Astérisque

ÉTIENNE GHYS

Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 785, p. 283-307

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__283_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 785

Juin 1994

CONSTRUCTION DE CHAMPS DE VECTEURS SANS ORBITE PÉRIODIQUE

[d'après Krystyna KUPERBERG]

par Étienne GHYS

Introduction

"It is unknown if every continuous vector field on the three dimensional sphere contains a closed integral curve" [25]. Cette question, discrètement insérée dans un article de 1948 par H. Seifert, est progressivement devenue *la conjecture de Seifert* et a passionné bon nombre de topologues/dynamiciens. En 1974, P. Schweitzer construisait un contre-exemple qui n'est cependant que de classe C^1 [23]. Depuis, la question de l'existence d'exemples plus réguliers semblait bien difficile... K. Kuperberg vient d'y répondre par une superbe construction que nous allons décrire dans cet exposé.

Théorème [11] *Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe un champ de vecteurs non singulier,* analytique réel, *dont aucune orbite n'est périodique.*

Après avoir donné quelques motivations (§1 et §2), nous décrirons les constructions préliminaires de W. Wilson et P. Schweitzer (§3 et §4). La démonstration du théorème est faite aux §5 et §6. Enfin, dans les §7 et §8, nous discutons de la dynamique de ces exemples et des problèmes qu'ils soulèvent.

Je voudrais remercier les collègues qui m'ont aidé à mieux comprendre cette construction. J'ai en particulier profité d'un exposé de Shigenori Matsumoto [15], d'intéressantes conversations avec Christian Bonatti et Bruno Sevennec ainsi que du point de vue "serpentin" de Larry Siebenmann [26]. Je remercie par ailleurs Krystyna et Greg Kuperberg pour les informations qu'ils ont bien voulu me transmettre.

§1 Un peu d'histoire

C'est H. Poincaré qui a montré l'importance des orbites périodiques en mécanique céleste : "elles se sont montrées la seule brèche par où nous puissions pénétrer une place jusqu'ici réputée inabordable" [18]. Il démontre l'existence de nombreuses

orbites périodiques dans le problème des trois corps, ce qui lui permet d'étudier ensuite la dynamique au voisinage de ces orbites [19]. Avec la même motivation, il "montre" l'existence de géodésiques fermées sur les surfaces compactes convexes [20]. Ces travaux sont précisés par G. Birkhoff qui prouve en particulier qu'il existe des géodésiques fermées pour toute métrique riemannienne sur une sphère de dimension quelconque [2]. Les champs de vecteurs concernés sont hamiltoniens et les méthodes sont bien entendu variationnelles. Il était naturel de chercher des propriétés purement topologiques qui garantissent l'existence d'orbites périodiques pour des champs qui ne sont plus nécessairement hamiltoniens.

H. Kneser montre par exemple que tout champ de vecteurs non singulier sur la bouteille de Klein possède une orbite périodique [10]. C'est dans ce même esprit que H. Seifert aborde l'étude des champs de vecteurs sur la sphère de dimension trois, évidemment guidé par la remarque élémentaire suivante. Considérons un champ de vecteurs sur le produit $V \times S^1$ d'une variété fermée et du cercle et supposons que ce champ soit transverse à tous les $V \times \{*\}$ (ce qui est par exemple le cas si le champ est suffisamment proche de la fibration triviale en cercles). On peut alors considérer l'application de premier retour d'une orbite sur l'une de ces sections transverses ; c'est un homéomorphisme de V, homotope à l'identité, dont les points fixes correspondent bien sûr à des orbites périodiques du champ considéré. Si la caractéristique d'Euler-Poincaré de V est non nulle, on a donc montré l'existence d'une orbite périodique pour ce type de champ sur $V \times S^1$. Le problème étudié par H. Seifert est celui des champs proches de la fibration de Hopf sur la sphère de dimension trois. Bien sûr, cette fibration ne possède pas de section globale mais on peut analyser les applications de premier retour sur des sections locales et un calcul d'indice (délicat) mène au théorème de Seifert [25] :

Tout champ de vecteurs suffisamment proche de la fibration de Hopf sur la sphère de dimension trois possède au moins une orbite périodique.

On consultera [3] pour un exposé clair de ce résultat et de ses développements, comme la théorie de l'indice de Fuller qui permet de garantir l'existence d'orbites périodiques, dans certains cas, au voisinage d'un champ de vecteurs donné.

D'une certaine façon, *l'enjeu de la conjecture de Seifert était donc la recherche d'un théorème global qui permette de "compter" les orbites périodiques d'un champ tout comme le théorème de Poincaré-Hopf permet de "compter" les singularités.*

§2 Pourquoi la question est difficile...

Le fait qu'il ait fallu chercher ce contre-exemple pendant quarante-cinq ans est déjà une indication de la difficulté du problème... Pour que le lecteur ait quelques exemples à l'esprit, nous commençons par décrire deux procédés élémentaires de construction de champs de vecteurs sur la sphère de dimension trois.

Soit $h : S^3 \to S^2$ la fibration de Hopf et $\mathcal{H}$ un champ dont les orbites sont les fibres de h. Chaque champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur la sphère S^2 se relève de manière unique en un champ $\overline{\mathcal{X}}$ orthogonal à $\mathcal{H}$. La somme $\mathcal{Y} = \mathcal{H} + \overline{\mathcal{X}}$ est un champ non singulier dont les orbites se projettent par h sur celles de $\mathcal{X}$. Les singularités de $\mathcal{X}$ correspondent donc à des orbites périodiques de $\mathcal{Y}$ (en particulier, il en existe...). En choisissant par exemple pour $\mathcal{X}$ le gradient d'une fonction de Morse, *on obtient des champs non singuliers sur la sphère de dimension trois qui ne possèdent qu'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Un métrique riemannienne sur la sphère de dimension *deux* définit un *flot géodésique* sur son fibré unitaire tangent, dont un revêtement double est la sphère de dimension trois. Nous avons déjà signalé que tous ces flots ont des orbites périodiques (et même un infinité, d'après un résultat de V. Bangert et J. Franks). Un exemple de V. Donnay montre qu'un tel flot *peut* être ergodique (par rapport à la mesure de Liouville) de sorte que, en particulier, *il existe des champs de vecteurs sur la sphère dont presque toutes les orbites sont denses* [5].

Voici quelques résultats qui montrent qu'un champ sans orbite périodique sur la sphère de dimension trois doit être *très* particulier.

- Le *closing lemma* de C. Pugh montre qu'un champ de vecteur générique (dans la topologie C^1) d'une variété fermée possède une singularité ou une orbite périodique [21].

- Selon un théorème de A. Katok, un champ de vecteurs non singulier, de classe C^2, sur une variété fermée de dimension trois, dont l'*entropie topologique est non nulle*, contient un ensemble hyperbolique et donc *une infinité d'orbites périodiques* [8].

- Un champ de vecteurs *transverse à un feuilletage de codimension un* sur la sphère de dimension trois possède une orbite périodique : c'est un corollaire du théorème de S.P. Novikov [17].

- D'après un résultat récent de H. Hofer, *le champ de Reeb d'une forme de contact* sur la sphère de dimension trois possède une orbite périodique. Voir l'exposé de F. Laudenbach dans ce séminaire [14].

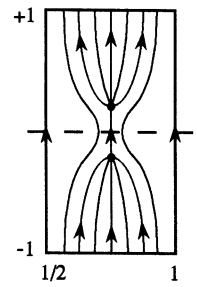
§3 Le piège de Wilson

Dans [27], W. Wilson introduit une méthode extrêmement simple pour modifier un champ de vecteurs et *piéger* ses orbites périodiques. Certes, le piège est encore rudimentaire puisqu'il produit lui-même des orbites périodiques mais ceci permet de montrer que :

Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe des champs de vecteurs n'ayant qu'un nombre fini d'orbites périodiques.

C'est cette première idée, essentielle pour la construction de K. Kuperberg, que nous allons décrire dans ce paragraphe.

Considérons le champ de vecteurs $\mathcal{W}_0$ sur le rectangle $R = [1/2, 1] \times [-1, +1]$ (de coordonnées (r, z)) décrit sur la figure ci-contre. Il possède les propriétés suivantes :



- Il est de classe C^∞ et coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$ près du bord du rectangle; il possède deux singularités (de type selle-nœud).

- Les orbites entrant dans le rectangle par un point de $[5/8, 7/8] \times \{-1\}$ ne sortent pas du rectangle : elles sont *piégées* et convergent vers une singularité.

- Le champ est antisymétrique par rapport à la droite $\{z = 0\}$. Il en résulte que *si une orbite pénètre dans le rectangle et en ressort, les points d'entrée et de sortie sont symétriques par rapport à cette droite.*

Soit $P = S^1 \times R$ le produit du cercle $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (de coordonnée θ) par le rectangle R. Soit $\mathcal{W}_1$ le champ sur P tangent aux $\{*\} \times R$ et qui se projette sur $\mathcal{W}_0$ par la projection de P sur R; c'est un champ qui possède deux cercles de singularités que nous allons détruire en y ajoutant une composante dans la direction de $\partial/\partial\theta$. Soit $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction, de classe C^∞, nulle au voisinage du bord, impaire en z, et non nulle sur les singularités de $\mathcal{W}_0$. La somme $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + f.\partial/\partial\theta$ est un *champ non singulier sur P, ne possédant que deux orbites périodiques.*

On peut plonger P dans le produit $D^2 \times [-1, +1]$ du disque fermé D^2 de rayon 1 par l'intervalle $[-1, +1]$ en envoyant le point (θ, r, z) sur le point $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. En prolongeant $\mathcal{W}_2$ à l'extérieur de P par le champ vertical $\partial/\partial z$, on obtient finalement un champ $\mathcal{W}_3$ sur $D^2 \times [-1, +1]$. C'est le *piège de Wilson.* Il possède les propriétés suivantes :

W1 *C'est un champ de classe C^∞ de $D^2 \times [-1, +1]$ qui coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$ près du bord.*

W2 *Il existe un ouvert non vide U de D^2 tel que les orbites qui pénètrent dans le piège par un point de $U \times \{-1\}$ n'en ressortent pas.*

W3 *Le champ est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$.*

Voyons comment utiliser le piège de Wilson. Rappelons d'abord qu'une variété fermée connexe supporte un champ de vecteurs non singulier si et seulement si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle, ce qui est le cas en dimension impaire (en particulier en dimension trois...).

Soit $\mathcal{X}$ un champ de vecteurs non singulier, de classe C^∞, sur une variété fermée V de dimension trois. Il n'est pas difficile de trouver un nombre fini de copies disjointes de $D^2 \times [-1, +1]$ dans V (que nous appellerons les *boîtes*) dans lesquelles le champ $\mathcal{X}$ coïncide avec un multiple constant de $\partial/\partial z$ et telles que la réunion des diverses

copies de $U \times \{-1\}$ rencontre toutes les orbites de $\mathcal{X}$.

On construit alors un champ de vecteurs non singulier $\overline{\mathcal{X}}$ sur V de la façon suivante. À l'extérieur de la réunion des boîtes, les champs $\mathcal{X}$ et $\overline{\mathcal{X}}$ coïncident. Dans chaque boîte, on remplace $\mathcal{X}$ par un multiple constant du piège de Wilson $\mathcal{W}_3$, convenablement ajusté pour que le champ ainsi obtenu soit lisse.

Nous affirmons que $\overline{\mathcal{X}}$ *ne possède qu'un nombre fini d'orbites périodiques*, à savoir celles qui sont contenues dans les boîtes. Considérons en effet l'orbite d'un point x, extérieur aux boîtes, par $\overline{\mathcal{X}}$. Cette orbite commence par suivre une orbite de $\mathcal{X}$. Si elle pénètre dans une boîte et en ressort, le point de sortie est le même que le point de sortie de l'orbite de $\mathcal{X}$ correspondante, c'est-à-dire que, à la sortie de la boîte, le point est revenu sur l'orbite de $\mathcal{X}$ qu'il a quittée à l'entrée. Puisque nous avons fait en sorte que la réunion des copies de $U \times \{-1\}$ rencontre toutes les orbites de $\mathcal{X}$, on en déduit que l'orbite par $\overline{\mathcal{X}}$ d'un point extérieur aux boîtes finit par pénétrer dans une boite et ne plus en sortir : elle n'est donc pas périodique.

Terminons ce paragraphe par quelques remarques.

- Il est possible de construire un piège *analytique réel* et de réaliser la chirurgie précédente de manière analytique. La condition **W1** est évidemment incompatible avec **W2** pour un champ analytique, mais on peut considérer un champ analytique réel $\mathcal{W}'$ sur un voisinage ouvert de $D^2 \times [-1,+1]$ dans $\mathbf{R}^3$ qui vérifie les conditions **W2** et **W3** et la condition suivante :

W1' *Il existe un difféomorphisme analytique réel ϕ d'un voisinage ouvert* du bord *de $D^2 \times [-1,+1] \subset \mathbf{R}^3$ sur un (autre) voisinage du bord qui envoie $\mathcal{W}'$ sur $\partial/\partial z$.*

Si, par exemple, $\mathcal{W}'$ est un champ analytique vérifiant **W2** et **W3** qui coïncide avec $\partial/\partial z$ *sur* le bord alors il vérifie **W1'**. Il suffit en effet de définir $\phi(r,\theta,z)$ comme (r',θ',z) où r' et θ' sont tels que $(r',\theta',+1)$ ou $(r',\theta',-1)$est dans l'orbite de $\mathcal{W}'$ passant par (r,θ,z). Ceci est bien défini au voisinage du bord.

Partant maintenant d'un champ analytique $\mathcal{X}$ non singulier sur une variété analytique V de dimension trois, on peut réaliser les boîtes précédentes par des plongements analytiques ψ définis sur un voisinage de $D^2 \times [-1,+1] \subset \mathbf{R}^3$, à valeurs dans V; et envoyant $\partial/\partial z$ sur un multiple de $\mathcal{X}$. L'opération de chirurgie consiste alors à ôter $\psi(D^2 \times [-1,+1])$ à V et à recoller le voisinage de $D^2 \times [-1,+1]$ sur ce qui reste de V par $\psi \circ \phi$ (là où cela a un sens). On obtient un champ analytique $\overline{\mathcal{X}}$ sur la variété V équipée d'une nouvelle structure analytique. D'après le théorème de Morrey-Grauert, la nouvelle structure est l'image de l'ancienne par un difféomorphisme C^∞ et on obtient donc un champ analytique sur la variété analytique initiale, comme annoncé.

- Si l'on dispose d'un nombre fini de disques transverses à $\mathcal{X}$, on peut toujours les connecter par des bandes transverses à $\mathcal{X}$ de façon à obtenir *un seul* disque transverse (si la variété V est connexe...). On peut donc réaliser la construction

précédente en utilisant une seule boîte et on obtient ainsi un champ ne possédant que deux orbites périodiques. Cette remarque est due à A. Verjovsky.

- Nous n'avons supposé la variété V compacte que pour des raisons de commodité ; une méthode analogue fonctionne sur une variété (paracompacte) quelconque et fournit des champs dont les orbites périodiques sont isolées.

- Dans chaque boîte, l'indice de chacune des deux orbites périodiques est nul. Il n'est pas difficile de construire des champs sur V ne possédant qu'un nombre fini d'orbites périodiques dont la somme des indices est arbitraire ; on ne peut donc pas espérer de théorème d'indice général "à la Poincaré-Hopf" pour les orbites périodiques.

- En dimension n supérieure ou égale à quatre, le piège de Wilson est très efficace. Au lieu de considérer le produit P du cercle par le rectangle R, on considère évidemment le champ analogue, encore noté $\mathcal{W}_1$, sur le produit d'un tore T^{n-2} par R. On construit alors le champ $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + f.\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un champ de vecteurs linéaire sur le tore T^{n-2}, de direction irrationnelle (*sans orbite périodique dès que* $n \geq 4$). En plongeant $T^{n-2} \times [1/2, 1]$ dans une boule B de $\mathbf{R}^{n-1}$, on obtient un piège de Wilson $\mathcal{W}_3$ sur $B \times [-1, +1]$ dont on peut faire le même usage que précédemment. On obtient le théorème de Wilson :

Théorème [27] *Sur toute variété fermée connexe de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle et de dimension supérieure ou égale à quatre, il existe un champ de vecteurs (analytique réel) sans orbite périodique.*

C'est donc en dimension trois que la conjecture de Seifert est plus intéressante.

§4 Le piège de Schweitzer

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une construction de P. Schweitzer [23] :

Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe des champs de vecteurs de classe C^1 *sans orbite périodique.*

Pour plus de détails, on pourra consulter l'exposé de H. Rosenberg dans ce séminaire [22]. Il faut utiliser des pièges dont la topologie est plus complexe que celle de $D^2 \times [-1, +1]$; ce sera la seconde idée essentielle pour la construction du piège de K. Kuperberg.

Considérons une surface Σ, compacte, orientable et à bord non vide. Nous dirons qu'un champ de vecteurs sur le produit $\Sigma \times [-1, +1]$ est un *piège apériodique* s'il vérifie les conditions suivantes :

P1 *Il coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$ près du bord.*

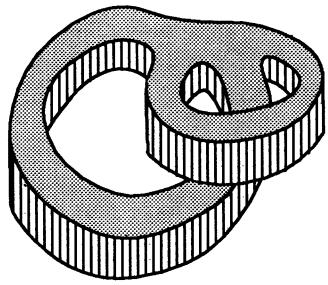
P2 *Il existe au moins un point de $\Sigma \times \{-1\}$ dont l'orbite ne ressort pas de*

$\Sigma \times [-1, +1]$.

P3 *Si une orbite pénètre dans $\Sigma \times \{-1\}$ et en ressort, les points d'entrée et de sortie sont symétriques par rapport au plan $\{z = 0\}$.*

P4 *Il ne possède pas d'orbite périodique.*

Toute surface compacte orientable à bord non vide Σ s'immerge dans le plan. On peut donc trouver un plongement de $\Sigma \times [-1, +1]$ dans $D^2 \times [-1, +1] \subset \mathbf{R}^3$ envoyant $\partial/\partial z$ sur un multiple du champ vertical constant. Voir la figure pour le cas où Σ est un tore T^2 auquel on a ôté un disque ouvert.



Supposons construit un piège apériodique sur $\Sigma \times [-1, +1]$, considéré comme une partie de $D^2 \times [-1, +1]$. En prolongeant un multiple de ce champ à $D^2 \times [-1, +1]$ tout entier par $\partial/\partial z$, on obtient évidemment un piège apériodique sur $D^2 \times [-1, +1]$. En partant d'un champ ne possédant qu'un nombre fini d'orbites périodiques sur une variété fermée de dimension trois, on pourra alors utiliser la méthode de Wilson pour piéger ces orbites périodiques sans en créer d'autres ; *on obtient ainsi des champs sans orbite périodique.*

Nous allons indiquer comment P. Schweitzer parvient à construire de tels pièges apériodiques, *de classe C^1*. Rappelons que A. Denjoy a construit un champ de vecteurs non singulier $\mathcal{D}$ sur le tore T^2, de classe C^1, ne possédant pas d'orbite périodique et possédant une orbite non dense, dont l'adhérence sera notée M [4]. Il est important de signaler qu'un théorème du même A. Denjoy garantit qu'*un tel champ de vecteurs ne peut pas être de classe C^2*. On consultera [23] pour une description de ces exemples. Ôtons un disque ouvert au tore T^2, situé dans le complémentaire de M et notons encore $\mathcal{D}$ le champ induit sur la surface à bord Σ ainsi obtenue. Sur le produit $\Sigma \times [-1, +1]$, on considère le champ $\mathcal{S} = f.\mathcal{D} + (1 - f).\partial/\partial z$ où $f : \Sigma \times [-1, +1] \to [0, 1]$ est une fonction de classe C^1, nulle au voisinage du bord de $\Sigma \times [-1, +1]$, égale à 1 exactement sur $M \times \{-1/2, +1/2\}$ et paire en z.

Il n'est pas difficile de s'assurer que $\mathcal{S}$ est un piège apériodique. Bien sûr, **P1** est satisfaite et **P3** résulte de la parité de f. D'autre part, le compact $M \times \{-1/2, +1/2\}$ est invariant et ne contient pas d'orbite périodique. Les orbites situées hors de ce compact ont une composante strictement positive en $\partial/\partial z$ et ne sont donc pas non plus périodiques ; on a donc **P4**. Le fermé $M \times [-1, +1]$ est invariant ; les orbites issues de $M \times \{-1\}$ ne peuvent traverser car elles s'accumulent dans $M \times \{-1/2\}$ et on a **P2**.

C'est le *piège de Schweitzer.*

L'extension de cette idée pour obtenir des exemples plus réguliers que C^1 était

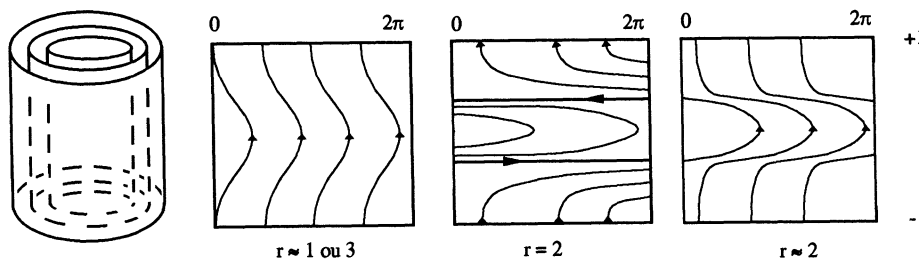
un défi aux géomètres... J. Harrison réussit le tour de force de construire un tore de dimension deux, plongé de manière C^0 dans $\mathbf{R}^3$ et un champ de vecteurs de classe C^2 dans son voisinage de telle sorte que le flot (local) correspondant préserve le tore et y induise un exemple de Denjoy [7]. Ce champ lui permet, avec la même méthode que P. Schweitzer, de construire un piège apériodique *de classe* C^2 sur le produit $\Sigma \times [-1,+1]$ et donc des champs de vecteurs sans orbite périodique, avec cette même régularité, sur toute variété fermée de dimension trois. Il est peut-être possible d'améliorer encore la différentiabilité de ce type d'exemples mais les difficultés semblent considérables.

§5 Le piège de Kuperberg

Nous nous proposons ici de décrire une construction de champs de vecteurs de classe C^∞ sur des variétés fermées de dimension trois. Il ne serait pas difficile d'adapter cette méthode dans le cas des champs analytiques réels, exactement comme nous l'avons fait pour le piège de Wilson, mais *nous laisserons les détails de cette vérification au lecteur.*

Nous avons vu que le piège de Wilson a l'avantage de détruire les orbites périodiques mais qu'il a l'inconvénient d'en créer de nouvelles ! L'idée de K. Kuperberg est de piéger ces nouvelles orbites par le piège lui même ; *c'est le serpent qui se mord la queue !* Dans ce paragraphe, nous allons construire le piège de Kuperberg et nous montrerons qu'il s'agit effectivement d'un piège apériodique au paragraphe suivant.

Commençons par décrire une modification (mineure) du piège de Wilson. On considère l'anneau $A = [1,3] \times S^1$ et un champ $\mathcal{W}$, de classe C^∞ sur $A \times [-1,+1]$ (de coordonnées (r,θ,z)) vérifiant les propriétés suivantes.

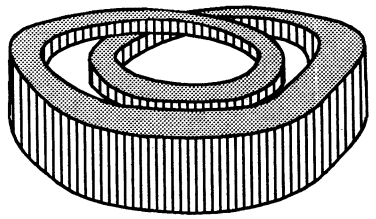


- Près du bord, le champ coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$.
- Il est tangent aux cylindres $\{r = Cst\}$.
- Il est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$.
- Il a une composante verticale strictement positive, sauf sur deux orbites pério-

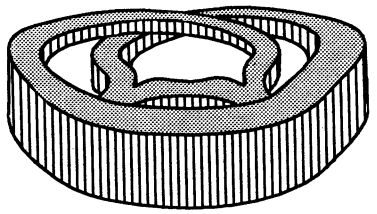
diques p_1 et p_2 contenues dans le cylindre $\{r = 2\}$.

Ainsi, toute orbite de $\mathcal{W}$ pénétrant dans W par un point $(r, \theta, -1)$ en ressort au point $(r, \theta, +1)$ si $r \neq 2$ (après un temps qui tend vers l'infini si r tend vers 2). Par contre, le cylindre $\{r = 2\}$ contient une composante de Reeb, bordée par p_1 et p_2, qui sont les ensembles ω et α-limites des points du type $(2, \theta, -1)$ et $(2, \theta, +1)$ respectivement.

Dans un premier temps, on plonge W dans $\mathbf{R}^3$ comme sur la figure ci-contre, de telle sorte que $\partial/\partial z$ corresponde au champ vertical constant dans $\mathbf{R}^3$.

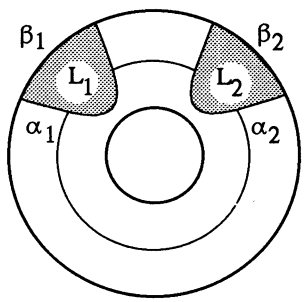


Dans un second temps, nous allons faire pénétrer une partie de W dans une autre partie de lui même, de façon à ce que W piège ses propres orbites périodiques. Avant de décrire précisément cette construction, indiquons le résultat topologique final : une double *autosomme connexe* de W mènera au compact K plongé dans $\mathbf{R}^3$ de la manière suggérée par la figure ci-contre (inspirée de [11], comme quelques unes des figures qui suivent).



Soit L_1 (resp. L_2) une *langue* contenue dans l'anneau A c'est-à-dire un disque topologique fermé dans A, bordé par deux arcs lisses α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) l'un contenu dans l'intérieur et l'autre dans la composante $\{r = 3\}$ du bord de A. On suppose que les deux langues sont disjointes.

La partie de W destinée à être encastrée dans W est la réunion des deux *tenons* $L_1 \times [-1, +1]$ et $L_2 \times [-1, +1]$.

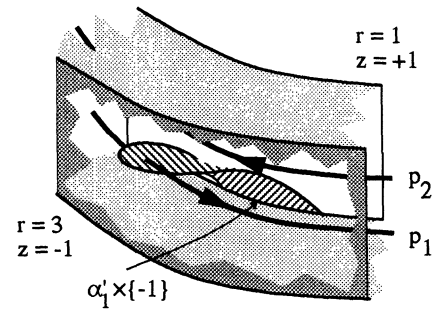


Il faut maintenant tailler deux *mortaises* dans W.

Soit σ_1 un plongement C^∞ de L_1 dans W possédant les propriétés suivantes :

- L'image $\sigma_1(\alpha_1)$ est de la forme $\alpha_1' \times \{-1\}$ où α_1' est un arc du cercle $\{r = 1\} \subset \partial A$.

- L'image $\sigma_1(L_1)$ de la langue est transverse au champ $\mathcal{W}$, rencontre l'orbite périodique p_1 de $\mathcal{W}$ en un point unique et ne rencontre pas p_2.
Comme $\mathcal{W}$ est vertical près du bord et horizontal sur les orbites périodiques, ceci exige que le plongement σ_1 fasse "un quart de tour".

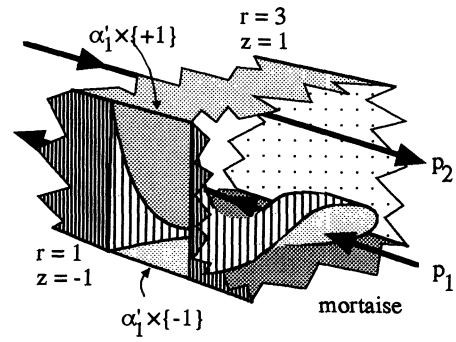


En poussant $\sigma_1(L_1)$ le long des orbites de $\mathcal{W}$, on peut construire un plongement C^∞, encore noté σ_1, que nous appellerons *insertion*, du tenon $L_1 \times [-1,+1]$ dans W de telle sorte que :

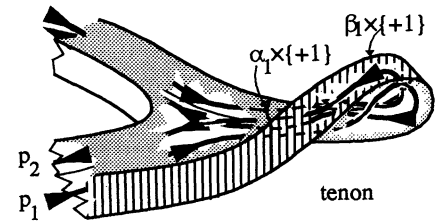
- Ce plongement prolonge le plongement précédent de $L_1 \simeq L_1 \times \{-1\}$.

- Un arc *vertical* de la forme $\{*\} \times [-1,+1]$ est envoyé par σ_1 sur un arc contenu dans une orbite de $\mathcal{W}$. Quitte à multiplier $\mathcal{W}$ par une fonction C^∞ et strictement positive convenable (ce qui ne change pas les orbites), on pourra supposer que σ_1 envoie le champ $\partial/\partial z$ sur $\mathcal{W}$.

- L'image de $\alpha_1 \times \{+1\}$ par l'insertion σ_1 est $\alpha'_1 \times \{+1\}$.



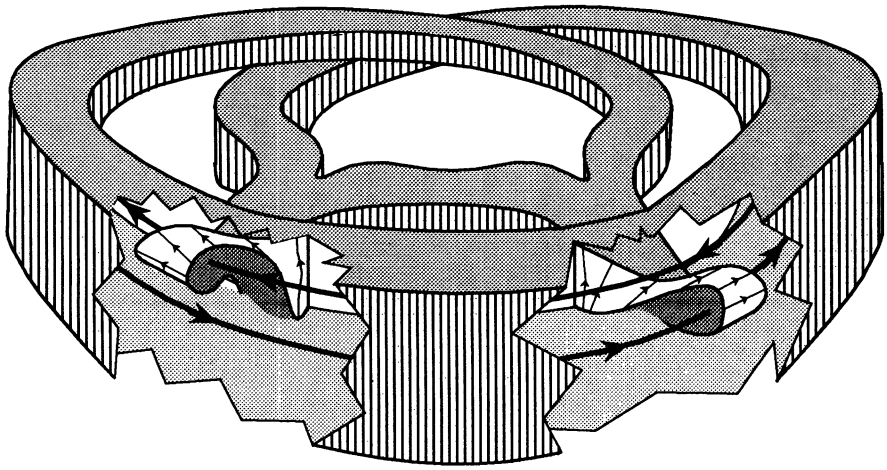
De la même manière, on construit une insertion σ_2 du tenon $L_2 \times [-1,+1]$ dans W dont l'image rencontre l'autre orbite périodique p_2 de $\mathcal{W}$. On s'arrange pour que les *mortaises* $\sigma_1(L_1 \times [-1,+1])$ et $\sigma_2(L_2 \times [-1,+1])$ soient disjointes l'une de l'autre ainsi que des deux tenons.



Le piège de Wilson creusé est défini comme l'adhérence W' du complémentaire de ces deux mortaises dans W. Pour construire un *piège de Kuperberg*, on fait pénétrer les tenons dans les mortaises correspondantes. En d'autres termes, partant de W', on identifie, pour tout x de $L_1 \times \{-1,+1\} \cup \beta_1 \times [-1,+1]$, les points x et $\sigma_1(x)$ ainsi que les paires de points analogues correspondant aux indices 2.

On obtient ainsi un compact K. *On notera τ la projection naturelle de W' sur K.*

Le compact K est une variété lisse de dimension trois, à bord et à coins. Puisque les plongements σ_1 et σ_2 envoient le champ vertical sur $\mathcal{W}$ et que $\mathcal{W}$ coïncide avec $\partial/\partial z$ près du bord, les recollements que nous venons d'effectuer sont compatibles avec $\mathcal{W}$. On obtient ainsi un champ $\mathcal{K}$, de classe C^∞, sur K.



Examinons K de plus près. Son bord est constitué de :

- Une *surface latérale* $\tau(\partial A \setminus (\beta_1 \cup \beta_2 \cup \alpha'_1 \cup \alpha'_2) \times [-1,+1])$ tangente à $\mathcal{K}$ et homéomorphe à la réunion de deux troncs de cylindre.

- Deux composantes transverses à $\mathcal{K}$ respectivement *entrantes* et *sortantes*, à savoir $\tau((A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{\pm 1\})$, présentant chacune deux lignes anguleuses le long de $\tau((\alpha_1 \cup \alpha_2) \times \{\pm 1\})$. Chacune de ces composantes est homéomorphe à un tore moins deux disques. Il est important de constater que ces deux composantes sont canoniquement isomorphes ; à chaque point $\tau(r, \theta, -1)$ de la composante entrante correspond le point $\tau(r, \theta, +1)$ de la composante sortante. Nous dirons que ces points sont en *face* l'un de l'autre.

Nous montrerons au pararagraphe suivant que, si l'on choisit convenablement les insertions, $\mathcal{K}$ est un piège apériodique : c'est un *piège de Kuperberg.*

Les figures montrent que K peut être plongé dans $\mathbf{R}^3$ de manière C^∞ et de telle sorte que :

- Deux points en face l'un de l'autre sont envoyés sur la même verticale.

- Le champ $\mathcal{K}$, prolongé par le champ vertical constant à l'extérieur de K, est de classe C^∞.

Ainsi, un piège de Kuperberg pourra être inséré dans un $D^2 \times [-1,+1]$ et servira, à la Wilson, pour intercepter les orbites d'un champ sur une variété fermée de dimension trois.

Si donc nous montrons comment faire en sorte que $\mathcal{K}$ soit un piège apériodique, nous aurons démontré le théorème de K. Kuperberg.

§6 La preuve du théorème de Kuperberg

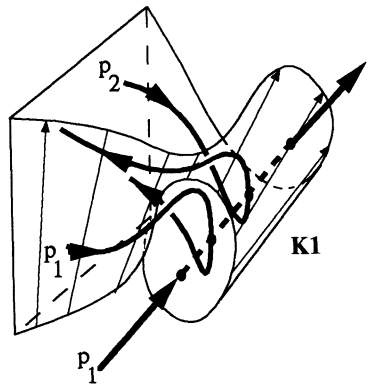
Il va nous falloir décrire la dynamique de $\mathcal{K}$; les orbites entrent et sortent sans cesse par les tenons...

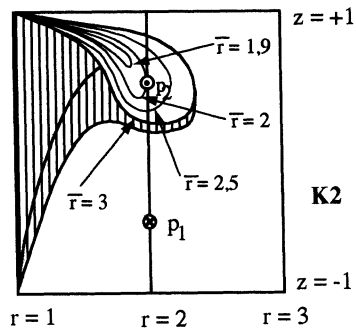
Si l'on veut un piège apériodique, il est naturel d'imposer au serpent de se mordre effectivement la queue :

K1 *Pour $i = 1,2$, la langue L_i contient un point de la forme $(2,\vartheta_i)$ tel que le segment vertical $\{(2,\vartheta_i)\} \times [-1,+1]$ est inséré par σ_i dans un arc de l'orbite périodique p_i de $\mathcal{W}$.*

Nous imposerons aussi la condition suivante dont le rôle apparaîtra plus loin.

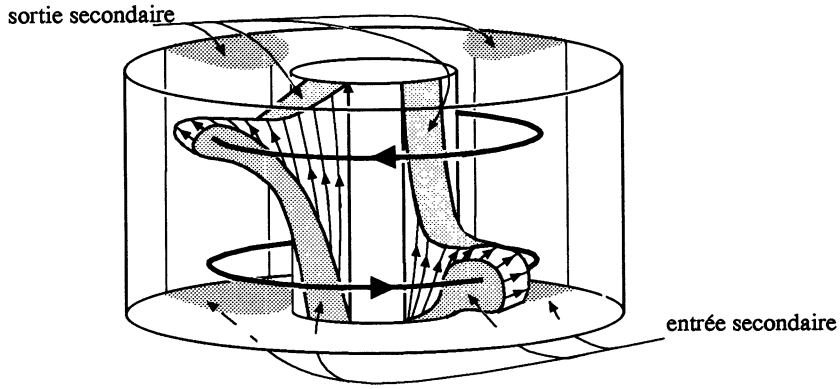
K2 Condition du rayon *Si un point $(\overline{r},\overline{\theta})$ de $L_1 \cup L_2$ est inséré (par σ_1 ou σ_2) sur un point (r,θ,z) de W, alors $\overline{r} > r$ sauf lorsque $(\overline{r},\overline{\theta})$ est l'un des deux points $(2,\vartheta_1)$ ou $(2,\vartheta_2)$ qui sont insérés dans l'une des deux orbites périodiques p_1 et p_2.* (La figure **K2** montre une mortaise de "profil".)





Nous allons montrer que *sous les conditions* **K1** *et* **K2**, *$\mathcal{K}$ est un piège apériodique.*

Ceci est bien sûr indépendant du plongement de K dans $\mathbf{R}^3$ de sorte qu'il est préférable de visualiser la preuve qui suit sur la figure ci-dessous qui représente le piège de Kuperberg creusé W'.



Introduisons un peu de terminologie :

- Un point de $A \times \{-1\} \cup \sigma_1(L_1 \times \{-1\}) \cup \sigma_2(L_2 \times \{-1\})$ est un *point d'entrée*; c'est un point d'entrée *primaire* s'il est dans $(A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{-1\}$ et un point d'entrée *secondaire* sinon.

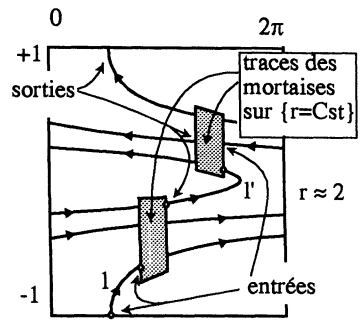
- On a de même une notion de *point de sortie, primaire ou secondaire*, en remplaçant -1 par $+1$ dans la définition précédente.

- Nous utiliserons aussi cette terminologie pour des points de K en considérant en fait leurs images inverses par τ.

- Un point d'entrée et un point de sortie dans W' sont *en face* s'ils sont de la forme $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. On dira aussi que leurs images par τ sont en face, ce qui généralise la définition donnée au paragraphe précédent.

- Une orbite de $\mathcal{W}$ dans W rencontre un certain nombre de points d'entrée/sortie ; elle est donc naturellement décomposée en intervalles. Les adhérences de ceux de ces intervalles qui sont dans W' sont des *arcs de Wilson.* Il s'agit en général des composantes connexes des intersections des orbites de $\mathcal{W}$ avec W' mais il y a exception pour les orbites de $\mathcal{W}$ qui rencontrent la "surface latérale" des mortaises, c'est-à-dire $\sigma_i(\beta_i \times [-1, +1])$ (pour $i = 1, 2$). Notons que chacune des deux orbites périodiques de $\mathcal{W}$ intersecte W' sur un seul arc de Wilson ; nous notons p'_1 et p'_2 ces deux arcs de Wilson particuliers.

- Si (r, θ, z) et (r', θ', z') sont deux points de W, on dira que (r, θ, z) est $\mathcal{W}$-*avant* (r', θ', z') s'ils sont situés sur la même orbite non périodique de $\mathcal{W}$ et si (r, θ, z) précède (strictement) (r', θ', z') dans l'ordre naturel de cette orbite ou bien s'ils sont tous les deux sur la même orbite périodique de $\mathcal{W}$. Notons qu'on a alors $r = r'$. Si l et l' sont deux arcs de Wilson, on dira que l est $\mathcal{W}$-*avant* l' si l'origine de l est $\mathcal{W}$-avant celle de l'. De manière analogue, on pourra dire qu'un arc de Wilson est $\mathcal{W}$-*entre* deux autres ou $\mathcal{W}$-entre deux points de W.

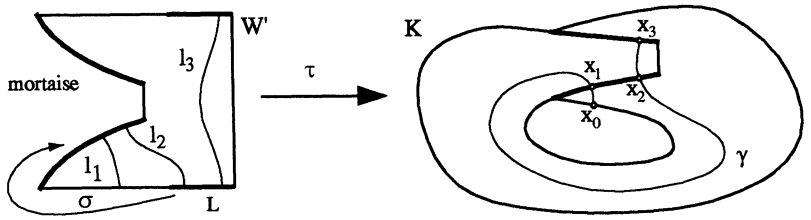


- Si l'arc de Wilson l est $\mathcal{W}$-avant l', si l'origine de l est un point d'entrée et si l'extrémité de l' est un point de sortie, il est clair que que ces deux points sont en face l'un de l'autre.

- Les arcs de Wilson l_1 et l_2 sont $\mathcal{K}$-*consécutifs* si l'extrémité de l_1 et l'origine de l_2 ont même image par τ.

- Un *arc de Kuperberg* est un arc compact d'orbite de $\mathcal{K}$ dans K dont l'origine et l'extrémité sont des points d'entrée ou de sortie.

- Soit γ un arc de Kuperberg. Il rencontre successivement un certain nombre de points d'entrée et de sortie $x_0, \ldots, x_k$. Bien sûr, seule l'origine x_0 (resp. l'extrémité x_k) peut être un point d'entrée (resp. de sortie) primaire. On peut alors trouver une suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs l_i $(i = 1, \ldots, k)$ dont les images par τ sont les sous-arcs de γ joignant x_{i-1} à x_i. Nous dirons que les arcs de Wilson $l_1, \ldots, l_k$ *constituent* l'arc de Kuperberg γ. Voir le schéma ci-dessous (qui ne donne qu'une idée approximative de la topologie de W' et K).

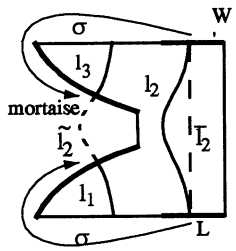


- Pour décrire les diverses diverses transitions de l'arc γ, on introduit une suite d'entiers $niv(i), i = 1, \ldots, k$, appelés *niveaux*, définie par $niv(1) = 0$ et, pour $i = 1, \ldots, k-1$, par $niv(i+1) = niv(i) + 1$ ou $niv(i) - 1$ suivant que x_i est un point

d'entrée ou de sortie. Nous nous inspirons ici de la présentation donnée dans [15].

Lemme *On suppose que $k > 1$, que tous les niveaux $niv(i)$ sont positifs ou nuls et que le dernier niveau $niv(k)$ est nul. Alors l'arc de Wilson l_1 est situé $\mathcal{W}$-avant l_k. De plus, si x_0 est un point d'entrée et x_k un point de sortie alors ces deux points sont en face l'un de l'autre.*

Nous avons déjà remarqué que la seconde assertion résulte de la première.



Nous procédons par récurrence sur k. Le cas $k = 2$ ne se présente pas car $niv(2)$ est nécessairement égal à $+1$. Si $k = 3$, la suite des niveaux est nécessairement $0, 1, 0$. Cela signifie que x_1 est une entrée secondaire et x_2 est une sortie secondaire. Puisque $\mathcal{W}$ est antisymétrique, ces deux points x_1 et x_2 sont en face l'un de l'autre ou, de manière équivalente, il existe un arc *vertical* $\bar{l}_2$ contenu dans la réunion des tenons $(L_1 \cup L_2) \times [-1, +1] \subset W$ et dont l'image par τ connecte les points x_1 et x_2. L'image de $\bar{l}_2$ par l'insertion est un arc $\tilde{l}_2$ dans W contenu dans une orbite de $\mathcal{W}$ et connectant l'extrémité de l_1 à l'origine de l_3, à travers l'une des mortaises. Les trois arcs $l_1, \tilde{l}_2, l_3$, mis bout à bout, forment un arc d'orbite de $\mathcal{W}$ dans W de sorte que l_1 est situé $\mathcal{W}$-avant l_3. Le lemme est établi pour $k = 3$.

Tout se passe comme si l'arc γ, rencontrant le point de sortie secondaire x_1, ne tenait pas compte de l'insertion et continuait son chemin le long de l'arc $\tilde{l}_2$, à travers la mortaise (qui a pourtant été incisée !), et pénétrait à nouveau dans W' par le point d'entrée secondaire x_2.

Supposons le lemme établi jusqu'à l'entier $k - 1$ et plaçons nous dans les hypothèses du lemme. Distinguons deux cas :

- S'il existe un entier i strictement compris entre 1 et k tel que $niv(i) = 0$, alors on peut décomposer l'arc de Kuperberg γ en deux sous-arcs qui vérifient chacun les hypothèses du lemme pour une valeur srictement inférieure à k. Le lemme en résulte dans ce cas.

- Sinon, tous les niveaux $niv(i)$ pour $i = 2, \ldots, k - 1$ sont supérieurs ou égaux à 1. L'arc de Kuperberg γ' contenu dans γ et connectant les points x_1 et x_{k-1} vérifie les hypothèses du lemme pour la valeur $k - 2$. On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le même argument que nous avons utilisé pour $k = 3$.

Ceci établit le lemme.

Nous pouvons maintenant montrer que $\mathcal{W}$ est un piège apériodique. Bien sûr, la condition **P1** est satisfaite.

P3 *Soit γ un arc de Kuperberg, constitué des arcs de Wilson $l_1, \ldots, l_k$ et connectant un point d'entrée primaire x_0 et un point de sortie primaire x_k. Alors x_0 et x_k*

sont en face l'un de l'autre.

Nous affirmons d'abord que tous les niveaux $niv(i)$ sont positifs ou nuls. Supposons que cela ne soit pas le cas. Puisque $niv(2) = +1$, on peut donc considérer le premier indice i strictement supérieur à 1 tel que $niv(i) = 0$. Le lemme montrerait alors que x_0 et x_i sont en face et donc que x_i est une sortie primaire, ce qui ne peut être le cas que pour $i = k$.

En raisonnant exactement de la même manière et en parcourant γ dans l'autre sens, on montre que $niv(k)$ est nécessairement nul. Ainsi, les hypothèses du lemme sont satisfaites et **P3** en résulte.

P2 *Une orbite qui pénètre dans K par un point du type $\tau(2, \theta, -1)$ n'en ressort pas.*

En effet, dans le cas contraire, le point de sortie serait nécessairement $\tau(2, \theta, +1)$ et, d'après la preuve de **P3**, les points $(2, \theta, -1)$ et $(2, \theta, +1)$ seraient sur la même orbite de $\mathcal{W}$, ce qui n'est pas.

P4 *Le piège est apériodique.*

Supposons par l'absurde qu'il existe une orbite périodique. Cette orbite contient au moins un point d'entrée ou de sortie (secondaire) x. On obtient un arc de Kuperberg γ dont l'origine et l'extrémité coïncident avec x. De même, on a une suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs $l_1, \ldots, l_{k+1}$ telle que l_1 et l_{k+1} coïncident et ont x comme origine. Bien sûr, il est toujours possible de choisir arbitrairement le point origine x parmi les points d'entrée et de sortie $x_0, \ldots, x_k = x_0$ rencontrés par l'orbite périodique. On choisira aussi k minimal de sorte que les arcs de Wilson $l_1, \ldots, l_k$ sont distincts deux à deux.

Distinguons deux cas :

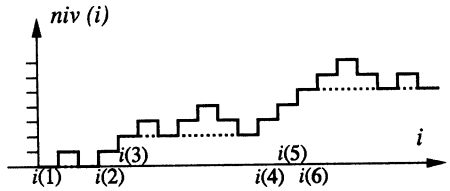
- Le dernier niveau $niv(k+1)$ est nul, c'est-à-dire que l'orbite périodique γ dont nous supposons l'existence rencontre autant de points d'entrée que de points de sortie. On choisit l'origine x pour que tous les niveaux $niv(i)$ soient positifs ou nuls (pour $i = 1, \ldots, k+1$) (bien sûr ceci ne change pas $niv(k+1)$ par périodicité). Alors, le lemme montre que l_1 est $\mathcal{W}$-avant l_{k+1}. Puisque ces deux arcs sont les mêmes, c'est donc qu'ils coïncident avec p'_1 ou p'_2. D'après la condition **K1**, l'origine de l_2 est $(2, \vartheta_1, 0)$ ou $(2, \vartheta_2, 0)$; son extrémité est un point d'entrée. On a donc $niv(2) = 1$ et $niv(3) = 2$. Soit i le plus petit indice strictement supérieur à 1 tel que $niv(i) = 0$. Évidemment, x_1 est un point d'entrée, x_{i-1} est un point de sortie et le lemme montre que x_1 et x_{i-1} sont en face, ce qui est absurde puisque les orbites de $\mathcal{W}$ ne traversent pas le cylindre $\{r = 2\}$.

- Le dernier niveau $niv(k+1)$ est un entier n que nous supposerons strictement positif (l'autre cas étant analogue, en raisonnant sur le champ parcouru dans l'autre sens). On choisit l'origine x pour que tous les niveaux $niv(i)$ soient positifs ou nuls (pour $i = 1, \ldots, k+1$). C'est seulement ici que nous allons utiliser la *condition du*

rayon **K2** qui garantit que si $niv(i+1) = niv(i)+1$ alors $r(i+1) \geq r(i)$ et que si on a égalité l_i est l'un des deux arcs p'_1, p'_2. Notons $r(i)$ la r-coordonnée (d'un point quelconque) de l'arc l_i.

Examinons d'abord le cas particulier où la suite des niveaux est strictement croissante, i.e. $niv(i) = i-1$ pour $i = 1, \ldots, k+1$. Alors la suite des rayons $r(i)$ est croissante (au sens large). D'autre part, $r(1) = r(k+1)$ car les arcs l_1 et l_{k+1} sont les mêmes. C'est donc que tous les arcs l_i coïncident avec l'un des deux arcs p'_1, p'_2 mais ceci est absurde car deux tels arcs de Wilson ne sont pas $\mathcal{K}$-consécutifs.

Dans le cas général, on peut trouver une suite d'indices $1 = i(1) < i(2) < \ldots < i(n+1) \leq k+1$ tels que, pour $a = 1, \ldots, n+1$, on ait $niv(i(a)) = a-1$ et $niv(i) \geq a-1$ pour $i \geq i(a)$. Si $i(a+1) > i(a)+1$, on applique le lemme à la suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs $l_{i(a)}, \ldots, l_{i(a+1)-1}$, et on obtient que $l_{i(a)}$ est $\mathcal{W}$-avant $l_{i(a+1)-1}$ et donc que $r(i(a)) = r(i(a+1)-1))$ pour $a = 1, \ldots, n$. De même, $r(i(n+1)) = r(k+1)$. D'après **K2**, on a $r(i(a+1)) \geq r(i(a+1)-1)$. Comme précédemment, le fait que $r(1) = r(k+1)$ montre que tous les $r(i(a))$ sont égaux et donc que chaque arc $l_{i(a+1)-1}$ coïncide avec p'_1 ou p'_2 pour $a = 1, \ldots, n$. Si $i(a+1) > i(a)+1$, nous savons que $l_{i(a)}$ est $\mathcal{W}$-avant $l_{i(a+1)-1}$ et il en résulte que $l_{i(a)}$ coïncide lui aussi avec p'_1 ou p'_2 ce qui est impossible puisque $l_1, \ldots, l_k$ sont distincts. Nous sommes donc ramenés au cas particulier que nous avons exclu précédemment.



Ceci achève la preuve du fait que $\mathcal{W}$ est un piège apériodique et donc du théorème de Kuperberg.

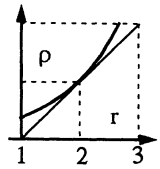
Terminons ce pararagraphe par une observation de L. Siebenmann. Si l'on considère une collection W'_i de copies de W', indexée par un entier relatif i, et si l'on insère les tenons de W'_i dans les mortaises de W'_{i+1}, on obtient un revêtement cyclique $\widetilde{K}$ de K. La démonstration précédente peut s'interpréter dans ce revêtement, les niveaux correspondant aux divers domaines fondamentaux visités par les orbites du champ relevé $\widetilde{\mathcal{K}}$. Le fait que nous n'ayons utilisé la condition **K2** que dans le dernier cas de la preuve montre que $\widetilde{\mathcal{K}}$ n'a pas d'orbite périodique, même si l'on n'impose que la condition **K1**.

§7 La dynamique à l'intérieur du piège

Il est clair que K contient un fermé non vide constitué d'orbites entièrement contenues dans l'intérieur. Dans ce paragraphe, nous allons décrire les résultats de Greg et Krystyna Kuperberg qui concernent la dynamique dans ce fermé [13].

Commençons par un lemme.

Lemme *Si $r > 2$, l'orbite de $\mathcal{K}$ passant par un point de la forme $\tau(r, \theta, -1)$ passe aussi par le point $\tau(r, \theta, +1)$ et contient les images par τ de tous les arcs de Wilson situés $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$.*

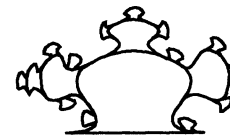


La condition du rayon entraîne l'existence d'une fonction ρ continue croissante de $[1, 3]$ dans lui-même telle que $\rho(r) > r$ sauf pour $r = 2$ et telle que si σ_1 ou σ_2 envoie un point $(\overline{r}, \overline{\theta}, \overline{z})$ sur (r, θ, z), alors $\overline{r} \geq \rho(r)$. La suite $\rho^{-n}(3)$ tend en décroissant vers 2.

Nous allons montrer le lemme par récurrence sur l'entier n tel que $\rho^{-n-1}(3) < r \leq \rho^{-n}(3)$. Pour $n = 0$, il est clair que l'arc de Wilson partant de $(r, \theta, -1)$ ne peut rencontrer les mortaises et se termine donc au point en face et ceci initialise la récurrence.

Supposons donc que $\rho^{-n-1}(3) < r \leq \rho^{-n}(3)$ et considérons tous les arcs de Wilson $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. Soit j le dernier indice tel que $\tau(\lambda_j)$ est dans l'orbite par $\mathcal{K}$ de $\tau(r, \theta, -1)$; nous devons montrer que $j = k$. Si ce n'était pas le cas, l'extrémité de λ_j serait une entrée secondaire de sorte que l'arc de Wilson $\mathcal{K}$-consécutif à λ_j aurait pour origine un point $(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$, avec $\rho^{-n}(3) < \overline{r}$. Par hypothèse de récurrence, l'orbite de $\tau(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$ par $\mathcal{K}$ passe par le point en face $\tau(\overline{r}, \overline{\theta}, +1)$. Puisque l'image de $(\overline{r}, \overline{\theta}, +1)$ par σ_1 ou σ_2 est l'origine de λ_{j+1}, ceci contredit la définition de j. Le lemme est établi.

Décrivons les arcs de Wilson qui constituent l'arc de Kuperberg connectant les points $\tau(r, \theta, -1)$ et $\tau(r, \theta, +1)$ avec $r > 2$. Il faut d'abord considérer tous les arcs de Wilson $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. Puis, pour chaque $i = 1, \ldots, k-1$, l'extrémité de λ_i et l'origine de λ_{i+1} sont envoyés par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} sur des points du type $(r_i, \theta_i, -1)$ et $(r_i, \theta_i, +1)$ et il faut aussi considérer tous les arcs de Wilson qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r_i, \theta_i, -1)$ et $(r_i, \theta_i, +1)$. On continue ceci (un nombre fini de fois) jusqu'à obtenir des arcs de Wilson qui ne rencontrent plus les mortaises.



C'est ce que L. Siebenmann appelle le *chou-fleur*. On imagine que le nombre d'arcs ainsi obtenus croît très rapidement lorsque r tend vers 2 et ceci est source de difficultés numériques lorsque l'on essaye de simuler le piège sur ordinateur.

Décrivons maintenant l'orbite (positive) de $\mathcal{K}$ passant par un point du type $\tau(2, \theta, -1)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$ la suite infinie des arcs de Wilson situés $\mathcal{W}$-après $(2, \theta, -1)$; elle s'accumule sur l'arc de Wilson que nous avons noté p_1'. Nous affirmons que l'orbite de $\mathcal{K}$ considérée passe par tous les $\tau(\lambda_i)$. Supposons en effet ceci établi jusque l'entier i et considérons l'extrémité de λ_i. C'est une entrée secondaire dont l'image par σ_1^{-1} a une r-coordonnée strictement supérieure à 2. D'après le lemme cette orbite passe par le point en face qui n'est autre que l'origine de $\tau(\lambda_{i+1})$

et ceci établit notre affirmation. Ainsi, cette orbite de $\mathcal{K}$ est constituée de tous les arcs de Wilson λ_i ainsi que des choux-fleurs qui relient les arcs λ_i et λ_{i+1}. Notons en particulier que $\tau(p'_1)$ et $\tau(p'_2)$ sont dans l'adhérence de cette orbite.

De la même manière, on décrit l'orbite (positive) de $\mathcal{K}$ qui part de $\tau(p'_1)$ (l' "ex-orbite périodique"). L'extrémité de p'_1 est envoyée par σ_1^{-1} sur un point que nous avons noté $(2, \vartheta_1, -1)$ (voir **K1**) et nous venons de décrire l'orbite de $\mathcal{K}$ correspondant aux points de ce type. Un raisonnement analogue montre que l'orbite de $\mathcal{K}$ passant par un point de la forme $\tau(2, \theta, z)$ s'accumule (positivement ou négativement) sur $\tau(p'_1)$ et $\tau(p'_2)$.

Théorème *Le fermé de K constitué des orbites entièrement contenues dans l'intérieur de K contient un unique ensemble fermé non vide invariant par $\mathcal{K}$ et minimal pour ces propriétés.*

Nous allons montrer que toute orbite infinie s'accumule sur $\tau(p'_1)$ et ceci établira que *l'unique minimal est l'adhérence de l'orbite de $\tau(p'_1)$*. D'après ce que nous venons de voir, il s'agit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, toute orbite infinie pénètre dans la zone $\tau(\{\mid r - 2 \mid < \varepsilon\})$.

Soit $l_i (i \geq 1)$ une suite infinie d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs. Supposons d'abord que tous ces arcs aient une r-coordonnée strictement supérieure à 2. On définit une sous-suite $l_{i(a)}$ $(a \geq 1)$ de l_i de la façon suivante. On pose $l_{i(1)} = l_1$ et, si $l_{i(a)}$ est défini, on considère les arcs de Wilson $\lambda_2^a, \ldots, \lambda_{k_a}^a$ qui sont $\mathcal{W}$-après $l_{i(a)} = \lambda_1^a$. L'extrémité du dernier de ces arcs, $\lambda_{k_a}^a$, est une sortie secondaire dont l'image par l'insertion est, par définition, l'origine de $l_{i(a+1)}$. Le lemme montre qu'on obtient bien une sous-suite et que la suite $r(a) = r(l_{i(a)})$ des r-coordonnées de ces arcs tend en décroissant vers 2 ; c'est ce que nous voulions établir. Dorénavant, nous supposerons donc que la suite l_i pénètre une infinité de fois dans la partie $\{r < 2\}$.

La suite $\rho^n(1)$ tend en croissant vers 2. Pour montrer le théorème, nous allons montrer par l'absurde qu'il est impossible que la suite l_i évite la partie $\{\rho^n(1) < r < 2\}$. *Supposons donc que ce soit le cas, pour une certaine valeur fixée de n.*

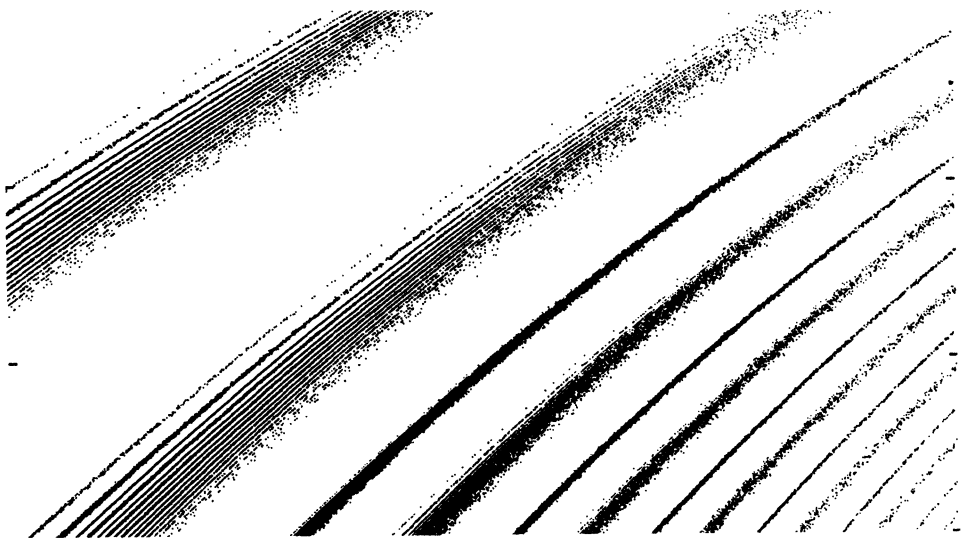
Si l'origine d'un l_i fixé est de la forme (r, θ, z), posons $\lambda_1 = l_i$ et considérons les arcs de Wilson $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-après l_i.

Supposons d'abord $\rho^{n-1}(1) < r \leq \rho^n(1)$. D'après l'hypothèse, pour $j \leq k-1$, l'extrémité de λ_j est une entrée secondaire dont l'image par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} est dans la zone $\{r > 2\}$ de sorte qu'on peut appliquer le lemme : les λ_j sont dans la liste des l_j, séparés par des choux-fleurs. En particulier, l'orbite de $\mathcal{K}$ passe par l'image par τ de l'extrémité du dernier arc λ_k.

En procédant par récurrence finie sur l'entier p avec $1 \leq p \leq n$ et en supposant toujours par l'absurde que les l_i ne visitent pas $\{\rho^n(1) < r < 2\}$, on montre de même que si l'origine de l_i est de la forme (r, θ, z) avec $\rho^{n-p}(1) < r \leq \rho^{n-p+1}(1)$, l'orbite de $\mathcal{K}$ passe par l'image par τ de l'extrémité du dernier arc λ_k.

Ainsi, on peut définir une sous-suite $l_{i(a)}$ de l_i de la façon suivante. On définit $l_{i(1)}$ comme l'un des l_i ayant une r-coordonnée strictement inférieure à $\rho^n(1)$ et, si $l_{i(a)}$ est défini, on considère les arcs de Wilson $\lambda_2^a, \ldots, \lambda_{k_a}^a$ qui sont $\mathcal{W}$-après $l_{i(a)} = \lambda_1^a$. On définit alors $l_{i(a+1)}$ comme étant l'arc de Wilson dont l'origine est l'image par l'insertion de l'extrémité de $\lambda_{k_a}^a$, dernier de ces arcs. D'après ce qui précède, c'est bien une sous-suite de l_i. La suite infinie $r(a)$ des r-coordonnées des $l_{i(a)}$ vérifie $\rho(r(a+1)) < r(a)$. Ceci est bien sûr impossible et cette contradiction achève la preuve du théorème.

Les dynamiciens sont friands d'ensembles minimaux non triviaux et les pièges de Kuperberg méritent sans aucun doute d'être étudiés de plus près. À quoi ressemble ce minimal ? La figure ci-dessous montre une image d'ordinateur obtenue par B. Sevennec : il s'agit de la trace d'une partie du minimal sur une section transverse à $\mathcal{K}$. Il faut prendre garde au fait que les difficultés numériques sont grandes et cette image n'est peut-être pas significative. Par ailleurs, on peut construire beaucoup de pièges de Kuperberg et il n'est pas clair qu'ils aient la même dynamique. La figure suggère que le minimal est transversalement de dimension topologique 1 et nous allons voir que ceci est effectivement le cas en général.

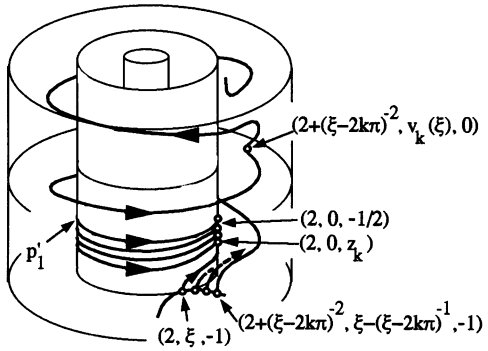


Théorème *Il existe des pièges de Kuperberg dont l'unique ensemble minimal est de dimension topologique* 2 *car il contient un disque.*

Nous allons montrer qu'en général, l'ensemble minimal contient l'image par τ du cercle $\{r = 2, z = 0\}$ et donc aussi son saturé par $\mathcal{K}$ qui contient bien sûr un disque.

Nous allons fixer un peu plus les choix sur $\mathcal{W}$ et sur les insertions mais il apparaîtra clairement que les choix que nous allons faire ne sont pas importants.

On suppose que l'orbite p_1 est située dans $\{z = -1/2\}$. On impose aussi à l'image $\sigma_1(L_1)$ de la langue d'être contenue, au voisinage de son intersection avec p_1, dans $\{\theta = 0\}$ (rappelons que L_1 est identifié à $L_1 \times \{-1\}$). On fait aussi en sorte que si z est voisin de $-1/2$ et inférieur à $-1/2$, l'orbite négative de $\mathcal{W}$ qui passe par $(2, 0, z)$ coupe l'anneau $\{z = -1\}$ au point $(2, (z+1/2)^{-1}, -1)$. On choisit l'insertion σ_1 de telle sorte que, pour z voisin de $-1/2$, l'image de $(2, 0, z)$ par σ_1^{-1} est $(2 + (z + 1/2)^2, \xi - (z + 1/2), -1)$ où ξ est un paramètre que nous ajusterons plus loin. Enfin, on suppose que $\mathcal{W}$ a une symétrie de révolution autour de l'axe des z et que l'orbite par $\mathcal{W}$ du point $(r, \theta, -1)$ coupe le plan $\{z = 0\}$ au point $(r, \theta + (r - 2)^{-2}, 0)$ pour $r > 2$ voisin de 2.



Étudions l'orbite par $\mathcal{K}$ de $\tau(p_1')$. L'image par σ_1^{-1} de l'extrémité de p_1' est le point $(2, \xi, -1)$ dont l'orbite par $\mathcal{W}$ coupe $\sigma_1(L_1)$ sur les points $(2, 0, z_k)$ avec $(z_k + 1/2)^{-1} = \xi - 2k\pi$ (avec k entier grand), c'est-à-dire qu'on a : $z_k = -1/2 + (\xi - 2k\pi)^{-1}$. Nous savons que les images par τ de tous ces points sont dans l'orbite étudiée. A leur tour, chacun de ces points est à l'origine d'un chou-fleur qui commence au point $(2 + (\xi - 2k\pi)^{-2}, \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1}, -1)$ et qui coupe donc le plan $\{z = 0\}$ en $(2 + (\xi - 2k\pi)^{-2}, \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1} + (\xi - 2k\pi)^4, 0)$. Posons : $v_k(\xi) = \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1} + (\xi - 2k\pi)^4$. Si $\xi_1 < \xi_2$, la suite $v_k(\xi_2) - v_k(\xi_1)$ n'est pas bornée et le lecteur (se souvenant du théorème de Baire) verra que ceci entraîne que pour un ensemble résiduel de valeurs de ξ, la suite $v_k(\xi)$ est dense lorsqu'on la projette sur le cercle $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Nous venons de montrer que si l'on ajuste convenablement la valeur de ξ, on peut faire en sorte que l'orbite que nous étudions s'accumule sur tout le cercle $\{r = 2, z = 0\}$. Ceci établit le théorème.

§8 Miscellanées

Commençons par quatre remarques élémentaires.

- D'après l'observation de A. Verjovsky faite plus haut, on obtient, sur chaque variété fermée de dimension trois, un champ analytique réel non singulier possédant

un *unique ensemble minimal, de dimension topologique deux.*

- Sur une variété qui n'est pas nécessairement compacte (mais paracompacte), on peut utiliser le piège de Kuperberg pour construire un champ analytique sans orbite périodique.

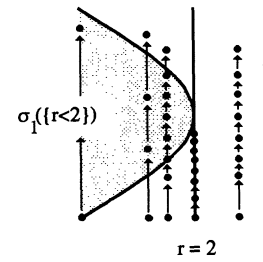
- On vérifie facilement que le piège de Kuperberg est homotope au champ vertical à travers les champs non singuliers qui sont verticaux près du bord. Il en résulte qu'on peut trouver des exemples de champs sans orbite périodique dans toute classe d'homotopie de champs de vecteurs non singuliers d'une variété fermée de dimension trois.

- Dans [23], P. Schweitzer indique comment détruire les feuilles compactes d'un feuilletage de codimension q supérieure ou égale à deux. Dans un ouvert feuilleté trivialement et rencontrant une feuille compacte, il suffit de modifier le feuilletage, à la Wilson, en insérant le produit du piège apériodique de Schweitzer (de classe C^1) par une sphère de dimension $q-2$. En utilisant le piège de Kuperberg, analytique réel, on montre de la même manière que *si une variété possède un feuilletage de codimension $q \geq 2$ et de classe C^∞ ou C^ω, alors cette variété possède également un feuilletage sans feuille fermée de même régularité* [13]. Le cas de la codimension 1 a été traité, en classe C^1 et en dimension supérieure ou égale à quatre par P. Schweitzer [24] (par une autre méthode) mais reste un difficile problème ouvert en classe C^∞.

L'énoncé suivant m'a été signalé par S. Matsumoto ; il implique qu'un piège de Kuperberg contient un ouvert non vide de points errants et donc, par le lemme de récurrence de Poincaré, que *ces exemples ne peuvent pas préserver une mesure qui charge les ouverts.*

Proposition *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'orbite par $\mathcal{K}$ d'un point du type $\tau(r,\theta,-1)$ avec $2-\varepsilon < r < 2$ ne repasse pas par le point en face $\tau(r,\theta,+1)$. En particulier, si le point $\tau(r,\theta,-1)$ est un point d'entrée primaire, son orbite ne ressort pas de K.*

Considérons un point $x = (r,\theta,z)$ de $\sigma_1(L_1)$ ($\simeq \sigma_1(L_1 \times \{-1\})$), très proche de l'extrémité de p_1'. Le point de premier retour x' sur $\sigma_1(L_1)$ de l'orbite de $\mathcal{W}$ passant par x est de la forme $x' = (r,\theta',z')$ et il est clair que $\mid z'-z \mid$ est inférieur à une constante fois la distance entre x et l'extrémité de p_1'.



Considérons par ailleurs la partie $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$ de $\sigma_1(L_1)$. Elle est bordée par une courbe *lisse* contenue dans $\sigma_1(L_1) \cap \{r \leq 2\}$ et passant par l'extrémité de p_1' ; elle a donc un contact quadratique avec la courbe $\sigma_1(L_1) \cap \{r = 2\}$.

Il résulte aisément de ces deux observations que si ε est assez petit, toute orbite de $\mathcal{W}$ dans W partant d'un point $(r,\theta,-1)$ tel que $2-\varepsilon < r < 2$ rencontre néces-

sairement la partie $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$. Voir la figure ci-dessus où les points noirs représentent les intersections de certaines orbites de $\mathcal{W}$ avec $\sigma_1(L_1)$.

Nous affirmons que la proposition est vraie pour ce choix de ε. Supposons par l'absurde que l'orbite par $\mathcal{K}$ d'un point du type $\tau(r, \theta, -1)$ avec $2 - \varepsilon < r < 2$ repasse par le point en face $\tau(r, \theta, +1)$. Parmi les arcs de Wilson qui constituent l'arc de Kuperberg joignant ces deux points, considérons ceux dont la r-coordonnée est strictement inférieure à 2 et, parmi ceux-ci, soit l l'un de ceux pour lesquels cette r-coordonnée est maximale. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ la suite des arcs de Wilson situés sur l'orbite de $\mathcal{W}$ contenant l, de sorte que l coïncide avec l'un des λ_i avec $1 \leq i \leq k$. Par le choix de ε, nous savons que l'un des λ_j $(1 \leq j \leq k-1)$ a son extrémité dans $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$ ou $\sigma_2(L_2 \cap \{r < 2\})$. Supposons pour fixer les idées que $j \geq i$ et choisissons j minimal pour cette propriété. Alors les extrémités de $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{j-1}$ sont des entrées secondaires dont les images par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} sont donc de la forme $(\overline{r}, \theta, -1)$ avec $\overline{r} > 2$, par le choix de j. Il résulte alors du lemme du §7 que les $\tau(\lambda_i), \ldots, \tau(\lambda_j)$ sont sur l'arc de Kuperberg que nous considérons, séparés par des choux-fleurs. Par contre, l'image par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} de l'extrémité de λ_j est de la forme $(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$ avec $r < \overline{r} < 2$, c'est-à-dire que l'arc de Wilson $\mathcal{K}$-consécutif à λ_j a une r-coordonnée strictement comprise entre celle de l_i $(= l)$ et 2. Ceci est contraire au choix initial de l et démontre la proposition.

Le début de cette démonstration utilise le fait que que champ $\mathcal{K}$ est de classe C^2. Il n'est pas difficile de s'assurer que le champ de Wilson $\mathcal{W}$ préserve une mesure finie μ sur W dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue s'annule exactement sur le cylindre $\{r = 2\}$. Il existe un homéomorphisme de W qui envoie μ sur la mesure de Lebesgue, non différentiable sur ce cylindre. On peut donc construire une version de $\mathcal{W}$ qui est un flot topologique qui préserve le volume. Les insertions peuvent alors être construites de façon à préserver le volume et on obtient ainsi *des exemples de flots topologiques qui préservent le volume et n'ont pas d'orbite périodique, sur toute variété de dimension trois.* G. Kuperberg parvient même à améliorer cette construction en construisant des pièges de Schweitzer de classe C^1 qui préservent le volume [12].

Il est difficile de construire des champs non singuliers en dimension trois, de classe C^∞, qui préservent un volume et dont on contrôle la dynamique. D'une part, la décomposition en *anses rondes*, si utile pour construire ce type de champs, n'existe pas toujours en dimension trois [1]. D'autre part, la théorie KAM pour ces flots entraîne bien souvent l'existence de tores invariants, ce qui complique le problème... Notons toutefois que G. Kuperberg, par un procédé de chirurgie, parvient à construire sur toute variété fermée de dimension trois, un champ non singulier *de classe* C^∞ qui préserve le volume et qui n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques [12].

Faut-il en conclure qu'il faut modifier la conjecture de Seifert et *demander si un champ de classe* C^∞ *qui préserve le volume sur la sphère de dimension trois a*

nécessairement une orbite périodique ?

Il y a encore bien d'autres questions ouvertes dans ce domaine. On sait par exemple qu'il existe des difféomorphismes de la sphère de dimension trois dont toutes les orbites sont denses [6, 8] mais *on ignore toujours s'il existe des champs de vecteurs sur cette sphère dont toutes les orbites sont denses*; la *conjecture de Gottschalk* reste intacte...

Bibliographie

[1] ASIMOV, D.: Homotopy to divergence free vector fields. *Topology* **15** (1976), 349-352.

[2] BIRKHOFF, G.: *Dynamical Systems*, AMS Colloquium Publications **9** (1966) (first ed. 1927).

[3] BONATTI, C.: *Feuilletages proches d'une fibration*, Ensaios matemáticos, **5** (1993) Soc. Brasileira de Matemática.

[4] DENJOY, A.: Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932), 333-375.

[5] DONNAY, V.: Geodesic flow on the two-sphere II: ergodicity. *Dynamical Systems (College Park, 1986-87), Springer Lecture Notes in Mathematics* **1342** (1988), 112-153.

[6] FATHI, A. & HERMAN, M.: Existence de difféomorphismes minimaux. *Astérisque* **49** (1977), 35-59.

[7] HARRISON, J.: A C^2 counterexample to the Seifert conjecture. Topology **27** (1988), 249-278.

[8] KATOK, A.: Minimal' nye diffeomorphizmy na gljavnych S^1-fassloenijach, tezisy VI, Vsesvjuznoj topologičekoj Konferencii v Tblisi Mecniereba (1972), Tblisi (en russe).

[9] KATOK, A.: Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Pub. IHES*, **51** (1980), 137-174.

[10] KNESER, H.: Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. *Math. Annalen* **91** (1924), 135-154.

[11] KUPERBERG, K.: A smooth counterexample to the Seifert conjecture in dimension three. Preprint (1993) à paraître dans *Annals of Math.*

[12] KUPERBERG, G.: A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture. Preprint.

[13] KUPERBERG, K. & KUPERBERG, G.: Generalized counterexamples to the Seifert conjecture. En préparation.

[14] LAUDENBACH, F.: Orbites périodiques, courbes pseudo-holomorphes et la conjecture de Weinstein en dimension 3. [d'après H. Hofer et al.], séminaire Bourbaki, n^0 786, 1993-94.

[15] MATSUMOTO, S.: Notes on "A C^∞ counterexample to the Seifert conjecture in dimension three" by K. Kuperberg, informal notes, Tokyo, november 1993.

[16] MATSUMOTO, S.: C^∞ counterexample to Seifert conjecture according to K. Kuperberg, (en japonais), en préparation, à paraître dans Sugaku.

[17] NOVIKOV, S.P.: Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc.* (1965), 268-304.

[18] POINCARÉ, H.: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.* **13** (1890), 1-270.

[19] POINCARÉ, H.: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[20] POINCARÉ, H.: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Trans. A.M.S.* **6** (1905), 237-274.

[21] PUGH, C.: The closing lemma. *Amer. J. Math.* **89** (1967), 956-1009.

[22] ROSENBERG, H.: Un contre-exemple à la conjecture de Seifert (d'après P. Schweitzer) séminaire Bourbaki, n^0 434, 1972-73, Springer Lecture Notes in Maths 383.

[23] SCHWEITZER, P. A.: Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Annals of Math.* **100** (1974), 229-234.

[24] SCHWEITZER, P. A.: Codimension one foliations without compact leaves. A paraître.

[25] SEIFERT, H.: Closed integral curves in 3-space and two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 287-302.

[26] SIEBENMANN, L.: *Le paradigme du serpent*, lettre à l'auteur (février 1994).

[27] WILSON, F. W.: On the minimal sets of non singular vector fields. *Annals of Math.* **84** (1966), 529-536.

Étienne GHYS
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07