \rangle \geq \frac{1}{2p}$ pour de tels entiers, ce qui démontre l'injectivité.

Pour la surjectivité, on commence par remarquer que pour tout réel c il existe un réel d tel que $p\langle c - \frac{d}{p} \rangle = \langle pc \rangle$. Puis, pour a dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de réels, on construit par récurrence une suite d'entiers α_i tels que

$$p^i \langle a_i - p^{-i}\alpha_i \rangle \leq \langle a_0 \rangle + \sum_{j=0}^{i-1} p^j \langle pa_{j+1} - a_j \rangle.$$

En effet, il suffit de prendre $\alpha_0 = 0$, et une fois construit α_i, de poser $\alpha_{i+1} = \alpha_i + dp^i$ avec d un entier tel que

$$p^{i+1} \langle a_{i+1} - p^{-i-1}\alpha_i - dp^{-1} \rangle \leq \langle a_0 \rangle + \sum_{j=0}^{i} p^j \langle pa_{j+1} - a_j \rangle,$$

dont l'existence est garantie par l'observation précédente. Notons α la limite de la suite (α_i). Si a appartient à $\mathcal{E}$, on vérifie directement que l'image par θ de la classe de α est égale à celle de a.□

2.2. Nombres de Liouville

Un nombre α de $\mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{Z}$ est dit de Liouville si

$$\liminf_{\substack{s\to\pm\infty \\ s\in\mathbf{Z}}} |s-\alpha|_p^{1/|s|} < 1.$$

C'est une propriété de la classe de α dans $\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}$. Par exemple les nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$ ne sont pas de Liouville. Une suite a de $\mathcal{E}$ sera dite (**NL**) si elle appartient à $\mathcal{N}$ ou si

$$\liminf(i^{-1}p^i\langle a_i\rangle) = \infty.$$

C'est une propriété de la classe de a dans $\mathcal{E}/\mathcal{N}\cap\mathcal{E}$. On vérifie facilement (cf. [C-M2 6.3]) que le morphisme θ établit une bijection entre les classes non de Liouville et les classes (**NL**). L'énoncé suivant est important.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit a une suite de $\mathcal{E}$ qui est* (**NL**) *et soit b une suite de $\mathcal{N}$. Si $a_i - b_i$ est entier pour une infinité de i, alors a appartient également à $\mathcal{N}$.*

Démonstration. — En effet, on a alors

$$\liminf(i^{-1}p^i\langle a_i\rangle) < \limsup(i^{-1}p^i\langle b_i\rangle) < \infty.\square$$

2.3. Action du groupe symétrique

On fixe ici un entier $m \geq 2$. On note $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations de $\{1,\cdots,m\}$ et on pose $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^{\mathbf{N}}$. On considère la relation d'équivalence sur $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^m$ donnée par $a \sim b$ si il existe σ dans $\mathfrak{G}$ tel que $a-\sigma(b)$ appartienne à $\mathcal{N}^m$. Par restriction et passage au quotient on en déduit une relation d'équivalence, que l'on notera encore $\sim$, sur $(\mathcal{E}/\mathcal{N}\cap\mathcal{E})^m$, et donc, via l'isomorphisme θ, également sur $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$. On appelera par abus de langage la classe d'équivalence pour $\sim$ d'un élément de $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ sa $\mathfrak{G}$-orbite.

Soit $\alpha = (\alpha^1,\cdots,\alpha^m)$ un élément de $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$. En général, comme le montre l'exemple 2.3.2, la $\mathfrak{G}$-orbite de α est plus grande que sa $\mathfrak{S}$-orbite. On a cependant l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.3.1. — *Soit $\alpha = (\alpha^1,\cdots,\alpha^m)$ un élément de $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$. Si aucune différence $\alpha^i - \alpha^j$ n'est de Liouville, alors la $\mathfrak{G}$-orbite de α coïncide avec sa $\mathfrak{S}$-orbite.*

Démonstration. — Il s'agit de démontrer que si deux éléments de $\mathcal{E}^m$, $\mathbf{a} = (a^1, \cdots, a^m)$ et $\mathbf{b} = (b^1, \cdots, b^m)$ sont équivalents pour $\sim$, et si tous les $a^i - a^j$ sont (**NL**), alors il existe une permutation σ telle que $\sigma(b) - a$ appartienne à $\mathcal{N}^m$. Notons $\simeq$ la relation "être congru modulo $\mathcal{N}^m$". On déduit facilement des relations $(p\mathbf{a}_{i+1}) \simeq \mathbf{a}$, $(p\mathbf{b}_{i+1}) \simeq \mathbf{b}$ et $(\sigma_i(\mathbf{b}_i)) \simeq \mathbf{a}$ que $(\sigma_{i+1} \circ \sigma_i^{-1}(\mathbf{a}_i)) \simeq \mathbf{a}$. Fixons des entiers i et j. En appliquant la proposition 2.2.1 aux suites $a = \mathbf{a}^i - \mathbf{a}^j$ et $b = (\mathbf{a}_h^{\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}(i)} - \mathbf{a}_h^i)$, on obtient que pour h assez grand, l'égalité $\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}(i) = j$ entraîne que $\mathbf{a}^i - \mathbf{a}^j$ appartient à $\mathcal{N}$. Il existe donc un entier h_0, tel que pour $h \geq h_0$ les permutations $\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}$ et $\chi_h = \sigma_h \circ \sigma_{h_0}^{-1}$ fixent l'image de $\mathbf{a}$ dans $(\mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E})^m$. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_{h_0}(\mathbf{b}) - \mathbf{a} &\simeq \sigma_{h_0}(\mathbf{b}) - (\chi_h^{-1}(\mathbf{a}_h)) \\ &\simeq (\chi_h^{-1}(\sigma_h(\mathbf{b}_h) - \mathbf{a}_h)) \simeq 0. \square \end{aligned}$$

2.3.2. Exemple. — L'exemple suivant est dû à B.Dwork. Soit $\gamma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une application croissante telle que $\gamma(i+1)p^{-\gamma(i)} \geq \varepsilon > 0$. On pose $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} p^{\gamma(2i)}$ et $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} p^{\gamma(2i+1)}$. On peut vérifier (cf. [C-M2]) que α et β sont des nombres de Liouville et que les classes de $(\alpha, -\beta)$ et de $(\alpha - \beta, 0)$ dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^2$ sont dans la même $\mathfrak{G}$-orbite bien qu'elles ne se déduisent pas par permutation dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^2$.

3. Exposants p-adiques et forme normale de Fuchs

3.1. Transformée de Fourier de la matrice fondamentale

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel de rang m. On supposera dans toute la section 3 que K est algébriquement clos et complet et que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba. On fixe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$ et on note comme en 1.3.1 G_i la matrice de $\frac{d}{dx}^i$ dans cette base. La matrice fondamentale du système $\frac{d}{dx} - G$ est donnée par la série

$$Y_G(x,t) = \sum_{i \geq 0} G_i(x) \frac{(t-x)^i}{i!}.$$

dont la condition de Robba garantit la convergence dès que $r < |x| = |t| < R$ et $|t - x| < |x|$.

Pour tout entier h on notera Γ_h le groupe des racines p^h-ièmes de l'unité dans K. Pour $a = (a_1, \cdots, a_m)$ dans $\mathbf{Z}_p^m$ et ζ dans Γ_h, on notera ζ^a la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\zeta^{a_1}, \ldots, \zeta^{a_m}$. On considère les matrices

$$R_{a,h}(x) = p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-a} Y(x, x\zeta).$$

qui sont des transformées de Fourier tordues de la matrice fondamentale. Pour a le vecteur nul, on retrouve la matrice de changement de base donnant l'antécédent de Frobenius d'ordre h.

PROPOSITION 3.1.1. — *Soit a dans $\mathbf{Z}_p^m$ et soit h un entier.*

(1) La matrice $R_{a,h}$ est à coefficients dans $\mathcal{A}_K(]r,R[)$.

(2) Pour tout ζ dans Γ_h, on a la relation

$$\zeta^a R_{a,h}(x) = R_{a,h}(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

(3) Pour tout ρ dans $]r,R[$, il existe une constante c_ρ telle que

$$||R_{a,h}||_\rho \leq c_\rho p^{hm}.$$

(4) Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de représentants de $\mathbf{Z}_p^m$ modulo $p\mathbf{Z}_p^m$. On a

$$\det(R_{a,h}) = \sum_{b \in \mathcal{R}} \det(R_{a+p^h b, h+1}).$$

Remarque. — Supposons que le système $\frac{d}{dx} - G$ admette une solution du type de Fuchs $U(x)x^A$, avec U analytique inversible et A une matrice à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. On aurait alors

$$Y(x,t) = U(t) t^A x^{-A} U^{-1}(x),$$

et en particulier, pour ζ dans Γ_h,

$$\zeta^A U^{-1}(x) = U^{-1}(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

Autrement dit on retrouve la relation (2) pour a la partie semi-simple de A.

Indication de démonstration. — On déduit de l'estimation de Dwork-Robba 1.2 que

$$||G_n/n!||_\rho = O(n^{m-1}\rho^n).$$

On en tire aisément (1) et (3) en utilisant l'inégalité

$$|\zeta - 1| \leq p^{-1/(p-1)p^h}.$$

La relation (2) se vérifie par un calcul direct utilisant la relation

$$Y(x,t) = Y(y,t)\, Y(x,y)$$

pour $|y-x| < |x|$ et $|t-x| < |x|$. Quant à (4), c'est une conséquence de la formule d'inversion de la transformation de Fourier (discrète).□

COROLLAIRE 3.1.2. — *Pour tout ρ dans $]r,R[$, il existe a dans $\mathbf{Z}_p^m$ tel que $|\det(R_{a,h})|_\rho$ soit égal à 1 pour tout entier h.*

Démonstration. — Cela résulte de la relation (4) par récurrence et approximations successives.□

3.2. Exposants p-adiques

DÉFINITION 3.2.1. — *On définit $\mathcal{PE}(G,]r,R[)$ comme l'ensemble des a de $\mathbf{Z}_p^m$ tels qu'il existe une suite S_h de matrices analytiques sur la couronne $C(]r,R[)$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(1) Pour tout ζ dans Γ_h, on a la relation

$$\zeta^a S_h(x) = S_h(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

(2) Pour tout ρ dans $]r,R[$, il existe une constante c_ρ telle que

$$||S_h||_\rho \leq c_\rho p^{hm}.$$

(3) Il existe ρ dans $]r,R[$ tel que, pour tout entier h, $|\det(S_h)|_\rho = 1$.

On vérifie facilement que l'image de $\mathcal{PE}(G,]r,R[)$ dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ est indépendante du choix de la base de $\mathcal{M}$ et est une réunion de $\mathfrak{G}$-orbites. On notera cet ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{M},]r,R[)$. C'est l'ensemble des exposants p-adiques de $\mathcal{M}$ dans la couronne $C(]r,R[)$.

THÉORÈME 3.2.2. — *L'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{M},]r,R[)$ est la $\mathfrak{G}$-orbite d'un point.*

Indication de démonstration. — Le fait que $\mathcal{E}(\mathcal{M},]r,R[)$ ne soit pas vide résulte du corollaire 3.1.2.

LEMME 3.2.3. — *Si a appartient à $\mathcal{PE}(G,]r,R[)$, pour tout ρ dans $]r,R[$, il existe une suite S_h de matrices vérifiant (1), (2) et (3) pour ce ρ.*

Indication de démonstration. — Partons d'une suite S_h vérifiant (1), (2) et (3) pour un certain ρ_0. La condition (1) impose que le nombre de zéros de $\det S_h$ sur une circonférence est divisible par p^h. Les contraintes que cette propriété impose au polygône de Newton de $\det S_h$ sont suffisament fortes pour entrainer l'existence d'une suite de scalaires δ_h telle que la suite des $\delta_h S_h$ vérifie (1), (2) et (3) pour ρ.□

Soient a et b dans $\mathcal{PE}(G,]r,R[)$ et soient S_h et T_h des suites de matrices vérifiant (1), (2) et (3) pour a et b respectivement. Le lemme précédent permet de supposer que S_h et T_h vérifient (3) pour le même ρ. On pose $Q_h = S_h T_h^{-1}$. Il résulte alors des hypothèses que Q_h vérifie (2) et (3) ainsi que la relation

$$\zeta^a Q_h(x) \zeta^{-b} = Q_h(\zeta x)$$

pour ζ dans Γ_h. On déduit de la relation (3) pour Q_h qu'il existe une permutation σ_h telle que

$$\prod |(Q_h)_{i,\sigma_h(i)}| = 1.$$

On vérifie alors à l'aide des autres conditions que la classe de a est égale à l'image par $\sigma = (\sigma_h) \in \mathfrak{G}$ de celle de b.□

3.3. Forme normale de Fuchs

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel de rang m vérifiant la condition de Robba. D'après le théorème 3.2.2 l'ensemble des exposants $\mathcal{E}(\mathcal{M},]r,R[)$ est la $\mathfrak{G}$-orbite d'un point dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$. On dira que les différences des exposants de $\mathcal{M}$ ne sont pas de Liouville si ce point est la $\mathfrak{G}$-orbite de $\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^m)$ dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ tel qu'aucune différence $\alpha^i - \alpha^j$ ne soit de Liouville. D'après la proposition 3.1 la $\mathfrak{G}$-orbite de α coïncide alors avec sa $\mathfrak{S}$-orbite. Autrement dit α est un élément de $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ bien défini à permutation près. Par abus de langage on dira alors que cet élément de $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ est l'ensemble des exposants p-adiques de $\mathcal{M}$.

Pour l'énoncé qui suit on a besoin pour des raisons techniques que $\mathcal{M}$ provienne après extension des scalaires d'un $\mathcal{H}_K(]r,R[)$-module différentiel, avec $\mathcal{H}_K(]r,R[)$ l'anneau des éléments analytiques dans la couronne, i.e. le complété de l'anneau des fonctions rationnelles sans pôle dans la couronne $C(]r,R[)$ pour la convergence uniforme dans la couronne. Bien sûr on pourrait aussi ne pas imposer cette condition et énoncer le résultat sur les couronnes $C(]r+\varepsilon, R-\varepsilon[)$ pour $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 3.3.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel de rang m vérifiant la condition de Robba et dont les différences des exposants ne sont pas de Liouville. On suppose que $\mathcal{M}$ provient après extension des scalaires d'un $\mathcal{H}_K(]r,R[)$-module différentiel. Il existe alors une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la matrice de $x\frac{d}{dx}$ soit une matrice constante dont la partie semi-simple a pour valeurs propres exactement l'ensemble des exposants p-adiques de $\mathcal{M}$.*

La démonstration de ce résultat est difficile et technique, que ce soit la démonstration originelle de Christol et Mebkhout [C-M2] utilisant les antécédents de Frobenius de Christol-Dwork ou celle donnée ultérieurement par Dwork [D9], qui repose sur une étude très fine du comportement asymptotique des suites $S_{p^{j+1}} S_{p^j}^{-1}$.

Pour α dans $\mathbf{Z}_p$ on note $\mathcal{A}^\alpha$ le $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel de rang 1 engendré par x^α. La classe d'isomorphisme de ce module ne dépend que de la classe de α modulo $\mathbf{Z}$.

COROLLAIRE 3.3.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel. On suppose que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba et que les différences de ses exposants ne sont pas de Liouville. Le module $\mathcal{M}$ est extension successive de modules $\mathcal{A}^\alpha$, les classes modulo $\mathbf{Z}$ des α parcourant exactement l'ensemble des exposants p-adiques de $\mathcal{M}$.*

Remarque. — Dans toute cette section le corps K était supposé algébriquement clos. Dans [C-M3] Christol et Mebkhout utilisent le théorème de Tate-Ax [A] pour descendre la décomposition donnée par le corollaire précédent de $\mathbf{C}_p$ à un sous corps complet.

4. Pentes p-adiques

4.1. La plus grande pente

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel. La fonction $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$ étant logarithmiquement concave sur l'intervalle $]r,R[$, la limite $R_{R^-}(\mathcal{M}) = \lim_{\rho \to R^-} R_\rho(\mathcal{M})$ existe et est $\leq R$. On dira que $\mathcal{M}$ est soluble en R si $R_{R^-}(\mathcal{M}) = R$. Cette définition s'étend clairement aux $\mathcal{R}_K(R)$-modules différentiels.

Le résultat suivant est dû à Christol et Mebkhout.

THÉORÈME 4.1.1 ([C-M3]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel soluble en R. Il existe un nombre rationnel $\beta = \beta(\mathcal{M}) \geq 1$ tel que $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$ pour ρ suffisamment proche de R.*

Indication de démonstration. — On peut supposer que $\mathcal{M}$ n'a pas la propriété de Robba dans une petite couronne $]R-\varepsilon,R[$. Comme la fonction $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$ est logarithmiquement concave, on a $R_\rho(\mathcal{M}) < \rho$ pour ρ dans $]R-\varepsilon,R[$. Il existe donc une suite strictement croissante r_h de limite R, telle que dans l'intervalle $]r_{h-1},r_h[$, on ait

$$\rho p^{-\frac{1}{p^{h-1}(p-1)}} < R_\rho(\mathcal{M}) < \rho p^{-\frac{1}{p^h(p-1)}}.$$

Soit $\mathcal{N}_h$ l'antécédent de Frobenius d'ordre h de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}'_K(]r_{h-1},r_h[)$ obtenu en appliquant h fois le théorème de Christol-Dwork 1.4.1. On a en particulier $R_\rho(\mathcal{N}_h) < \rho p^{-\frac{1}{p-1}}$ pour ρ dans $]r_{h-1}^{p^h}, r_h^{p^h}[$. En appliquant le lemme du vecteur cyclique à $\mathcal{N}_h$, on se retrouve dans la situation (2) (a) de la proposition 1.3.1, qui donne $R_\rho(\mathcal{N}_h)$ explicitement. En particulier, la fonction $R_\rho(\mathcal{N}_h)$ est par morceaux de la forme $C_h\rho^{\beta_h}$ avec C_h un constante et β_h un rationnel dont le dénominateur est borné par le rang m de $\mathcal{M}$. On en déduit que $R_\rho(\mathcal{M})$ est logarithmiquement linéaire par morceaux et que les dénominateurs des pentes sont bornés par m. Le résulte en découle aisément, en utilisant à nouveau le fait que la fonction $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$ est logarithmiquement concave.□

Le rationnel $\beta(\mathcal{M})$ sera appelé la plus grande pente du module $\mathcal{M}$ en R et noté $pt(\mathcal{M})$. On définit de même, en prenant un modèle sur un couronne convenable, la plus grande pente d'un $\mathcal{R}_K(R)$-module différentiel soluble en R.

Sur les petites couronnes où $R_\rho(\mathcal{M})$ est de la forme $R(\frac{\rho}{R})^\beta$ on a l'estimation suivante de la taille des matrices G_i.

PROPOSITION 4.1.2 ([C-M3]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]R-\varepsilon,R[)$-module différentiel tel que $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$ avec $\beta > 1$ pour ρ dans $]R-\varepsilon,R[$ et soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}$. Il existe alors une fonction c logarithmiquement concave et une fonction M qui vérifient, pour ρ dans $]R-\varepsilon,R[$, les inégalités*

$$\rho^i ||G_i/i!||_\rho \leq M(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)i} \quad \textit{pour} \quad i \geq 0$$

$$\max_{0 \leq i \leq p^h} \rho^i ||G_i/i!||_\rho \geq c(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h} \quad \textit{pour} \quad h \geq 1.$$

Christol et Mebkhout en déduisent l'énoncé suivant, technique mais important pour la suite.

THÉORÈME 4.1.3 ([C-M3]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]R-\varepsilon,R[)$-module différentiel tel que $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$ avec $\beta > 1$ pour ρ dans $]R-\varepsilon,R[$ et soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}$. Il existe alors des nombres $\lambda_{i,h}$, pour $0 \leq i \leq p^h$, ne prenant que la valeur 0 ou 1, une fonction c logarithmiquement concave et une fonction M tels que, si on note L_h la matrice dans $\mathcal{B}$ de $\sum_{i=0}^{p^h} \lambda_{i,h} x^i \frac{d^i}{i!dx^i}$, on a les inégalités suivantes pour ρ dans $]R-\varepsilon,R[$,*

$$c(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h} \leq ||L_h||_\rho \leq M(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h}.$$

4.2. Un peu de topologie

Pour tout entier k on pose $\Delta^k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}$. Soit $P = \sum a_k \Delta^k$ avec a_k dans $\mathcal{A}_K(I)$ un élément de $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$. Pour tout réel γ et tout ρ dans I, on pose

$$||P||_{\gamma,\rho} = \sup_k ||a_k||_\rho \rho^{-\gamma\rho}.$$

On a ainsi une famille de semi-normes sur $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$. On note $\mathcal{T}_\gamma$ la topologie définie par ces semi-normes, pour γ fixé, sur $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$. On note de même la topologie sur $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ limite inductive des $\mathcal{T}_\gamma$ sur $\mathcal{A}_K(]r-\epsilon,r[)[\frac{d}{dx}]$. On définit de même, similairement à 1.1, une topologie $\mathcal{T}_\gamma$ sur $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$ vu comme limite inductive des algèbres $\mathcal{H}_K(]\infty, r-\varepsilon[)[\frac{d}{dx}]$ telle que $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ soit somme directe topologique de $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ et de $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$. Les algèbres $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ et $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$ ne sont en général pas complètes ni même limites inductives d'espaces complets.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$ ou $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$-module (à gauche) de type fini. Toute présentation de $\mathcal{M}$ donne une topologie quotient sur $\mathcal{M}$ dont on vérifie facilement qu'elle est indépendante de la présentation. On note cette topologie $\mathcal{T}_\gamma$. Elle n'est en général pas séparée.

Une extension valuée L/K d'un corps valué K est dite immédiate si L et K ont même groupe de valuation et même corps résiduel. Un corps valué est dit maximalement complet s'il n'a pas d'autre extension immédiate que lui-même. Une condition équivalente est que l'intersection d'une suite emboîtée de boules fermées soit non vide (cf. [L]). Un corps complet à valuation discrète est maximalement complet. Par contre $\mathbf{C}_p$ ne l'est pas.

Il résulte du théorème de M.Lazard [L] sur les zéros des fonctions analytiques que si K est maximalement complet alors tout idéal de type fini des anneaux $\mathcal{A}_K(I)$ et $\mathcal{R}_K(r)$ est principal. En particulier, si K est maximalement complet, les anneaux $\mathcal{A}_K(I)$ et $\mathcal{R}_K(r)$ sont cohérents, i.e. leurs idéaux de type finis sont de présentation finie. On en déduit également l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.2.1. — *Si K est maximalement complet, tout sous-module de type fini d'un module libre de type fini sur les anneaux $\mathcal{A}_K(I)$ et $\mathcal{R}_K(r)$ est libre de type fini.*

On en déduit la conséquence importante suivante.

COROLLAIRE 4.2.2. — *On suppose que K est maximalement complet. La catégorie des $\mathcal{A}_K(I)$-modules (resp. des $\mathcal{R}_K(r)$-modules) libres de type fini munis d'une connexion est abélienne.*

Christol et Mebkhout déduisent également de la proposition 4.2.1 le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2.3 ([C-M3]). — *On suppose que K est maximalement complet. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(I)$-module libre de type fini à connexion. Alors, pour tout réel γ, l'adhérence $\bar{0}_\gamma(\mathcal{M})$ de zéro dans $\mathcal{M}$ pour la topologie $\mathcal{T}_\gamma$ et le quotient $\mathcal{M}/\bar{0}_\gamma(\mathcal{M})$ sont des $\mathcal{A}_K(I)$-modules libres de type fini à connexion.*

4.3. Décomposition par rapport à la plus grande pente

Christol et Mebkhout déduisent du théorème 4.1.3 l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.3.1 ([C-M3]). — *On suppose que le corps K est localement compact et que le réel R appartient au groupe des valeurs absolues. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel soluble en R. Alors, pour tout réel γ tel que $1 \leq \gamma < pt(\mathcal{M})$, la topologie $\mathcal{T}_\gamma$ sur $\mathcal{M}_{[R-\varepsilon,R[}$ n'est pas séparée pour $\varepsilon > 0$ assez petit.*

Dans cet énoncé l'hypothèse que le corps K est localement compact est utilisée pour garantir que pour I un intervalle ouvert on peut extraire de toute suite bornée de fonctions de $\mathcal{A}_K(I)$ une sous-suite convergente.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r, R[)$-module différentiel soluble en R. On dira que $\mathcal{M}$ a toutes ses pentes $> \gamma$ en R, si pour $\varepsilon > 0$ assez petit toutes les solutions locales au point générique t_ρ ont toutes un rayon de convergence strictement plus petit que $R(\rho/R)^\gamma$, pour tout ρ dans $]R-\varepsilon, R[$. Cette définition s'étend aux $\mathcal{R}_K(R)$-modules différentiels solubles en R.

THÉORÈME 4.3.2 ([C-M3]). — *On suppose que le corps K est localement compact et que le réel R appartient à l'ensemble des valeurs absolues. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(R)$-module différentiel soluble en R. On suppose que $pt(\mathcal{M}) > 1$. Pour tout réel γ vérifiant $1 \leq \gamma < pt(\mathcal{M})$, il existe une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{M}_{>\gamma} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\leq\gamma} \to 0$$

de $\mathcal{R}_K(R)$-modules différentiels solubles en R telle que $pt(\mathcal{M}_{\leq\gamma}) \leq \gamma$ et toutes les pentes de $\mathcal{M}_{>\gamma}$ soient $> \gamma$.

Indication de démonstration. — On prend un représentant de $\mathcal{M}$, noté encore $\mathcal{M}$, sur une couronne $C(]R-\varepsilon,R[)$ avec ε assez petit. On construit une suite $\mathcal{M}_i$ de $\mathcal{R}_K(R)$-modules différentiels solubles en R en prenant $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$ et pour $\mathcal{M}_{i+1}$ l'adhérence de 0 dans $\mathcal{M}_i$ pour la topologie $\mathcal{T}_\gamma$. La suite est stationnaire car les modules sont libres de rang fini. On prend $\mathcal{M}_{>\gamma}=\mathcal{M}_{i_0}$ avec i_0 minimal vérifiant $\mathcal{M}_{i_0}=\mathcal{M}_{i_0+1}$. On déduit du théorème 4.3.1 que $pt(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\gamma})\leq\gamma$. Le fait que les pentes de $\mathcal{M}_{>\gamma}$ soient toutes $>\gamma$ résulte du lemme qui suit.□

LEMME 4.3.3. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel. Soit γ un réel tel que $\{0\}$ soit dense dans $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{T}_\gamma$. Alors $\mathcal{M}$ n'admet aucune solution non triviale dans les disques génériques $D(t_\rho,R(\rho/R)^\gamma)$ pour ρ assez proche de R.*

4.4. Pentes

On suppose ici que le corps K est localement compact et que R appartient à l'ensemble des valeurs absolues. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(R)$-module différentiel soluble. Christol et Mebkhout déduisent de la proposition 4.1.2 que les $\mathcal{M}_{>\gamma}$, $1\leq\gamma<pt(\mathcal{M})$, forment une filtration décroissante de $\mathcal{M}$ par des sous-$\mathcal{R}_K(R)$-modules différentiels. Pour $1<\gamma<pt(\mathcal{M})$ on pose $Gr_\gamma(\mathcal{M})=\mathcal{M}_{>\gamma-\eta}/\mathcal{M}_{>\gamma}$ pour η assez petit et on dira que γ est une pente de $\mathcal{M}$ si $Gr_\gamma(\mathcal{M})$ n'est pas nul.

On dira que $\mathcal{M}$ est purement de pente γ, si pour $\varepsilon>0$ assez petit toutes les solutions locales au point générique t_ρ sont de rayon de convergence $R(\rho/R)^\gamma$, pour tout γ dans $]R-\varepsilon,R[$, pour un modéle de $\mathcal{M}$.

On déduit alors du théorème 4.1.1 et de ce qui précède l'énoncé suivant.

THÉORÈME 4.4.1. — *Sous les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(R)$-module différentiel soluble en R. Les pentes de $\mathcal{M}$ sont des nombres rationnels et si γ est une pente de $\mathcal{M}$ alors $Gr_\gamma(\mathcal{M})$ est purement de pente γ.*

Ainsi si $\gamma_1<\cdots<\gamma_r$ sont les pentes de $\mathcal{M}$ et m_i désigne le rang de $Gr_{\gamma_i}(\mathcal{M})$, on peut définir le polygône de Newton p-adique de $\mathcal{M}$ en R, comme le polygône de Newton associé à la suite des couples (m_i,γ_i-1). Quand ni les exposants de $\mathcal{M}$ en R ni leurs différences ne sont de Liouville, il résulte du théorème de l'indice 6.1, que les sommets de ce polygône sont entiers, ce qui constitue un analogue p-adique du théorème de Hasse-Arf.

5. Finitude de l'indice

5.1. Dualité et indice

On reprend les notations de 1.1. Ici K sera un sous-corps complet de $\mathbf{C}_p$ et on omettra de faire figurer K en indice lorsque $K=\mathbf{C}_p$. On a un accouplement $\mathcal{A}(r)\times\mathcal{H}^\dagger(r)\to\mathbf{C}_p$

donné par $(f,g) \mapsto \mathrm{Res}(fg)$, Res désignant l'application résidu. D'après le théorème de dualité de [M-S] cet accouplement est une dualité parfaite d'espaces topologique.

L'énoncé suivant, conséquence du théorème de dualité, est fondamental dans l'approche de Christol et Mebkhout.

THÉORÈME 5.1.1 ([C-M1]). — *Soit u un endomorphisme $\mathbf{C}_p$-linéaire continu de $\mathcal{A}(r)$. L'endomorphisme u est à indice si et seulement si l'endomorphisme transposé ${}^t u$ de $\mathcal{H}^\dagger(r)$ est à indice. Si c'est le cas, les espaces vectoriels de dimension finie* $\mathrm{Ker}({}^t u, \mathcal{H}^\dagger(r))$ *et* $\mathrm{Coker}(u, \mathcal{A}(r))$ *(resp.* $\mathrm{Ker}(u, \mathcal{A}(r))$ *et* $\mathrm{Coker}({}^t u, \mathcal{H}^\dagger(r))$*) sont en dualité.*

La démonstration comporte une difficulté technique spécifique au p-adique (et déjà présente dans la preuve du théorème de dualité). Le théorème de Hahn-Banach n'étant valide que pour les corps maximalement complets, il ne peut être utilisé ici. Christol et Mebkhout contournent la difficulté en utilisant le théorème des homomorphismes pour les limites inductives d'espaces de Fréchet de Grothendieck [G] dont la démonstration reste valide sur les corps valués complets.

On déduit du théorème précédent l'énoncé suivant.

THÉORÈME 5.1.2 ([C-M1]). — *Soit $P \in \mathbf{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$ un polynôme différentiel. Soit r_n une suite de réels positifs tendant par valeurs inférieures vers un réel $r > 0$. Si tous les indices $\chi(P, \mathcal{A}(r_n))$ sont finis, alors $\chi(P, \mathcal{A}(r))$ est fini, la suite des $\chi(P, \mathcal{A}(r_n))$ est stationnaire et converge vers $\chi(P, \mathcal{A}(r))$.*

Démonstration. — Il est clair que l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$ est de dimension finie pour tout r. Par conséquent la suite $\mathrm{dimKer}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$ est stationnaire et converge vers $\mathrm{dimKer}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$.

On déduit du théorème de dualité que les espaces $\mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$ sont de dimension finie. Comme $\mathcal{H}^\dagger(r_n)$ est dense dans $\mathcal{H}^\dagger(r_{n+1})$, on obtient que le morphisme

$$\mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n)) \to \mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_{n+1}))$$

est surjectif en utilisant le théorème des homomorphismes de Grothendieck. La suite $\mathrm{dimCoker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$ est donc stationnaire et converge vers $\mathrm{dimCoker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$. On conclut en utilisant le théorème 5.1.1.□

Remarque. — Soit $P \in \mathbf{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$ un polynôme différentiel. On déduit de la suite exacte longue associée à

$$0 \to \mathcal{A}_K(r) \to \mathcal{R}_K(r) \to \mathcal{H}^\dagger_K(r) \to 0$$

que la finitude de l'indice de P sur $\mathcal{R}(r)$ est équivalente à la finitude de l'indice sur $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{H}^\dagger(r)$.

COROLLAIRE 5.1.3 ([C-M1]). — *Soit $P \in \mathbf{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$ un polynôme différentiel. Soit r_n une suite de réels positifs tendant par valeurs inférieures vers un réel $r > 0$. Si tous les indices $\chi(P, \mathcal{R}(r_n))$ sont nuls, alors $\chi(P, \mathcal{R}(r))$ est nul.*

5.2. Indice des modules vérifiant la condition de Robba

Soit α un élément de $\mathbf{Z}_p$. Comme dans la section 3 on note $\mathcal{A}_\alpha$ le $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel engendré par x^α. On vérifie facilement que l'indice $\chi(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{R}_K(R))$ est fini si et seulement si α n'est pas de Liouville et qu'il est alors égal à zéro.

On déduit donc du corollaire 3.3.2 et de la remarque qui le suit l'énoncé suivant.

THÉORÈME 5.2.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(]r,R[)$-module différentiel. On suppose que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba et que ni ses exposants ni les différences de ses exposants ne sont de Liouville. Alors l'indice $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}_K(R))$ est nul.*

5.3. Le théorème de finitude

On note $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ la limite inductive des anneaux d'éléments analytiques $\mathcal{H}_K^\dagger(]r-\varepsilon, r[)$ définis en 3.3. C'est un sous-anneau de $\mathcal{R}_K(r)$. Un $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel $\mathcal{M}$ sera dit soluble en r (resp. injectif en r) si la dimension de l'espace de ses solutions analytiques dans le disque générique centré en t_r de rayon r est égale à son rang (resp. est égale à zéro). Remarquons que, d'après le théorème de continuité de Christol-Dwork [C-D], $\mathcal{M}$ est soluble si et seulement si $\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M}$ l'est.

D'après le théorème de décomposition de Dwork-Robba [D-R1], pour tout $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel $\mathcal{M}$ on a une suite exacte de $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-modules différentiels

$$0 \to \mathcal{M}_{inj} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{sol} \to 0$$

avec $\mathcal{M}_{inj}$ injectif et $\mathcal{M}_{sol}$ soluble. D'autre part, d'après un théorème de Robba [R1], si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel injectif, alors pour ε positif ou nul assez petit, l'indice $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}(r-\varepsilon))$ est bien défini et est nul.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(r)$-module différentiel soluble. On dira que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba, si un représentant $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ sur une petite couronne $C(]r-\varepsilon, r[)$ vérifie la condition de Robba. On définit alors les exposants de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{N},]r-\varepsilon, r[)$, qui est indépendant de $\mathcal{N}$ d'après le lemme 3.2.3.

On suppose dans la suite de cette section que le corps K est localement compact et que r est une valeur absolue. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}_K(r)$-module différentiel soluble, le module $\mathcal{M}^{\leq 1}$ vérifie la condition de Robba et on peut alors poser $\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{M}^{\leq 1}, r)$. Si $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel, on définit les exposants de $\mathcal{M}$ par

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M}_{sol}, r).$$

Enfin si P est un opérateur différentiel dans $K[x][\frac{d}{dx}]$, on définit l'ensemble des exposants de P en r comme $\mathcal{E}(P, r) = \mathcal{E}(\mathcal{M}, r)$, pour $\mathcal{M}$ le $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel associé à P.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de finitude de l'indice de Christol et Mebkhout.

THÉORÈME 5.3.1. — *Soit P est un opérateur différentiel dans $K[x][\frac{d}{dx}]$, avec K un sous-corps localement compact de $\mathbf{C}_p$. Soit $r > 0$ appartenant à l'ensemble des valeurs*

absolues de K. On suppose que ni les exposants de P en r ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors les indices de P dans les anneaux $\mathcal{R}_K(r)$ et $\mathcal{R}(r)$ sont finis et égaux à zéro.

Indication de démonstration. — On va faire la démonstration de l'énoncé sur $\mathcal{R}(r)$, l'énoncé concernant $\mathcal{R}_K(r)$ s'en déduisant.

Soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$-module différentiel associé à P. D'après le corollaire 5.1.3 il suffit de construire une suite de réels $r_n < r$ de limite r telle que $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}(r_n)) = 0$. En utilisant les théorèmes de Dwork-Robba et de Robba, on se ramène au cas où $\mathcal{M}$ est soluble. En utilisant encore le théorème de Robba et le corollaire 5.1.3 on obtient que $\chi((\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M})_{>1}, \mathcal{R}(r))$ est nul. On est donc ramené au cas où $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba et l'énoncé résulte alors du théorème 5.2.1.□

COROLLAIRE 5.3.2. — *Sous les hypothèses précédentes, les indices de P dans les anneaux $\mathcal{A}_K(r)$,$\mathcal{H}_K^\dagger(r)$, $\mathcal{A}(r)$ et $\mathcal{H}^\dagger(r)$ sont finis et on a les égalités $\chi(P, \mathcal{A}_K(r)) = -\chi(P, \mathcal{H}_K^\dagger(r))$ et $\chi(P, \mathcal{A}(r)) = -\chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r))$.*

Remarque. — Par le lemme du vecteur cyclique, on a l'analogue du théorème 5.3.1 et du corollaire 5.3.2 pour les $K[x][\frac{d}{dx}]$-modules holonomes.

Le problème fondamental qui reste ouvert est celui d'avoir des critères garantissant que les hypothèses sur les exposants de P soient satisfaites. Un critère est l'existence d'une structure de Frobenius (cf. 5.4.1). Christol et Mebkhout conjecturent l'énoncé suivant d'algébricité des exposants p-adiques.

CONJECTURE 5.3.3. — *Si P est un opérateur différentiel dans $\bar{\mathbf{Q}}[x][\frac{d}{dx}]$, alors les exposants p-adiques de P en r se relèvent en des éléments de $\bar{\mathbf{Q}}$. De plus, quand r varie, il n'apparaît qu'un nombre fini d'éléments de $\bar{\mathbf{Q}}$ modulo $\mathbf{Z}$.*

5.4. Modules avec structure de Frobenius

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(1)$-module différentiel. On dira que $\mathcal{M}$ admet une structure de Frobenius d'ordre h, si $\mathcal{M}$ est isomorphe à son image inverse par le morphisme $x \mapsto x^{p^h}$.

PROPOSITION 5.4.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(1)$-module différentiel de rang m. On suppose que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Robba et admet une structure de Frobenius d'ordre h. Alors les exposants de $\mathcal{M}$ se relèvent en des éléments de $\frac{1}{1-p^{hm!}}\mathbf{Z}$. En particulier ils ne sont pas de Liouville, ainsi que leurs différences.*

Démonstration. — En effet si a est un représentant de l'exposant de $\mathcal{M}$ dans $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$, a et $p^h a$ sont dans la même $\mathfrak{S}$-orbite. Comme le groupe symétrique est d'ordre $m!$, on en tire que $a = p^{hm!}a$.□

Si $\mathcal{M}$ est un $K[x, \frac{d}{dx}]$-module différentiel on dira que $\mathcal{M}$ admet une structure de Frobenius d'ordre h si $\mathcal{R}_K(1) \otimes_{K[x]} \mathcal{M}$ en admet une. On peut maintenant énoncer le

théorème de finitude de l'indice pour les modules avec structure de Frobenius. En utilisant la proposition précédente, Christol et Mebkhout obtiennent, par une démonstration voisine de celle du théorème 5.3.1, le résultat suivant.

THÉORÈME 5.4.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $K[x, \frac{d}{dx}]$-module différentiel admettant une structure de Frobenius d'ordre h, avec K un sous-corps localement compact de $\mathbf{C}_p$. Alors les conclusions du théorème 5.3.1 et du corollaire 5.3.2 sont valides pour $\mathcal{M}$.*

6. La formule de l'indice

Dans toute la section 6 on supposera que K est un sous-corps localement compact de $\mathbf{C}_p$. Soit r un réel > 0. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}_+$. On écrit $I = I_+ \cap I_-$ avec I_+ un intervalle contenant zéro et I_- un intervalle contenant ∞. On a la décompossition

$$\mathcal{A}_K(I) = \mathcal{A}_K(I_+) \oplus x^{-1}\mathcal{A}_K(I_-).$$

On note γ^+ et γ^- (resp. γ_+ et γ_-) les projections (resp. injections) associées à cette décomposition.

Soit m un entier et u un endomorphisme de $\mathcal{A}_K(I)^m$. On définit les indices généralisés de u comme les indices

$$\tilde{\chi}(u, \mathcal{A}(I_+)) = \chi(\gamma^+ u \gamma_+, \mathcal{A}_K(I_+)^m)$$

et

$$\tilde{\chi}(u, x^{-1}\mathcal{A}(I_-)) = \chi(\gamma^- u \gamma_-, x^{-1}\mathcal{A}_K(I_-)^m).$$

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_K(I)$-module différentiel et soit G la matrice de $x\frac{d}{dx}$ dans une base de $\mathcal{M}$. On peut vérifier (cf. [C-M3]) que les indices généralisés de $x\frac{d}{dx} - G$ sont indépendants du choix de la base. On les notera $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(I_+))$ et $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, x^{-1}\mathcal{A}(I_-))$. De plus ces indices généralisés sont additifs pour les suites exactes courtes. On définit de façon similaire les indices généralisés $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r))$ et $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}_K^\dagger(r))$ pour les $\mathcal{R}_K(r)$-modules différentiels en utilisant la décomposition

$$\mathcal{R}_K(r) = \mathcal{A}_K(r) \oplus \mathcal{H}_K^\dagger(r).$$

Les démonstrations des propriétés précédentes de l'indice généralisé reposent sur le théorème des perturbations compactes. C'est pour cette raison que l'on a fait l'hypothèse que K localement compact.

On peut maintenant énoncer la formule de l'indice de Christol et Mebkhout.

THÉORÈME 6.1 ([C-M3]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(r)$-module différentiel de rang m soluble en r. On suppose que r est une valeur absolue et que ni les exposants de $\mathcal{M}$ en r ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors $\mathcal{M}$ admet des indices généralisés donnés par la formule*

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r)) = -\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}_K^\dagger(r)) = \sum_{i>0} m_i(\beta_i - 1)$$

où les $(m_i, m_i(\beta_i - 1))$ sont les sommets du polygône de Newton p-adique de $\mathcal{M}$.

Indication de démonstration. — D'après le théorème 4.3.2, $\mathcal{M}$ est extension de $\mathcal{M}^{\leq 1}$ par $\mathcal{M}_{>1}$. On déduit du corollaire 3.3.2 et de la remarque qui le suit que les indices généralisés de $\mathcal{M}^{\leq 1}$ sont tous nuls. Par additivité de l'indice généralisé, on est ramené grâce au théorème 4.4.1 au cas où $\mathcal{M}$ est purement de pente β. Par un argument de limite inductive il suffit alors de démontrer que pour ε assez petit

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r-\varepsilon) = -\tilde{\chi}(\mathcal{M}, x^{-1}\mathcal{A}_K(]r-\varepsilon, \infty]) = m(\beta - 1).$$

On peut alors supposer que $R_\rho(\mathcal{M}) = r(\rho/r)^\beta$ pour ρ dans $]r-\varepsilon, r[$. On considère maintenant les modules $\mathcal{N}_h$, antécédents de Frobenius d'ordre h, introduits dans le démonstration du théorème 4.1.1 et on se ramène à vérifier que

$$\tilde{\chi}(\mathcal{N}_h, \mathcal{A}_K([0,\rho]) = -\tilde{\chi}(\mathcal{N}_h, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho,\infty]) = m(\beta-1)$$

pour ρ dans $]r_{h-1}^{p^h}, r_h^{p^h}[$. Comme dans la preuve du théorème 4.1.1 on applique le lemme du vecteur cyclique à $\mathcal{N}_h$, ce qui permet de se retrouver dans la situation (2) (a) de la proposition 1.3.1. L'énoncé résulte alors du lemme suivant.□

LEMME 6.2 ([C-M3]). — *Soit $P(x, x\frac{d}{dx})$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ et soit a une fonction dans $\mathcal{A}_K(]r, R[)$. Soit ρ dans l'intervalle $]r, R[$ tel que $||P||_{1,\rho} < ||a||_\rho$. Alors les indices généralisés $\tilde{\chi}(P+a, \mathcal{A}_K([0,\rho])$ et $\tilde{\chi}(P+a, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho,\infty])$ existent et sont donnés par*

$$\tilde{\chi}(P+a, \mathcal{A}_K([0,\rho]) = -\frac{d\log^+(||a||_\rho)}{d\log(\rho)}(\rho)$$

et

$$\tilde{\chi}(P+a, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho,\infty]) = -\frac{d\log^-(||a||_\rho)}{d\log(\rho)}(\rho).$$

COROLLAIRE 6.3. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}_K(r)$-module différentiel de rang m soluble en r. On suppose que r est une valeur absolue et que ni les exposants de $\mathcal{M}$ en r ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors les sommets du polygône de Newton p-adique de $\mathcal{M}$ sont à coordonnées entières.*

7. Application à la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer

Une application remarquable du théorème de finitude de l'indice est la preuve de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer donnée par Mebkhout [Me]. Faute de place nous en donnons ici une présentation extrèmement succinte.

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. On note V l'anneau des entiers et k le corps résiduel. Soit A l'algèbre d'une variété algébrique affine X régulière et de type fini sur k. Par un théorème d'Elkik [E] il existe une V-algèbre de type fini et lisse $\mathcal{A}$ de réduction A. Inspirés par les travaux de Dwork et par le théorème de comparaison de

Grothendieck sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro, Monsky et Washnitzer ont défini dans [M-W] des groupes de cohomologie p-adique $H^i(X,V)$ à l'aide du complexe de de Rham du complété faible de $\mathcal{A}$. Ils ont également démontré que les groupes $H^i(X,K) = H^i(X,V) \otimes_V K$ sont indépendants du relèvement et sont fonctoriels. (Pour les groupes $H^i(X,V)$ il faut faire une hypothèse sur l'indice de ramification absolu.) Dans son article [Me], Mebkhout déduit du théorème de finitude de l'indice la finitude des K-espaces vectoriels $H^i(X,K) = H^i(X,V) \otimes_V K$. Comme il a été mentionné dans l'introduction, ce même énoncé a été également démontré par P. Berthelot [B1] en utilisant une approche toute différente basée sur les résultats de de Jong sur les altérations (cf. [B2]). L'approche de Mebkhout utilise la théorie des $\mathcal{D}$-modules et consiste à ramener le problème de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer à celui de la finitude de l'indice d'équations différentielles à une variable associées à des modules différentiels exponentiels de Dwork. Ces modules admettant une structure de Frobenius, on peut leur appliquer le théorème 5.4.2. Une telle approche avait été suggérée par Monsky [Mo], à la suite de sa démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro, inspirée par les travaux de Dwork sur la fonction zêta des hypersurfaces [D1],[D2], [D3],[D4].

Références

[A] J. Ax, *Zeroes of polynomial over local fields. The Galois action*, J. Algebra **15** (1970), 417–428.

[B1] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide,* avec un appendice par A.J. De Jong, à paraître dans Inventiones math.

[B2] P. Berthelot, *Altérations de variétés algébriques [d'après A.J. De Jong]*, Séminaire Bourbaki, exposé n°815 (1996).

[Be] D. Bertrand, *Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, in *Séminaire Bourbaki, année 1978/79, exposé 538*, Springer Lecture Notes **770** (1980), 228–243.

[C1] G. Christol, *Modules différentiels et équations différentielles p–adiques*, Queen's Papers in Pure Math. 66, Queen's University, Kingston (1983).

[C2] G. Christol, *Systèmes différentiels p-adiques, structure de Frobenius faible*, Bull. Soc. math. France **109** (1981), 83–122.

[C3] G. Christol, *Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers*, Astérisque **119-120** (1984), 151–168.

[C-D] G. Christol, B. Dwork, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 663–701.

[C-M1] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1545–1574.

[C-M2] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, à paraître dans Annals of Math.

[C-M3] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III*, preprint (1995).

[C-M4] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Exposants p-adiques*, à paraître aux Annales de Clermont-Ferrand.

[D1] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. I.H.E.S. **12** (1963), 366–376.

[D2] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface II*, Ann. of Math. **80** (1964), 227–299.

[D3] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface III*, Ann. of Math. **83** (1966), 457–519.

[D4] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface IV*, Ann. of Math. **90** (1969), 335–352.

[D5] B. DWORK, *On p-adic differential equations*, Bull. Soc. math. France, Suppl., Mem. **39-40** (1974), 27–37.

[D6] B. DWORK, *On p-adic differential equations II*, Ann. of Math. **98** (1973), 366–376.

[D7] B. DWORK, *On p-adic differential equations III*, Inventiones math. **20** (1973), 35–45.

[D8] B. DWORK, *On p-adic differential equations IV*, Ann. sci. Ecole norm. sup. **6** (1973), 295–316.

[D9] B. DWORK, *On exponents of p-adic modules*, à paraître au Journal de Crelle.

[D-G-S] B. DWORK, G. GEROTTO, F. SULLIVAN, *An introduction to G–functions*, Annals of Mathematics Studies, **133** (1994) Princeton University Press.

[D-R1] B. DWORK, PH. ROBBA, *On ordinary linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **231** (1977), 1–46.

[D-R2] B. DWORK, PH. ROBBA, *Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 559–577.

[E] R. ELKIK, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **6** (1973), 553–604.

[G] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo (1954).

[K] M. KASHIWARA, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Master Thesis, Tokyo, 1970, trad. anglaise Mém. Soc. Math. France **63** (1995).

[Ka] N. KATZ, *Nilpotent connections and the Mononodromy Theorem : application of a result of Turritin*, Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1970), 175–232.

[L] M. LAZARD, *Sur les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet*, Publ. Math. I.H.E.S. **14** (1962), 47–76.

[M] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires*, Enseign. math. **20** (1974), 147–176.

[Me] Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière*, à paraître dans Amer. J. of Math.

[Mo] P. MONSKY, *Finiteness of De Rham Cohomology*, Amer. J. of Math. **94** (1972), 237–247.

[M-W] P. MONSKY, G. WASHNITZER, *Formal cohomology I*, Ann. of Math. **88** (1968), 51–62.

[M-S] Y. MORITA, W. SCHIKHOF, *Duality of projective limit spaces and inductive limits over non spherical complete field*, Tohoku Math. J. **38** (1986), 387–397.

[Ra] J.-P. RAMIS, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the A.M.S. **296** (1984).

[R1] PH. ROBBA, *On the index of p-adic differential operators I*, Annals of Math. **101** (1975), 280–316.

[R2] PH. ROBBA, *On the index of p-adic differential operators II*, Duke Math. J. **43** (1976), 19–31.

[R3] PH. ROBBA, *On the index of p-adic differential operators III, applications to twisted exponential sums*, Astérisque **119-120** (1984), 191–266.

[R4] PH. ROBBA, *Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque*, Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 13–55.

[R5] PH. ROBBA, *Conjectures sur les équations différentielles p-adiques*, G.E.A.U., 12e année, n°2, 8 pages (1984–85).

[Y] P. YOUNG, *Radii of convergence and index for p-adic differential operators*, Trans. Am. Math. Soc. **333** (1992), 769–785.

François LOESER

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex
URA 169 du C.N.R.S.
loeser@math.polytechnique.fr

et

Institut de Mathématiques
Université P. et M. Curie
Case 247, 4 place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
UMR 9994 du C.N.R.S.
loeser@math.jussieu.fr