

# *Astérisque*

CLAUDE VITERBO

## **Orbites périodiques dans le problème des trois corps**

*Astérisque*, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 774, p. 377-393

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1992-1993\\_\\_35\\_\\_377\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__377_0)>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ORBITES PÉRIODIQUES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

par Claude VITERBO

### 1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter les résultats récents de A. Bahri et P. Rabinowitz sur l'existence d'orbites périodiques du problème des trois corps, suivant une approche variationnelle. La question remonte au moins à Poincaré, qui espérait pouvoir utiliser de telles trajectoires pour approcher une trajectoire simple. Ce point de vue n'a pas vraiment abouti, mais les orbites périodiques se sont tout de même révélées précieuses pour comprendre la dynamique des systèmes Hamiltoniens (voir [C], [V2]).

La méthode de Bahri et Rabinowitz est variationnelle. Classiquement, en effet, on cherche des solutions périodiques de

$$\ddot{q} + \nabla V(t, q) = 0$$

pour un potentiel de classe  $C^2$ ,  $V$  en étudiant les points critiques de  $\Phi(q) = \int_0^T [\dot{q}^2 - V(t, q)] dt$ . Sous l'hypothèse que  $V$  tende vers  $-\infty$  avec  $|q|$ ,  $\Phi$  atteint toujours un minimum, d'où une solution périodique de période  $T$  de notre équation.

Le résultat est déjà en défaut si par exemple  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$  et  $V < 0$ . Le minimum est alors 0, mais il n'est atteint par aucun  $q$ . Ce type de problème a été étudié par Ambrosetti et Coti-Zelati vers 1986-89. Puis les recherches se sont orientées vers des problèmes plus proches de la mécanique céleste. Le cas de potentiels de la forme  $1/|x|^\alpha$  fut alors abordé (cf. [A-CZ 1], [A-CZ 2], [A-CZ 3], [B-R 1], [Gr]), pour lesquels  $V$  a une singularité en un point. Le cas abordé par Bahri et Rabinowitz est plus difficile, en ce que  $V$  est de la forme  $V(q) = \sum_{i,j=1; j \neq i}^3 \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$ , et donc possède une variété singulière (union de sous-espaces linéaires) de singularités. En réalité, c'est moins le problème des trois corps

classique que nous tentons d'exposer, que les méthodes variationnelles utilisées pour le traiter. Celles-ci ont une portée bien plus générale, en particulier l'étude des "points critiques à l'infini" due à Bahri et Coron (voir [B-C 1], [B-C 2], [B-C 3]). Pour d'autres méthodes pour traiter les défauts de compacité en calcul des variations on se référera au séminaire Bourbaki de H. Brézis ([Br]) et à l'article de P.L. Lions ([L]).

Un mot enfin pour justifier l'introduction dans la section 2 des bases de ce que l'on appelle la théorie de Conley. Les raisons en sont multiples. Cette théorie est devenu un outil presque indispensable dans les aspects topologiques du calcul des variations. Elle permet lorsqu'on se donne une fonction sur une variété, de donner un sens précis à des phrases du type "contribution des points critiques contenus dans un ouvert, à la topologie de la variété". Elle s'applique aussi à des champs de vecteurs qui ne soient pas des gradients, et enfin, elle peut être simple ou sophistiquée, suivant le niveau de finesse requis par les applications, mais est toujours d'une grande beauté. Pour tout ce que nous ne pouvons dire sur ce sujet, nous référons à [Co 1] et sa bibliographie.

Malheureusement, nous devons exclure les autres méthodes, comme par exemple l'étude des configuration centrales (pour lesquelles on réfère aux travaux de Moeckel, McGehee, etc..) ou utilisant d'une manière ou d'une autre les symétries du potentiel Newtonien. Notons d'ailleurs que la méthode variationnelle se simplifie dans ce cas (voir [CZ 1], [S-T] et la section 4) De même, nous ne traitons pas des méthodes perturbatives, utilisées déjà par Poincaré, dans le cas où l'une des trois masses est petite. Nous verrons cependant, dans la section 4, que les résultats de mécanique céleste classique ne sont pas sans conséquences sur l'approche variationnelle.

1. Introduction.
2. Théorie de Conley et points critiques à l'infini.
3. Le problème des trois corps: étude variationnelle.
4. Autres résultats. Quelques remarques sur les solutions singulières.
5. Références.

L'auteur remercie A. Ambrosetti, A. Bahri, J.-M. Coron, G.F. Dall'Antonio, et S. Terracini pour de nombreuses discussions sur le sujet de cet exposé, V.I. Arnold et Michael Hermann pour leurs remarques lors de l'exposé. Toutefois les erreurs

ou omissions (en particulier bibliographiques) n'ont d'autre cause que l'ignorance de l'auteur.

## 2. THÉORIE DE CONLEY ET POINTS CRITIQUES À L'INFINI

Un outil commode pour présenter l'étude des problèmes variationnels, avec ou sans compacité, est la théorie de Conley (cf. [Co 1]). En particulier nous allons l'utiliser ici pour présenter la théorie des points critiques à l'infini d'A. Bahri et J.M. Coron. Qu'il soit clair que ce n'est rien d'autre qu'un langage commode pour décrire leurs idées. La théorie de Conley (comme celle des points critiques à l'infini) a d'autres applications que celle décrites ici.

Soit  $X$  un champ de vecteurs que nous supposons être un pseudogradient d'une fonction  $f$  sur une variété  $M$ , c'est-à-dire que l'on a

$$df(x)X(x) \geq |df(x)|^2$$

(en particulier les points critiques de  $f$  coïncident avec les zéros de  $X$ , et en dehors de ces points,  $f$  croît strictement le long des lignes de gradient). Soit  $U$  un ouvert à bord de  $M$ . On appelle ensemble invariant maximal de  $X$  dans  $U$ , et on note  $S_U$  le plus grand sous-ensemble de  $U$  invariant par le flot de  $X$ . Dans le cas qui nous occupe, cet ensemble coïncide avec l'ensemble des points critiques de  $f$  dans  $U$  et des trajectoires de gradient les connectant (orbites hétéroclines de  $X$ ) contenues dans  $U^1$ . On note  $\partial^-U$  l'ensemble des points du bord où  $X$  est sortant, et on l'appelle ensemble sortant de  $U$ . On note alors  $I(U)$  l'espace topologique (pointé)  $U/\partial^-U$ .

**PROPOSITION 1.** *Si  $U$  est relativement compact, et si  $S = S_U$  ne rencontre pas  $\partial U$ , alors le type d'homotopie de  $I(U)$  ne dépend pas de  $U$ , mais seulement de  $S$ . On appelle alors  $I(U)$  l'indice de Conley de  $S$ , et on note par abus de langage  $I(S)$ .*

**Remarque:** Si  $U$  vérifie les hypothèses de la proposition, on dira que c'est un bloc isolant pour  $S$  (cf. figure 1).

<sup>1</sup>L'ensemble maximal invariant et l'indice de Conley sont définis pour tout champ de vecteurs, dans le cas d'un champ de gradient la seule simplification vient de l'identification de l'ensemble maximal invariant

La démonstration n'est pas difficile. On peut toujours supposer que  $U \subset V$ , car  $U$  et  $V$  contiennent un voisinage de  $S$ . On utilise alors les trajectoires de  $X$  pour envoyer  $\partial^-U$  sur  $\partial^-V$  (en effet une trajectoire partant de  $\partial^-U$  sort aussi de  $V$ , sinon elle s'accumulerait sur un point de  $S_V$  qui ne serait pas dans  $S_U$ , contrairement à l'hypothèse  $S_U = S_V$ ), et donc obtenir une application de  $I(U)$  dans  $I(V)$ . L'inverse se construit de façon analogue en construisant d'abord une application de  $V/\partial^-V$  dans lui-même en envoyant les trajectoires restant hors de  $U$ , qui sortent (sinon elles finiraient sur  $S_U \subset U$ ) sur le "point" de  $V/\partial^-V$ . On peut alors remplacer  $V$  par le sous-ensemble de  $V$  dont la trajectoire rencontre  $U$ . Ceci fait, on suit le flot pour envoyer  $V$  sur la réunion de  $U$  et de l'ensemble des trajectoires partant de  $\partial^-U$  que l'on identifie à  $\partial^-U \times [0, 1]$ . On obtient donc une application

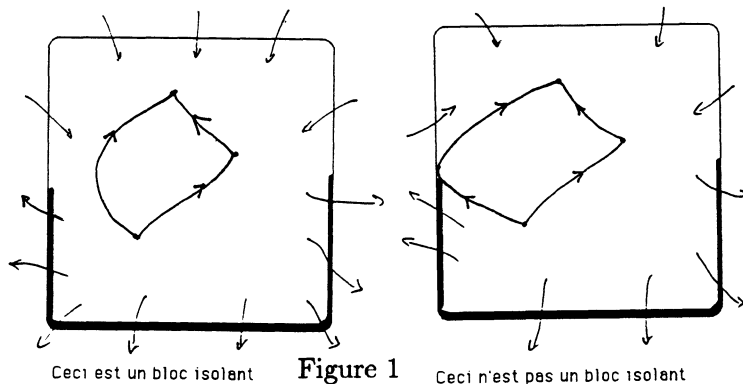
$$V/\partial^-V \rightarrow (U \cup \partial^-U \times [0, 1]/\partial^-U \times [0, 1])$$

mais l'ensemble de droite a le type d'homotopie de  $U/\partial^-U$ . On vérifie ensuite aisément que les deux applications sont homotopiquement inverses l'une de l'autre.

Donnons quelques exemples:

A. Si  $S$  est vide,  $\partial^-U$  est un rétracte de  $U$  (suivre les lignes du flot) et donc  $I(S)$  a le type d'homotopie d'un point.

B. Soit  $x_0$  un point critique isolé de  $f$ , que l'on suppose non dégénéré. Son indice de Morse est alors le nombre de valeurs propres négatives de  $d^2f(x_0)$ . Il est facile de voir que si l'on prend un voisinage suffisamment petit de  $x_0$  c'est un bloc isolant, et son indice est  $D^k/S^{k-1} = S^k$  (voir figure 2, où  $\partial^-U$  est en trait épais).



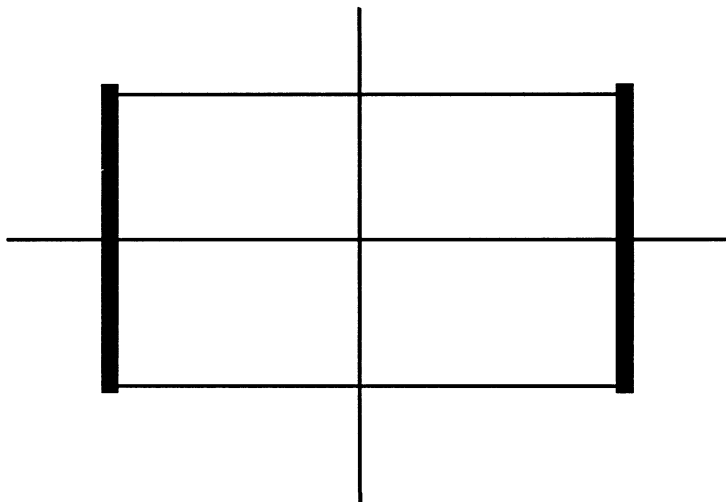


Figure 2

C. Supposons  $M$  compacte, et soient  $a, b$  deux niveaux réguliers de  $f$  (c'est-à-dire ne contenant pas de point critique). On note  $M^c$  le sous niveau de  $c$ ,  $M^c = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$ . Alors  $M^b - M^a$  est un bloc isolant pour l'ensemble des points critiques entre  $a$  et  $b$ , et des trajectoires le connectant. On a alors  $I(U) = M^b/M^a$ . En général, on détecte les points critiques de  $f$  par les changements de topologie de  $b \rightarrow M^b$ .

Dans son aspect le plus raffiné, la théorie de Conley tient aussi compte de la classe d'homotopie de  $I(U) \rightarrow I(V)$  (bien que ce soient des équivalences d'homotopie, elles ne sont pas toutes homotopes entre elles). Cela permet parfois de mettre en évidence des bifurcations (i.e. changement de topologie de  $S_U$ ). Mais très souvent, on oublie même le type d'homotopie de  $I(U)$ , pour ne retenir que son homologie.

On se place à nouveau dans le cadre de l'exemple C, mais on ne suppose plus  $M$  compacte. Supposons d'abord qu'en dehors d'un compact, toutes les trajectoires commençant dans  $M^b - M^a$ , finissent dans  $M^a \cup \{\text{l'ensemble des points critiques de } f\}$ . Alors la proposition s'applique encore à  $U = M^b - M^a$ , car il suffit de l'appliquer au domaine  $U$  de la figure 2, qui lui est compact. On vérifie sans difficulté que la condition de Palais-Smale que l'on va rappeler entraîne justement la propriété ci-dessus. La condition de Palais-Smale s'énonce comme suit:

Soit  $(x_n)$  une suite de  $E$  telle que  $df(x_n) \rightarrow 0$  et  $f(x_n) \rightarrow c$  alors  $(x_n)$  converge.

Donc, si  $x(t) = -\nabla f(x(t))$ , aucune demi-trajectoire infinie  $(\{x(t) \mid t \geq t_0\})$  ne reste dans une région où  $f$  est bornée.

Un cas plus difficile est celui où certaines trajectoires de  $M^b - M^a$  restent indéfiniment dans  $M^b - M^a$  sans tendre vers un point critique. Elles tendent alors nécessairement vers l'infini, et on dira que  $M^b - M^a$  contient des points critiques à l'infini. Il faut en particulier noter que  $M^b/M^a$  peut fort bien être non trivial (i.e. ne pas avoir le type d'homotopie d'un point), alors que  $M^b - M^a$  ne contient pas de vrai point critique. Ceci est une situation fort déplaisante, car c'est aux vrais points critiques que l'on s'intéresse.

L'idée fondamentale de Bahri et Coron, (cf. [Br] pour les méthodes antérieures) est de séparer la contribution topologique des points critiques "à distance finie" de celle des "points critiques à l'infini". Si on sait montrer que la contribution des points critiques à l'infini ne suffit pas à expliquer la topologie de  $M^b/M^a$  il y aura nécessairement des points critiques à distance finie. C'est ce qui a lieu dans un certain nombre de cas, en particulier les résultats de Bahri-Coron sur la conjecture de Kazhdan-Warner, et les résultats sur le problème des trois corps que nous allons exposer dans le prochain paragraphe. Nous allons conclure ce paragraphe, en expliquant comment on peut séparer les contributions des deux types de points critiques. Pour cela nous devons considérer le cas de deux blocs isolants  $U$  et  $V$ , dont la réunion  $W$  est aussi un bloc isolant. On souhaite comparer  $I(U)$ ,  $I(V)$  et  $I(W)$ . Il nous faut une hypothèse supplémentaire, à savoir qu'il n'y a pas à la fois une trajectoire reliant un point critique de  $U$  à un point critique de  $V$  et vice-versa. On supposera pour simplifier que seul le premier cas est permis. Alors, on a

PROPOSITION 2([Co 1] P.60-62). *Il existe une suite d'applications*

$$I(U) \rightarrow I(W) \rightarrow I(V) \rightarrow \Sigma I(U) \rightarrow \Sigma I(W) \rightarrow \dots$$

*qui induit en homologie une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow H_k(U, \partial^- U) \rightarrow H_k(W, \partial^- W) \rightarrow H_k(V, \partial^- V) \rightarrow H_{k+1}(U, \partial^- U) \rightarrow \dots$$

Remarques: (1) Les deux propositions citées ci-dessus sont les ingrédients essentiels d'une démonstration très simple, due à Floer, de l'identité entre l'homologie du complexe de Thom-Smale-Witten et l'homologie de la variété. (cf. [F])

(2) Il est important de remarquer que le résultat ci-dessus reste vrai si par exemple  $V$  et  $W$  ne sont pas compacts, pourvu que  $U$  le soit. On voit alors que les hypothèses ci-dessus seront par exemple satisfaites si  $U$  contient l'ensemble des points critiques dans  $M^{c+\epsilon} - M^{c-\epsilon}$  où  $c$  est un niveau correspondant à un changement de topologie des sous-niveaux de  $f$ , et  $V$  le complémentaire de  $U$  dans  $M^{c+\epsilon} - M^{c-\epsilon}$ . On voit alors que la suite exacte ci-dessus relie la contribution homologique des points critiques à distance finie et de ceux à l'infini, avec la topologie de  $M^{c+\epsilon}/M^{c-\epsilon}$  (voir figure 3).

(3) La proposition 2 permet de majorer la dimension de  $H_k(W, \partial^-W)$  en fonction de celles de  $H_k(U, \partial^-U)$  et de  $H_k(V, \partial^-V)$ . Cette majoration est utilisée dans la démonstration de Bahri et Rabinowitz.

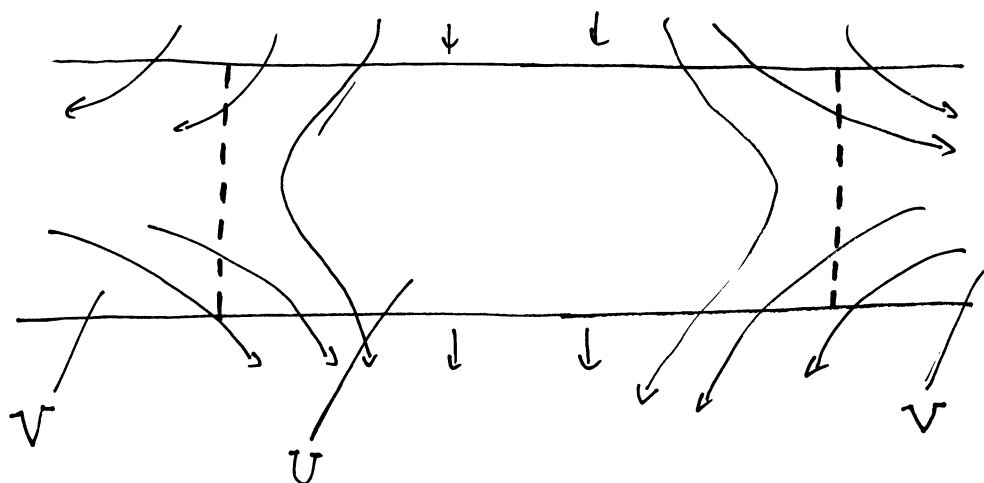


Figure 3

### 3. LE PROBLÈME DES TROIS CORPS. ÉTUDE VARIATIONNELLE

Pour cette section, la référence implicite est [B-R 2]. Le problème des  $N$  corps est l'équation d'un système de  $N$  masses  $m_j$  en interaction donnée par le potentiel Newtonien



$$V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

Comme notre raisonnement est indépendant des  $m_i$ , nous supposons  $m_i = 1$ . Plus généralement, on étudiera le cas où le potentiel n'est pas du type Newtonien, mais du type dit de "strong force" (introduit dans [G]), c'est-à-dire  $V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i,j=1; j \neq i}^N V_{i,j}(q_i - q_j)$  (éventuellement  $V_{i,j}$  pourra aussi dépendre du temps) et on suppose que  $V_{i,j}$  vérifie les conditions suivantes:

$$(V_1) \quad V_{i,j} \in C^2(\mathbf{R}^l - \{0\}, \mathbf{R})$$

$$(V_2) \quad V_{i,j} < 0$$

$$(V_3) \quad V_{i,j}(q) \text{ et } V'_{i,j}(q) \text{ tendent vers } 0 \text{ lorsque } |q| \text{ tend vers } \infty$$

$$(V_4) \quad V_{i,j}(q) \text{ tend vers } -\infty \text{ lorsque } q \text{ tend vers } 0$$

$$(V_5) \quad \text{pour tout } M > 0 \text{ il existe } R > 0 \text{ tel que pour } |q| > R \text{ on a } V'_{i,j}(q) \cdot q > M|V_{i,j}(q)|$$

$$(V_6) \quad \text{il existe } U_{i,j} \text{ dans } C^1(\mathbf{R}^l - \{0\}, \mathbf{R}) \text{ tel que } U_{i,j}(q) \text{ tende vers } \infty \text{ lorsque } q \text{ tend vers } 0, \text{ et } |U'_{i,j}|^2 \leq -V_{i,j}.$$

Alors que les hypothèses  $(V_1)$  à  $(V_5)$  sont satisfaites par tout potentiel de la forme  $V_{i,j}(q) = \frac{1}{|q|^\alpha}$  l'hypothèse  $(V_6)$  dite de "strong force" n'est vérifiée par de tels potentiels que si  $\alpha \geq 2$ . On ne peut donc traiter directement du potentiel Newtonien, qui sera justiciable d'un passage à la limite.

Dans la suite de cette section, on supposera sauf mention explicite du contraire, les hypothèses  $(V_1)$  à  $(V_6)$  vérifiées. On pourra aussi supposer que  $V$  dépend de  $t$  et est  $T$ -périodique en  $t$ .

Ecrivons maintenant le problème de la recherche d'orbites périodiques de période  $T$  sous forme variationnelle; ce sont les points critiques de la fonctionnelle

$$\Phi(q) = \int_0^T [\dot{q}^2 - V(q)] dt.$$

Enonçons maintenant le résultat principal de Bahri et Rabinowitz.

**THÉORÈME.** *Sous les hypothèses  $(V_1)$  à  $(V_6)$ ,  $(E)$  a une suite infinie de solutions distinctes. Plus précisément la fonctionnelle  $\Phi$  a une suite non bornée de valeurs critiques.*

C'est ce théorème dont nous allons essayer d'évoquer la démonstration.

La principale conséquence de  $(V_6)$  est que les points critiques de  $\Phi$  sont des solutions qui ne passent pas par une collision, c'est-à-dire qu'à tout instant  $t$  on a  $\forall i \neq j \ q_i(t) \neq q_j(t)$ . Plus précisément, on a

**PROPOSITION 3.1.** *Pour tout  $c > 0$  il existe  $\delta(c) > 0$  tel que si  $\Phi(q) \leq c$  on a  $\inf_{t \in [0, T]} |q_j(t) - q_k(t)| > \delta(c)$*

En voici la démonstration.

$$c \geq \int_s^t V_{i,j}(q_i - q_j) dt \geq \int_s^t \nabla U_{i,j}(q_i - q_j) dt \geq \\ 1/2c \int_s^t |\nabla U_{i,j}(q_i - q_j)|^2 dt \int_s^t |\dot{q}_i - \dot{q}_j|^2 dt$$

car  $\int |\dot{q}_i|^2 dt \leq c$ . D'où

$$\int_s^t \nabla U_{i,j}(q_i - q_j)(\dot{q}_i - \dot{q}_j) dt \leq 2c^2$$

soit

$$|U_{i,j}(q_i(t) - q_j(t)) - U_{i,j}(q_i(s) - q_j(s))|^2 \leq 2c^2$$

Comme d'après  $(V_4)$  on peut trouver  $s$  tel que  $|q_i(s) - q_j(s)| \geq \delta_1(c)$ , et même, à moins que cette inégalité ne soit stricte pour tout  $s$  (auquel cas notre proposition est vérifiée), on peut trouver  $s$  pour lequel l'égalité ait lieu; on aura

$$|U_{i,j}(q_i(t) - q_j(t))| \leq \sqrt{2}c + \sup_{|x|=\delta_1(c)} U_{i,j}(x)$$

et on conclut par  $(V_6)$ .

On en tire plusieurs conséquences. Tout d'abord  $\Phi$  et le flot de son gradient sont définis sur  $\Lambda F_3$  où on pose  $F_k = \{(q_1, \dots, q_k) \mid \forall i \neq j \ q_i \neq q_j\}$  et  $\Lambda F_k$  est l'espace des lacets  $W^{1,2}$  dans  $F_k$ .

Une autre remarque importante est que le problème possède une symétrie par translation dans  $\mathbf{R}^l$ . Modulo cette symétrie, les points critiques sous un niveau donné sont bornés dans  $W^{1,2}$  en fonction du niveau:

**PROPOSITION 3.2.** *Pour tout  $M$  il existe  $C(M)$  tel que si  $\Phi(q) \leq M$  il existe  $v(q) \in \mathbf{R}^l$  tel que  $|q - v(q)|_{W^{1,2}} \leq C(M)$ .*

Remarque: La proposition ci-dessus n'est plus vraie si on essaie de remplacer la condition  $D\Phi(q) = 0$  par  $|D\Phi(q)| \leq \epsilon_0$ , comme on va le voir ici.

Il est clair que  $\Phi$  ne vérifie pas la condition de Palais-Smale. En effet, supposons  $N = 3$ , soient  $(q_1(t), q_2(t))$  une solution périodique du problème des deux corps correspondant aux potentiels  $W(q_1, q_2) = V_{1,2}(q_1 - q_2) + V_{2,1}(q_2 - q_1)$  et  $q_3(t) = v_3 + \epsilon(t)$  où  $c$  tend vers l'infini et  $\epsilon(t)$  est petit dans  $W^{1,2}$ . Alors  $\nabla\Phi(q) = \tilde{q}_3 + \nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t)) + \nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t))$ ,  $\nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t))$ ,  $\nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t))$ . Comme  $|q_1 - q_3|$  et  $|q_2 - q_3|$  tendent vers l'infini, on a grâce à (V3) que les termes en  $\nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t))$  et  $\nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t))$  tendent vers 0. Comme  $\tilde{q}_3$  tend aussi vers 0, notre suite sera donc bien une suite violant la condition de Palais-Smale.

Remarque: Un exemple encore plus simple est obtenu en faisant s'éloigner les trois corps l'un de l'autre de façon à avoir  $q_j(t) = v_j + \epsilon(t)$  avec  $|v_j - v_i| \rightarrow \infty$  pour  $i \neq j$ . Ces deux exemples seront réutilisés dans la suite. En fait on montre qu'il n'y a essentiellement pas d'autre suite violant les hypothèses de Palais-Smale. En effet:

**PROPOSITION 3.3.** *Soit  $q_j^k(t); j \in \{1, 2, 3\}, k \in \mathbf{N}$  une suite telle que  $D\Phi(q^k) \rightarrow 0$  et  $\Phi(q^k)$  reste bornée. Alors après extraction d'une sous-suite, l'un des trois cas suivants est vérifié:*

1. *Il existe une suite de  $v_j^k$  constantes de  $\mathbf{R}^l$  telles que l'on ait  $q_j^k - v_j^k \rightarrow 0$  et alors  $\Phi(q^k) \rightarrow 0$*
2. *Il existe un indice  $i \in \{1, 2, 3\}$  une suite  $v^k \in \mathbf{R}^l$  telle que  $|\tilde{q}_i^k - v^k| \rightarrow \infty$  et si  $\{j, r\} = \{1, 2, 3\} - \{i\}$ ,  $q_j^k - v^k \rightarrow w_j$ ,  $q_r^k - v^k \rightarrow w_r$  où  $w_1, w_2$  sont solution du problème des deux corps associé.*
3. *Il existe une suite  $v^k \in \mathbf{R}^l$  telle que pour tout  $i$ ,  $q_i^k - v^k \rightarrow w_i$  et  $w = (w_1, w_2, w_3)$  est une solution du problème initial.*

Notons que le troisième cas est une simple conséquence de l'existence d'un groupe de symétries non-compact  $\mathbf{R}^l$ , opérant par translation. Les cas 1 et 2 se généralisent pour un nombre supérieur de corps de la façon suivante. Une suite violant Palais-Smale s'obtient en considérant  $p$  problèmes indépendants à  $N_1, \dots, N_p$  corps où  $N_1 + \dots + N_p = N$  et en éloignant des solutions périodiques de chaque problème, afin que leurs distances mutuelles tendent vers l'infini. Le cas

1 correspond à la séparation du problème des trois corps en trois problèmes à un corps, et le cas 2 à sa décomposition en un problème à un corps et un problème à deux corps.

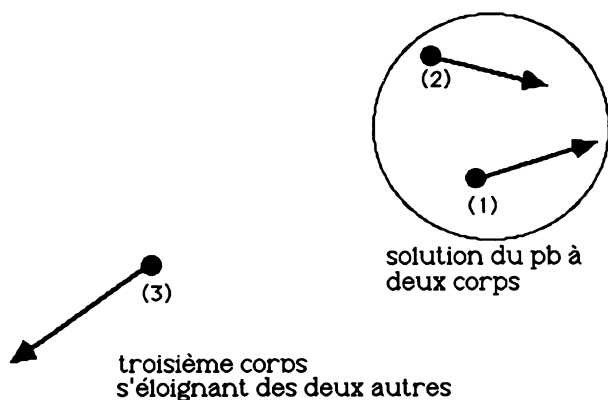


Figure 4

Commençons par étudier les niveaux de  $\Phi$  proches de 0 (qui est l'infimum de  $\Phi$ ). Dans ce cas seuls des points critiques à l'infini apparaissent. Leur contribution est décrite par la

**PROPOSITION 3.4.** *Le type d'homotopie de  $\Phi^\epsilon$  est celui de  $\mathcal{V}_\epsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbf{R}^1)^3 \mid -V(x_1, x_2, x_3) \leq -\epsilon\}$  pour  $\epsilon$  assez petit.*

Pour cela, on pose  $q_\lambda = \lambda[q] + \exp(1 + (\lambda - 2)^{-1})(q - [q])$ . L'application  $q_2 = 2[q]$ ,  $\lambda \rightarrow \Phi(q_\lambda)$  a une dérivée négative. On vérifie aisément que  $\lambda \rightarrow q_\lambda$  réalise une rétraction par déformation de  $\Phi^\epsilon$  sur un ensemble de constantes ayant le type d'homotopie de  $\mathcal{V}_\epsilon$  (grâce à  $(V_5)$ ).

Le principe de la démonstration du théorème 1 est le suivant. On vient de voir que  $\Phi^\epsilon$  a le type d'homotopie d'un ensemble de dimension finie. En particulier son homologie s'annule en dimension assez grande. Convenons de dire qu'un ensemble a une homologie "bornée" si  $\dim H_k(X)$  reste borné lorsque  $k$  tend vers l'infini. On montre alors que la contribution des points critiques à l'infini crée seulement une homologie bornée. Or les résultats de Sullivan et Vigué-Poirrier sur l'homologie de l'espace des lacets montrent que l'homologie de  $\Lambda F_3$  n'est pas bornée. Il doit donc exister d'autres points critiques. On va maintenant énoncer ce que Bahri et

Rabinowitz appellent un lemme de Morse à l'infini. Il s'agit de comprendre le flot de  $\nabla\Phi$  près de l'infini pour, en utilisant la terminologie de la section 2, pouvoir calculer l'indice de Conley des points critiques à l'infini.

On supposera d'abord être dans le cas 2 et que  $|q_1^k - q_2^k|$  reste borné alors que  $\dot{q}_3^k$  tend vers 0. En d'autres termes,  $(q_1^k, q_2^k)$  tend, modulo une translation vers une solution du problème des deux corps, alors que  $q_3^k$  s'éloigne de plus en plus de  $q_1^k, q_2^k$ . Il n'est pas difficile de voir que  $v_k = [\frac{q_1^k + q_2^k}{2}]$ . On effectue alors le changement de variables  $(q_1, q_2, q_3) \Rightarrow (q_1, q_2, Q_3)$  où

$$Q_3 = [\frac{q_1 + q_2}{2}] + \frac{1}{\lambda}(q_3 - [q_3]) + \lambda([q_3 - \frac{q_1 + q_2}{2}])$$

où  $\lambda = \lambda(q)$  est l'unique  $\lambda$  tel que

$$\Phi(q) = \Phi_{1,2}(q_1, q_2) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{Q}_3|^2 + \frac{1}{1 + |[Q_3 - \frac{q_1 + q_2}{2}]|^2}$$

et  $\Phi_{1,2}$  la fonctionnelle d'action du problème à deux corps associé. Ce changement de variable est bien défini dans le domaine où

$$|q_1 - v|_{L^\infty} + |q_2 - v|_{L^\infty} \leq C$$

pour un  $v \in \mathbf{R}^l$  et

$$\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{q}_3|^2 + \frac{1}{1 + |[q_3 - \frac{q_1 + q_2}{2}]|^2} \leq \alpha(C).$$

On voit alors que dans les coordonnées  $(q_1, q_2, Q_3)$  la fonctionnelle  $I$  se découple en deux termes, dont l'un est  $\Phi_{1,2}$  et l'autre tend vers son minimum lorsque  $Q_3$  "tend vers une constante infinie". On peut alors utiliser la suite exacte de la section 1 pour estimer la contribution des points critiques à l'infini à l'homologie de  $\Phi^M$ . Ce sera au plus  $\dim_k \Phi^\epsilon + 3 \dim H_k(\Lambda F_2) + 3 \dim H_{k-l+1}(\Lambda F_2)$  (le facteur 3 vient des trois valeurs possibles de  $i$  dans 3.3 (2), et on a deux termes  $\dim H_k(\Lambda F_2) + \dim H_{k-l+1}(\Lambda F_2) = \dim H_k(\Lambda F_2 \times S^{l-1})$  car les "constantes à l'infini" sont paramétrées par le complémentaire d'une boule, qui a le type d'homotopie de la sphère de  $\mathbf{R}^l$ ). Mais  $\dim H_k(\Lambda F_3)$  croît exponentiellement, d'où une contradiction. Si on admet qu'un point critique isolé ne peut contribuer une homologie non bornée, on voit plus précisément qu'un nombre fini de points critiques de  $\Phi$  ne suffiront pas à combler l'écart.

#### 4. AUTRES RÉSULTATS, REMARQUES SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES

Tout d'abord, disons que la méthode exposée ci-dessus permet en fait de montrer qu'il y a une suite non bornée de valeurs critiques de  $\Phi$ , dont l'indice de Morse est aussi non borné. D'autre part, on peut aussi étudier le problème à énergie fixée, c'est-à-dire que l'on se donne *a priori* la valeur de  $1/2|\dot{q}|^2 + V(q)$  cette quantité restant automatiquement constante sur une solution de  $(E)$ . Les résultats obtenus dans le cas de potentiels homogènes sont analogues au cas à période fixée (cf [B-DO] et [A-CZ 5]). Le cas d'un potentiel quelconque reste ouvert (voir cependant [M-T 2]). Cependant on peut légitimement se demander si l'infinité de solutions trouvées n'est pas simplement obtenue à partir d'une solution "elliptique non dégénérée" par application du théorème de Birkhoff-Lewis (voir [Kl]). En utilisant le fait que (contrairement à une idée répandue) la démonstration du théorème de Birkhoff-Lewis est variationnelle, A. Bahri démontre dans un autre article ([Ba 2]) que la contribution variationnelle de ces orbites ne peut suffire, ce qui écarte le cas évoqué.

Ensuite on peut étudier les cas d'un potentiel newtonien. La méthode consiste à approcher  $1/|x|$  par  $1/|x| + \epsilon(x)/|x|^2$  (avec  $\epsilon(x)$  à support compact et  $C^1$  petite) se ramenant ainsi au cas de "strong force". La difficulté est alors bien sûr d'étudier la limite des solutions  $q_\epsilon$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$  et aussi d'avoir une définition satisfaisante de solution singulière. Ce n'est pas tout à fait le cas aujourd'hui, cependant il est clair qu'une telle solution

(i) en dehors des singularités de  $q$  qui forment un ensemble  $S$  de mesure nulle  $q$  est  $C^2$

(ii)  $-\int_0^T V(q(t))dt$  est finie

(iii) la conservation de l'énergie doit être satisfaite sur toute la trajectoire, c'est-à-dire que  $|\dot{q}|^2 + V(q)$  est constante (et pas seulement constante entre deux collisions).

Les solutions trouvées ci-dessus vérifient bien les conditions (i) à (iii), mais il n'est pas tout à fait clair qu'une telle notion de solution généralisée soit "réaliste" (en particulier aucune condition autre que (iii) ne lie ce qui se passe avant et après une collision, on peut par exemple rebrousser chemin). Une fois ce résultat obtenu, on espère trouver de telles orbites avec un nombre borné (éventuellement par 0!)

de collisions. Les premiers résultats faisaient appel à une symétrie du potentiel (par exemple on suppose  $V(-x) = V(x)$ ) pour formuler le problème autrement (p.ex. au lieu de chercher les solutions  $T$ -périodiques de  $\ddot{q} + \nabla V(q) = 0$ , on cherche les solutions anti  $T/2$ -périodiques, i.e.  $q(t+T/2) = -q(t)$ ). La formulation variationnelle de ce problème vérifie plus souvent la condition de Palais-Smale, en particulier, on voit que les suites que nous avons décrites section 3 ne peuvent vérifier cette condition d'antisymétrie même si  $V$  est symétrique. Dans ce cas on trouve des solutions en résolvant un simple problème de minimisation: celui de  $\Phi$  sur l'espace des  $q$  antisymétriques. Nous référons à [C-Z 1], [S-T] et [DA] pour plus de détails et des résultats précis.

Dans le cas général, il est possible de borner le nombre de collisions en fonction de l'indice de Morse de la solution, qui est la dimension de la somme des espaces propres associés à une valeur propre strictement négative de

$$\Phi''(x) = \int_0^1 |\dot{q}|^2 - V''(x)(q, q)$$

Dans le cas où  $V$  a une unique singularité en 0 du type  $1/|x|$  pour de telles orbites, Tanaka ([Ta 2]) a démontré l'estimation suivante:

**PROPOSITION.** *Soit  $\nu$  le nombre de collisions de la solution  $x$ , alors l'indice de Morse de  $\Phi$  en  $x$  est minoré par  $(N - 2)\nu i(\alpha)$ , où  $i(\alpha)$  est un entier tel que  $i(\alpha) = 1$  pour  $\alpha$  dans  $]0, 1]$ , et  $i(\alpha) \geq 2$  pour  $\alpha > 1$ .*

D'autre part, il est possible de montrer qu'un point critique contribuant à l'homologie  $k$ -dimensionnelle de la variété ambiante a nécessairement pour indice  $k$  avec une erreur bornée par sa nullité (définie comme  $\ker \Phi''$ ). On peut donc majorer l'indice de Morse d'un point critique, si on sait par quelle classe d'homologie il a été obtenu (cf. [B-L 1] [V]).

La méthode de démonstration de la proposition consiste à étudier le comportement de  $x$  au voisinage d'une singularité, et d'en déduire sa contribution à l'indice de Morse de  $\Phi$ . Le cas de problème à trois corps est plus difficile, car le lieu singulier de  $V$  n'est pas réduit à un point: c'est une sous variété singulière de  $(\mathbf{R}^I)^3$ , et en général on ne connaît pas le comportement d'une solution lorsque l'on approche d'une singularité, sauf si l'on s'approche d'une collision triple. Ce cas propre au problème des trois corps a été étudié par Sundman (cf. [Su]), qui a montré en

particulier que lors d'une triple collision le mouvement est asymptotiquement contenu dans un plan. Des résultats de Dell'Antonio ([DA]) montrent qu'une telle solution a un indice de Morse suffisamment élevé pour pouvoir garantir l'existence de solutions sans triple collision. Le cas des doubles collisions reste ouvert, bien que l'on sache trouver des solutions telles que le nombre de telles collisions soit borné.

Enfin des travaux récents de Mlle Riahi d'une part ([R]), et de Majer-Terracini d'autre part ([M-T 3]), étendent les résultats de la section 3 au cas du problème à  $N$  corps  $N \geq 3$ . Il semble que la méthode de [R] soit très proche de celle exposée, celle de [M-T] étant légèrement différente. En particulier dans [M-T] on est amené à comparer les topologies des applications naturelles  $\Lambda F_N \rightarrow \Lambda F_N - 1$  pour montrer que la topologie de  $\Lambda F_N$  ne peut être épuisée par un nombre fini d'espaces ayant la topologie de  $\Lambda F_{N-1}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [A-CZ 1] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Critical points with lack of compactness and applications to singular dynamical systems*, Annali Mat. Pura Appl. **149** (1987), 237-259.
- [A-CZ 2] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Periodic solutions of singular dynamical systems*, in "Periodic solutions of Hamiltonian systems and related topics," P.H Rabinowitz et al eds, Nato ASI Series, Reidel, 1987, pp. 1-10.
- [A-CZ 3] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Noncollision orbits for a class of Keplerian like potentials*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **5** (1988), 287-295.
- [A-CZ 4] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Perturbation of hamiltonian systems with Keplerian potentials*, Math. Zeitschrift **201** (1989), 227-242.
- [A-CZ 5] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Closed orbits of fixed energy for a class of n-body problems*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **9** (1992), 187-200.
- [A-CZ 6] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., "Periodic solutions of singular Lagrangian systems," Birkhäuser, 1993.
- [B] Bahri, A., *Variational contribution of periodic orbits obtained by the Birkhoff-Lewis method*, preprint, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N.J. 08903, U.S.A..
- [B-C 1] Bahri, A., Coron, J-M., *Une théorie des points critiques à l'infini pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **300** (1985), 513-516.



- [B-C 2] Bahri, A., Coron, J.-M., *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure and Appl. Math. **41** (1988), 253–294.
- [B-C 3] Bahri, A., Coron, J.-M., *The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere.*—, J. Funct. Anal. **95** (1991), 106–172.
- [B-L 1] Bahri, A., Lions, P.L., *Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications*, C.R. Acad.Sci., Paris **301** (1985), p. 145–147.
- [B-L 2] Bahri, A. and Lions, P.L., *Morse index of some min-max critical points I. Applications to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 1027–1037.
- [B-D'O] Bahri, A. et D'Onofrio, B., *Exponential growth of the number of periodic orbits for three body type problems*, Maghreb Math. Rev. **1** (1992), 1–14.
- [B-R 1] Bahri, A. et Rabinowitz, P., *A minmax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials*, J. Functional Anal. **8** (1989), 561–649.
- [B-R 2] Bahri, A. et Rabinowitz, P., *Periodic solutions of Hamiltonian systems of three-body type*, Ann. Inst. Poincaré Analyse Non Linéaire **82** (1991), 412–428.
- [B-CZ] Bessi, U. et Coti-Zelati, V., *Symmetries and non-collision closed orbits for planar N-Body type problems*, Non Linear Anal. TMA **16** (1991), 587–598.
- [Bi] Birkhoff, G., “Dynamical systems,” Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1924.
- [Br] Brézis, H., *Points critiques dans les problèmes variationnels sans compacité*, Séminaire Bourbaki, Exposé 698, Astérisque **161-162** (1988), 239–256.
- [Co] Conley, C.C., “Isolated Invariant Sets and their Morse Index,” C.B.M.S. Reg. Conf. Series in Math. n° 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [CZ 1] Coti-Zelati, V., *Periodic solutions for N-body type problems*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **7** (1990), 477–492.
- [CZ 2] Coti-Zelati, V., *A class of periodic solutions of the N-body problem*, Cel. Mech. and Dyn. Astr. **46** (1989), 177–186.
- [DA] Dell’Antonio, G., *Finding non-collision periodic solutions to a perturbed N-body Kepler problem*, preprint Dip. di Matematica Univ. Roma “La Sapienza”.
- [F] Floer, A., *Witten’s complex and infinite-dimensional Morse theory*, J. of Differential Geom. **30** (1989), 207–221..
- [G] Gordon, W., *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc. **204** (1975), 113–135.
- [Gr] Greco, C., *Periodic solutions of a class of singular Hamiltonian systems*, Nonlinear Analysis **12** (1988), 259–269.
- [K] Klingenberg, W., “Lectures on Closed Geodesics,” Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 230, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg- NewYork, 1978.
- [L] Lions, P.L., *The concentration compactness principle in the calculus of Variations (Part 1 and 2)*, Revista Matematica Iberoamericana **1** (1985), 45 and 145.
- [M-T 1] Majer, P. et Teracini, S., *Periodic solutions to some n-body type problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. (to appear).
- [M-T 2] Majer, P. et Teracini, S., *Periodic solutions to some n-body type problems: the fixed energy case*, Duke Math. Jour. (to appear).

- [M-T 3] Majer, P. et Teracini, S., *Multiple periodic solutions to some N-body type problems via a collision index*, preprint, Dip. di Matematica del Politecnico di Milano, Pzza L. da Vinci 32, Milano.
- [R] Riahi, H., *Periodic orbits of n-body type problems*, PhD dissertation, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N.J. 08903, U.S.A..
- [S-T] Serra, E. et Teracini, S., *Collisionless periodic solutions to some three-body problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **120** (1992), 305–325.
- [Si-M] Siegel, C.,L. et Moser, J., “Lectures on celestial mechanics,” Springer-Verlag, 1971.
- [Su] Sundman, Acta Soc. Sci. Fenn. **35** (1909).
- [Su-VP] Sullivan, D., Vigué-Poirrier, M., *The homology theory of the closed geodesic problems*, Jour. of Differential Geometry **11** (1976), 633–644.
- [Ta 1] Tanaka, K., *Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications*, Comm. Partial Diff. Eq. **14** (1989), 99–128.
- [Ta 2] Tanaka, K., *Non-collision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force*, preprint.
- [V ] Viterbo, C., *Indice de Morse des points critiques obtenus par minimax*, Annales de l’Institut Henri Poincaré: Analyse non linéaire **5** (1988), 221–225.

Claude VITERBO

URA 1169 du CNRS

Département de Mathématiques, Bât. 425

Université de Paris-Sud

F-91405 ORSAY CEDEX

et

D.M.I.

École Normale Supérieure

45 rue d’Ulm

F-75230 PARIS CEDEX 05