

Astérisque

JEAN-JACQUES RISLER

Construction d'hypersurfaces réelles [d'après Viro]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 763, p. 69-86

http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__69_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION D'HYPERSURFACES RÉELLES

[d'après Viro]

par Jean-Jacques RISLER

1. INTRODUCTION

L'étude de la topologie des hypersurfaces algébriques réelles projectives et lisses a une longue histoire. Il s'agit du problème suivant : quelle peut être la topologie du plongement d'une hypersurface lisse de degré d ?

Cette question a fait l'objet d'un des problèmes de Hilbert (le 16-ième) qui posait la question pour les courbes de degré 6, et les surfaces de degré 4. Le cas des courbes de degré 6 a été résolu par Gudkov en 1969 (cf. [Gud 74]), et celui des surfaces de degré 4 par Kharlamov en 1976 ([Kha 77]). Le cas des courbes de degré 7 a été résolu par Viro (cf. plus bas), et celui des courbes de degré 8 n'est pas encore complètement élucidé. Pour des Surveys sur la question, on peut consulter [Gud 74], [A-O 79], [A' C 79], [Wi 78] ou [Vi 86].

L'étude de la topologie des variétés algébriques réelles comprend deux parties bien distinctes :

a) Décrire des "prohibitions", i.e., donner une liste (la plus complète possible) des obstructions sur les types topologiques de plongements.

b) Construire des hypersurfaces lisses de degré d donné ; si l'on peut construire tous les types topologiques non interdits par les prohibitions de a), le problème posé est considéré comme résolu.

A titre d'exemples, citons les deux fameux théorèmes de Harnack :

1.1 Théorème ([Ha 76]).— *Une courbe de degré d dans $\mathbf{RP}^2$ a au plus $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes.*

1.2 Théorème ([Ha 76]).— *Pour tout entier $d \geq 1$, et m tel que $1 \leq m \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$, il existe dans $\mathbf{RP}^2$ une courbe lisse de degré d avec m composantes connexes.*

Le théorème 1.1 est un résultat de type a), et le théorème 1.2 est de type b) : il résout complètement le problème du type topologique des courbes lisses de degré d , mais ne dit rien sur le type topologique du plongement. Il utilise la méthode des “petits paramètres” : on construit une courbe de degré d en perturbant légèrement l’union d’une courbe de degré $d - 1$ et d’une droite se coupant transversalement.

Les résultats de type a) sont nombreux et intéressants ; cependant, le sujet de cet exposé étant un résultat de type b), je ne prétends pas en faire un résumé, même succinct. Le lecteur intéressé pourra consulter [Wi 78], ou [Vi 86]. Les noms principaux dans ce domaine sont Harnack, Petrovskii, Gudkov, Arnol’d et Rokhlin, et la recherche dans ce domaine est restée très active, surtout parmi l’école russe.

Je vais dans cet exposé décrire la méthode de Viro de construction d’hyper-surfaces réelles, qui procède d’un esprit très différent des méthodes “à la Harnack” employées jusqu’ici, et expliquer les applications aux courbes de degré 7.

Cette méthode apparaît dans la thèse de Viro ([Vi 83]), en cours de traduction par l’auteur. Le théorème principal est énoncé dans [Vi 84] dans le cas des courbes. Le théorème est montré dans [G-K-Z 92] sous une forme plus faible.

2. COMPACTIFICATIONS DE $(\mathbf{R}^*)^n$

Nous allons décrire deux compactifications de $(\mathbf{R}^*)^n$ associées au polytope de Newton d’un polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Considérons une famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ de points entiers de $\mathbf{R}^n$, et soit Δ leur enveloppe convexe. On leur associe une application $\phi : (\mathbf{C}^*)^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=0}^N \alpha_i |X^{\alpha_i}|}{\sum |X^{\alpha_i}|}$$

avec la notation $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X^\alpha = x_1^{\alpha^1} \dots x_n^{\alpha^n}$ si $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$.

Notons $\Sigma \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ le groupe engendré par les symétries de $\mathbf{R}^n$ par rapport aux hyperplans de coordonnées et $(\mathbf{R}^+)^n$ le quadrant positif ouvert de $\mathbf{R}^n$.

2.1 Lemme.— Supposons Δ de dimension n (i.e., $\overset{\circ}{\Delta}$ non vide). Alors, si $\sigma \in \Sigma$, $\phi|_{\sigma((\mathbf{R}^+)^n)}$ est un difféomorphisme du “quadrant” $\sigma((\mathbf{R}^+)^n)$ sur $\overset{\circ}{\Delta}$.

On peut soit montrer ce lemme directement, soit utiliser les résultats de [Ati 82] ou [G-S 82] sur l'application des moments.

L'application ϕ se factorise en effet par

$$(\mathbf{C}^*)^n \xrightarrow{\psi} (\mathbf{CP})^N \xrightarrow{g} \mathbf{R}^n$$

avec $\psi(x_1, \dots, x_n) = [X^{\alpha_0}, \dots, X^{\alpha_N}]$, et $g([y_0, \dots, y_N]) = \sum_{i=0}^N \frac{\alpha_i |y_i|}{\sum |y_i|}$.

L'application g est l'application des moments correspondant à l'action du tore $(\mathbf{C}^*)^n$ sur $\mathbf{CP}^N$ définie par $t.y = [t^{\alpha_0} y_0, \dots, t^{\alpha_N} y_N]$. L'application des moments est souvent définie par $g([y_0, \dots, y_N]) = \sum_{i=0}^N \frac{\alpha_i |y_i|^2}{\sum |y_i|^2}$. Les résultats cités ici sont valables pour les deux cas. L'image $Y = \psi(\mathbf{C}^*)^n$ est l'orbite du point $(1, \dots, 1)$, et il est montré dans [Ati 82] (Th. 2) que $g(\bar{Y}) = \Delta$, et que si $T_c \subset (\mathbf{C}^*)^n$ est le tore compact, g induit un homéomorphisme de $\bar{Y}/T_c$ sur Δ , et un difféomorphisme de Y/T_c sur $\overset{\circ}{\Delta}$. On en déduit immédiatement le lemme 2.1.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les α_i^j sont ≥ 0 . On a alors, toujours avec l'hypothèse $\overset{\circ}{\Delta}$ non vide, une première compactification C_Δ de $(\mathbf{R}^*)^n$ égale à

$$C_\Delta = \cup_{\sigma \in \Sigma} (\sigma(\Delta))$$

définie par l'application $\tilde{\phi}$ définie comme $\tilde{\phi}(\sigma(x)) = \sigma(\phi(x))$ pour $\sigma \in \Sigma$ et $x \in \sigma((\mathbf{R}^+)^n)$.

2.2 Exemple.— Prenons $n = 2$, et pour Δ l'ensemble des monômes en (x, y) de degré $\leq d$. On trouve alors la compactification habituelle de $(\mathbf{R}^*)^2$ par un disque

(Figure 1).

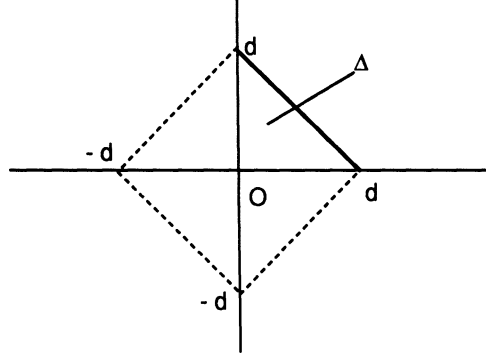


Figure 1

Viro considère une seconde compactification C'_Δ de $(\mathbf{R}^*)^n$ (mais utilise en fait surtout la première) en considérant la partie réelle de la variété torique associée au polytope Δ (cf. [Dan 78], ou [Oda 88]).

2.3 Lemme.— C'_Δ est homéomorphe au quotient de C_Δ lorsque l'on identifie les faces de C_Δ avec la règle suivante : si Γ est une face de C_Δ , pour tout vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ à coordonnées entières orthogonal à Γ , Γ est identifiée avec la face $\sigma(\Gamma)$, σ étant la symétrie $((-1)^{\alpha_1}, \dots, (-1)^{\alpha_n}) \in \Sigma \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

2.4 Exemple : Dans le cas où Δ est le polygone de l'exemple 2.2, on trouve que C'_Δ est le plan projectif $\mathbf{RP}^2$.

La démonstration du lemme 2.3 se fait en considérant l'action du tore sur l'ouvert affine de la variété torique correspondant à la face Γ .

3. CARTE D'UN POLYNÔME

Avec les notations du §2, rappelons que si E est un ensemble de points à coordonnées entières ≥ 0 d'enveloppe convexe Δ , on a une application $\tilde{\phi} : (\mathbf{R}^*)^n \rightarrow C_\Delta$, et que $\tilde{\phi}$ est un plongement si $\dim \Delta = n$.

3.1 Définition.— Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme, $Z(P) \subset \mathbf{R}^n$ l'ensemble de ses zéros, $\Delta(P)$ son polytope de Newton. Si Δ est un polytope à sommets à

coordonnées entières ≥ 0 , on appelle Δ -carte de P la paire formée de Δ et de l'adhérence de $\tilde{\phi}(Z(P) \cap (\mathbf{R}^*)^n)$ dans C_Δ . Cette carte est notée $C_\Delta(P)$.

3.2 Remarques

1) Le polytope Δ naturel pour construire la Δ -carte de P est $\Delta(P)$. Si $\Delta = \Delta(P)$, la Δ -carte de P s'appelle simplement la carte de P et est notée $C(P)$. Cependant, si $\dim \Delta = n$, on peut considérer des cartes $C_\Delta(P)$ pour d'autres polytopes. Si $\dim \Delta < n$, la carte $C_\Delta(P)$ n'a de signification que si $\Delta(P) \subset \Delta$.

2) On s'intéresse au type topologique "stratifié" des cartes au sens suivant : deux sous-ensembles C_1 et C_2 de C_Δ seront considérés comme équivalents s'il existe un difféomorphisme stratifié $h : C_\Delta \longrightarrow C_\Delta$ tel que h induise un homéomorphisme de $C_1 \cap \Gamma$ sur $C_2 \cap \Gamma$ pour toute face Γ de C_Δ .

3) Si Δ contient le polytope de Newton $\Delta(P)$, et si Γ est une face de Δ , notons P^Γ le polynôme "T-tronqué" de P , i.e., le polynôme formé à partir de P en ne gardant que les monômes correspondant à des points de Γ . On voit alors facilement que si l'on pose $\tilde{\Gamma} = \cup_{\sigma \in \Sigma} (\sigma(\Gamma))$,

$$C_\Delta(P) \cap \tilde{\Gamma} = C_\Gamma(P^\Gamma).$$

4) Supposons que $n = 2$ et que P soit un trinôme ; alors la carte $C(P)$ se construit de la manière suivante : on marque le signe des monômes à chaque sommet de $\Delta(P)$; si les trois sommets ne sont pas de même signe, on trace un segment de droite joignant les deux côtés dont les sommets sont de signes opposés. Si $\sigma \in \Sigma$, on fait de même pour $\sigma(\Delta(P))$, avec la règle suivante : si $M = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un sommet de $\Delta(P)$, et si $\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, le signe de $\sigma(M)$ est celui de M multiplié par $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2}$. (cf. l'exemple 3.5 ci-dessous). Ceci se généralise immédiatement à tout entier n , pour des polynômes ayant $n+1$ monômes dont le polyèdre de Newton est alors un simplexe.

3.3 Définition.— Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est non dégénéré (par rapport à son polytope de Newton Δ) si pour toute face Γ de Δ , P^Γ est réduit, et $Z(P^\Gamma)$ est lisse (au sens algébrique) dans $(\mathbf{R}^*)^n$. (Ici, $\overset{\circ}{\Delta}$ est considéré comme une face de Δ).

3.4 Proposition.— Supposons P non dégénéré. Alors $C(P)$ est transverse au bord de $C_\Delta(P)$ (au sens des ensembles stratifiés).

Le problème est local en un point x d'une strate du bord de C_Δ . On peut alors raisonner dans la variété torique (non nécessairement normale) $\overline{\psi((\mathbf{R}^*)^n)}$ (notation de 2.1) au voisinage du point $\tilde{x}$ correspondant à x , auquel cas la strate passant par $\tilde{x}$ est l'orbite de $\tilde{x}$, et le polynôme P s'identifie à une forme linéaire.

Dans le cas d'une variété torique lisse (sur le corps $\mathbf{C}$), cette proposition est montrée dans [Kho 77].

3.5 Remarque : Cette proposition est vraie si l'on suppose seulement que $Z(P^\Gamma)$ est lisse pour toute face Γ de codimension ≥ 1 (i.e., $Z(P)$ peut avoir des singularités dans $(\mathbf{R}^*)^n$).

3.6 Exemple : Pour $P = X^3 - Y^2X^2 + Y^3$, la carte $C(P)$ est représentée ci-dessous.

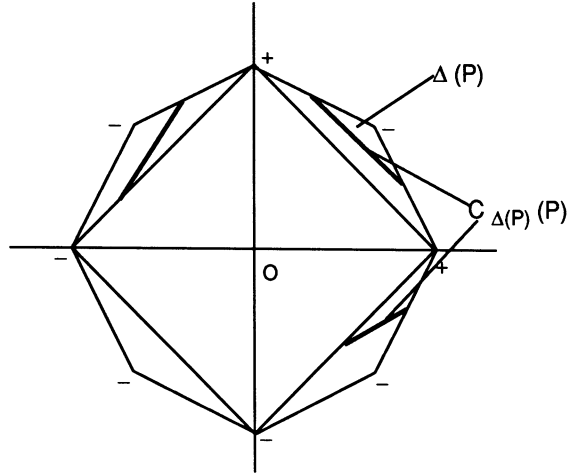


Figure 2

4. COLLAGES DE CARTES

4.1 Définition.— Soit $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ un polytope convexe à sommets entiers > 0 , $\Delta = \cup_{i \in I} \Delta_i$ une décomposition de Δ par des polytopes convexes à sommets entiers. On dit que cette décomposition est régulière si :

- 1) $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
- 2) $\Delta_i \cap \Delta_j$ est une face commune à Δ_i et Δ_j .

- 3) Il existe une fonction affine par morceaux concave $\nu : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}^+$ telle que
- a) $\nu|_{\Delta_i}$ soit affine $\forall i \in I$.
 - b) $\nu|_{\Delta_i \cup \Delta_j}$ ne soit pas affine pour $i \neq j$.
 - c) $\nu(\Delta \cap \mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}$.

Toutes les décompositions ne sont pas régulières. Un exemple classique est donné par la figure suivante (cf. [Co-He 80]).

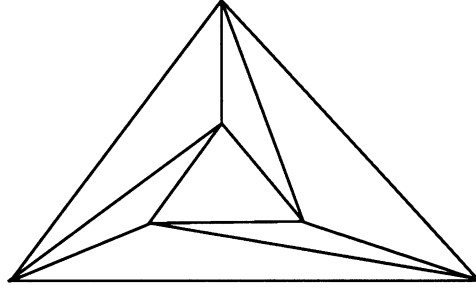


Figure 3

Considérons une décomposition régulière $\Delta = \cup \Delta_i$, et des polynômes P_i tels que :

- a) $\Delta(P_i) = \Delta_i$ pour tout i .
- b) Si $\Gamma = \Delta_i \cap \Delta_j$, $P_i^\Gamma = P_j^\Gamma$.
- c) Les P_i sont non dégénérés.

Alors les cartes $C(P_i)$ se recollent en un ensemble contenu dans C_Δ , et les P_i en un polynôme $P = \sum_{\omega \in \mathbf{Z}^n} a_\omega X^\omega$ tel que $P^{\Delta_i} = P_i \quad \forall i$.

Soit $\nu : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction concave affine par morceaux associée à la décomposition, et posons $P_T = \sum_{\omega \in \mathbf{Z}^n} a_\omega X^\omega T^{\nu(\omega)}$. On appellera P_T le “polynôme de Viro” associé à la fonction ν .

Le théorème principal de cet exposé est alors :

4.2 Théorème.— Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $T_0 > 0$ tel que pour $t > T_0$ le polynôme P_t soit non dégénéré, et la carte $C(P_t)$ équivalente au collage des cartes $C(P_i)$.

Remarque : Si on remplace ν par une fonction convexe, on a le même résultat que ci-dessus, pour $0 < t < T_0$, avec T_0 assez petit.

Démonstration : Soit $G_\nu \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ le graphe de la fonction ν , et soit Δ_ν son enveloppe convexe ; Δ_ν est le polytope de Newton du polynôme P_T . Considérons dans C_{Δ_ν} la carte $C_{\Delta_\nu}(T - T_0)$ du polynôme $T - T_0$. Cette carte est une hypersurface dans C_{Δ_ν} . Alors $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} (C_{\Delta_\nu}(T - T_0)) = G_\nu$ au sens suivant : la limite de l'hyperplan tangent en un point x_{T_0} de $C_{\Delta_\nu}(T - T_0)$ qui tend vers $x \in G_\nu$ contient la face de G_ν passant par x . On peut démontrer ce fait (essentiel pour le théorème 4.2) en se restreignant à une droite passant par x et orthogonale à la face de G_ν contenant x (cette droite est l'image d'une courbe monomiale de $(\mathbf{R}^*)^n$).

Pour chaque polytope Δ_i de la décomposition de Δ , soit $\tilde{\Delta}_i$ le graphe de $\nu|_{\Delta_i}$. La projection $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ induit un isomorphisme de $\tilde{\Delta}_i$ sur Δ_i , et elle identifie les cartes $\pi(C_{\tilde{\Delta}_i}(P_T^{\tilde{\Delta}_i}))$ et $C_{\Delta_i}(P^{\Delta_i}) = C_{\Delta_i}(P_i)$. (Si $P_T^{\tilde{\Delta}_i} = \sum_{\omega \in \Delta_i} a_\omega T^{\nu(\omega)} X^\omega$, et si $\nu(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum \lambda_i \alpha_i - \mu$ pour $\omega = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_i$, on effectue le changement de variables $u_i = T^{\lambda_i} X_i$).

On voit donc que $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$, qui est le collage des cartes $C_{\tilde{\Delta}_i}(P_T^{\tilde{\Delta}_i})$ est équivalente au collage des cartes $C_{\Delta_i}(P_i)$.

4.3 Lemme.— Posons $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0}) = C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap C_{\Delta_\nu}(T - T_0)$; pour T_0 assez grand, $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0})$ est homéomorphe à $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$.

Le lemme résulte du fait que $C_{\Delta_\nu}(P_T)$ est transverse à G_ν (au sens stratifié) par la proposition 3.4 (cf. la remarque 3.5), et que $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_{\Delta_\nu}(T - T_0) = G_\nu$. Pour montrer le lemme, on peut utiliser la technique développée par M.-H. Schwartz sur les voisinages du bord des variétés à coins ([Sch 91], p. 15-21), qui permet de construire un champ de vecteurs dans un voisinage de G_ν dans Δ_ν , tangent à $C_{\Delta_\nu}(P_T)$, et transverse aux strates de G_ν .

Ceci achève la démonstration du théorème 4.2, puisque $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0})$ se projette par π sur la carte $C_\Delta(P_{T_0})$, et que nous avons vu que $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$ se projetait par π sur le collage des cartes $C_{\Delta_i}(P_i)$.

Exemple : Prenons $n = 1$, $\Delta = [0, 3] \subset \mathbf{R}$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec $\Delta_1 = [0, 2]$, et $\Delta_2 = [2, 3]$. Cette décomposition de Δ est régulière, et on peut poser par exemple $\nu(0) = 3, \nu(2) = 2, \nu(3) = 0$.

Posons $P_1 = 1 - X^2, P_2 = -X^2 + X^3$; le collage des cartes de P_1 et P_2 est

représenté sur la figure ci-dessous.

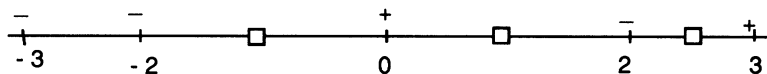


Figure 4

Le théorème 4.2 dit que pour $t > T_0$, le polynôme $P_t = X^3 - t^2 X^2 + t^3$ a trois racines réelles, deux > 0 , et une < 0 . Le polygone Δ_ν est celui de l'exemple 3.3.

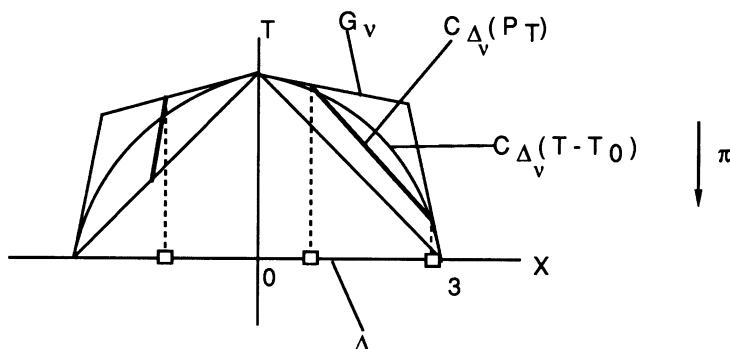


Figure 5

4.4 Remarque : On peut aussi interpréter le théorème 4.2 comme un théorème sur la “lissification” des singularités, de la manière suivante.

Soit $P(X_1, \dots, X_n) = 0$ l'équation d'une hypersurface algébrique ayant une singularité à l'origine non dégénérée par rapport à son diagramme de Newton $N(P)$. On suppose que $N(P)$ est compact (i.e., rencontre tous les axes de coordonnées), et l'hypothèse dit que P^Γ est réduit et lisse pour toute face de $N(P)$ (toutes les faces sont ici de codimension ≥ 1 , contrairement au cas global où l'on avait une face de codimension 0). Soit Δ la portion de $\mathbf{R}^n$ délimitée par $N(P)$ et les hyperplans de coordonnées ; supposons comme dans le théorème 4.2 que l'on ait une décomposition $\Delta = \cup \Delta_i$, des cartes $C(P_i)$ de polynômes P_i (de polygones de Newton P_i) non dégénérés, et une fonction convexe ν affine par morceaux définie sur Δ . On suppose que ν vérifie les conditions de 4.2, et qu'en plus ν est nulle sur $N(P)$. On construit alors comme plus haut un polynôme $P_T(X_1, \dots, X_n)$ tel que $P_0 = P$, et que pour T_0 assez petit et $0 < t < T_0$, l'hypersurface $P_t(X_1, \dots, X_n) = 0$ soit lisse en 0, et que sa carte soit le collage des

cartes $C(P_i)$, et de la carte de P en dehors de Δ . (Autrement dit, on a remplacé la singularité par le collage des cartes $C(P_i)$ dans un voisinage de O , sans rien changer à l'extérieur). Nous allons en voir des exemples plus bas.

5. APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

a) Lissification de la singularité J_{10}^- .

Dans [Vi 90], Viro classe systématiquement les lissifications de toute une série de singularités (non dégénérées), en suivant la classification d'Arnol'd (cf. [A-V-G 85]). Je prendrai ici comme exemple la singularité J_{10}^- , dont les lissifications donnent de nouveaux types topologiques de courbes algébriques, lorsque l'on utilise le théorème 4.2.

La singularité notée J_{10}^- est équivalente à la singularité formée de trois arcs de paraboles tangents (par exemple, $(Y - X^2)(Y - 2X^2)(Y - 3X^2)$ au voisinage de l'origine) ; elle est non dégénérée, et même quasi-homogène. Viro ([Vi 84] ou [Vi 90]) dresse une liste complète de ses lissifications (i.e., des types topologiques des "fibres de Milnor réelles") : il y en a 31. Je vais en indiquer trois seulement, obtenues par la méthode décrite ci-dessus (Viro utilise une méthode "à la Harnack").

5.1 Lemme.— *Il existe des lissifications de J_{10}^- avec les cartes suivantes :*

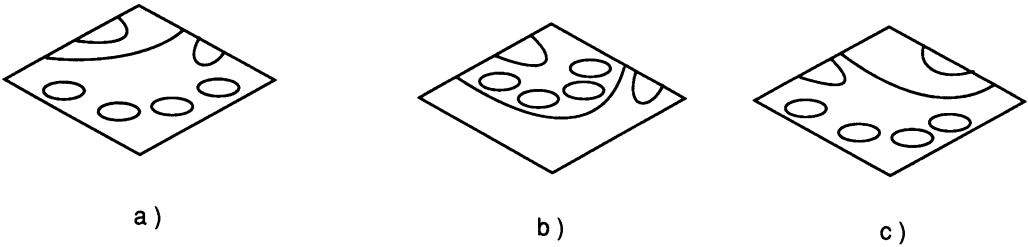


Figure 6

Indiquons par exemple comment obtenir le type c), en triangulant la partie du plan délimitée par le diagramme de Newton et les deux axes de coordonnées, en indiquant les signes des monômes, et en recollant des cartes de trinômes, comme expliqué plus haut. La triangulation est en pointillés, et la carte obtenue en traits

pleins.

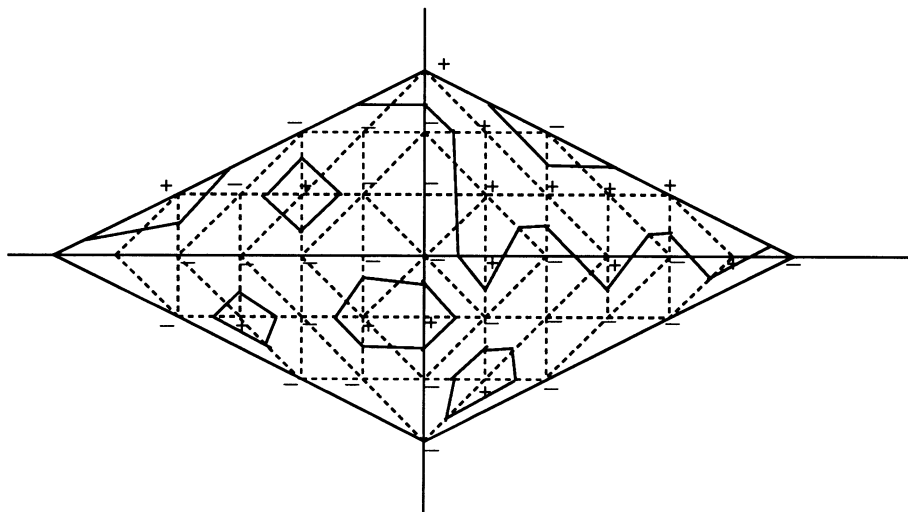


Figure 7

b) *Courbes de degré 6*

On considère maintenant les trois paraboles ci-dessus dans le plan comme une courbe de degré 6 d'équation ϕ ayant deux singularités de type J_{10}^- : l'une en 0, et l'autre à l'infini. Soit Δ le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,6)$ et $(6,0)$. Le polygone de Newton de l'équation ϕ sépare Δ en deux triangles : $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ (Figure 8).

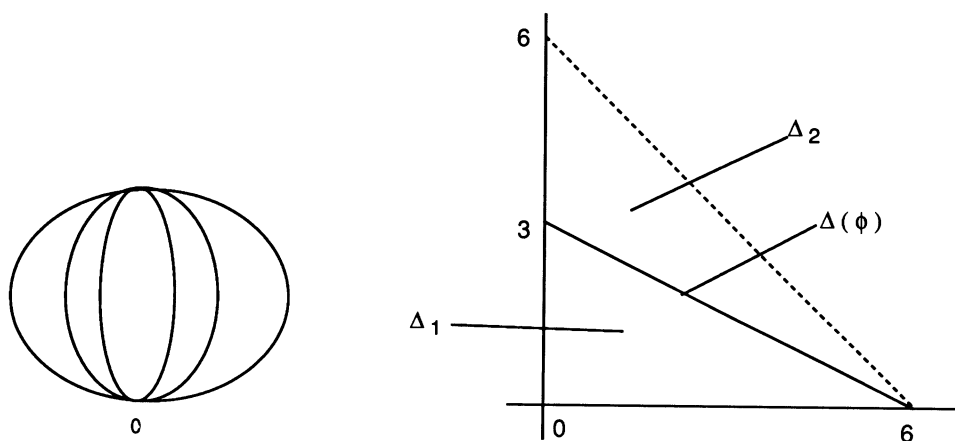


Figure 8

D'après le théorème 4.2, on peut utiliser le lemme 5.1, et recoller indépendamment des cartes de type a) ou b) dans Δ_1 et Δ_2 , pour obtenir la carte d'une courbe lisse de degré 6, que l'on pourra considérer dans le disque ou dans $\mathbf{RP}^2$.

On obtient ainsi les trois types de M-courbes de degré 6 dont les schémas sont indiqués Figure 9 (il n'y a que trois types de M-courbes de degré 6).

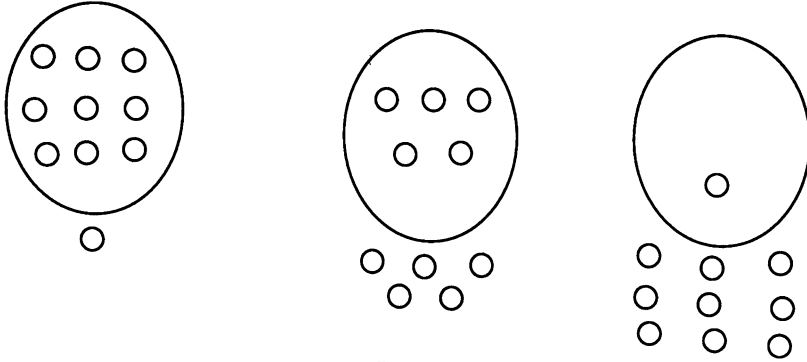


Figure 9

La courbe du milieu par exemple s'obtient en recollant une carte de type a) dans Δ_1 et une carte de type b) dans Δ_2 :

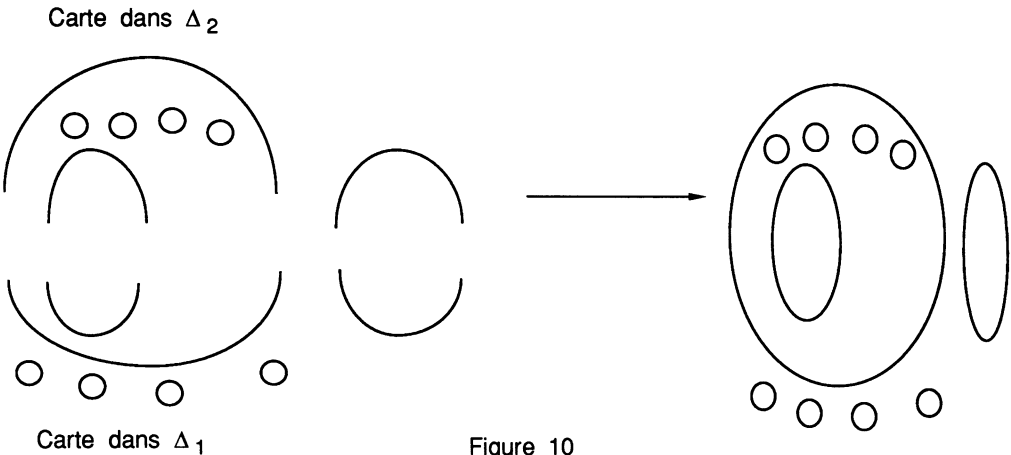


Figure 10

c) Courbes de degré 7

Une courbe plane lisse de degré impair a toujours une composante connexe (et une seule) homotope à une droite projective, appelée pseudo-droite. Les autres

composantes sont des ovales. Une courbe de degré 7 est réunion d'une pseudo-droite et d'au plus 15 ovales, d'après l'inégalité de Harnack. Viro a classé toutes les courbes de degré 7 en 1980. Dans la proposition suivante, qui décrit le résultat de Viro, on appelle ovale libre un ovale qui n'est contenu dans aucun autre ovale.

5.2 Proposition (Viro ; cf. [Vi 84]).— *Le type topologique du plongement d'une courbe de degré 7 est constitué d'une pseudo-droite, et d'ovales avec l'une des 121 possibilités suivantes :*

- i) *Un ovale contenant a ovales, et b ovales libres, avec $a + b \leq 14$ et $1 \leq a \leq 13$.*
- ii) *α ovales libres, avec $0 \leq \alpha \leq 15$*
- iii) *3 ovales emboîtés.*

Montrons par exemple comment construire une courbe de degré 7 de type i), avec $a = 10$, $b = 4$ (Cette courbe était inconnue jusqu'à Viro, et ne peut pas être construite par une méthode "à la Harnack").

Viro commence par construire une courbe γ de degré 7 avec deux singularités de type J_{10}^- , dont la carte est représentée (en traits pleins) Figure 11. Viro utilise une méthode "classique" pour construire la courbe γ (en partant d'une ellipse et d'une droite transverse), mais on peut aussi la construire en utilisant la méthode du collage des cartes, comme pour la courbe de la Figure 7.

En "collant" dans Δ_1 et Δ_2 (et leurs symétriques) des cartes de type b) (Figure 6), et en recollant avec la carte de γ à l'aide du théorème 4.2, on obtient une courbe de degré 7 avec $a = 10$, $b = 4$ (Figure 11).

5.3 Remarque : Toutes les courbes construites jusqu'ici par la méthode de Viro sont des "T-courbes" (T pour "Triangle"), i.e., des courbes obtenues en collant des cartes de trinômes ayant pour polygones de Newton des triangles d'aire $1/2$, comme sur la figure 7. On ne sait pas si tous les types topologiques des M-courbes peuvent être obtenus avec des T-courbes.

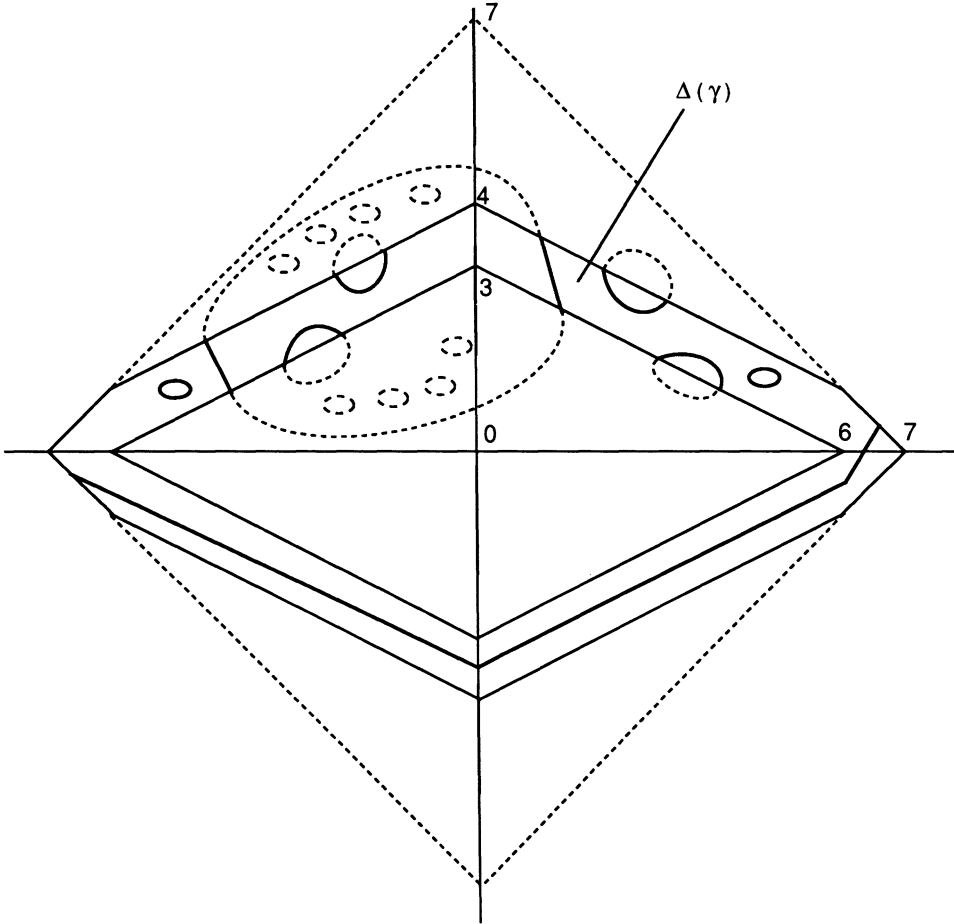


Figure 11

6. AUTRES RÉSULTATS

a) *Courbes de degré > 7 .* Pour les courbes de degré 8 on pourra consulter le survey [Pol 88]. Une courbe de degré 8 a au plus 22 ovales, et le statut des M-courbes (i.e., avec 22 ovales) semble être actuellement le suivant : en tenant compte des prohibitions connues, il y a 91 possibilités de types topologiques. Parmi ces 91 possibilités, 78 ont été effectivement réalisées (avec la méthode de Viro ou des variantes), principalement par Korchagin, Shustin, et Viro. Il reste donc 13 cas à élucider.

On peut citer Korchagin (non publié) pour le degré 9, et Chislenko ([Chi 89] pour le degré 10.

b) *Généralisations de la méthode de Viro*

Shustin ([Shu 85], [Shu 92]) a généralisé la méthode de Viro au cas où l'on colle des cartes de courbes avec singularités. Il montre en particulier que, avec les hypothèses du théorème 4.2 sur la partition $\Delta = \cup \Delta_i$, on peut toujours recoller les cartes de polynômes P_i , si leurs zéros n'ont comme singularités que des points doubles ordinaires.

Dans le cas d'autres singularités, des "cusps" par exemple, il y a des contraintes sur leur nombre. Shustin montre en particulier avec cette méthode que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq \frac{d^2-3d+4}{3}$, il existe une courbe de degré d avec k cusps (réels), i.e., k singularités dont le complexifié est topologiquement équivalent à la singularité $Y^2 - X^3 = 0$.

La méthode de Shustin consiste à remplacer les polynômes de Viro

$$P_t(X, Y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{ij} X^i Y^j t^{\nu(i,j)}$$

par des polynômes $\tilde{P}_t(X, Y) = \sum \tilde{a}_{ij}(t) X^i Y^j t^{\nu(i,j)}$ avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + O(t)$, les $\tilde{a}_{ij}$ étant construits de façon à préserver les singularités des polynômes P_i de départ ; l'existence des $\tilde{a}_{ij}$ est une conséquence du théorème de Riemann-Roch, comme dans le fameux théorème de Brusotti sur la lissification des singularités d'une courbe algébrique n'ayant que des points doubles ordinaires. Signalons que B. Chevallier ([Che 92]) travaille sur une autre variante de la méthode de Viro, et que D. Pecker ([Pe 92]) construit très simplement des courbes avec des points doubles ordinaires en nombre maximal.

B. Sturmfels ([St 92]) annonce une généralisation du théorème de Viro aux intersections complètes sous la forme suivante : on considère des polytopes convexes $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, pour chaque i une triangulation de Δ_i correspondant à une fonction ν_i concave affine par morceaux ($1 \leq i \leq k$). Alors, si $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_k$ est la somme de Minkowski des Δ_i , on peut définir une subdivision du polytope Δ , correspondant à la fonction $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_k$, pourvu que les fonctions ν_i soient assez "génériques" ([Lee 91]) ; ceci entraîne en particulier que pour chaque i , la décomposition de Δ_i est une triangulation.

Soit pour chaque i $P_{i,T}$ un polynôme de Viro correspondant à la fonction ν_i (tel que $\Delta(P_i) = \Delta_i$). D'après le théorème 4.2, la carte $C_{\Delta_i}(P_{i,t})$ s'obtient (pour t assez grand) en recollant des cartes C_i^j définies dans les simplexes de la triangulation de Δ_i ; Sturmfels décrit un procédé combinatoire pour relever les cartes C_i^j dans Δ , tel que celles-ci se recollent (pour i fixé) en des cartes C_i équivalentes à $C_{\Delta}(P_{i,t})$. L'intersection des C_i est alors (pour t assez grand) une carte de l'ensemble $\cap_{i=1}^k Z(P_{i,t})$.

c) *Polytope de Newton du discriminant*

La construction de Viro est à la base de la théorie de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ([G-K-Z 92]) sur les $\mathcal{A}$ -discriminants, même si ceux-ci l'ont développée indépendamment. La raison en est la suivante : si on fixe un ensemble de points $\mathcal{A} = (\alpha_i) \subset \mathbf{Z}^n$, chaque partition régulière $\mathcal{P}$ de leur enveloppe convexe Δ définit une famille de fonctions $\nu_{\mathcal{P}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Z}$. Réciproquement, toute fonction $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Z}$ définit une partition régulière de Δ , en considérant la projection de l'enveloppe convexe supérieure du graphe de ν .

D'autre part, à une fonction $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Z}$ est associée une direction de droites dans l'espace des coefficients (a_i) , définie par $a_i = \nu(\alpha_i)\theta$. L'ensemble des droites correspondant à une partition régulière forme alors un cône polyédral, et ce cône est d'intérieur non vide si et seulement si la partition est une triangulation. On peut alors montrer que le cône correspondant à une triangulation de Δ est contenu dans le cône dual d'un et un seul sommet du polytope de Newton du $\mathcal{A}$ -discriminant (cf. [G-K-Z 92]).

d) En utilisant la méthode de Viro, I. Itenberg vient de construire une famille de courbes qui contredisent la conjecture de Ragsdale (cf. [It 93]).

BIBLIOGRAPHIE

- [A'C 79] **N. A'Campo** *Sur la première partie du 16-ième problème de Hilbert*, Sem. Bourbaki 537, Lect. Notes in Math., 770, Springer, 208-227.
- [A-O 79] **V.I. Arnol'd, O.A. Oleinik** *The topology of real algebraic manifolds*, Moscow Univ. Bull. 34, 5-17.

- [A-V-G 85] **V.I. Arnol'd, A. N. Varshenko, S. M. Gusein-Zade**, *Singularities of differentiable maps, I*, Birkhauser.
- [Ati 82] **M. F. Atiyah** *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14, 1-15.
- [Che 92] **B. Chevallier** *Problèmes de désingularisations maximales de courbes analytiques réelles planes*, Preprint, Un. Toulouse.
- [Chi 89] **Yu. S. Chislenko** *M-curves of degree ten*, J. Soviet Math. 26, 1689-1699.
- [Co-He 80] **R. Connelly, D.W. Henderson**, *A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex*, Proc. Camb. Phil. Soc. 88, 299-306.
- [Dan 78] **V. I. Danilov** *The Geometry of Toric Varieties*, Russian Math. Surveys 33,2, 97-154.
- [GKZ 92] **I. M. Gel'fand, M. Kapranov, A. Zelevinsky**, *Discriminants and Resultants*, Birkhäuser, à paraître.
- [Gud 74] **D. A. Gudkov** *The topology of real algebraic varieties*, Russian Math. Surveys, 29, 4, 1-79.
- [G-S 82] **V. Guillemin, S. Sternberg** *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. 67, 491-513.
- [Ha 76] **A. Harnack** *Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. 10 (1876), 189-199.
- [It 93] **I. Itenberg**, *Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale*, CRAS, Tome 317, série I, 277-282.
- [Kha 78] **V. M. Kharlamov** *The topological type of non singular surfaces in $\mathbf{RP}^3$ of degree four*, Funct. Anal. 10,4, 295-305.
- [Kho 77] **A. G. Khovanskii** *Newton polygons and toric manifolds*, Funct. Analysis Appl. 11, 4, 289-296.
- [Lee 91] **C. Lee** *Regular triangulations of convex polytopes*, in Appl. Geom. and Discrete Math., American Math. Soc., DIMACS Series 4, Providence, R.I.
- [Oda 88] **T. Oda** *Convex bodies and Algebraic Geometry*, Ergeb. Math. 15, Springer-Verlag.

- [Pe 92] **D. Pecker** *An imaginary construction of real curves*, Preprint, Un. Paris 6.
- [Pol 88] **G. M. Polotovskii** *On the classification of non singular curves of degree 8*, Lect. Notes in Math., 1346, Springer, 455-485.
- [Sch 91] **M-H. Schwartz** *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours 39, Hermann.
- [Shu 85] **E. I. Shustin** *Pasting of singular algebraic curves*, In: Methods of Qualitative Theory, Gorky Univ. Press, 116-128 (en Russe).
- [Shu 92] **E.I. Shustin** *Plane Algebraic curves with prescribed singularities*, A paraître (Preprint, Université de Tel-Aviv).
- [St 92] **B. Sturmfels** *Viro's theorem for complete intersections*, personal communication.
- [Vi 83] **O. Ya. Viro** *Constructing real algebraic varieties with prescribed topology*, Thèse, LOMI, Leningrad. Traduction anglaise en cours par l'auteur.
- [Vi 84] **O. Ya. Viro** *Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7*, Lect. Notes in Math. 1060, Springer, 185-200.
- [Vi 86] **O. Ya. Viro** *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years*, Russian Math. Surveys, 41,3, 55-82.
- [Vi 90] **O. Ya. Viro** *Real algebraic plane curves: constructions with controlled topology*, Leningrad Math. J., 1,5, 1059-1134.
- [Wi 78] **G. Wilson** *Hilbert's sixteenth problem*, Topology 17, 53-74.

Jean-Jacques RISLER

DMI, Ecole Normale Supérieure
45, Rue d'Ulm, 75005 Paris.