

Astérisque

PATRICK DELORME

Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 810, p. 157-177

http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__157_0

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INVERSION DES INTÉGRALES ORBITALES SUR CERTAINS ESPACES SYMÉTRIQUES RÉDUCTIFS

[d'après A. Bouaziz et P. Harinck]

par Patrick DELORME

1. INTRODUCTION

Soit $\underline{G}$ un groupe de Lie réductif, σ une involution de $\underline{G}$, G le groupe des points fixes de σ , $\mathbb{X} = \underline{G}/G$, $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par $\underline{G}$ sur $\mathbb{X}$. Soit $\mathbb{X}^{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}$ (voir définition au paragraphe 2), qui est un ouvert dense de $\mathbb{X}$. Si $x \in \mathbb{X}^{reg}$, l'orbite $G \cdot x$ est fermée et porte une mesure G -invariante, appelée aussi intégrale orbitale, $\nu_{G \cdot x}$. On cherche à décrire explicitement une normalisation des $\nu_{G \cdot x}$, un ensemble mesuré (Ξ, m) , et, pour presque tout ξ élément de Ξ , une distribution sur $\mathbb{X}$, sphérique (*i.e.* G -invariante et propre sous l'action des éléments de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$), Θ_ξ , et une fonction F_ξ sur $\mathbb{X}^{reg}$, C^∞ et G -invariante, tels que la formule suivante ait un sens et soit vraie :

$$(1) \quad \nu_{G \cdot x} = \int_{\Xi} F_\xi(x) \Theta_\xi dm(\xi), \quad x \in \mathbb{X}^{reg}.$$

Remarquons que si $\underline{G}$ est commutatif, (1) peut être explicité à partir de la formule d'inversion de Fourier de $\underline{G}/G$. On s'intéresse également à la formule d'inversion de Fourier de $\mathbb{X}$, *i.e.* une formule du type (1) où x est égal à la classe $e_{\mathbb{X}}$ de l'élément neutre $e_{\underline{G}}$ de $\underline{G}$, non régulière en général, et $\nu_{G \cdot x}$ est la mesure de Dirac en $e_{\mathbb{X}}$. Les $F_\xi(x)$ sont alors remplacées par des constantes. Les seules familles d'espaces symétriques réductifs de rangs réels quelconques, pour lesquels l'ensemble de ces problèmes est résolu, sont (voir section 2 pour des hypothèses plus précises) :

- a) $\mathbb{X} = G$ et G agit par conjugaison sur lui-même.
- b) $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$: $\underline{G}$ est un groupe complexe, G en est une forme réelle et σ est la conjugaison complexe par rapport à G .

Notre exposé est consacré uniquement aux deux familles ci-dessus. Donnons un bref aperçu historique.

a) $\mathbb{X} = G$

D'abord c'est à Harish-Chandra [17], 1976 b, qu'est due la formule d'inversion de Fourier. Dans une série d'articles [18], [19], [20], [21], la formule d'inversion des intégrales orbitales (formule (1)) a été établie par R. Herb ; le dernier est paru en 1983 (le cas du rang 1 ayant été traité au préalable par P. Sally et G. Warner [28]). La construction des Θ_ξ est due à Harish-Chandra [17], 1983 (voir aussi [5], [22]). Les fonctions F_ξ sont données par des formules explicites très compliquées ; elles apparaissent seulement comme résultats de calculs. De son travail, R. Herb déduit la formule d'inversion de Fourier, grâce à une formule limite (due à Harish-Chandra) reliant la mesure de Dirac en $e_{\mathbb{X}}$ aux $\nu_{G,x}$, $x \in \mathbb{X}^{reg}$. En 1982, Harish-Chandra avait lui aussi annoncé une formule d'inversion des intégrales orbitales [17], 1983, moins explicite mais plus facile à énoncer. Malheureusement la démonstration ne fut jamais publiée.

C'est à A. Bouaziz que l'on doit une présentation et une construction-caractérisation plus conceptuelle des F_ξ [5]. C'est ce point de vue que nous exposerons. Précisons un peu. D'abord A. Bouaziz a caractérisé (aussi bien pour $\mathbb{X} = G$ que pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$) les fonctions intégrales orbitales, c'est-à-dire les fonctions sur $\mathbb{X}^{reg}$ de la forme $x \mapsto \nu_{G,x}(f)$, pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$ [4]. Les F_ξ vérifient alors des propriétés similaires à celles des fonctions intégrales orbitales (en relaxant toutefois une condition de support). En outre, elles sont propres sous une action canonique de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ et ont une formule explicite sur un sous-groupe de Cartan attaché à ξ . La construction des F_ξ par A. Bouaziz a été influencée par le travail de M. Duflo et M. Vergne [10] qui donne une démonstration de la formule d'inversion de Fourier entièrement dans la philosophie de la méthode des orbites. A. Bouaziz a montré [5] que les propriétés des Θ_ξ et des F_ξ réduisent, modulo des questions difficiles de convergences et de majorations d'intégrales, la démonstration de la formule d'inversion des intégrales orbitales à la formule d'inversion de Fourier sur les sous-groupes de Cartan de G , pour lesquels cette formule est élémentaire. En effet tout sous-groupe de Cartan est produit d'un groupe compact et d'un groupe vectoriel.

b) $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

La construction des Θ_ξ est due à P. Harinck [12] et a précédé celle des F_ξ pour $\mathbb{X} = G$, les deux constructions présentant des similarités (dont A. Bouaziz donne une explication dans [6]). Dans le même esprit qu'A. Bouaziz, P. Harinck a construit les F_ξ (similarité avec les Θ_ξ pour $\mathbb{X} = G$) et prouvé la formule d'inversion des intégrales orbitales [15], [16]. Elle en a déduit (également grâce à une formule limite) la formule d'inversion de Fourier (établie antérieurement dans des cas particuliers mais de rang

quelconque [29], [1]).

Les deux types d'espaces symétriques étudiés ici ont pour point commun l'identification de l'espace tangent en $e_{\mathbb{X}}$, comme G -espace, avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G munie de la représentation adjointe. Les transformées de Fourier de mesures de Liouville sur les orbites coadjointes de G sont à la base des constructions des Θ_{ξ} et des F_{ξ} .

De nombreux résultats fondamentaux utilisés dans les travaux que nous présentons ici sont dus à Harish-Chandra (on renverra parfois à [32] pour l'exposé d'une partie d'entre eux), en particulier la méthode de descente, que nous décrivons dans la section 3.

2. HYPOTHÈSES SUR $\mathbb{X}$. NOTATIONS

Si M est un groupe de Lie, on note $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. Avec les notations de l'introduction, on note $\mathfrak{q}$ l'espace formé des éléments de $\underline{\mathfrak{g}}$ antiinvariants par la différentielle de σ , notée encore de même, sur lequel G opère par représentation adjointe. Il s'identifie à l'espace tangent à $\mathbb{X}$ en $e_{\mathbb{X}}$ et ceci comme G -espace. On note p la projection canonique de $\underline{G}$ sur $\mathbb{X}$ et φ l'application de $\mathbb{X}$ dans $\underline{G}$ définie par $\varphi(p(g)) = g\sigma(g^{-1})$, $g \in \underline{G}$. Dans les cas que nous étudierons, φ est un difféomorphisme de $\mathbb{X}$ sur son image, qui est fermée ([26], lemme 1). On note Exp l'application de $\mathfrak{q}$ dans $\mathbb{X}$ qui associe à $X \in \mathfrak{q}$, $p(exp X)$, où exp est l'exponentielle ordinaire sur l'algèbre de Lie de $\underline{G}$. On note J le jacobien de cette application.

On suppose dans la suite que $\mathbb{X}$ est de l'un des deux types suivants :

a) $\mathbb{X} = G$: on suppose G réductif dans la classe d'Harish-Chandra, classe qui contient en particulier les produits des groupes de Lie semi-simples réels connexes de centres finis par des groupes abéliens connexes. On pose $\underline{G} = G \times G$ et $\sigma(x, y) = (y, x)$. Le groupe des points fixes de σ est la diagonale de $G \times G$, qu'on identifie à G . L'application qui, à (x, y) , associe xy^{-1} permet d'identifier, par passage au quotient, $\mathbb{X}$ à G sur lequel le facteur de gauche (resp. droit) de $G \times G$ agit par translation à gauche (resp. droite) et G opère par conjugaison. De plus $\mathfrak{q}$, qui est égal à l'antidiagonale de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, sera identifié à $\mathfrak{g}$ par l'application $(X, -X) \mapsto 2X$. Dans ces identifications, Exp est égale à l'exponentielle ordinaire.

b) $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$: on suppose que $\underline{G}$ est un groupe réductif complexe connexe, de sous-groupe dérivé simplement connexe et que σ est une involution antiholomorphe de $\underline{G}$. Alors $\mathfrak{q} = i\mathfrak{g}$.

Dans les deux cas, on peut regarder $\mathfrak{q}$ comme inclus dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On définit

une fonction non identiquement nulle, D , sur $\mathbb{X}$ par : $\det(1 + t - \text{Ad}_{\underline{G}}(\varphi(x))) = t^n D(x) \bmod t^{n+1}$, $x \in \mathbb{X}$. On pose $D_{\mathbb{X}}(x) = |D(x)|^{1/2}$. On dit que $x \in \mathbb{X}$ est semi-simple (resp. elliptique, resp. régulier) si et seulement si $\varphi(x)$ est semi-simple dans $\underline{G}$ (resp. elliptique dans $\underline{G}$, resp. $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$). Si Y est une partie de $\mathbb{X}$, on note Y^{ss} (resp. Y^{reg}) l'ensemble de ses éléments semi-simples (resp. réguliers). On a $\mathbb{X}^{reg}$ inclus dans $\mathbb{X}^{ss}$.

On définit la famille $\text{Car } \mathfrak{q}$ (resp. $\text{Car } \mathbb{X}$) des sous-espaces (resp. sous-ensembles) de Cartan de $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathbb{X}$) comme suit : un sous-espace vectoriel, $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{q}$ est élément de $\text{Car } \mathfrak{q}$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ formé d'éléments semi-simples, et A est élément de $\text{Car } \mathbb{X}$ si et seulement si il existe un élément de $\text{Car } \mathfrak{q}$, nécessairement unique et noté $\mathfrak{a}$, tel que A soit l'ensemble des x dans $\mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise $\mathfrak{a}$.

Avec nos hypothèses et conventions, pour $\mathfrak{a} \in \text{Car } \mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et on notera $\tilde{\mathfrak{a}}$ son intersection avec $\mathfrak{g}$, qui est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Pour $A \in \text{Car } \mathbb{X}$, on a $A = \bigcup_{j \in J} (\exp \mathfrak{a}) \cdot k_j$, où l'union est disjointe, J est fini et $k_j \in \mathbb{X}$. Ceci permet d'identifier l'espace tangent en chaque point de A à $\mathfrak{a}$ et d'identifier l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $S(\mathfrak{a})$, à une algèbre d'opérateurs différentiels sur A . On note $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ qui opère sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On dispose de l'isomorphisme d'Harish-Chandra, $\gamma_{\mathfrak{a}}$, de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ des invariants de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $S(\mathfrak{a})$, sous $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

3. MÉTHODE DE DESCENTE D'HARISH-CHANDRA

Présentons le lemme qui est à la base de la méthode de descente. On suppose momentanément que $\mathbb{X}$ est une variété C^∞ munie d'une action C^∞ de G . On suppose que $\mathbb{Y}$ est une sous-variété localement fermée de $\mathbb{X}$, que V est un ouvert de $\mathbb{Y}$ tel que l'application f de $G \times V$ dans $\mathbb{X}$, définie par $f(g, y) = g \cdot y$, soit submersive en tout point. Alors $U := G \cdot V$ est un ouvert G -invariant de $\mathbb{X}$. On note i l'injection canonique de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$. On suppose en outre qu'il existe un sous-groupe fermé, Z , de G , réductif, laissant V invariant, et tel que $g \cdot V \cap V \neq \emptyset$ pour $g \in G$ implique $g \in Z$. Autrement dit, f définit un fibré principal G -équivariant de groupe structural Z . On suppose qu'il existe une mesure de Lebesgue sur V , dv , qui est Z -invariante. On note dg (resp. dz) une mesure de Haar sur G (resp. Z). Par passage au quotient par Z de la mesure $dg \otimes dv$ sur $G \times V$, on en déduit une mesure G -invariante sur U . Ces choix permettent d'identifier fonctions généralisées et distributions sur G , Z , U , V .

Lemme 1.— (i) Toute distribution ou fonction généralisée, Θ , G -invariante sur U admet une image réciproque par f (resp. i), notée $f^*(\Theta)$ (resp. $r_V(\Theta)$). La distribution $r_V(\Theta)$ est appelée restriction de Θ à V . De plus $f^*(\Theta) = 1 \otimes r_V(\Theta)$.

(ii) L'application de restriction r_V détermine une bijection entre l'espace $\mathcal{D}'(U)^G$ des distributions G -invariantes sur U et $\mathcal{D}'(V)^Z$.

Indication sur (i)

La propriété d'invariance de Θ se traduit par son annulation sous l'action de champs de vecteurs provenant de l'action de G . Ceci donne une limitation du front d'onde de Θ , qui montre que $r_V(\Theta)$ est bien défini (pour l'image réciproque et la restriction des distributions, voir [25], chapitre 8). Comme f est submersive en tout point, $f^*(\Theta)$ est bien défini. On se ramène, par fonctorialité de l'image réciproque, au cas trivial où $U = G \times V$. Ce point de vue, sur ce lemme dû à Harish-Chandra, est issu de l'appendice de [9].

Si $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$, on appelle composante radiale de D sur V , tout opérateur différentiel sur V , $\Delta(D)$ tel que $r_V(D\Theta) = \Delta(D)r_V(\Theta)$, $\Theta \in \mathcal{D}'(U)^G$.

On revient aux hypothèses du paragraphe 2. Pour chaque élément x de $\mathbb{X}^{ss}$, on peut construire U_x , un voisinage ouvert G -invariant de x dans $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}_x$, V_x , Z_x , de sorte que le lemme ci-dessus s'applique. En outre $\mathbb{Y}_x$ s'identifie à un espace du même type que $\mathbb{X}_x$, et de dimension strictement plus petite si $\varphi(x)$ n'est pas central dans $\underline{G}$. De plus les composantes radiales peuvent être explicitées. Pour $\mathbb{X} = G$, cela est dû à Harish-Chandra (cf. [32]) et sinon à P. Harinck [11].

Méthode de descente

Pour démontrer une propriété locale d'analyse harmonique G -invariante sur $\mathbb{X}$, on procède par récurrence sur la dimension de $\mathbb{X}$. En utilisant le fait qu'un fermé G -invariant de $\mathbb{X}$ qui ne rencontre pas $\mathbb{X}^{ss}$ est vide, on se ramène à :

(i) l'étude de la propriété au voisinage d'un élément semi-simple x quelconque.

Puis, grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathbb{Y}_x$, lorsque $\varphi(x)$ n'est pas central, et aux propriétés de r_{V_x} , on se ramène à :

(ii) l'étude de la propriété au voisinage de $x \in \mathbb{X}^{ss}$ tel que $\varphi(x)$ soit central dans $\underline{G}$.

Par un passage, facile en général, du réductif au semi-simple, on se ramène à :

(iii) l'étude de la propriété au voisinage de x comme ci-dessus et tel que $\varphi(x) = e_{\underline{G}}$.

Alors, utilisant l'application Exp , on se ramène à :

(iv) l'étude d'une propriété analogue à celle de départ sur l'algèbre de Lie.

Ce problème se réduit, grâce à une version infinitésimale du lemme 1 et des points (i) à (iii), à un problème au voisinage de zéro qui se réduit en général à :

(v) l'étude des propriétés d'objets à support dans le cône des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

Pour certains problèmes de constructions de fonctions ou distributions, on se sert des éléments elliptiques pour lesquels les U_x peuvent être pris plus gros. Le point (v) disparaît. Dans tous les cas, c'est le problème sur l'algèbre de Lie le plus délicat, le passage de (iii) à (iv) pouvant lui aussi être difficile.

4. DISTRIBUTIONS SPHÉRIQUES

La démonstration du théorème suivant peut suivre le schéma de la méthode de descente. Pour $\mathbb{X} = G$, elle est due à Harish-Chandra (voir [17], 1965 b, ou [32]). Dans le cas $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, elle est due à S. Sano [30], qui utilise une méthode similaire à celle développée par M. Atiyah dans le cas des groupes (voir aussi [11] pour une preuve reposant sur la méthode de descente).

Théorème de régularité des fonctions généralisées sphériques

Toute fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{X}$, analytique sur $\mathbb{X}^{reg}$.

Si Θ est une fonction généralisée sphérique on note Θ_A sa restriction à A^{reg} , pour $A \in Car \mathbb{X}$, qui est analytique d'après le théorème de régularité. L'existence de la restriction est une conséquence du lemme 1 appliqué au voisinage des éléments de A^{reg} .

On note $\Delta(\mathfrak{a})$ le système de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ (resp. $\Delta_I(\mathfrak{a})$) l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) sur la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{a}}$, associée à $\mathfrak{a}$ ($\tilde{\mathfrak{a}}$ est égale à $\mathfrak{a}$ si $\mathbb{X} = G$, et à $i\mathfrak{a}$ si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$). Une racine imaginaire α est dite compacte (resp. non compacte) si l'intersection avec $\mathfrak{g}$ de la sous-algèbre de dimension 3 de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, engendrée par les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$, est isomorphe à l'algèbre de Lie de $SU(2)$ (resp. $SL(2, \mathbb{R})$). Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$, on note $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ sa coracine, qu'on regardera comme un opérateur différentiel à coefficients complexes sur A . On définit également une fonction ζ_{α} sur A par : $\zeta_{\alpha}(a) = a^{\alpha}$ si $a \in A$ (A est alors un sous-groupe de Cartan de G) pour $\mathbb{X} = G$, et $\zeta_{\alpha}(a) = e^{\alpha(H)}$ si $\varphi(a) = \exp(H)$ avec $H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

Soit Σ un ensemble de racines positives de $\Delta(\mathfrak{a})$. On note : $\rho_\Sigma := (1/2) \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha$, $\pi_\Sigma := \zeta_{-\rho_\Sigma} \prod_{\alpha \in \Sigma} (1 - \zeta_\alpha)$, $\omega_\Sigma := \prod_{\alpha \in \Sigma} H_\alpha$.

En fait, pour $\mathbb{X} = G$, il faut faire des hypothèses supplémentaires pour que $\zeta_{-\rho_\Sigma}$ soit bien défini : G doit être supposé acceptable dans la terminologie d'Harish-Chandra (voir [32] part. 2, ch. 4.3), ce que l'on suppose seulement pour le théorème suivant. Pour $\mathbb{X} = G$, ce théorème ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite.

On regarde ω_Σ comme un opérateur différentiel sur A . Si Θ est une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$, on note $\Theta_{A,\Sigma}$, le produit de Θ_A par π_Σ . On pose $\tilde{\Theta}_A := \omega_\Sigma(\Theta_{A,\Sigma})$, qui ne dépend pas de Σ . L'ensemble des éléments a de A tels que $\zeta_\alpha(a)$ soit différent de 1 pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ est égal à A^{reg} , et l'on note $A_{\mathbb{R}}^{reg}$ l'ensemble des éléments a de A tels que $\zeta_\alpha(a)$ soit différent de 1 pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$.

Soit Θ une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$. Comme elle est propre sous l'action des éléments de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$, $\Theta_A (A \in \text{Car } \mathbb{X})$ est propre sous l'action des composantes radiales des éléments de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$; ceci se traduit par des équations aux dérivées partielles satisfaites par Θ_A , dites équations radiales. La composante radiale de $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ sur A^{reg} est égale à $D_{\mathbb{X}}^{-1/2} \gamma_{\mathfrak{a}}(D) D_{\mathbb{X}}^{1/2}$. Comme conséquence des équations radiales et de la forme des composantes radiales, on a :

- Si $a \in A$, la fonction définie sur l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}$ tels que $\exp H \cdot a \in A^{reg}$*
 (2) *par $\Theta_{A,\Sigma}(\exp H \cdot a)$ coïncide, sur chacune des composantes connexes de son domaine de définition, avec un polynôme exponentiel.*

Si $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on définit un caractère de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ par : $\chi_\lambda(D) := (\gamma_{\mathfrak{a}}(D))(\lambda)$, $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$. Si Θ une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ ou $\mathbb{X}^{reg}$ telle que : $D\Theta = \chi_\lambda(D)\Theta$, $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$, on dira que Θ est sphérique pour le caractère propre χ_λ , et λ sera dit paramètre propre de Θ . On dit qu'un caractère χ de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est régulier si $\chi = \chi_\lambda$ pour un élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ régulier, c'est-à-dire tel que le stabilisateur de λ sous $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ soit trivial.

Si $\mathbb{X} = G$, le théorème ci-dessous est dû à Harish-Chandra pour la partie directe (cf. [32]) et à T. Hirai [23], [24] pour la partie réciproque. Si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, il est dû à S. Sano [30].

Théorème de caractérisation des fonctions généralisées sphériques

Pour une fonction localement intégrable, Θ , sur $\mathbb{X}$ et analytique sur $\mathbb{X}^{reg}$, on introduit les conditions suivantes :

- (D1) *Θ est sphérique sur $\mathbb{X}^{reg}$, de caractère propre χ .*
 (D2) *Pour tout $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$, $\Theta_{A,\Sigma}$ se prolonge analytiquement à $A_{\mathbb{R}}^{reg}$.*

(D3) (Conditions de recollement.) Pour tout A (resp. B) $\in \text{Car}(\mathbb{X})$, $\tilde{\Theta}_A$ (resp. $\tilde{\Theta}_B$) se prolonge en une fonction continue sur A (resp. B) notée de même. De plus $\tilde{\Theta}_A$ et $\tilde{\Theta}_B$ coïncident sur $A \cap B$.

Si Θ est une fonction généralisée sphérique de caractère propre χ , elle satisfait les conditions ci dessus.

Réciproquement, si une fonction localement intégrable, Θ , sur $\mathbb{X}$ et analytique sur $\mathbb{X}^{reg}$ vérifie (D1), (D2), (D3) et si χ est régulier, elle définit une distribution sphérique sur $\mathbb{X}$.

Si $\mathbb{X} = G$, le théorème suivant est dû à Harish-Chandra (cf. [32]) et si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, à P. Harinck [12].

Théorème d'unicité pour les fonctions généralisées sphériques

On suppose que G possède un sous-groupe de Cartan compact T . Si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, on note A le sous-espace de Cartan de $\mathbb{X}$ correspondant à $\mathfrak{a} = \mathfrak{it} \in \text{Car } \mathfrak{q}$.

Soit Θ une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$, qu'on suppose de plus tempérée (condition de croissance) si $\mathbb{X} = G$. On suppose que Θ admet un paramètre propre $\lambda \in \mathfrak{it}^*$ si $\mathbb{X} = G$ (resp. $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$), qui est régulier (resp. tel que $\lambda(H_{\alpha}) \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$).

Si la restriction de Θ à T^{reg} (resp. A^{reg}) est nulle, alors Θ est nulle sur $\mathbb{X}$.

Indication sur la démonstration du théorème d'unicité

Il suffit, d'après le théorème de régularité, de démontrer que la restriction de Θ à B^{reg} est nulle pour tout sous-ensemble de Cartan B de $\mathbb{X}$. Dans la formule (2), appliquée à B , on n'a qu'une combinaison linéaire d'exponentielles (déterminées par λ) en raison de la régularité de λ . Si $\mathbb{X} = G$, la tempérance de Θ en exclut certaines (celles qui ne sont pas bornées sur la composante connexe considérée). Les relations de recollement permettent d'établir des relations entre les coefficients des exponentielles restantes pour des sous-ensembles (ici sous-groupes) de Cartan adjacents. L'hypothèse de nullité de Θ sur T^{reg} et une récurrence sur la dimension de la composante vectorielle de B permet alors de conclure que ces coefficients sont tous nuls. D'où le théorème dans ce cas. Si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, la tempérance est inutile : en effet A est le sous-ensemble de Cartan possédant le plus grand nombre de composantes connexes et ceci permet d'avoir suffisamment de relations de recollement.

5. CONSTRUCTION DES Θ_ξ

On choisit une involution de Cartan θ de $\underline{G}$ qui commute à σ . On note $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{s}$) le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des éléments invariants (resp. anti-invariants) sous la différentielle de θ . Si $\mathfrak{a} \in \text{Car } \mathfrak{q}$ est θ -stable, on note $\mathfrak{a}_R$ (resp. $\mathfrak{a}_I$) l'intersection de $\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{k}$).

Si $A \in \text{Car } \mathbb{X}$, on note $[A]$ sa classe de conjugaison sous G . Soient $A, B \in \text{Car } \mathbb{X}$, que l'on suppose θ -stables. On note $[A] \leq [B]$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $Ad\,g(\mathfrak{a}_R) \subset \mathfrak{b}_R$ (resp. $Ad\,g(\mathfrak{a}_I) \subset \mathfrak{b}_I$) pour $\mathbb{X} = G$ (resp. pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$).

Soit $A \in \text{Car } \mathbb{X}$. Pour tout sous-groupe M de $\underline{G}$, on note $W(M, \mathfrak{a})$ le quotient du normalisateur, $N(M, \mathfrak{a})$, de $\mathfrak{a}$ dans M par son centralisateur $Z(M, \mathfrak{a})$. On note A_0 le quotient de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ par $Z(G, \mathfrak{a})$. On regarde A_0 comme un sous-ensemble de A . Par ailleurs, $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ opère à gauche sur A . On choisit un ensemble de représentants dans A , $\mathcal{W}_A$, du quotient de A par cette action de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ contenant $e_{\mathbb{X}}$. Ce quotient s'identifie à $W(\underline{G}, \mathfrak{a})/W(G, \mathfrak{a})$. On choisit les éléments y de $\mathcal{W}_A$ tels que $\varphi(y) \in G$. On peut choisir, pour $y \in \mathcal{W}_A$, $v_y \in N(\underline{G}, \mathfrak{a})$ tel que $p(v_y) = y$. On note encore v_y l'élément correspondant de $W(\underline{G}, \mathfrak{a})$. On note $\mathcal{W}_A^{-1}$ le sous-ensemble de $W(\underline{G}, \mathfrak{a})$ formé des v_y^{-1} , $y \in \mathcal{W}_A$. C'est un ensemble de représentants de $W(G, \mathfrak{a}) \backslash W(\underline{G}, \mathfrak{a})$.

On note $\hat{A}_0$ l'ensemble des (classes d'équivalences de) représentations unitaires irréductibles ω de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ possédant un vecteur unitaire, e_ω , invariant par $Z(G, \mathfrak{a})$. Celles-ci sont de dimensions finies. À un scalaire multiplicatif de module 1 près, e_ω est unique et la fonction ϖ sur $A_0 = Z(\underline{G}, \mathfrak{a})/Z(G, \mathfrak{a})$, définie par $\varpi(a_0) := (\omega(z)e_\omega, e_\omega)$ pour z représentant de a_0 dans $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$, ne dépend pas du choix de e_ω . L'algèbre de Lie, $\mathfrak{z}(\underline{g}, \mathfrak{a})$, de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ est la somme directe de son intersection avec $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{a}$; cette décomposition permet de regarder $\mathfrak{a}^*$ comme un sous-espace du dual de cette algèbre de Lie. La composante neutre de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ est centrale dans $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$. La restriction de $\omega \in \hat{A}_0$ à celle-ci est un multiple d'un caractère trivial sur l'intersection de cette composante neutre avec G . La différentielle de ce caractère est un élément λ_ω de $i\mathfrak{a}^*$ tel que $\lambda_\omega(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, pour tout H élément du sous-réseau, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$, de $\mathfrak{a}$ formé des éléments H de $\mathfrak{a}$ vérifiant $\text{Exp } H = e_{\mathbb{X}}$.

Soit Ψ un ensemble de racines imaginaires positives de $\Delta(\mathfrak{a})$. On pose pour $a \in A^{\text{reg}}$, $b_\Psi(a) := \prod_{\alpha \in \Psi} (1 - \zeta_{-\alpha}(a)) |1 - \zeta_{-\alpha}(a)|^{-1}$. On note, pour un élément w de $W(G, \mathfrak{a})$, $\varepsilon_I(w) := (-1)^{|\Psi \cap -w^{-1}\Psi|}$, qui ne dépend pas de Ψ . On note ρ_Ψ la demi-somme des éléments de Ψ . Si w est un élément de $W(G, \mathfrak{a})$, $w\rho_\Psi - \rho_\Psi$ est une combinaison linéaire de racines à coefficients entiers. La fonction $\zeta_{w\rho_\Psi - \rho_\Psi}$ est donc bien définie sur A .

Pour $w \in N(G, \mathfrak{a})$, $\omega \in \hat{A}_0$, on définit une fonction $w \bullet_\Psi \varpi$ sur $\hat{A}_0$ par :

- 1) si $\mathbb{X} = G$, $(w \bullet_{\Psi} \varpi)(a_0) = \zeta_{w\rho_{\Psi}-\rho_{\Psi}}(a_0)\varpi(w^{-1}zw)$;
- 2) si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, $(w \bullet_{\Psi} \varpi)(a_0) = \varpi(w^{-1}zw)$,

où $a_0 \in A_0$ et z est un représentant de a_0 dans $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$, le membre de droite de l'égalité ci-dessus ne dépendant pas de ce choix. Il est facile de voir que $w \bullet_{\Psi} \varpi$ ne dépend que de la classe de w modulo $Z(G, \mathfrak{a})$, donc $w \bullet_{\Psi} \varpi$ est défini pour $w \in W(G, \mathfrak{a})$.

On pose $\hat{A} := \hat{A}_0 \times \mathcal{W}_A$. Pour $\mathbb{X} = G$, $\hat{A}_0$ s'identifie, comme la notation le suggère, au dual unitaire de A . En effet, dans ce cas, $Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) = A \times A$, $Z(G, \mathfrak{a})$ est égal à la diagonale de $A \times A$ et A_0 s'identifie à A . Les éléments ω de $\hat{A}_0$ sont alors de la forme $\omega_1 \otimes \omega_1^*$, où ω_1 est une représentation unitaire irréductible de A et ω_1^* est la contragrédiente de ω_1 . Alors ϖ est le caractère de ω_1 . De plus $\mathcal{W}_A$ est réduit à un élément.

On note τ_{Ψ} l'automorphisme d'algèbre unitaire de $S(\mathfrak{a})$ défini par $\tau_{\Psi}(H) = H + \rho_{\Psi}(H)$, $H \in \mathfrak{a}$, si $\mathbb{X} = G$, et qui est égal à l'identité si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$.

Le théorème suivant est dû à Harish-Chandra si $\mathbb{X} = G$ [17] (voir aussi [5], § 8.1), et à P. Harinck si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ [15], théorème 6.1.

Théorème de construction des Θ_{ξ}

Soit $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ et Ψ un ensemble de racines imaginaires positives de $\Delta(\mathfrak{a})$. Soit $\xi = (\omega, y)$ un élément de $\hat{A} = \hat{A}_0 \times \mathcal{W}_A$. Si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, on suppose en outre que $\lambda_{\omega} \in i\mathfrak{a}^*$ vérifie $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) \neq 0$, pour tout $\alpha \in \Psi$.

Il existe une fonction généralisée sphérique de paramètre propre λ_{ω} , $\Theta_{\xi, \Psi}$, sur $\mathbb{X}$, telle que :

- (i) Si $\mathbb{X} = G$, $\Theta_{\xi, \Psi}$ est tempérée.
- (ii) Soit $a \in A^{\text{reg}}$. Si $a \notin N(G, \mathfrak{a})Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) \cdot y$, $\Theta_{\xi, \Psi}(a)$ est nul, et si $a = nz \cdot y$ avec $n \in N(G, \mathfrak{a})$, $z \in Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$, on a :

$$b_{\Psi}(a)D_{\mathbb{X}}^{1/2}(a)\Theta_{\xi, \Psi}(a) = \sum_{u \in W(G, \mathfrak{a})^y} \varepsilon_I(u)(u \bullet_{\Psi} \varpi)(zz_{y, u}),$$

où $W(G, \mathfrak{a})^y$ est l'ensemble des $u \in W(G, \mathfrak{a})$ tel qu'il existe un élément $z_{y, u}$ de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ vérifiant $u \cdot y = z_{y, u} \cdot y$.

- (iii) Si $B \in \text{Car } \mathbb{X}$ et $[A] \not\leq [B]$, $\Theta_{\xi, \Psi}$ est nulle sur B^{reg} .

Indications sur la preuve

Il s'agit d'une construction. On utilise le procédé d'induction des distributions sphériques. Dans le cas $\mathbb{X} = G$, celui-ci donne le caractère des représentations induites. Pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, le procédé d'induction est dû à P. Harinck [13]. On est

alors ramené à démontrer le théorème lorsque A est le sous-ensemble de Cartan associé à l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Cartan compact T de G . Décrivons la construction dans ce cas.

a) $\mathbb{X} = G$: il s'agit, pour les valeurs régulières de λ_ω , de la construction des caractères des séries discrètes et, en général, de celle des caractères des limites des séries discrètes. Donnons quelques indications sur le cas où λ_ω est régulier. On construit, par récurrence et méthode de descente, au voisinage de chaque élément elliptique de $\mathbb{X}$, une fonction généralisée qui vérifie (localement) les propriétés voulues. On recolle les fonctions généralisées ainsi obtenues grâce à une version locale du théorème d'unicité. L'étape (iv) de la méthode de descente (construction de fonctions généralisées sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possédant des propriétés analogues à celles des Θ_ξ) est franchie à l'aide de la transformée de Fourier de la mesure de Liouville (qui est G -invariante) sur certaines orbites coadjointes de $\mathfrak{g}^*$ liées à λ_ω . La formule liant les caractères des séries discrètes à ces transformées de Fourier est due à W. Rossman [27].

b) $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$: on suppose $y = e_{\mathbb{X}}$ pour simplifier. On peut regarder λ_ω comme un élément de $\mathfrak{iq}^*$. La transformée de Fourier de la (ou plutôt d'une) mesure G -invariante sur l'orbite de λ_ω sous G est une fonction généralisée sur $\mathfrak{q}$, θ_{λ_ω} . On veut "pousser" $|J|^{-1/2} \theta_{\lambda_\omega}$ sur $\mathbb{X}^{reg}$ à l'aide de Exp . Le facteur $|J|^{-1/2}$ s'introduit naturellement, car on veut obtenir une distribution sphérique. On note Ω la composante connexe de 0 du complémentaire dans $\mathfrak{q}$ de l'ensemble des zéros de J . On déclare $\Theta_{\xi, \Psi}$ nulle en dehors de Ω^{reg} . Ensuite, pour définir $\Theta_{\xi, \Psi}$ sur Ω^{reg} , il faut tenir compte de la non injectivité de l'application Exp . On pose alors, pour $X \in \Omega^{reg}$:

$$|J(X)|^{-1/2} \Theta_{\xi, \Psi}(Exp X) = c_\Psi \sum_{Y \in \mathfrak{q}, Exp Y = Exp X, [X, Y] = 0} |J(Y)|^{-1/2} \theta_{\lambda_\omega}(Y),$$

où c_Ψ est une constante de normalisation. Si $A_{Exp X}$ est le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ contenant $Exp X$, la sommation porte sur les $Y \in X + \Gamma_{A_{Exp X}}$. Les séries sont convergentes et l'on peut vérifier les conditions (D1), (D2), (D3), et donc étendre $\Theta_{\lambda_\omega, \Psi}$ en une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$, d'après le théorème de caractérisation.

6. INTÉGRALES ORBITALES

Soient $x \in \mathbb{X}^{reg}$ et A_x l'unique sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ contenant x . On note $\mathfrak{g}^x$ l'algèbre de Lie du sous-groupe fermé de G , G^x , formé des éléments de G qui fixent point par point les éléments de la composante connexe de x dans A . L'espace tangent en e_G à G/G^x s'identifie à $[\mathfrak{g}^x, \mathfrak{g}]$, que l'on munit de la mesure de Lebesgue,

dY , déduite de la forme de Killing sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Soit $d\hat{g}$ la mesure G -invariante sur G/G^x tangente à dY . On pose, pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$, $I_{\mathbb{X}}(f)(x) := D_{\mathbb{X}}^{1/2}(x) \int_{G/G^x} f(g \cdot x) d\hat{g}$.

On note $I_{\mathbb{X}}^x$ la distribution correspondante sur $\mathbb{X}$. La fonction sur $\mathbb{X}^{reg}$ définie par la formule ci-dessus est appelée fonction intégrale orbitale de f .

On note $I(\mathbb{X})^\infty$ l'espace des fonctions F sur $\mathbb{X}^{reg}$ qui sont C^∞ , G -invariantes et qui vérifient les conditions suivantes :

(I1) Pour tout $A \in \text{Car } \mathbb{X}$, pour tout compact U de A et tout $u \in S(\mathfrak{a})$, $p_{A,U,u}(F) := \sup_{\mathfrak{a} \in U \cap A^{reg}} |(u(F|_{A^{reg}}))(\mathfrak{a})| < \infty$.

(I2) Pour tout $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ et tout ensemble de racines imaginaires positives de $\Delta(\mathfrak{a})$, Ψ , $b_\Psi F|_{A^{reg}}$ se prolonge de manière C^∞ à l'ensemble des éléments $\mathfrak{a}$ de A tels que $\zeta_\beta(\mathfrak{a}) \neq 1$, pour toute racine imaginaire non compacte β .

(I3) (Conditions de saut.) Soit $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ et α une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{a}$. La transformation de Cayley associée à α , c_α , qui est un endomorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, transforme $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ en $(\mathfrak{a}_\alpha)_{\mathbb{C}}$, où $\mathfrak{a}_\alpha \in \text{Car } \mathfrak{q}$. Soit Ψ un ensemble de racines imaginaires positives de $\mathfrak{a}$ qui contient toute racine imaginaire de $\mathfrak{a}$, β , telle que $\beta(H_\alpha) > 0$. On note Ψ_α l'ensemble des éléments de Ψ orthogonaux à α , qui détermine un ensemble de racines imaginaires positives de $\mathfrak{a}_\alpha$ noté de même. Soit $\mathfrak{a} \in A$ tel que $\zeta_\alpha(\mathfrak{a}) = 1$ et tel que $\zeta_\beta(\mathfrak{a}) \neq 1$ si β est une racine de $\mathfrak{a}$ distincte de $\pm\alpha$. Alors on a, pour $u \in S(\mathfrak{a})$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \tau_\Psi(u)(b_\Psi F|_{A^{reg}}(\exp * tH_\alpha \cdot \mathfrak{a})) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \tau_\Psi(u)(b_\Psi F|_{A^{reg}}(\exp * tH_\alpha \cdot \mathfrak{a})) \\ = **(\tau_{\Psi_\alpha}(c_\alpha(u))(b_{\Psi_\alpha} F|_{A_\alpha^{reg}}))(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Ici $*$ vaut i si $\mathbb{X} = G$ et vaut 1 si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ et $**$ vaut $\varepsilon(\mathfrak{a})$ (resp. $2\varepsilon(\mathfrak{a})$) si la réflexion relative à α est (resp. n'est pas) réalisée dans $G_\mathfrak{a}$, stabilisateur de $\mathfrak{a}$ dans G , où $\varepsilon(\mathfrak{a})$ vaut 1 si $\mathbb{X} = G$ et $\prod_{\beta \in \Psi, \beta \neq \alpha, \beta(H_\alpha) \neq 0} (1 - \zeta_{-\beta}(\mathfrak{a})) |1 - \zeta_{-\beta}(\mathfrak{a})|$ si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$.

On note $I(\mathbb{X})$ l'espace formé des éléments F de $I^\infty(\mathbb{X})$ tels que, pour tout $A \in \text{Car } \mathbb{X}$, il existe un compact U de A pour lequel $F|_{A^{reg}}$ soit nulle en dehors de U^{reg} .

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [4]. Une version (stable) pour l'espace de Schwartz est due à D. Shelstad [31], théorème 2.8.1. Il y a une version p -adique de ce théorème [33].

Théorème de caractérisation des fonctions intégrales orbitales

L'application $I_{\mathbb{X}}$ est une surjection de $C_c^\infty(\mathbb{X})$ sur $I(\mathbb{X})$. Pour une topologie convenable sur $I(\mathbb{X})$, qui en fait une limite inductive de Fréchet, $I_{\mathbb{X}}$ est continue et sa transposée est une bijection entre son dual topologique $I(\mathbb{X})'$ et l'espace, $\mathcal{D}'(\mathbb{X})^G$, des distributions G -invariantes sur $\mathbb{X}$.

Indication sur la démonstration

L'inclusion de $I_{\mathbb{X}}(C_c^\infty(\mathbb{X}))$ dans $I(\mathbb{X})$ et la continuité se démontrent par la méthode de descente (voir section 3 pour les notations), en exprimant, pour $x \in \mathbb{X}^{ss}$, $y \in V_x^{reg}$, $r_{V_x}(I_{\mathbb{X}}^y)$ à l'aide de $I_{\mathbb{X}_x}^y$. On est ramené à des calculs sur $SL(2, \mathbb{R})$ (resp. $SL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{R})$). Pour $\mathbb{X} = G$, ceci est dû à Harish-Chandra. La surjectivité de $I_{\mathbb{X}}$, due à A. Bouaziz, est également démontrée par descente. L'utilisation de partitions de l'unité G -invariantes permet de localiser le problème. Il y a deux points difficiles : d'une part, la réduction de l'étape (iv) à l'étape (v) de la méthode de descente ; d'autre part, la résolution de l'étape (v). Pour ce point, on se réduit à démontrer que l'espace des formes linéaires continues sur la version infinitésimale, $I(\mathfrak{g})$, de $I(\mathbb{X})$ et à "support" dans le cône des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ est naturellement isomorphe à l'espace des distributions sur $\mathfrak{g}$, G -invariantes et à support dans le cône des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

On définit une action de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ sur $I(\mathbb{X})$ en posant $(D \cdot F)(x) = (\gamma_{a_x}(D)F|_{A_x})(x)$, $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}^{reg}$, où A_x est le sous-ensemble de Cartan contenant x . Cette action est compatible avec l'action de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ sur $C_c^\infty(\mathbb{X})$, c'est-à-dire que, pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$ et D comme ci-dessus, on a : $I_{\mathbb{X}}(Df) = D \cdot I_{\mathbb{X}}(f)$.

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [4]. On trouvera dans [7] un énoncé du même type, mais pour les fonctions K -finies. Ces théorèmes semblent totalement indépendants.

Théorème de Paley-Wiener invariant pour $\mathbb{X} = G$

On suppose que $\mathbb{X} = G$ et, pour simplifier l'énoncé, que les sous-groupes de Cartan de G sont commutatifs. Soit $[Car G]$ un ensemble de représentants, qu'on choisit θ -stables, des classes de conjugaison sous G des sous-groupes de Cartan de G . Pour tout $A \in [Car G]$, on choisit un ensemble de racines imaginaires positives de $\mathfrak{a}$, Ψ . Pour $\xi \in \hat{A}$, on notera Θ_ξ au lieu de $\Theta_{\xi, \Psi}$. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on définit une fonction $\hat{f}_A$ sur $\hat{A}$ par $\hat{f}_A(\xi) := \Theta_\xi(f)$, $\xi \in \hat{A}$. Alors :

(i) La fonction $\hat{f}_A$ est un élément de l'espace $\mathcal{PW}(A)^\Psi$ des transformées de Fourier, h , de fonctions C^∞ à support compact sur A vérifiant : $h(w \bullet_\Psi \xi) = \varepsilon_I(w)h(\xi)$, pour tout $\xi \in \hat{A}$ et $w \in W(G, \mathfrak{a})$.

(ii) L'application de $C_c^\infty(G)$ dans $\oplus_{A \in [Car G]} \mathcal{PW}(A)^\Psi$ qui à $f \in C_c^\infty(G)$ associe $(\hat{f}_A)_{A \in [Car G]}$ est surjective.

(iii) Cette application linéaire, qui est nulle sur le noyau de $I_{\mathbb{X}}$, passe au quotient en une bijection entre $I(\mathbb{X})$ et $\oplus_{A \in [Car G]} \mathcal{PW}(A)^\Psi$.

(iv) En particulier, si $f \in C_c^\infty(G)$ est telle que $\Theta_\xi(f) = 0$ pour tout $A \in [Car G]$ et tout $\xi \in \hat{A}$, alors $I_{\mathbb{X}}(f)$ est nulle.

7. CONSTRUCTION DES F_ξ

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [5] si $\mathbb{X} = G$ et à P. Harinck si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ [15].

Théorème de construction des F_ξ

Soient $A \in Car(\mathbb{X})$ et Ψ un ensemble de racines imaginaires positives de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Pour tout élément $\xi = (\omega, y)$ de $\hat{A}$, il existe un élément $F_{\xi, \Psi}$ de $I(\mathbb{X})^\infty$ tel que :

- (i) Pour tout $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$, $D \cdot F_{\xi, \Psi} = \gamma_{\mathfrak{a}}(D)(\lambda_\omega)F_{\xi, \Psi}$.
- (ii) Soit $a \in A^{reg}$. Si $a \notin N(G, \mathfrak{a})Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) \cdot y$, $F_{\xi, \Psi}(a)$ est nul, et si $a = nz \cdot y$ avec $n \in N(G, \mathfrak{a})$, $z \in Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$, on a, avec les notations du théorème de construction des Θ_ξ :

$$(b_\Psi F_{\xi, \Psi})(a) = * \sum_{u \in W(G, \mathfrak{a})^\Psi} \varepsilon_I(u) \text{tr}(u \bullet_\Psi \omega)(z z_{y, u})$$

où, pour $\mathbb{X} = G$, $*$ = $|W(G, \mathfrak{a})|^{-1} |A/A^a|$ (ici A est regardé comme sous-groupe de Cartan de G et A^a désigne le centralisateur de a dans A) et, pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, $*$ = $|W(G, \mathfrak{a})|^{-1} |G^a/Z(G, \mathfrak{a})|^{-1}$ (G^a a été défini au début du paragraphe 6).

(iii) Si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$, $F_{\xi, \Psi}$ est bornée sur $\mathbb{X}^{reg}$.

(iv) Si $B \in Car \mathbb{X}$ et $[B] \not\subseteq [A]$, $F_{\xi, \Psi}$ est nulle sur B^{reg} .

Indication sur la démonstration

Le procédé de construction des F_ξ pour $\mathbb{X} = G$ (resp. $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$) s'apparente à la construction des Θ_ξ pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ (resp. $\mathbb{X} = G$).

8. FORMULE D'INVERSION DES INTÉGRALES ORBITALES

Normalisation des mesures

On choisit une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$ qui coïncide avec la forme de Killing sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, qui est σ et θ invariante et est telle que $X \mapsto -B(X, \theta(X))$ définisse un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. Ce produit scalaire fixe une normalisation des mesures de Haar sur chaque sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$: on parlera de la mesure de Haar sur un sous-espace de $\mathfrak{g}$. On note, pour $A \in Car \mathbb{X}$, da_0 , la mesure sur A_0 qui est $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ -invariante et tangente à la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}$. On note $d\omega$ la mesure de Plancherel sur $\hat{A}_0$:

c'est la mesure sur $\hat{A}_0$ telle que la mesure de Dirac en $e_{\mathbf{X}}$ sur A_0 soit égale à $\int_{\hat{A}_0} \varpi d\omega$, où ϖ est identifié à une distribution sur A_0 grâce à da_0 . On note $d\xi$ la mesure produit de la mesure de Plancherel sur $\hat{A}_0$ par la mesure de comptage sur $\mathcal{W}_A$. On note dx la mesure G -invariante sur $\mathbb{X}$ tangente à la mesure de Haar sur $\mathfrak{q}$. Celle-ci détermine une identification entre fonctions généralisées et distributions sur $\mathbb{X}$.

On choisit un ensemble $[Car \mathbb{X}]$ de représentants des classes de conjugaison sous G des éléments de $Car \mathbb{X}$ qu'on choisit stables par θ et, pour chaque élément A de $[Car \mathbb{X}]$, un ensemble de racines imaginaires positives de $\tilde{\mathfrak{a}}$, Ψ noté aussi Ψ_A si l'on veut préciser. Soient $A \in [Car \mathbb{X}]$, $u \in \mathcal{W}_A^{-1}$ et $\xi = (\omega, y) \in \hat{A}$. On pose $u \cdot \xi := \xi$ si $\mathbb{X} = G$ ($\mathcal{W}_A$ est alors réduit à un élément), et $u \cdot \xi := (u \cdot \omega, y)$ si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$. Dans ce dernier cas, $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ est connexe et commutatif et égal à $\exp \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et $u \cdot \omega$ est le caractère de $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ trivial sur $Z(G, \mathfrak{a})$ dont la différentielle est égale à $u \cdot \lambda_{\omega} \in i\mathfrak{a}^*$. Ce caractère existe car $u \cdot \lambda_{\omega}$ est trivial sur le réseau $\Gamma_{\mathfrak{a}}$: c'est le cas pour λ_{ω} et l'on a $u \cdot \Gamma_{\mathfrak{a}} = \Gamma_{\mathfrak{a}}$. On a $u \cdot \xi \in \hat{A}$.

On notera $\xi^* := (\omega^*, y)$ où ω^* est la contragrédiente de ω . Comme ω^* est un élément de $\hat{A}_0$, on a $\xi^* \in \hat{A}$.

Formule d'inversion des intégrales orbitales

(i) Pour tout $A \in [Car \mathbb{X}]$ et $x \in \mathbb{X}^{reg}$, l'intégrale suivante, notée I_A^x converge faiblement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{X})$:

$$\int_{\hat{A}} \sum_{u \in \mathcal{W}_A^{-1}} F_{u, \xi, \Psi}(x) \Theta_{u, \xi^*, \varepsilon \Psi} d\xi$$

où ε vaut -1 si $\mathbb{X} = G$ et 1 si $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{X}^{reg}$, on a :

$$I_{\mathbb{X}}^x = \sum_{A \in [Car \mathbb{X}]} I_A^x.$$

Démonstration du théorème pour $\mathbb{X} = G$, modulo les convergences d'intégrales et les questions de support

On suppose ici que $\mathbb{X} = G$ et, pour simplifier l'exposé, que les sous-groupes de Cartan de G sont commutatifs. Pour $A \in [Car G]$ et $\xi \in \hat{A}$, on notera Θ_{ξ} au lieu de $\Theta_{\xi, -\Psi}$ et F_{ξ} au lieu de $F_{\xi, \Psi}$. Pour $f \in C_c^{\infty}(G)$, on définit une fonction $I_A(f)$ sur G^{reg} par :

$$(3) \quad I_A(f)(x) = \int_{\hat{A}} F_{\xi}(x) \Theta_{\xi^*}(f) d\xi, \quad x \in G^{reg}.$$

Il s'agit de démontrer que :

$$(4) \quad I_G(f) = \sum_{A \in [Car G]} I_A(f), \quad f \in C_c^\infty(G).$$

On démontre d'abord que $I_A(f)$ est un élément de $I^\infty(G)$ (l'intégrale converge dans $I^\infty(G)$), puis que c'est un élément de $I(G)$ (question de support). De même, on montre que, si h est la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ à support compact sur A , la fonction F_h sur G^{reg} est bien définie par la formule:

$$(5) \quad F_h(x) := \int_{\hat{A}} h(\xi) F_\xi(x) d\xi, \quad x \in G^{reg}.$$

De plus, c'est un élément de $I(G)$. Avec les notations du théorème de Paley-Wiener invariant, on a :

$$(6) \quad I_A(f) = F_h, \quad \text{où } h(\xi) = \hat{f}_A(\xi^*), \quad \xi \in \hat{A}.$$

Soient $B \in [Car G]$ et $\eta \in \hat{B}$. Grâce à l'isomorphisme entre $I(G)'$ et l'espace des distributions G -invariantes sur G , Θ_η définit une forme linéaire continue, θ_η , sur $I(G)$. Utilisant le théorème de régularité et la formule d'intégration de Weyl sur G , on voit que :

$$(7) \quad \theta_\eta(F) = \sum_{A \in [Car G]} |W(G, a)|^{-1} \int_{A^{reg}} D_G^{1/2}(a) \Theta_\eta(a) F(a) da, \quad F \in I(G).$$

Pour démontrer l'égalité (4) ci-dessus il suffit, d'après le point (iv) du théorème de Paley-Wiener invariant, de voir qu'il y a égalité après application de θ_η aux deux membres, lorsque B décrit $[Car G]$ et η décrit $\hat{B}$.

Lemme 2.— Si B n'est pas conjugué sous G (où, ce qui revient au même, égal) à A , on a $\theta_\eta(F_h) = 0$, pour toute transformée de Fourier, h , d'une fonction C^∞ à support compact sur A .

Démonstration.— D'après la formule (7), si $\theta_\eta(F_h)$ n'est pas nul, il existe $C \in Car G$ tel que la restriction de Θ_η et celle de F_h à C^{reg} soient non nulles. D'après les points (ii) des théorèmes de construction et la définition de F_h , cela implique l'existence de $C \in Car G$ avec $[B] \leq [C] \leq [A]$. En particulier on a $[B] \leq [A]$, ce que l'on supposera dans la suite de la démonstration du lemme. Il faut montrer que $A = B$. Supposons $A \neq B$ et montrons que $\theta_\eta(F_h)$ est nul. En utilisant l'induction et un passage du réductif au semi-simple, on peut supposer de plus que B est compact. Dans ce cas,

on peut définir, pour $\xi \in \hat{A}$, $\theta_\eta(F_\xi)$ en remplaçant F par F_ξ dans la formule (7) : les intégrales convergent et dépendent continûment de ξ . De plus, par une application du théorème de Fubini, on voit que :

$$(8) \quad \theta_\eta(F_h) = \int_{\hat{A}} \theta_\eta(F_\xi) h(\xi) d\xi.$$

Soit $D \in \mathbb{D}(G)$ et étudions $\theta_\eta(D \cdot F_h)$. D'abord, d'après les propriétés des Θ_ξ , on a :

$$\theta_\eta(D \cdot F_h) = (\gamma_b(D^t)(\lambda_\eta)) \theta_\eta(F_h).$$

D'autre part, du point (i) du théorème de construction des F_ξ , on déduit par dérivation sous le signe somme du second membre de (5) que $D \cdot F_h$ est égal à F_{h_1} , où h_1 est définie par : $h_1(\xi) = (\gamma_a(D)(\lambda_\xi)) h(\xi)$. Donc, pour toute transformée de Fourier h d'une fonction C_c^∞ à support compact sur A et tout $D \in \mathbb{D}(G)$, on a :

$$\int_{\hat{A}} (\gamma_b(D^t)(\lambda_\eta) - \gamma_a(D)(\lambda_\xi)) \theta_\eta(F_\xi) h(\xi) d\xi = 0.$$

Par densité, il en résulte que le terme qui précède h dans l'intégrale est identiquement nul. Par suite, $\theta_\eta(F_\xi)$ est nul si ξ n'est pas élément de l'ensemble des zéros communs des fonctions sur $\hat{A}$: $\xi \mapsto \gamma_b(D^t)(\lambda_\eta) - \gamma_a(D)(\lambda_\xi)$, $D \in \mathbb{D}(G)$. Mais cet ensemble est fini. Comme A n'est pas conjugué à B , A est le produit d'un groupe compact et d'un groupe vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1. Alors le complémentaire d'un ensemble fini est dense dans $\hat{A}$. La continuité de $\theta_\eta(F_\xi)$ par rapport à ξ permet de conclure à sa nullité sur $\hat{A}$. Le lemme résulte alors des formules (6) et (8).

Lemme 3.— Si $A = B$, $\theta_\eta(I_A(f))$ est égal à $\theta_\eta(I_X(f))$.

Démonstration.— On prend h comme dans (6). On remarque, de manière analogue à ci-dessus, que si Θ_η et $I_A(f)$ ont une restriction non nulle à C^{reg} pour $C \in [Car G]$, on a nécessairement $A = B = C$. Alors, en utilisant (6), (7), (8) et le théorème de Fubini, on voit que :

$$\theta_\eta(I_A(f)) = \int_{A^{reg} \times \hat{A}} D_G^{1/2}(a) \Theta_\eta(a) F_\xi(a) h(\xi) da d\xi.$$

Explicitant $\Theta_\eta(a)$ et $F_\xi(a)$ grâce aux théorèmes de construction, et tenant compte du fait que $b_\Psi b_{-\Psi}$ est identiquement égal à 1, on obtient :

$$\theta_\eta(I_A(f)) = |W(G, \mathfrak{a})|^{-2} \sum_{w, w' \in W(G, \mathfrak{a})} \int_{A^{reg} \times \hat{A}} \varepsilon(w)((w \bullet_{-\Psi} \eta)(a)) \varepsilon(w')((w' \bullet_{\Psi} \xi)(a)) h(\xi) d\xi.$$

La formule d'inversion de Fourier pour A implique que :

$$\int_{A^{reg} \times \hat{A}} \eta(a) \xi(a) h(\xi) da d\xi = h(\eta^*).$$

Joint à ce qui précède et aux propriétés de transformation de $\hat{f}_A$ sous $W(G, \mathfrak{a})$, cela permet d'achever la preuve du lemme.

Le théorème résulte immédiatement des deux lemmes précédents, en tenant compte de (6) dans l'application du lemme 2.

9. FORMULE D'INVERSION DE FOURIER POUR $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

On suppose $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ et on garde les notations du théorème précédent. Soient $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ et $\omega \in \hat{A}_0$ tels que $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) \neq 0$ pour toute racine imaginaire α de $\mathfrak{a}$. On note Ψ_{ω} (resp. $\Psi_{\omega, nc}$) l'ensemble des racines imaginaires (resp. imaginaires non compactes), α de $\mathfrak{ia}$ telles que $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) > 0$. On pose $C(\omega) = (-1)^{|\Psi_{\omega, nc}|} (i)^{|\Psi_{\omega}|} \Theta_{\xi}$, où $\xi = (\omega, e_{\mathbb{X}}) \in \hat{A}$. Le théorème suivant est dû à P. Harinck [16]. Le lien avec la théorie des représentations est rendu possible grâce à [8], [12] et [13].

Formule d'inversion de Fourier pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

Il existe des constantes positives, c_A , $A \in [\text{Car } \mathbb{X}]$ (explicitées dans [16]) telles que, pour tout $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{X})$, on ait :

$$f(e_{\mathbb{X}}) = \sum_{A \in [\text{Car } \mathbb{X}]} c_A \int_{\hat{A}_0} \sum_{u \in \mathcal{W}_A^{-1}} \langle C(u \cdot \omega), f \rangle \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})} \lambda_{\omega}(H_{\alpha}) \right|^{1/2} d\omega.$$

Indication sur la démonstration

Soit $B \in \text{Car } \mathbb{X}$ tel que $i\mathfrak{b}$ soit une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{g}$. Soit Σ un ensemble de racines positives tel que, pour toute racine complexe appartenant à Σ , sa complexe conjuguée par rapport à $i\mathfrak{b}$ soit élément de Σ . On choisit pour Ψ_B l'ensemble des racines imaginaires appartenant à Σ . Avec les notations du paragraphe 4 on a la formule limite :

$$f(e_{\mathbb{X}}) = c \lim_{x \rightarrow e_{\mathbb{X}}, x \in B^{reg}} (\omega_{\Sigma}(b_{\Psi_B} I_{\mathbb{X}}(f)))(x),$$

où c est une constante parfaitement déterminée. Cette formule découle de la formule limite d'Harish-Chandra sur les algèbres de Lie. On applique alors la formule d'inversion des intégrales orbitales pour calculer le membre de droite de cette formule.

Par construction (induction), pour $A \in [\text{Car } \mathbb{X}]$ et $\xi = (\omega, y) \in \hat{A}$, avec $y \neq e$, les fonctions F_{ξ, Ψ_A} sont nulles au voisinage de $e_{\mathbb{X}}$ dans B^{reg} . Pour $y = e$ et $X \in \mathfrak{g}^{reg}$, la fonction de ω , $F_{\xi, \Psi_A}(\text{Exp } iX)$, s'exprime facilement en fonction de la transformée de Fourier de la mesure invariante sur l'orbite de X sous un sous-groupe M de G évaluée au point λ_{ω} . Les propriétés de cette transformée de Fourier permettent alors d'achever le calcul par une dérivation sous le signe somme dans la formule d'inversion des intégrales orbitales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOPP et P. HARINCK - *Formule de Plancherel pour $GL(n, \mathbb{C})/U(p, q)$* , J. reine angew. Math. **428** (1992), 45-95.
- [2] A. BOUAZIZ - *Sur les caractères des groupes de Lie non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), 1-79.
- [3] A. BOUAZIZ - *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives*, Invent. Math. **115** (1994), 163-207.
- [4] A. BOUAZIZ - *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **27** (1994), 573-609.
- [5] A. BOUAZIZ - *Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, J. Funct. Anal. **134** (1995), 100-182.
- [6] A. BOUAZIZ - *Une dualité entre $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et $G_{\mathbb{R}}$* , en préparation.
- [7] L. CLOZEL et P. DELORME - *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, II, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 193-228.
- [8] P. DELORME - *Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , Invent. Math. **105** (1991), 305-346.
- [9] M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE - *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, dans Mémoire Soc. Math. France **15** (1984), 26-87.
- [10] M. DUFLO et M. VERGNE - *La formule de Plancherel des groupes semi-simples réels*, Adv. Studies in Pure Math. **14**, Academic Press (1988), Orlando.
- [11] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* . Thèse de Doctorat, Université Paris 7 (1988).
- [12] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **23** (1990), 1-38.

- [13] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques induites sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et applications*, J. Funct. Anal. **103** (1992) 104-127.
- [14] P. HARINCK - *Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , J. Funct. Anal. **124** (1994), 427-474 .
- [15] P. HARINCK - *Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* . Preprint.
- [16] P. HARINCK - *Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel*. Preprint.
- [17] HARISH-CHANDRA - *Collected Papers*, vol. 3, 4, Springer-Verlag (1983) New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
- [18] R. HERB - *Fourier inversion of invariant integrals on semisimple real Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 281-302.
- [19] R. HERB - *Fourier inversion and the Plancherel theorem for semisimple real Lie groups*, Amer. J. Math. **104** (1982), 9-58.
- [20] R. HERB - *Fourier inversion and the Plancherel theorem*. Proc. Conf. Marseille-Luminy 1980, Lecture Notes in Math. **880**, Springer-Verlag (1982) Berlin, Heidelberg, New York, pp 197-210.
- [21] R. HERB - *Discrete series characters and Fourier inversion on semisimple real Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 241-262.
- [22] R. HERB et P. SALLY - *Singular invariant eigendistributions as characters*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 252-254 .
- [23] T. HIRAÏ - *Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups*, Proc. of Symposia in Pure Math. XXVI (1973), 281-287.
- [24] T. HIRAÏ - *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups*, II, Japan J. Math. **2** (1976), 27-89.
- [25] L. HÖRMANDER - *The analysis of partial differential equations*, Vol. 1, Grundle Math. **256**, Springer-Verlag (1983) Berlin, Heidelberg, New-York.
- [26] T. OSHIMA, T. MATSUKI - *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 399-414.
- [27] W. ROSSMAN - *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), 207-220.
- [28] P. SALLY et G. WARNER - *The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one*, Acta Math. **131** (1973), 1-26.
- [29] S. SANO - *Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$* , J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 191-218.

- [30] S. SANO - *Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , J. Math. Univ. Kyoto **31** (1991), 377-417.
- [31] D. SHELSTAD - *Orbital integrals, endoscopic groups and L -indistinguishability for real groups*, Pub. Math. Univ. Paris VII, Journées automorphes, Dijon, 1981.
- [32] V.S. VARADARAJAN - *Harmonic analysis on real reductive groups*. Lecture Notes in Math. **576**, Springer-Verlag (1977) Berlin, Heidelberg, New-York.
- [33] M.-F. VIGNERAS - *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p -adique*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA **29** (1981), 945-962.

Patrick DELORME

Faculté des Sciences de Luminy
Département de Mathématique-Informatique
163, avenue de Luminy
Case 901
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9