

Astérisque

JEAN-LOUIS CATHELIN

**Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes
[d'après A.B. Goncharov et d'autres]**

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 772, p. 311-341

http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__311_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET POLYLOGARITHMES

[d'après A.B. Goncharov et d'autres]

par Jean-Louis CATHELINEAU

1 INTRODUCTION

Ce rapport, qui prolonge l'exposé 762 de J. Oesterlé au séminaire Bourbaki de novembre 1992 sur les polylogarithmes, a pour but d'introduire au travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier. Avant de rappeler cette conjecture précisons quelques notations; si F est un corps de nombres, on note r_1 (resp. $2r_2$) le nombre de plongements réels (resp. non réels) de F dans $\mathbf{C}$; d est le degré de F et Δ_F son discriminant; on pose pour $n \geq 2$, $d_n = r_1 + r_2$, si n est impair et $d_n = r_2$, si n est pair. On a la

Conjecture de Zagier [59,60] *Soit F un corps de nombres et ζ_F la fonction zêta de F , pour $n \geq 2$*

$$(1) \quad \zeta_F(n) = q_n R_n \frac{\pi^{n(d-d_n)}}{|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}},$$

où q_n est un rationnel non nul et R_n est une somme de produits de valeurs de la fonction n -logarithme de Bloch-Wigner généralisée prises en des éléments de F et de leurs conjugués.

Théorème 1 *La conjecture de Zagier est vraie pour n égal à 2 et 3.*

Zagier a prouvé le cas $n = 2$ à partir de calculs de volumes de variétés hyperboliques de dimension trois [59], mais cette approche ne semble pas se prolonger à $n \geq 3$. Un autre point de vue, dont l'origine remonte à un travail de Bloch [6], consiste à ramener la conjecture à un théorème profond de A. Borel. Ce dernier a construit pour tout corps de nombres une application, le *régulateur de Borel*

$$r_{\text{Bor}} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbf{R}^{d_n},$$

où $K_{2n-1}(F)$ est un groupe de K-théorie algébrique du corps F . Le résultat suivant peut être vu comme une généralisation à $n \geq 2$ d'un classique théorème de Dirichlet

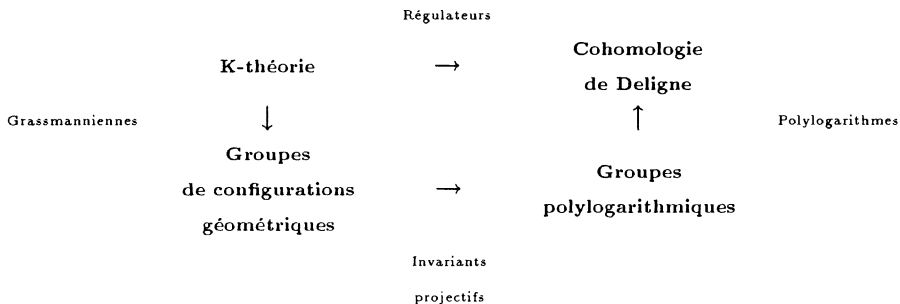
Théorème 2 (Borel [9]) *Pour $n \geq 2$ le régulateur de Borel induit un isomorphisme de $K_{2n-1}(F)/\text{tors}$ sur un réseau de $\mathbf{R}^{d_n}$ dont le covolume est égal, à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près, à*

$$\frac{\zeta_F(n)|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{n(d-d_n)}}.$$

Le problème fondamental est alors d'exprimer le régulateur de Borel à l'aide des polylogarithmes. Pour $n = 2$, on peut retrouver ainsi la conjecture de Zagier, comme conséquence de travaux de Bloch, Suslin et Dupont [6,53, 16,30]. Le travail de Goncharov concerne le cas $n = 3$. Pour $n = 2$, le dilogarithme apparaît assez naturellement dans des calculs de volumes, mais l'intervention du trilogarithme dans le cas $n = 3$ reste encore assez mystérieuse et la méthode de Goncharov ne se généralise pas immédiatement à $n \geq 4$.

L'intérêt du travail de Goncharov ne réside pas seulement dans le résultat obtenu sur la conjecture de Zagier, mais aussi dans les méthodes et les outils utilisés. Citons le problème des identités fonctionnelles pour les n -logarithmes, des questions abstraites touchant à l'homologie du groupe linéaire et à la K-théorie algébrique des corps, mais aussi des aspects élémentaires de géométrie projective, réminiscent du troisième problème de Hilbert en géométrie hyperbolique [12,19]. En particulier, un rôle crucial est joué par un invariant des configurations de 6 points du plan projectif introduit par Goncharov, le trirapport, qui généralise le classique birapport.

On peut schématiser l'approche de Goncharov par le tableau suivant qui renvoie à divers points abordés dans ces pages



A part une courte annonce au B.A.M.S. parue en 1991, les travaux de Goncharov n'existent encore qu'à l'état de preprints, principalement deux longs articles [26,27] ayant un caractère prospectif assez marqué. Je me suis surtout inspiré dans ce qui suit du dernier qui doit paraître aux proceedings de la conférence de Seattle de 1991 sur les motifs. Je n'ai pas abordé les aspects motiviques de la conjecture de Zagier [2,3,15]; cela mériterait un autre exposé.

J'ai aussi évoqué l'intéressant travail de Yang [58] qui prouve une variante de la conjecture de Zagier pour $n = 3$, où le trilogarithme de Bloch-Wigner est remplacé par celui de Hain-MacPherson. Il est probable qu'en poussant un peu les résultats de Yang le trirapport apparaisse et que l'on retrouve exactement la conjecture de Zagier sous la forme énoncée ci-dessus.

Notations. F sera toujours un corps infini. Si A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, on pose $A(n) = (2i\pi)^n A$. Si M est un $\mathbf{Z}$ -module, on note $M_{\mathbf{Q}}$ le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

2 K-THÉORIE DES CORPS

2.1 Homologie du groupe linéaire général et K-théorie

Rappelons que le groupe linéaire général $GL(F)$ d'un corps F est la limite inductive du système

$$GL(m, F) \longrightarrow GL(m+1, F)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ l'homologie du groupe discret $GL(F)$ à coefficients dans le $GL(F)$ -module trivial $\mathbf{Q}$; c'est aussi l'homologie singulière de l'espace classifiant $BGL(F)$ du groupe $GL(F)$. Il est classique [39] que $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ a une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative, dont le produit provient de l'opération de somme directe sur les matrices et le co-produit de la diagonale $BGL(F) \rightarrow BGL(F) \times BGL(F)$, et que comme telle c'est une algèbre graduée commutative libre engendrée par l'espace de ses éléments primitifs $\text{Prim } H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. On définit alors les groupes de K-théorie rationnelle de F par

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} := \text{Prim } H_n(GL(F), \mathbf{Q}), \quad n \geq 1.$$

Par un théorème de Milnor-Moore [42], on sait que ces groupes coïncident rationnellement avec les groupes de K-théorie algébrique $K_n(F)$ définis par

Quillen, i.e. $K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n(F) \otimes \mathbf{Q}$, où $K_n(F) := \pi_n(BGL(F)^+)$ est le n -ième groupe d'homotopie de l'espace $BGL(F)^+$ obtenu à partir de $BGL(F)$. par la construction $+$ de Quillen [39].

2.2 Filtrations sur la K-théorie

On dispose sur chaque $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de deux filtrations.

La γ -filtration provient d'opérations du type d'Adams ψ^k [33,37,49], induites par les puissances extérieures des matrices sur $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. C'est une filtration décroissante

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{(1)}(F) \supset K_n^{(2)}(F) \supset \dots \supset K_n^{(i)}(F) \supset \dots$$

Par un théorème de Soulé [49], $K_n^{(n+1)}(F) = 0$. Le gradué associé s'identifie alors canoniquement à la décomposition d'Adams de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{i=0}^n K_n^{(i)}(F),$$

où $K_n^{(i)}(F)$ est le sous-espace propre de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de valeur propre k^i pour l'opération d'Adams ψ^k ($k \geq 2$). On a $K_n^{(1)}(F) = 0$ pour $n \geq 2$ et Beilinson et Soulé [1,49] ont conjecturé que $K_n^{(i)}(F) = 0$ pour $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

La filtration par le rang est la filtration croissante

$$\{0\} = K_n^{[0]}(F) \subset K_n^{[1]}(F) \subset \dots \subset K_n^{[i]}(F) \subset \dots$$

obtenue en posant pour $i \geq 1$

$$K_n^{[i]}(F) = \text{Im}\{H_n(GL(i, F), \mathbf{Q}) \rightarrow H_n(GL(F), \mathbf{Q})\} \cap K_n(F)_{\mathbf{Q}}.$$

Par un théorème de stabilité de Suslin [51], les applications $H_n(GL(N, F), \mathbf{Q}) \rightarrow H_n(GL(F), \mathbf{Q})$ sont des isomorphismes pour $N \geq n$, par suite $K_n^{[n]}(F) = K_n(F)_{\mathbf{Q}}$. On pose

$$K_n^{[i]}(F) = K_n^{[i]}(F) / K_n^{[i-1]}(F).$$

2.3 Conjecture du rang

Suslin a conjecturé que la γ -filtration et la filtration par le rang sont opposées, c'est à dire que pour tout i

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{[i]}(F) \bigoplus K_n^{(i+1)}(F),$$

ou encore que pour tout i la composée

$$K_n^{[i]}(F) \longrightarrow K_n(F) \longrightarrow K_n^{(i)}(F),$$

où la deuxième flèche est la projection dans la décomposition d'Adams, se factorise en un isomorphisme $K_n^{[i]}(F) \longrightarrow K_n^{(i)}(F)$. Cette conjecture est démontrée dans les cas suivants

- $n \leq 3$, F corps infini (Suslin [53], voir aussi Gerdes [24]).
- n quelconque, F corps de nombres distinct de $\mathbf{Q}$ (Yang [57]).
- $n = 5$, $F = \mathbf{Q}$ (Goncharov [27]).

D'autre part, c'est une conséquence de résultats de Suslin et Soulé [51,49] que l'on a des isomorphismes

$$K_n^{[n]}(F) \xrightarrow{\cong} K_n^{(n)}(F) \xrightarrow{\cong} K_n^M(F)_{\mathbf{Q}},$$

où $K_*^M(F)$ désigne la K-théorie de Milnor. Rappelons que $K_*^M(F)$ est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbf{Z}$ du groupe multiplicatif $F^\times$ de F par l'idéal bilatère engendré par les $a \otimes (1 - a)$, où $a \neq 0, 1$ [41].

2.4 Point de vue cohomologique sur la K-théorie des corps

On peut disposer les composantes de la décomposition d'Adams de la K-théorie de F sur un tableau où $K_{2j-i}^{(j)}(F)$ est à la place (i, j)

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & K_{2n-1}^{(n)}(F) & & K_{2n-2}^{(n)}(F) & \cdots & \cdots & K_n^{(n)}(F) \\ & & \vdots & & \vdots & & & \\ K_5^{(3)}(F) & & K_4^{(3)}(F) & & K_3^{(3)}(F) & & & \\ K_3^{(2)}(F) & & K_2^{(2)}(F) & & & & & \\ K_1^{(1)}(F) & & & & & & & \end{array}$$

On a omis d'écrire les composantes conjecturées nulles par Beilinson et Soulé.

D'après un cas particulier d'une conjecture de Beilinson [1], chaque ligne du tableau (2) devrait apparaître comme la cohomologie d'un complexe de $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels $\mathcal{C}^\bullet(F, n)$, i.e. $K_{2n-\bullet}^{(n)}(F) = H^*(\mathcal{C}^\bullet(F, n))$. Plusieurs candidats ont été proposés pour ces complexes, en particulier ceux de Bloch liés aux cycles d'ordre supérieur [8]. Dans le paragraphe suivant, nous donnons en (3) ceux introduits par Goncharov en liaison avec la conjecture de Zagier et pour lesquels on n'a de résultats que pour $n \leq 3$.

Rappelons que la fonction n -logarithme Li_n est la fonction "multiforme" associée à la série entière $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^n}$. Plusieurs observations suggèrent que dans le tableau (2), Li_n est naturellement apparentée à la diagonale $K_*^{(*-n+1)}(F)$.

En particulier le logarithme est lié à la K-théorie de Milnor : par exemple on le constate sur les symboles de Tate [54] qui sont donnés par des différentielles logarithmiques ainsi que sur les symboles de Dennis et Stein [40]. Bloch [6] a introduit le dilogarithme dans l'étude du groupe $K_3^{(2)}(F)$ et Beilinson [2] a construit des éléments dans le groupe $K_{2n+1}(F)$ d'un corps cyclotomique dont la non-trivialité est testée par Li_n (voir aussi [3]).

Théorème 2.4.1 (Beilinson) *Pour un corps de nombres F , $K_{2j-i}^{(j)}(F) = 0$ si $i \neq 1$, d'où $K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}} = K_{2n-1}^{(n)}(F)$.*

Pour la preuve, voir le paragraphe 8.2. D'après ce résultat la première colonne est tout ce qui reste du tableau (2) lorsque F est un corps de nombres.

3 GROUPES POLYLOGARITHMIQUES

On se propose d'introduire pour tout corps infini F , des groupes $\mathcal{B}_n(F)$ dont les relations de définition sont liées, lorsque $F = \mathbf{C}$, aux identités fonctionnelles vérifiées par les polylogarithmes.

3.1 Définition des groupes $\mathcal{B}_n(F)$

La définition de $\mathcal{B}_n(F)$ ($n \geq 1$) se fait par récurrence, simultanément avec celle de sous-groupes $\mathcal{A}_n(F)$ ($n \geq 2$) et $\mathcal{R}_n(F)$ de $\mathbf{Z}[F^\times]$ qui sont très voisins de groupes considérés dans ([44] 5.2) pour les corps de nombres.

Si $\mathcal{R}_n(F)$ est défini, on pose $\mathcal{B}_n(F) = \mathbf{Z}[F^\times]/\mathcal{R}_n(F)$; de plus on note δ_2 le morphisme $\mathbf{Z}[F^\times] \rightarrow (\wedge^2 F^\times), [x] \mapsto (1-x) \wedge x$, et pour $n \geq 2$, δ_n le morphisme $\mathbf{Z}[F^\times] \rightarrow (\mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^\times), [x] \mapsto \{x\}_{n-1} \otimes x$, où $\{x\}_n$ est la classe de x dans $\mathcal{B}_n(F)$.

Par définition, $\mathcal{R}_1(F)$ est engendré par les $[xy] - [x] - [y]$, d'où $\mathcal{B}_1(F) \cong F^\times$. Pour $n \geq 2$, $\mathcal{A}_n(F) := \text{Ker} \delta_n$. On définit $\mathcal{R}_n(F)$ comme le sous-groupe de $\mathbf{Z}[F^\times]$ engendré par les éléments de la forme $\sum n_i ([f_i(0)] - [f_i(1)])$, où les f_i sont des fractions rationnelles en l'indéterminée X telles que $\sum n_i [f_i] \in \mathcal{A}_n(F(X))$, avec la convention $[0] = [\infty] = 0$.

On a $\delta_n(\mathcal{R}_n(F)) = 0$ [26], ce qui permet d'obtenir un complexe, où $\mathcal{B}_n(F)$ est placé en degré 1

$$(3) \quad \mathcal{B}_n(F) \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^\times \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes \wedge^2 F^\times \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_2(F) \otimes \wedge^{n-2} F^\times \xrightarrow{\delta} \wedge^n F^\times,$$

et où : $\delta(\{x\}_{n-i} \otimes y_1 \wedge \dots \wedge y_i) = \{x\}_{n-i-1} \otimes x \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_i$, $\delta(\{x\}_2 \otimes y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-2}) = (1-x) \wedge x \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-2}$.

Le complexe (3) a été introduit par Goncharov : dans la suite, on le note $\Gamma^\bullet(F, n)$; on a $H^n(\Gamma^\bullet(F, n)_{\mathbf{Q}}) \cong K_n^M(F)_{\mathbf{Q}}$. Goncharov conjecture que $H^*(\Gamma^\bullet(F, n)_{\mathbf{Q}}) \cong K_{2n-*}^{(n)}(F)$. Le complexe $\Gamma^\bullet(F, 1)$ se réduit à $F^\times$. On a $H^1(\Gamma^\bullet(F, 2)_{\mathbf{Q}}) \cong K_3^{(2)}(F) \cong K_3^{[2]}(F)$; c'est une conséquence de résultats de Suslin [53] (voir aussi Dupont et Sah [19]). Goncharov a construit, pour tout corps infini F et $i = 1, 2$, des morphismes $K_{6-i}^{[3]}(F) \rightarrow H^i(\Gamma^\bullet(F, 3)_{\mathbf{Q}})$ qu'il conjecture être des isomorphismes.

3.2 Rapport avec les polylogarithmes

Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{D}_n$ la fonction de Bloch-Wigner généralisée $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}(n-1)$. On a $\mathcal{D}_1 = \log | \cdot |$,

$$\mathcal{D}_2(z) = i(\operatorname{Im}(Li_2(z) + \log |z| \log(1-z))),$$

$$\mathcal{D}_3(z) = \operatorname{Re}(Li_3(z) - \log |z| Li_2(z) - \frac{1}{3} \log^2 |z| \log(1-z)),$$

où les valeurs ne dépendent pas du chemin de $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ joignant $\frac{1}{2}$ à z . Pour $n > 3$, $\mathcal{D}_n$ est la fonction notée P_n dans ([44], 3.1).

Théorème 3.2.1 ([27]) *Le morphisme de groupes abéliens*

$$\mathbf{Z}[\mathbf{C}^\times] \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$$

$$[z] \mapsto \mathcal{D}_n(z)$$

est nul sur $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$, d'où un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_n : \mathcal{B}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$.

Ce résultat est une variante du théorème 2 de [44].

Pour un corps F quelconque, on a dans $\mathcal{B}_2(F)$ les relations $2\{1\} = 0$, $\{x\} + \{1-x\} = 0$, $2(\{x\} + (-1)\{x^{-1}\}) = 0$ et

$$\{x\} - \{y\} + \{y/x\} - \{(1-y)/(1-x)\} + \{(1-y^{-1})/(1-x^{-1})\} = 0 ;$$

on appelle cette dernière relation l'*identité du dilogarithme*.

3.3 Les groupes $\mathbf{B}_n(F)$

On note dans la suite $\mathbf{B}_n(F)$ le groupe $H^1(\Gamma^\bullet(F, n)) = \mathcal{A}_n(F)/\mathcal{R}_n(F)$. Pour $n = 2$, il est très voisin de celui appelé groupe de Bloch dans Suslin [52], mais cette terminologie a été galvaudée dans la littérature et prête à confusion. On devrait avoir pour un corps de nombres $\mathbf{B}_n(F)_{\mathbf{Q}} \cong K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}}$. Noter

que l'élément $\{1\} \in \mathbf{B}_n(\mathbf{C})_{\mathbf{Q}}$ est nul pour n pair, mais ne l'est pas pour n impair, car dans ce cas $\mathcal{D}_n(1) = \zeta(n) \neq 0$ [44].

On démontre par récurrence en utilisant la définition de $\mathcal{B}_n(F)$ que, pour $n \geq 2$, les morphismes naturels $\mathbf{B}_n(F) \rightarrow \mathbf{B}_n(F(X))$ sont des isomorphismes. D'autre part Bloch a observé que les images par $\tilde{\mathcal{D}}_2$ des groupes $\mathbf{B}_2(\mathbf{C})$ et $\mathbf{B}_2(\overline{\mathbf{Q}})$ sont les mêmes, où $\overline{\mathbf{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$. Ceci suggère l'importante conjecture : Si F_0 désigne la clôture algébrique dans F du corps premier de F , on a : $\mathbf{B}_n(F_0) \xrightarrow{\cong} \mathbf{B}_n(F)$.

On peut préciser le facteur R_n de la formule (1) dans la conjecture de Zagier. Il devrait être de la forme suivante : $R_n = \det(\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\sigma}_i(a_j)))_{1 \leq i, j \leq d_n}$ où $\tilde{\sigma}_i : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_n(\mathbf{C})$ est le morphisme associé au plongement σ_i de F dans $\mathbf{C}$, les plongements σ_i sont numérotés de telle sorte que $\overline{\sigma}_{r_1+r_2+l} = \sigma_l$ pour $l = 1, \dots, r_2$ et les a_j pour $j = 1, \dots, d_n$ sont des éléments de $\mathbf{B}_n(F)$ dont les images dans $\mathbf{B}_n(F)_{\mathbf{Q}} \cong K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}}$ forment une $\mathbf{Q}$ -base.

4 GROUPES DE CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

4.1 Les groupes $Q_n(F)$

Pour F un corps, on pose $Q_1(F) = F^\times$ et pour $n \geq 2$, on considère le groupe $Q_n(F)$ engendré par les symboles $\langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle$, où les a_i sont en position générale dans l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(F)$, soumis aux relations

1. (antisymétrie) Pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$\langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(2n)} \rangle = (-1)^{\epsilon_\sigma} \langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle.$$

2. (invariance) Pour toute transformation projective $g \in PGL(n, F)$,

$$\langle g(a_1), \dots, g(a_{2n}) \rangle = \langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle.$$

3. (découpage) Pour toute famille $(a_i)_{i=1, \dots, 2n+1}$ en position générale,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^i \langle a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{2n+1} \rangle = 0.$$

4.2 Comparaison des groupes $Q_2(F)$ et $\mathcal{B}_2(F)$

Le problème de la comparaison des groupes $Q_n(F)$ et $\mathcal{B}_n(F)$ semble être au coeur de la conjecture de Zagier. Examinons le cas où $n = 2$.

Théorème 4.2.1 *Les groupes $Q_2(F)$ et $\mathcal{B}_2(F)$ sont isomorphes à 2 et 3-torsion près.*

La preuve passe par des groupes intermédiaires. Soit $\mathcal{P}(F)$ le groupe engendré par les symboles $[x]$, $x \in F^\times$, $x \neq 1$ soumis aux relations

1. $[x] + [x^{-1}] = 0$,
2. $[x] + [1 - x] = 0$,
3. $[x] - [y] + [y/x] - [(1 - y)/(1 - x)] + [(1 - y^{-1})/(1 - x^{-1})] = 0$, $x \neq y$.

Notons de plus $\mathcal{P}_2(F)$ le groupe défini de façon analogue, en ne retenant que la relation 3.

Lemme 4.2.2 *On a un isomorphisme*

$$Q_2(F) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$$

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \mapsto [\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)],$$

où $\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)$ est le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Preuve: c'est un exercice sur le birapport. A invariance projective près, cinq points $a_1, \dots, a_5$ de $P^1(F)$ sont équivalents à $\infty, 0, 1, x, y$. Dans la correspondance $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \mapsto [\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)]$, la relation de découpage devient alors la relation du dilogarithme. De plus les relations 1. et 2. sont liées à l'antisymétrie des symboles $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. ■

Lemme 4.2.3 *Le morphisme naturel $\mathcal{P}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \longrightarrow \mathcal{P}(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ est un isomorphisme.*

Preuve : Suslin a montré [53] que l'on a dans $\mathcal{P}_2(F)$ les relations $2([x] + [x^{-1}]) = 0$ et $6([x] + [1 - x]) = 0$. ■

Comme la relation de définition de $\mathcal{P}_2(F)$ est vérifiée dans $\mathcal{B}_2(F)$, on a un morphisme canonique

$$\mathcal{P}_2(F) \rightarrow \mathcal{B}_2(F), [x] \mapsto \{x\}.$$

Lemme 4.2.4 *Le morphisme induit $\lambda : \mathcal{P}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathcal{B}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ est un isomorphisme.*

Preuve : il suffit de voir que λ est injectif. Si $a \in F$, il existe un morphisme $s_a : \mathcal{P}_2(F(X)) \longrightarrow \mathcal{P}_2(F)$, tel que $s_a(f) = [f(a)]$, si $f(a) \neq 0, \infty$ et $s_a(f) = 0$, sinon. D'autre part, si $\mathbf{B}(F) := \text{Ker}\{\mathcal{P}_2(F) \rightarrow (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) / \langle x \otimes y + y \otimes x \rangle, [x] \mapsto x \otimes (1 - x)\}$, le morphisme canonique $i : \mathbf{B}(F) \rightarrow \mathbf{B}(F(X))$ est bijectif d'après Suslin [52]. Il en résulte que $s_a|_{\mathbf{B}(F(X))}$ est l'inverse de i . L'injectivité de λ vient alors de la forme des relations de définition de $\mathbf{B}_2(F)$. ■

Les groupes $Q_2(\mathbb{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ ont été considérés par J. Dupont et C.H. Sah [19] dans l'étude des groupes de polyèdres, à découpages et isométries près, de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ de dimension 3 (troisième problème de Hilbert). Si on prend pour modèle de $\mathcal{H}^3$ le demi-espace de Poincaré $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$, l'horizon de $\mathcal{H}^3$ s'identifie à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et le groupe $Q_2(\mathbb{C})$ s'identifie à un groupe de polyèdres, à découpages et isométries près, engendré par les tétraèdres idéaux, i.e. dont tous les sommets sont à l'horizon de $\mathcal{H}^3$.

4.3 Le groupes des paires de simplexes de $\mathbb{P}^{n-1}(F)$

Dans [4] Beilinson, Goncharov, Schechtman et Varchenko étudient les variantes suivantes des groupes $Q_n(F)$. Disons qu'un simplexe de $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ est la donnée de n points en position générale et que deux simplexes sont admissibles s'ils n'ont pas de face commune.

On définit le groupe $A_{n-1}(F)$ comme le groupe engendré par les symboles $\langle a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \rangle$, où $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ sont deux simplexes admissibles, soumis aux relations

1. (antisymétrie) Pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; b_1, \dots, b_n \rangle &= \langle a_1, \dots, a_n; b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)} \rangle \\ &= (-1)^{\epsilon_\sigma} \langle a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \rangle. \end{aligned}$$

2. (invariance) Pour toute transformation projective $g \in PGL(n, F)$,

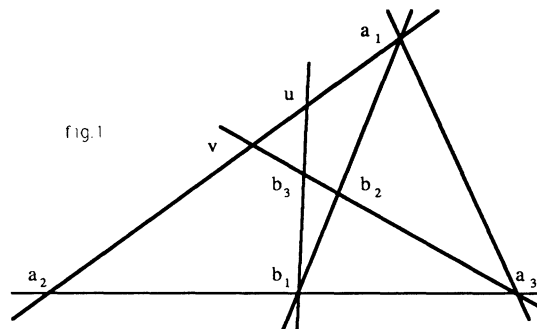
$$\langle g(a_1), \dots, g(a_n); g(b_1), \dots, g(b_n) \rangle = \langle a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \rangle.$$

3. (découpage)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \langle a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_n \rangle &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \langle a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, \hat{b}_i, \dots, b_{n+1} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Dans [4] ces groupes sont reliés aux groupes $Q_n(F)$, à la K-théorie de Milnor et aux polylogarithmes de Aomoto. En particulier, $A_1(F)$ s'identifie à $F^\times$ à l'aide du birapport et il existe un isomorphisme, à 2-torsion près, du groupe $A_2(F)$ des paires de triangles de $\mathbf{P}^2(F)$ avec le groupe $Q_2(F) \oplus S^2 F^\times$, où S^2 est la puissance symétrique.

En fait, le groupe $A_2(F)$ est engendré par les configurations géométriques de la figure 1



Une telle configuration ne dépend que du birapport $\tilde{r}_2(a_1, a_2; u, v) = t$, notons la $\delta(t)$. Lorsque $F = \mathbf{C}$, le dilogarithme de Aomoto de la paire de triangles $\langle a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 \rangle$ est l'intégrale $\int_{\Delta} \omega$, où Δ est le triangle (b_1, b_2, b_3) et ω est la 2-forme

$$\omega = \frac{df_2}{f_2} \wedge \frac{df_3}{f_3} + \frac{df_3}{f_3} \wedge \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2},$$

les f_i étant des équations des côtés du triangle (a_1, a_2, a_3) . Le dilogarithme de Aomoto de $\delta(t)$ est donné par le dilogarithme classique de t . A travers une comultiplication d'origine géométrique $A_2(F) \rightarrow A_2(F) \otimes A_2(F)$ (voir [4] pour plus de détails), la configuration $\delta(t)$ devient l'élément $t \otimes (1 - t)$ de $F^\times \otimes F^\times$: cela amène à une intéressante description géométrique de la K-théorie de Milnor. Pour une autre approche géométrique de la K-théorie de Milnor, voir le paragraphe 6.2.

5 INVARIANTS PROJECTIFS

5.1 Le n-rapport ($n \geq 2$)

Notons $\check{\mathbf{P}}^n(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^n(F)$. Si $(a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^{n-1}(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^{n-1}(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{a}_j) \neq 0$, où $(\vec{})$ désigne un

représentant vectoriel, on pose

$$[a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{a}_1)\vec{\varphi}_2(\vec{a}_2)\dots\vec{\varphi}_n(\vec{a}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{a}_2)\vec{\varphi}_2(\vec{a}_3)\dots\vec{\varphi}_n(\vec{a}_1)}.$$

C'est un invariant projectif tel que

$$[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}] = [a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n],$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12\dots n)$.

Si $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$ sont $2n$ points de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ en position générale, on note φ_i l'élément de $\check{\mathbf{P}}^{n-1}(F)$ correspondant dans la dualité à l'hyperplan $\langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ si $i = 1$, et à $\langle b_1, \dots, \hat{b}_{i-1}, \dots, b_n \rangle$ sinon. Noter que l'on peut prendre $\vec{\varphi}_i(v) = \det(\vec{b}_1, \dots, \hat{b}_{i-1}, \dots, \vec{b}_n, v)$, où $\det$ est le déterminant dans la base canonique. On pose

$$\tilde{r}_n(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = [a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n].$$

Pour $n = 2$, c'est le birapport classique. On appellera $\tilde{r}_n$ le n -rapport.

5.2 Interprétation géométrique du n -rapport

Rappelons qu'une petite catégorie est une catégorie dont les objets forment un ensemble et qu'un groupoïde est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

Pour $n \geq 3$, on considère le groupoïde $\mathcal{G}_n$ défini par générateurs et relations comme suit : les objets de $\mathcal{G}_n$ sont les points de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$; l'ensemble des générateurs est constitué des flèches $f = x \xrightarrow{\alpha} y$, où $x \neq y$ et α est un point de la droite $\langle x, y \rangle$ distinct de x et y ; les relations sont celles du type $h = g \circ f$ où $f = x \xrightarrow{\alpha} y$, $g = y \xrightarrow{\beta} z$ et $h = x \xrightarrow{\gamma} z$ sont comme sur la figure 2, i.e. x, y et z sont en position générale et γ est l'intersection des droites $\langle x, z \rangle$ et $\langle \alpha, \beta \rangle$.

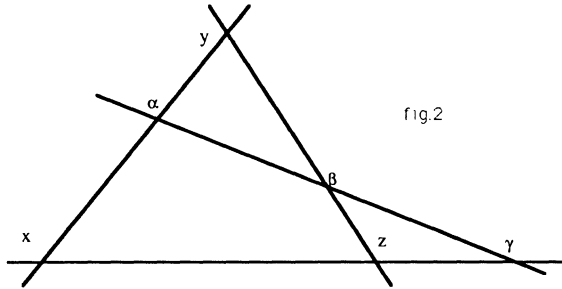


fig 2

Proposition 5.2.1 *Pour tout $x \in \mathbf{P}^{n-1}(F)$, le groupe $\text{Aut}(x)$ des automorphismes de x dans le groupoïde $\mathcal{G}_n$ s'identifie naturellement à $F^\times$.*

Pour $f = x \xrightarrow{\alpha} y$ et $g = y \xrightarrow{\beta} z$, $g \circ f \in \text{Aut}(x) = F^\times$ n'est autre que le birapport $\tilde{r}_2(x, y; \alpha, \beta)$ et tout élément de $\text{PGL}(n, F)$ induit un automorphisme du groupoïde $\mathcal{G}_n$.

Le n -rapport s'interprète comme suit dans le groupoïde $\mathcal{G}_n$: pour $(a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ comme ci-dessus, soit P_i l'hyperplan associé à φ_i dans la dualité et $f_i = a_i \xrightarrow{\alpha_i} a_{i+1}$, où $\alpha_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle \cap P_i \varphi_i$. On a exactement

$$[a_1, \dots, a_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1.$$

Pour ce point de vue sur le birapport voir [13].

5.3 Le n -rapport antisymétrisé

Soit $\mathbf{Z}[F^\times]$ l'algèbre du groupe multiplicatif de F , pour $2n$ points $(a_1, \dots, a_{2n})$ en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$, on considère l'invariant projectif à valeurs dans $\mathbf{Z}[F^\times]$

$$r_n(a_1, \dots, a_{2n}) = (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (-1)^{\epsilon_\sigma} [\tilde{r}_n(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; a_{\sigma(n+1)}, \dots, a_{\sigma(2n)})].$$

On notera r_n l'invariant analogue à valeur dans $\mathcal{B}_n(F)$.

Pour $n = 3$, cet invariant a été introduit par Goncharov, à la suite d'une suggestion de Zagier. On obtient r_3 en antisymétrisant dans $\mathcal{B}_3(F)$ l'expression

$$\frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4) \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_5) \det(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_6)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5) \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_6) \det(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_4)}.$$

Qu'est-ce que le 1-rapport? Soit pour $n \geq 2$, $2n$ vecteurs $(v_1, \dots, v_{2n})$ en position générale de F^n , posons $\mathbf{r}'_n(v_1, \dots, v_{2n}) = \mathbf{r}_n(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{2n})$ où les $(\bar{})$ sont les classes dans $\mathbf{P}^{n-1}(F)$. L'expression de ce n -rapport de $2n$ vecteurs à l'aide du déterminant garde un sens pour $n = 1$; le 1-rapport $\mathbf{r}'_1(a, b)$ de deux éléments non nuls et distincts de F est alors l'élément $-\{\frac{a}{b}\} + \{\frac{b}{a}\} = 2\{\frac{b}{a}\} = \{(\frac{b}{a})^2\}$ de $\mathcal{B}_1(F) \cong F^\times$. Compte-tenu des relations $2(\{x\} + \{x^{-1}\}) = 0$ et $\{x\} + \{1 - x\} = 0$ dans $\mathcal{B}_2(F)$, et du comportement du birapport $\tilde{r}_2$ par permutation, on a aussi la relation $r_2(a_1, a_2, a_3, a_4) = 24\{\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)\}$ à 2-torsion près.

5.4 Comparaison des groupes $Q_3(F)$ et $\mathcal{B}_3(F)$

Théorème 5.4.1 *La relation*

$$(4) \quad \sum_{i=1}^7 (-1)^i r_3(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_7) = 0,$$

est vérifiée dans $\mathcal{B}_3(F)$, d'où l'existence d'un morphisme surjectif

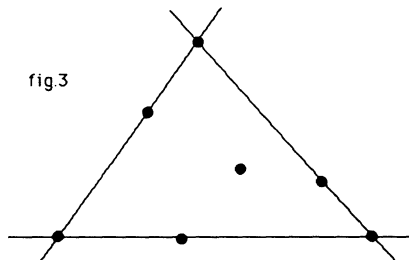
$$(5) \quad Q_3(F) \longrightarrow \mathcal{B}_3(F).$$

On montre ce résultat au paragraphe suivant. Problème : le morphisme (5) est-il un isomorphisme rationnellement?

Corollaire 5.4.2 *Lorsque $F = \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_3$ vérifie l'identité fonctionnelle*

$$\sum_{i=1}^7 (-1)^i \hat{\mathcal{D}}_3(r_3(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_7)) = 0.$$

Pour préciser le rapport entre les groupes $Q_n(F)$ et $\mathcal{B}_n(F)$, Goncharov a aussi considéré des groupes $Q'_n(F)$, analogues aux $Q_n(F)$, engendrés par des symboles $\langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle$ où l'on admet les configurations qui sont stables au sens de Mumford [43] : pour $n = 3$, la condition est que les a_i soient distincts et que quatre d'entre eux ne soient jamais alignés. Le groupe $\mathcal{P}_3(F)$, défini comme le quotient de $\mathbb{Z}[F^\times]$ par les relations (4) (où les a_i sont en position générale), est alors isomorphe (voir [26]) au quotient de $Q'_3(F)$ par une relation compliquée qualifiée de “mystérieuse” par Goncharov; on en déduit un morphisme $Q'_3(F) \rightarrow \mathcal{B}_3(F)$. De ce point de vue, la configuration stable à 7 points, dans $\mathbb{P}^2(F)$, de la figure 3



est alors liée, comme on le verra en 6.4, à une identité fonctionnelle à trois variables pour le trilogarithme, qui redonne par spécialisation une identité classique due à Kummer [26,44].

6 COMPLEXES GRASSMANNIENS

6.1 Le complexe de Suslin

Notons $\tilde{C}_m(n)$ le $\mathbf{Z}$ -module libre de générateurs les $(m+1)$ -uplets $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de F^n en position générale. On forme un complexe de $\mathbf{Z}$ -modules

$$\dots \xrightarrow{d} \tilde{C}_m(n) \xrightarrow{d} \tilde{C}_{m-1}(n) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \tilde{C}_0(n),$$

en définissant la différentielle d sur les générateurs par

$$d((v_0, v_1, \dots, v_m)) = \sum_{i=0}^m (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_m).$$

D'autre part, les $\tilde{C}_m(n)$ sont des $GL(n, F)$ -modules par l'action diagonale sur $(v_0, v_1, \dots, v_m)$. Si F est un corps infini, ce complexe muni de l'augmentation $e: \tilde{C}_0(n) \rightarrow \mathbf{Z}$, $e(\sum n_i v^i) = \sum n_i$, est une résolution acyclique de $\mathbf{Z}$ en tant que $GL(n, F)$ -module trivial. Par un argument d'algèbre homologique standard, on en déduit un morphisme

$$(6) \quad \theta_*: H_*(GL(n, F), \mathbf{Z}) \longrightarrow H_*(C_\bullet(n)),$$

où $C_m(n) = \tilde{C}_m(n) \otimes_{\mathbf{Z}[GL(n, F)]} \mathbf{Z}$ est le groupe des coinvariants de $\tilde{C}_m(n)$ sous l'action de $GL(n, F)$.

On peut décrire ce morphisme de la manière suivante [58] : soit $E_\bullet GL(n, F) \rightarrow B_\bullet GL(n, F)$ le fibré simplicial universel standard et v un vecteur non nul de F^n . On considère l'ensemble simplicial $E_\bullet^{\text{gén}} GL(n, F)$ obtenu à partir de $E_\bullet GL(n, F)$ en ne retenant que les simplexes $(g_0, g_1, \dots, g_s)$ v -génériques au sens que $g_0(v), g_1(v), \dots, g_s(v)$ sont en position générale dans F^n . Soit alors $B_\bullet^{\text{gén}} GL(n, F)$ l'image de $E_\bullet^{\text{gén}} GL(n, F)$ dans $B_\bullet GL(n, F)$, on prouve que $B_\bullet^{\text{gén}} GL(n, F) \hookrightarrow B_\bullet GL(n, F)$ induit un isomorphisme en homologie. On en déduit que le morphisme ci-dessus provient du morphisme $GL(n, F)$ -équivariant du complexe singulier de $E_\bullet^{\text{gén}} GL(n, F)$ vers $C_\bullet(n)$ donné par

$$(g_0, g_1, \dots, g_s) \mapsto (g_0(v), g_1(v), \dots, g_s(v)).$$

$C_m(n)$ s'identifie au $\mathbf{Z}$ -module libre engendré par les configurations de $m+1$ vecteurs de F^n en position générale : par configuration, on entend une orbite sous l'action de $GL(n, F)$. Noter que le groupe $Q_n(F)$ est un quotient de $C_{2n-1}(n)$.

Le complexe $(C_\bullet(n), d)$ a été introduit par Suslin [51] dans l'étude de la stabilité de l'homologie du groupe linéaire. Il est très voisin d'un complexe introduit par Gelfand et MacPherson [22].

6.2 Le complexe grassmannien

Dans $\mathbf{P}^r(F)$ identifié aux droites de F^{r+1} , on considère le simplexe “canonique” dont les sommets sont les droites engendrées par les vecteurs de la base canonique $(e_i)_i$ de F^{r+1} .

On note $G_q^n(F)$ la grassmannienne des sous-espaces projectifs de codimension n de $\mathbf{P}^{n+q}(F)$ qui sont transverses à toutes les faces du simplexe canonique. Soit $\mathbf{Z}G_q^n(F)$ le $\mathbf{Z}$ -module libre d'ensemble de générateurs $G_q^n(F)$, on obtient un complexe

$$(7) \quad \cdots \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_q^n(F) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_{q-1}^n(F) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_0^n(F),$$

où pour $L \in G_q^n(F)$, $\partial L = \sum_{i=0}^{n+q+1} L \cap \langle s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_{n+q} \rangle$; ici la face $\langle s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_{n+q} \rangle$ est canoniquement identifiée à $\mathbf{P}^{n+q-1}(F)$ muni de son simplexe canonique. Noter que $G_0^n(F) \cong (F^\times)^n$.

Proposition 6.2.1 *Le complexe tronqué*

$$\cdots \xrightarrow{d} C_{n+q}(n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C_n(n)$$

s'identifie naturellement au complexe (7).

Preuve : si $(v_0, v_1, \dots, v_{n+q})$ est un générateur de $\tilde{C}_{n+q}(n)$, le noyau de l'application linéaire $F^{n+q+1} \rightarrow F^n$, $e_i \mapsto v_i$, ne dépend que de la configuration associée à $(v_0, v_1, \dots, v_{n+q})$ et définit un élément de $G_q^n(F)$. On en déduit une bijection de $C_{n+q}(n)$ sur $\mathbf{Z}G_q^n(F)$ qui commute aux différentielles. L'inverse s'obtient comme suit : si V est un sous-espace de codimension n de F^{n+q+1} , les classes dans F^{n+q+1}/V des vecteurs de la base canonique de F^{n+q+1} définissent sans ambiguïté une configuration de $p + q + 1$ vecteurs de F^n en position générale. ■

Il existe une variante affine du complexe grassmannien apparaissant comme quotient de celui-ci et dont l'homologie en degré zéro donne une intéressante présentation géométrique de la K-théorie de Milnor [23]. Ceci est aussi lié au travail de Suslin sur la stabilité de l'homologie du groupe linéaire où la K-théorie de Milnor apparaît comme première obstruction à la stabilité [51].

6.3 Morphisme du complexe grassmannien vers le complexe de Goncharov

Un des points cruciaux du travail de Goncharov est lié à l'existence d'un diagramme commutatif

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} C_6(3) & \xrightarrow{d} & C_5(3) & \xrightarrow{d} & C_4(3) & \xrightarrow{d} & C_3(3) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_5 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_3 \\ 0 & \longrightarrow & B_3(F) & \xrightarrow{\delta} & B_2(F) \otimes F^\times & \xrightarrow{\delta} & \wedge^3 F^\times \end{array}$$

Définissons les applications ϕ_i . Soit (v_0, v_1, v_2, v_3) , la configuration associée aux quatre vecteurs de F^3 : v_0, v_1, v_2, v_3 . En coordonnées, cette configuration est représentée par une matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

On a alors $\phi_3((v_0, v_1, v_2, v_3)) = a \wedge b \wedge c$. On obtient une définition sans coordonnées en antisymétrisant sur $\{0, 1, 2, 3\}$ l'expression $\det(v_0, v_1, v_2) \wedge \det(v_0, v_1, v_3) \wedge \det(v_0, v_2, v_3)$; noter que cette expression ne dépend que de la configuration (v_0, v_1, v_2, v_3) .

On définit $\phi_4((v_0, v_1, v_2, v_3, v_4))$ comme l'antisymétrisé de $\frac{1}{2}\{r(\bar{v}_0|\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)\}_2 \otimes \det(v_0, v_2, v_3)$, où $r(\dots)$ désigne le birapport des quatre droites de $\mathbf{P}^2(F)$: $\langle \bar{v}_0, \bar{v}_i \rangle$, $i = 1, \dots, 4$. Cette expression est bien un invariant des configurations. Cela résulte du fait que la relation du dilogarithme est vérifiée dans $\mathcal{B}_2(F)$: on voit facilement que c'est une conséquence de la relation

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i \{r(\bar{v}_0|\bar{v}_1, \dots, \hat{\bar{v}}_i, \dots, \bar{v}_4)\}_2 = 0;$$

mais si l'on considère la conique passant par les cinq points $\bar{v}_i$ comme un exemplaire de $\mathbf{P}^1(F)$, cette dernière relation est exactement celle du dilogarithme.

Enfin, on pose $\phi_5((v_0, \dots, v_5)) = \mathbf{r}_3(\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_5)$.

Le fait que, dans le diagramme (8), le carré de droite commute est un exercice. La commutativité de celui du milieu utilise de façon astucieuse l'interprétation géométrique du trirapport (voir [27]) : une généralisation des arguments utilisés à ce propos, au cas où $n > 3$, ne semble pas évidente. Enfin le point clef est la relation $\phi_5 \circ d = 0$ qui donne, comme sous-produit, la fameuse identité fonctionnelle du trilogarithme découverte par Goncharov [26, 27].

6.4 Identité fonctionnelle explicite pour le trilogarithme

Preuve du théorème 5.4.1 : posons $\hat{\phi}_5((v_0, \dots, v_5)) = \mathbf{r}_3(\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_5) \in \mathbf{Z}[F^\times]$. De la relation $\phi_4 \circ d = \delta \circ \phi_5$, on déduit

$$\delta \circ \hat{\phi}_5 \circ d = \phi_4 \circ d \circ d = 0,$$

d'où la relation dans $\mathcal{B}_2(F) \otimes F^\times$

$$\delta \circ \left(\sum_{i=0}^6 (-1)^i \hat{\phi}_5((v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_6)) \right) = 0.$$

Compte tenu de la relation qui précède et de la définition du groupe $\mathcal{R}_3(F)$, si l'on considère l'expression $\sum_{i=0}^6 (-1)^i \hat{\phi}_5((v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_6))$ comme une expression rationnelle en les coordonnées des vecteurs v_i et que par une suite de spécialisations cette expression devienne nulle alors c'est que

$$\sum_{i=0}^6 (-1)^i \hat{\phi}_5((v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_6)) \in \mathcal{R}_3(F).$$

C'est ce que fait effectivement Goncharov, en deux étapes : on peut d'abord se ramener à une expression qui correspond géométriquement à la configuration dégénérée de la figure 3 donnée en coordonnées par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

Goncharov a calculé cette expression $R(a, b, c)$. On a

$$\begin{aligned} R(a, b, c) = & \sum_{\text{cyclique}} \left(\{ca - a + 1\} + \left\{ \frac{ca - a + 1}{ca} \right\} + \{c\} + \left\{ \frac{bc - c + 1}{(ca - a + 1)b} \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{ca - a + 1}{c} \right\} + \left\{ \frac{(bc - c + 1)a}{ca - a + 1} \right\} - \left\{ \frac{bc - c + 1}{(ca - a + 1)bc} \right\} - \{1\} \right) + \{-abc\}, \end{aligned}$$

où $\sum_{\text{cyclique}} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$. Si on effectue sur $R(a, b, c)$ les spécialisations $a = b$, puis $b = 1$ et $c = 0$, on obtient 0, d'où le théorème 5.4.1. ■

Corollaire 6.4.1 *Le trilogarithme $\mathcal{D}_3$ vérifie l'identité fonctionnelle*

$$\tilde{\mathcal{D}}_3(R(a, b, c)) = 0.$$

C'est une conséquence de la définition 3.1 et de ce qui précède pour $F = \mathbf{C}$.
■

Remarquons que l'on a un diagramme analogue à (8) pour $n = 1, 2$. Dans le cas $n = 1$, c'est trivial; pour $n = 2$, il prend la forme

$$\begin{array}{ccccc} C_4(2) & \xrightarrow{d} & C_3(2) & \xrightarrow{d} & C_2(2) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_2 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_2(F) & \xrightarrow{\delta} & \wedge^2 F^\times \end{array}$$

où ϕ_3 s'écrit à l'aide du birapport.

Pour $n = 1, 2, 3$, on en déduit un morphisme $H_{2n-1}(C_\bullet(n)) \longrightarrow \mathbf{B}_n(F)$. En le composant avec le $\theta_\bullet$ de (6), on en déduit pour $n = 1, 2, 3$ un morphisme

$$(9) \quad \rho_n : H_{2n-1}(GL(n, F), \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{B}_n(F).$$

7 LE RÉGULATEUR DE BOREL

7.1 La classe de Borel

Dans la suite, N désigne un entier assez grand et toujours $\geq n$. Précisons les notations de divers invariants homologiques attachés à $GL(N, \mathbb{C})$ que nous utiliserons dans la suite. On note $GL(N, \mathbb{C})^\delta$ le groupe $GL(N, \mathbb{C})$ considéré comme groupe discret. Le groupe $H^*(GL(N, \mathbb{C})^\delta, A(n))$ désigne la cohomologie au sens d'Eilenberg-MacLane, à coefficients dans le module trivial $A(n)$ où A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$: elle coïncide avec la cohomologie singulière du classifiant $BGL(N, \mathbb{C})^\delta$.

On note $H_{cont}^*(GL(N, \mathbb{C}), A(n))$ la cohomologie de Van-Est des cochaînes continues du groupe topologique $GL(N, \mathbb{C})$. $H^*(BGL(N, \mathbb{C}), A(n))$ désigne la cohomologie singulière de l'espace topologique simplicial $BGL(N, \mathbb{C})$, mais on rencontrera aussi la cohomologie singulière de $GL(N, \mathbb{C})$ considéré comme espace topologique, notée $H_{sing}^*(GL(N, \mathbb{C}), A(n))$.

Proposition 7.1.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$H_{sing}^*(GL(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H_{cont}^*(GL(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n-1)).$$

La preuve combine plusieurs isomorphismes. Le groupe unitaire $U(N, \mathbb{C})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL(N, \mathbb{C})$, $GL(N, \mathbb{C})/U(N, \mathbb{C})$ est donc contractile et on obtient un isomorphisme

$$H_{sing}^*(GL(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H_{sing}^*(U(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)).$$

Comme $U(N, \mathbb{C})$ est compact, les groupes $H_{sing}^*(U(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n))$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie $H^*(u(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n))$ de l'algèbre de Lie $u(N, \mathbb{C})$.

D'autre part, le classique "unitarian trick" de Weyl donne une suite d'isomorphismes sur les homologies relatives d'algèbres de Lie

$$\begin{aligned} H^*(u(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n+1)) &\xrightarrow{\cong} H^*(gl(N, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(gl(N, \mathbb{C}) \times gl(N, \mathbb{C}), gl(N, \mathbb{C}); \mathbb{C}) \\ &\xrightarrow{\cong} H^*(gl(N, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}, u(N, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}; \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(gl(N, \mathbb{C}), u(N, \mathbb{C}); \mathbf{R}(n)), \end{aligned}$$

où $gl(N, \mathbb{C})$ est considérée comme sous-algèbre de Lie de $gl(N, \mathbb{C}) \times gl(N, \mathbb{C})$ par l'application : $x \mapsto (x, \bar{x})$.

Enfin, Un théorème de Van-Est [56], utilisant l'action de $GL(N, \mathbb{C})$ dans le complexe de de Rham de $GL(N, \mathbb{C})/U(N, \mathbb{C})$, fournit un isomorphisme

$$H^*(gl(N, \mathbb{C}), u(N, \mathbb{C}); \mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H_{cont}^*(GL(N, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)).$$

On sait d'après [16] que cet isomorphisme s'explique à l'aide d'une application de l'espace des formes différentielles invariantes sur $GL(N, \mathbb{C})/U(N, \mathbb{C})$ à valeurs dans les cochaînes continues homogènes sur $GL(N, \mathbb{C})$

$$\omega \mapsto \left((g_0, \dots, g_n) \mapsto \int_{\Delta(g_0, \dots, g_n)} \omega \right),$$

où Δ est une certaine opération associant à $(g_0, \dots, g_n)$ un n -simplexe singulier de l'espace homogène $GL(N, \mathbb{C})/U(N, \mathbb{C})$ de sommets $g_0 e, \dots, g_n e$, où e est fixé.

En combinant tous ces isomorphismes, on en déduit la proposition. ■

Il est classique que $H_{sing}^*(GL(N, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \wedge_{\mathbb{C}}^*(u_1, u_2, \dots, u_N)$, l'algèbre extérieure sur des générateurs u_i de degré $2i - 1$ et que

$$H_{sing}^*(BGL(N, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[c_1, c_2, \dots, c_N],$$

où $c_i \in H_{sing}^{2i}(BGL(N, \mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ est la $i^{\text{ème}}$ classe de Chern universelle (avec la convention de normalisation des géomètres algébristes). On peut alors normaliser les u_i de telle sorte que la transgression dans la suite spectrale de Serre du $GL(N, \mathbb{C})$ -fibré principal universel sur $GL(N, \mathbb{C})$ [11] envoie u_i sur c_i .

On définit la *classe de Borel* relative à N comme l'image b'_n de u_n par l'isomorphisme $H_{sing}^{2n-1}(GL(N, \mathbb{C}), \mathbb{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H_{cont}^{2n-1}(GL(N, \mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))$ de la proposition. Toutes ces classes se correspondent et nous utiliserons une seule notation. La *classe de Borel universelle* b_n est la classe de $H^{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(n-1))$ obtenue à partir de b'_n par la suite d'applications

$$H_{cont}^{2n-1}(GL(N, \mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1)) \longrightarrow H^{2n-1}(GL(N, \mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(n-1)) \xrightarrow{\cong} H^{2n-1}(GL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(n-1)),$$

où le dernier isomorphisme provient de la stabilité.

7.2 Le régulateur de Borel

Définissons le régulateur de Borel. La classe de Borel universelle $b_n \in H^{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(n-1))$ induit un morphisme $H_{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}(n-1)$ qui, composée avec le morphisme de Hurewicz

$$K_{2n-1}(\mathbb{C}) \cong \pi_{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^+) \longrightarrow H_{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^+, \mathbb{Z}) \cong H_{2n-1}(BGL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{Z}),$$

donne une application "régulateur"

$$\lambda : K_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}(n-1).$$

Dans la situation $n = 1$ on retrouve l'application $\log | \cdot |$ utilisée dans le classique plongement multiplicatif de Dirichlet.

Pour F un corps de nombres, notons Σ l'ensemble des plongements de F dans $\mathbf{C}$. Borel considère le morphisme

$$K_{2n-1}(F) \xrightarrow{\prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma} \prod_{\sigma \in \Sigma} K_{2n-1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\prod \lambda} (\mathbf{R}(n-1))^d.$$

Le comportement de la classe de Borel, sous l'action de la conjugaison, montre que l'on peut considérer cette application comme un morphisme

$$r_{\text{Bor}} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbf{R}^{d_n},$$

où $\mathbf{R}^{d_n}$ est identifié aux éléments $(x_\sigma)_\sigma \in (\mathbf{R}(n-1))^d$ tels que $\overline{x_\sigma} = x_{\overline{\sigma}}$ de manière compatible avec la $\mathbf{Q}$ -structure provenant de l'injection de $\mathbf{Q}(n-1)$ dans $\mathbf{R}(n-1)$: c'est le *régulateur de Borel*.

8 LE RÉGULATEUR DE BEILINSON

8.1 Cohomologie de Deligne : quelques morphismes utiles [14,20]

Pour X est une variété complexe lisse quasi-projective, on note $\overline{X}$ une complétion de X par des diviseurs à croisements normaux, et on pose $D = \overline{X} \setminus X$.

Soit $\mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D)$ le complexe de de Rham des C^∞ -formes différentielles à valeurs complexes, à singularités logarithmiques le long de D . On a $\mathcal{A}^m(\overline{X}, \log D) = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{A}^{p,q}(\overline{X}, \log D)$, où $\mathcal{A}^{p,q}$ désigne les formes de type (p, q) . Soit $F^n \mathcal{A}^m = \bigoplus_{p+q=m, p \geq n} \mathcal{A}^{p,q}$ la filtration de Hodge. Pour A un sous-anneau de $\mathbf{C}$ notons $S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n))$ le complexe des chaînes singulières sur X . Considérons le morphisme de complexes donné par l'intégration des formes

$$F^n \mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D) \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(X) \xrightarrow{\int} S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n)),$$

la cohomologie de Deligne-Beilinson est définie par

$$H_D^*(X, A(n)) := H^*(\text{cône}[F^n \mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D) \longrightarrow S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n))][[-1]]).$$

Si $A = \mathbf{R}$, on peut donner de cette définition la variante suivante. Soit $F^n \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D)$ le complexe de de Rham des faisceaux de formes méromorphes sur $\overline{X}$ à pôles logarithmiques le long de D

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega_{\overline{X}}^n(\log D) \longrightarrow \Omega_{\overline{X}}^{n+1}(\log D) \longrightarrow \cdots$$

Notons d'autre part $\underline{B}_X^\bullet$ les faisceaux de formes différentielles réelles et posons $\underline{B}_X^\bullet(n) = (2\pi i)^n \underline{B}_X^\bullet$. On a un morphisme de complexes de faisceaux provenant de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\mathbf{R}(n) \cong \mathbf{R}(n-1)$

$$F^n \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D) \longrightarrow \underline{B}_X^\bullet(n-1).$$

$H_{\mathcal{D}}^\bullet(X, \mathbf{R}(n))$ est alors l'hypercohomologie du complexe de faisceaux

$$\underline{\mathbf{R}(n)}_X := \text{cône}[F^n \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D) \longrightarrow \underline{B}_X^\bullet(n-1)][-1].$$

Ces définitions se prolongent aux variétés simpliciales complexes quasi-projectives, en particulier à $BGL(N, \mathbf{C})$ et $BGL(N, \mathbf{C})^\delta$. La proposition suivante sera utile pour relier certaines classes intervenant dans la définition des régulateurs de Borel et de Beilinson (voir le diagramme (11)).

Proposition 8.1.1 1. *Le morphisme naturel*

$$H^{*-1}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{C}/A(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^*(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, A(n))$$

est un isomorphisme.

2. *On a un isomorphisme*

$$H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)) \longrightarrow H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)).$$

3. *On a un morphisme naturel*

$$H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n)) \longrightarrow H_{\text{cont}}^{2n-1}(GL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1)).$$

Le 1. résulte de la longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathbf{C}/A(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^k(X, A(n)) \longrightarrow F^n H^k(X, \mathbf{C}) \longrightarrow \dots$$

appliquée à $X = BGL(m, \mathbf{C})^\delta$. Dans le 2., $F^n H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C})$ est engendré par l'image de la classe de Chern $c_n \in H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n))$ et de plus

$$H^{2n-1}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) = H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) = 0.$$

Enfin le morphisme de la cohomologie de Deligne vers la cohomologie des cochaînes continues vient de la projection

$$\underline{\mathbf{R}(n)}_X \longrightarrow \underline{B}_X^0(n-1)[-1].$$

8.2 Comparaison des régulateurs de Borel et de Beilinson

Revenons à la cohomologie de Deligne-Beilinson. Si X est une variété quasi-projective lisse sur $\mathbf{Q}$ et F un corps de caractéristique nulle, on note $X_F = X \times_{\text{Spec } \mathbf{Q}} \text{Spec } F$ la variété obtenue par changement de base. On définit

$$H_{\mathcal{D}}^*(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) := H_{\mathcal{D}}^*(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{R}(n))^{Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})}$$

On a de plus $H_{\mathcal{D}}^1(\text{Spec } \mathbf{C}, \mathbf{R}(n)) = \mathbf{R}(n-1)$ et $H_{\mathcal{D}}^i(\text{Spec } \mathbf{C}, \mathbf{R}(n)) = 0$ pour $i \neq 1$. Considérons maintenant un corps de nombres F , on a

$$H_{\mathcal{D}}^1((\text{Spec } F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) = \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} H_{\mathcal{D}}^1(\text{Spec } \mathbf{C}, \mathbf{R}(n)) \right)^{Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})}$$

et ce groupe coïncide avec l'ensemble des suites $(x_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$ d'éléments de $\mathbf{R}(n-1)$, vérifiant $x_{\bar{\sigma}} = \overline{x_{\sigma}}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Il en résulte que $H_{\mathcal{D}}^1(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension d_n . On pourra donc considérer le régulateur de Borel comme étant à valeurs dans $H_{\mathcal{D}}^1((\text{Spec } F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$.

On dispose de classes de Chern en cohomologie de Deligne [1,48,20], les classes de Chern-Beilinson. A l'aide de la classe de Chern-Beilinson $c_n^B \in H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n))$ du fibré universel sur $BGL(N, \mathbf{C})$, on construit [48, 50] des morphismes

$$(10) \quad c_{i,n} : K_i(X) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^{2n-i}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)),$$

où $K_i(X)$ est la K -théorie au sens des schémas [45]. Si $X = \text{Spec } F$ il reste un seul morphisme non trivial qui est le *régulateur de Beilinson*

$$r_{Bei} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^1((\text{Spec } F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)).$$

Le théorème qui suit était connu de Beilinson avec un coefficient de proportionnalité rationnel (modulo des éléments décomposables) [1,47]. Dupont, Hain et Zucker [18] ont mis un point final au problème de la comparaison des deux régulateurs r_{Bor} et r_{Bei} .

Théorème 8.2.1 ([18]) *Le régulateur de Borel est le double du régulateur de Beilinson.*

La preuve se ramène à la comparaison des classes de Borel et de Chern-Beilinson. Pour les détails, utilisant intensivement les techniques simpliciales, voir l'article [18]. Le diagramme qui suit éclaire les relations entre les différentes classes de cohomologie sous-jacentes à la question

$$(11) \quad \begin{array}{ccccc} c_n^B \in & H_D^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n)) & \xrightarrow{\cong} & H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n)) & \ni c_n \\ & \downarrow & \searrow & & \\ 'c_n^B \in & H_D^{2n}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n)) & & H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \underline{B}^0(n-1)[-1]) & \\ & \uparrow \cong & & \parallel & \\ \frac{1}{2} b_n \in & H^{2n-1}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n-1)) & \leftarrow & H_{cont}^{2n-1}(GL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1)) & \ni \frac{1}{2} b'_n \end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif, les morphismes sont ceux de la proposition 8.1.1 et toutes les classes se correspondent. Rappelons que c_n et c_n^B sont les classes de Chern et de Chern-Beilinson du fibré universel sur $BGL(N, \mathbf{C})$ et on a noté $'c_n^B$ la classe de Chern-Beilinson du fibré plat canonique sur $BGL(N, \mathbf{C})^\delta$.

En fait Dupont, Hain et Zucker ne comparent pas directement les classes de Borel et Beilinson mais les relient à la classe de Cheeger-Simons $\hat{c}_n$ du fibré plat universel sur $BGL(\mathbf{C})^\delta$. Rappelons que $\hat{c}_n$ est un élément de $H^{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta, \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n))$ qui relève la classe de Chern entière correspondante du fibré plat canonique sur $BGL(\mathbf{C})^\delta$. Le diagramme suivant, où toutes les classes se correspondent, situe la relation entre $\hat{c}_n$ et les classes de Chern entières.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{c}_n \in H^{2n-1}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) & \rightarrow & 'c_n \in H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{Z}(n)) & \leftarrow & c_n \in H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)) \\ & \cong \searrow & & & \uparrow \cong \\ & & 'c_n^B \in H_D^{2n}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{Z}(n)) & \leftarrow & c_n^B \in H_D^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)) \end{array}$$

Preuve du théorème 2.4.1 Le morphisme $c_{i,n}$ de (10) transforme l'opération d'Adams ψ^k en la multiplication par k^n : voir par exemple [48]. Le théorème 2.4.1 résulte alors immédiatement du théorème de Borel et du fait que $r_{Bor} = 2r_{Bei}$. ■

9 LA CONJECTURE DE ZAGIER

9.1 Classe de Borel et polylogarithmes

Un problème intéressant est celui de d'expliciter la classe de Borel $b'_n \in H_{cont}^{2n-1}(GL(n, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$ à l'aide d'un cocycle, sinon continu, au moins mesurable et localement borné; on sait que, sur un groupe localement compact, la cohomologie continue coïncide avec la cohomologie des cochaînes mesurables et localement bornées. Il est remarquable que pour $n = 1, 2, 3$, il soit possible d'exprimer un tel cocycle à l'aide du n -logarithme $\mathcal{D}_n$ et du n -rapport $\mathbf{r}_n$.

Théorème 9.1.1 *On a pour $n = 1, 2, 3$ un diagramme commutatif à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près*

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow^{f_n} & \mathbf{R}(n-1) \\ H_{2n-1}(BGL(n, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{Q}) & & \uparrow \tilde{\mathcal{D}}_n \\ & \searrow_{\rho_n} & \mathbf{B}_n(F)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

où, $\xrightarrow{f_n}$ est la flèche associée à la classe de $H^{2n-1}(GL(n, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n-1))$ image de b'_n par le morphisme $GL(n, \mathbf{C})^\delta \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$ et ρ_n a été défini en (9).

Pour $n = 1$, b'_1 est donné par le cocycle continu associé au morphisme $\mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{R}, z \mapsto \log |z|$.

Si $n = 2$, reprenons la description du groupe $B_2(F)$ du 4.2 à l'aide des tétraèdres idéaux de l'espace hyperbolique de dimension 3. La fonction de Bloch-Wigner $\mathcal{D}_2$ induit un morphisme

$$B_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(1)$$

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \mapsto \mathcal{D}_2([\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)]),$$

et $\mathcal{D}_2([\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)])$ n'est autre que le volume du tétraèdre idéal de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 à un facteur $\sqrt{-1}$ près. b'_n est alors représenté par le 3-cocycle continu donné sous forme homogène par $(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto \mathcal{D}_2(\tilde{r}_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty)))$. Cette classe de cohomologie continue a été introduite par Bloch et Wigner [7] (voir aussi [16] et [30]).

Lorsque $n = 3$, le théorème est dû à Goncharov. Une classe analogue a été construite par Yang en collaboration avec Hain, en utilisant les polylogarithmes au sens de Gelfand, Hain et MacPherson [58]. Mais la construction de cette classe ne fait pas apparaître le 3-rapport, bien qu'il soit sans doute implicite dans la construction.

La classe de cohomologie associée à $\tilde{\mathcal{D}}_3 \circ \rho_3$ est représentée par le cocycle mesurable donné en notation homogène par $\tilde{\mathcal{D}}_3(\mathbf{r}_3(g_1 v, \dots, g_6 v))$, si $(g_1, \dots, g_6)$ est v -générique et par 0, sinon (le choix de $v \neq 0$ est arbitraire); c'est un cocycle d'après 5.4.2. Soit $g \in H_{cont}^5(GL(3, \mathbf{C}), \mathbf{R}(2))$ la classe de cohomologie continue ainsi obtenue, pour prouver qu'elle coïncide à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près avec la classe de Borel b'_n , Goncharov la relève en une classe $\tilde{g} \in H_{\mathcal{D}}^6(BGL(3, \mathbf{C}), \mathbf{R}(3))$ (voir le diagramme (11)) par des formules explicites faisant intervenir le logarithme et le dilogarithme. Il peut alors comparer la classe $\tilde{g}$ à la classe de Chern-Beilinson $c_n^B \in H_{\mathcal{D}}^6(BGL(3, \mathbf{C}), \mathbf{R}(3))$; cela utilise la totalité du diagramme (8).

9.2 Preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 3$

Pour $n = 3$ on associe à g par la suite d'applications

$$H_{\text{cont}}^5(GL(3, \mathbb{C}), \mathbb{R}(2)) \xrightarrow{\cong} H_{\text{cont}}^5(GL(5, \mathbb{C}), \mathbb{R}(2)) \longrightarrow H^5(GL(5, \mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(2)) \xrightarrow{\cong} H^5(GL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(2)),$$

une classe de $H^5(GL(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}(2))$; on en déduit pour tout corps de nombres, comme dans la construction du régulateur de Borel, une application régulateur

$$r_g : K_5(\mathbb{F}) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^1((\text{Spec } F)_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(3))$$

qui coïncide à un facteur de $\mathbb{Q}^\times$ -près avec le régulateur de Borel.

En combinant cela avec le théorème de Borel et la conjecture du rang pour K_5 , vraie d'après Yang [57] pour un corps de nombre distinct de $\mathbb{Q}$, on obtient la conjecture de Zagier pour $n = 3$ et $F \neq \mathbb{Q}$. On retrouve aussi facilement le cas $n = 2$.

Goncharov prouve la conjecture de Zagier pour $n = 3$ sans utiliser la conjecture du rang et en fait la redémontre y compris pour $F = \mathbb{Q}$; cela résulte entre autres du théorème suivant

Théorème 9.2.1 *Pour tout corps infini F le morphisme $\rho_3 : H_5(GL(3, F), \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(\Gamma^\bullet(F, 3))_{\mathbb{Q}}$ vérifie $\rho_3|_{H_5(GL(2, F), \mathbb{Q})} = 0$.*

Il se prolonge en un morphisme $\rho'_3 : H_5(GL(5, F), \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(\Gamma^\bullet(F, 3))_{\mathbb{Q}}$ satisfaisant à $\text{Im } \rho_3 = \text{Im } \rho'_3$.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, la classe de cohomologie associée à $\tilde{\mathcal{D}}_3 \circ \rho'_3$ provient d'une classe de cohomologie continue correspondant à g dans l'isomorphisme restriction $H_{\text{cont}}^5(GL(5, \mathbb{C}), \mathbb{R}(2)) \longrightarrow H_{\text{cont}}^5(GL(3, \mathbb{C}), \mathbb{R}(2))$.

La preuve de ce théorème utilise la construction de bicomplexes “grassmanniens” dont l'origine remonte à Suslin [53] et des arguments de dualité sur les configurations en géométrie projective. Quoique non explicite chez Goncharov, le dernier point paraît essentiel à la preuve de la conjecture du rang pour K_5 .

9.3 La conjecture du rang pour K_5 d'un corps de nombres

Montrons comment le théorème 9.2.1 combiné avec le théorème de Borel et le théorème 2.4.1 entraîne la conjecture du rang pour $n = 5$ et tous les corps de nombres. On sait par 2.4.1 que $K_5(F) = K_5^{(3)}(F)$; d'autre part il résulte de 9.2.1 que $r_g(K_5^{[5]}(F)) = r_g(K_5^{[3]}(F))$ et $r_g(K_5^{[2]}(F)) = 0$. Comme le régulateur de Borel défini sur $K_5(F)_{\mathbb{Q}}$ est injectif, on en déduit $K_5^{[2]}(F) = 0$ et $K_5^{[5]}(F) = K_5^{[3]}(F)$ et par suite le gradué associé à la filtration par le rang se réduit à $K_5^{[3]}(F) \cong K_5^{(3)}(F)$.

9.4 Un mot sur l'approche de Yang

Dans leur approche de la conjecture de Zagier pour $n = 2, 3$, Hain et Yang [58] utilisent les polylogarithmes à la Gelfand-Hain-MacPherson [31]. Soit $G_q^n(\mathbb{C})$ la grassmannienne $G_q^n(\mathbb{C})$, considérée comme variété complexe. On a (voir les paragraphes 6.1 et 6.2; on renvoie à [58] pour la définition précise de $H^*(G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C}), \mathbf{R}(n))$) un morphisme "simplicial" $B^{\text{gén}}GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C})$ qui induit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 c_n^B \in H_D^{2n}(BGL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) & \rightarrow & c_n \in H^{2n}(BGL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) & & \\
 \downarrow & \searrow & & \searrow & \\
 H_{\text{cont}}^{2n-1}(GL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n-1)) & \leftarrow & H_D^{2n}(B^{\text{gén}}GL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) & \rightarrow & H^{2n}(B^{\text{gén}}GL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) \\
 \uparrow & \nearrow & & \nearrow & \\
 H_D^{2n}(G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) & \rightarrow & [Vol] \in H^{2n}(G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C}), \mathbf{R}(n)) & &
 \end{array}$$

La forme $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ sur $G_0^n(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ définit [31] une classe notée $[Vol]$ de $H^{2n}(G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C}), \mathbf{R}(n))$. Un relèvement de cette classe dans $H_D^{2n}(G_{\bullet-n}^n(\mathbb{C}), \mathbf{R}(n))$ lorsqu'il existe est appelé par Yang classe de Bloch-Wigner. C'est un théorème de Hain, MacPherson et Yang qu'un tel relèvement existe pour $n \leq 3$. Une classe de Bloch-Wigner fournit une classe de cohomologie continue dans $H_{\text{cont}}^{2n-1}(GL(n, \mathbb{C}), \mathbf{R}(n-1))$ que l'on veut comparer à la classe de Borel. Là encore il est plus aisé de considérer la classe de Chern-Beilinson c_n^B et on est alors ramené à relier la classe $[Vol]$ à la classe de Chern c_n , ce qui peut se faire essentiellement à travers $B^{\text{gén}}GL(n, \mathbb{C})$ [58].

La bibliographie qui suit contient quelques références non citées dans le texte mais en relation étroite avec le sujet.

Bibliographie

- [1] A.A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, Sovr. Probl. Math., 24 (1984), 181-238.
- [2] A.A. Beilinson, *Polylogarithms and cyclotomic elements*, preprint.
- [3] A. A. Beilinson, P. Deligne, *Motivic polylogarithms and Zagier conjecture*, preprint.
- [4] A. A. Beilinson, A. B. Goncharov, V. V. Schechtman, A. N. Varchenko, *Projective geometry and algebraic K-theory*, Leningrad math. Jo. 2 (1991), 523-576.

- [5] A.A. Beilinson, R. MacPherson, V.V. Schechtman, *Notes on motivic cohomology*, Duke Math. J., 54 (1987), 679-710.
- [6] S. Bloch, *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, Lect. notes, Irvine, 1977.
- [7] S. Bloch, *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, Proc. Int. Symp. Alg. Geom., Kyoto (1977) 1-14.
- [8] S. Bloch, *Algebraic cycles and algebraic K-theory*, Adv. in Math., 6 (1986), 267-304.
- [9] A. Borel, *Cohomologie de SL_2 et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Ec. Norm. Sup. Pisa, 4 (1974), 613-636.
- [10] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 7 (1974), 235-274.
- [11] H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de topologie, Liège (1950), 57-71.
- [12] P. Cartier, *Décomposition des polyèdres, le point sur le troisième problème de Hilbert*, Sémin. Bourbaki 1984/85, exp. 646, Astérisque 133/134 (1986), 261-288.
- [13] J.L. Cathelineau, *Birapport et groupoïdes*, preprint.
- [14] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES, 44 (1974), 5-27.
- [15] P. Deligne, *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*, preprint 1990.
- [16] J. Dupont, *The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles*, J. of Pure and Appl. Alg., 44 (1987), 137-164.
- [17] J. Dupont, *Characteristic classes for flat bundles and their formulas*, preprint, Aarhus 1993.
- [18] J. Dupont, R. Hain, S. Zucker, *Regulators and characteristic classes of flat bundles*, preprint Aarhus 1992.
- [19] J. Dupont, C. H. Sah, *Scissors congruences II*, Jo. Pure Appl. Alg., 25 (1982), 159-195.

- [20] H. Esnault, E. Viehweg, *Deligne-Beilinson cohomology*, in Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 43-81, Perspectives in Math. 1988, Acad. Press.
- [21] A. Gabrielov, I.M. Gelfand, M.H. Losik, *Combinatorial calculation of characteristic classes*, Funct. Anal. i Priloz. 9 (1975), (1) 54-55, (2) 12-28, (3) 5-26.
- [22] I. M. Gelfand, R. MacPherson, *Geometry in grassmannians and a generalization of the dilogarithm*, Adv. in Math. 44 (1982), 279-312.
- [23] W. Gerdes, *Affine grassmannian homology and the homology of the general linear groups*, Duke Math. J., (1) 62 (1991), 85-103.
- [24] W. Gerdes, *The linearization of higher Chow cycles of dimension one*, Duke Math. J., (1) 62 (1991), 105-109.
- [25] A.B. Goncharov, *The classical polylogarithm, algebraic K-theory of fields and Dedekind zeta functions*, Bull. A. M. S., (1) 29 (1991), 155-161.
- [26] A.B. Goncharov, *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, preprint Max Planck Inst. 1992.
- [27] A.B. Goncharov, *Polylogarithms and motivic Galois groups*, Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle july 1991, preprint.
- [28] A.B. Goncharov, *Explicit construction of characteristic classes*, preprint Max Planck Inst. 1992.
- [29] S. Govindachar, *Explicit weight two motivic cohomology complexes and algebraic K-theory*, K-theory, 6 (1992), 387-430.
- [30] R. Hain, *Classical polylogarithms*, preprint.
- [31] R. Hain, R. MacPherson, *Higher logarithms*, Illinois J. of Math., 34 (1990), 392-475.
- [32] M. Hanamura, R. MacPherson, *Geometric construction of polylogarithms*, Duke Math. J., 70 (1993) 481-515.
- [33] H. Hiller, *λ -ring and algebraic K-theory*, J. of Pure and Appl. Alg., 20 (1981), 241-266.
- [34] W. Hulsbergen, *Conjectures in arithmetic algebraic geometry, a survey*, Aspects of Math., Vieweg 1992.

- [35] K. Igusa, *The Borel regulator map on pictures*, preprint.
- [36] M. Karoubi, *Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes ou algébriques*, preprint Univ. Paris VII, 52 (1993).
- [37] C. Kratzer, λ -structure en K -théorie algébrique, *Comm. Math. Helv.*, 55 (1980), 233-254.
- [38] S. Lichtenbaum, *The construction of weight two arithmetic cohomology*, *Inv. Math.*, 88 (1987), 183-215.
- [39] J.L. Loday, K -théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (4) 9 (1976), 309-377.
- [40] J.L. Loday, *Symboles en K -théorie algébrique d'ordre supérieur*, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 292 (1981), 863-866.
- [41] J. Milnor, *Algebraic K -theory and quadratic forms*, *Inv. Math.*, 9 (1970), 318-344.
- [42] J. Milnor, J. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, *Ann. of Math.*, (2) 81 (1965), 211-264.
- [43] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications*, *Proc. Int. Cong. of Math. 1962*, Stockholm, 526-530.
- [44] J. Oesterlé, *Polylogarithmes*, *Sém. Bourbaki*, 762 (1992-93).
- [45] D. Quillen, *Higher algebraic K -theory I*, *Springer Lect. Notes in Math.*, 341 (1973), 85-197.
- [46] D. Ramakrishnan, *Regulators, algebraic cycles and values of L -functions*, *Contemp. Math.*, 83 (1989), 183-310.
- [47] M. Rapoport, *Comparison of the regulator of Beilinson and of Borel*, in *Beilinson's conjectures on special values of L -functions*, 169-192, *Perspectives in Math.* 1988, Acad. Press.
- [48] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson Conjectures*, in *Beilinson's conjectures on special values of L -functions*, 1-35, *Perspectives in Math.* 1988, Acad. Press.
- [49] Ch. Soulé, *Opérations en K -théorie algébrique*, *Canad. J. of Math.*, 27 (1985), 488-550.
- [50] Ch. Soulé, *Régulateurs*, *Sém. Bourbaki 1984/85*, exp. 644, *Astérisque* 133/134 (1986), 237-253.

- [51] A.A. Suslin, *Homology of GL_n , characteristic classes and Milnor K-theory*, Springer Lect. Notes in Math., 1046 (1989), 357-375.
- [52] A.A. Suslin, *Algebraic K-theory of fields*, Proc. Int. Cong. of Math. 1986, Berkeley, 222-243.
- [53] A.A. Suslin, *K_3 of a field and the Bloch group*, Proc. Steklov inst. of Math., 4 (1991), 217-239.
- [54] J. Tate, *Symbols in Arithmetic*, Actes Cong. Int. Nice, 1970, tome 1, 201-211, Gauthier-Villars 1971.
- [55] B. Totaro, *Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory*, K-theory, 6 (1992), 177-189.
- [56] W.T. Van Est, *Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups*, Indag. Math., 15 (1953), 484-504.
- [57] J. Yang, *On the real cohomology of arithmetic groups and the rank conjecture for number fields*, Ann. Ecole Norm. Sup., 25 (1992), 287-306.
- [58] J. Yang, *The Hain-MacPherson third logarithm, the third Borel regulator and the values of Dedekind zeta function at 3*, preprint.
- [59] D. Zagier, *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta functions*, Inv. Math., 83 (1986), 285-301.
- [60] D. Zagier, *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields*, Proc. Texel Conf. on Arithm. Alg. Geometry 1989, Birkhäuser, Boston (1991), 391-430.

Jean-Louis CATHELIN
Laboratoire Jean Dieudonné
URA CNRS 168
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2