Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann [d'après A. Bolibruch]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 765, p. 103-119

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__103_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 765

Mars 1993

MONODROMIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À PÔLES SIMPLES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN [d'après A. Bolibruch]

par **Arnaud BEAUVILLE**

1. Introduction

Considérons un système différentiel linéaire d'ordre n

$$\text{(A)} \qquad y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$$

où $\mathrm{A}(z)\,dz$ est une forme différentielle méromorphe sur la sphère de Riemann, à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, admettant comme seules singularités des pôles simples. Autrement dit, on a

$$\mathrm{A}(z) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{\mathrm{A}_\alpha}{z-\alpha}\,,$$

où Σ est une partie finie de $\mathbf{C}$, et les A_α des matrices complexes. Pour éviter d'avoir à distinguer des cas particuliers, nous supposerons toujours que le système n'a pas de singularité à l'infini, ce qui se traduit par la relation $\sum_{\alpha\in\Sigma} \mathrm{A}_\alpha = 0$.

Le système (A) admet des solutions globales qui sont des fonctions *multiformes* sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$, c'est-à-dire des fonctions holomorphes (à valeurs dans $\mathbf{C}^n$) sur le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$. Ces solutions forment un espace vectoriel S de dimension n, sur lequel le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *)$ opère; la représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{S})$ correspondante est appelée *représentation de monodromie* du système (A). Le problème que je vais considérer dans cet exposé est de savoir si *toute représentation de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *)$ *peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

Ce problème a donné lieu à un certain nombre de malentendus, à commencer par son nom : il est souvent appelé *problème de Riemann* ou *problème de Riemann-Hilbert*, bien qu'il ne soit dû ni à Riemann, ni à Hilbert . Il a longtemps été considéré comme résolu, et ce n'est guère qu'il y a une dizaine d'années que les démonstrations classiques de Plemelj et Birkhoff ont été remises en question. Le mathématicien russe A. Bolibruch a récemment réglé la question en présentant une série de contre-exemples ([B1] à [B3]). Je vais présenter ici l'exemple de [B3], qui est plus simple et plus explicite.

Je remercie D. Bertrand, O. Gabber et B. Malgrange pour des commentaires qui m'ont été très utiles.

2. Un peu d'histoire

a) *Quelques généralités*

Considérons un système différentiel d'ordre n

$$\text{(A)} \qquad y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$$

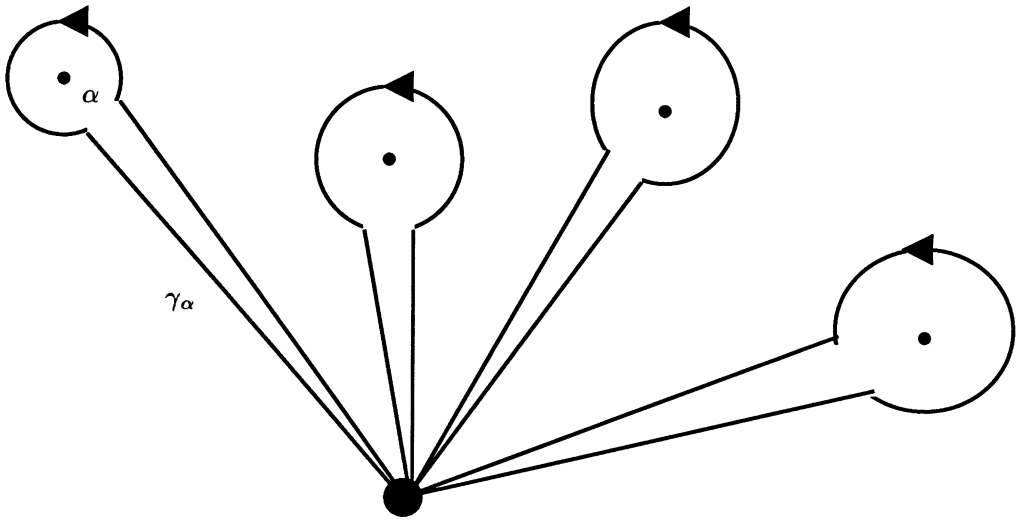
où la forme $\mathrm{A}(z)\,dz$ est méromorphe dans $\mathbf{P}^1$, et holomorphe à l'infini ; on note Σ l'ensemble de ses pôles.

Le système (A) admet un espace vectoriel S de dimension n de solutions, qui sont des fonctions multiformes sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$; par abus de langage, nous noterons encore $y(z)$ une telle fonction. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de S ; rappelons qu'on appelle *matrice fondamentale de solutions* de (A) associée à cette base la matrice $\mathrm{Y}(z)$ dont les colonnes sont $y_1(z), \ldots, y_n(z)$. Une telle matrice vérifie l'équation $\mathrm{Y}'(z) = \mathrm{A}(z)\,\mathrm{Y}(z)$; elle se transforme sous l'action d'un élément γ de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ en $\mathrm{Y}(z)\,\rho(\gamma)$, où $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ est la représentation de monodromie de (A) dans la base $(y_1, \ldots, y_n)$.

Le groupe $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est engendré par les classes de lacets $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ "tournant une fois autour de α " (voir figure page suivante), soumises à la relation $\prod_{\alpha \in \Sigma} \gamma_\alpha = 1$, pour un ordre convenable sur Σ . La représentation ρ est donc déterminée par la famille $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$, où M_α est la matrice de $\rho(\gamma_\alpha)$ dans la base

(1) *cf.* § 6 pour la relation avec le vingt-et-unième problème de Hilbert.

(2) J'utilise les conventions de [D], de sorte que le groupe fondamental opère *à droite* sur le revêtement universel (supposé pointé). D'autre part, j'omettrai désormais le point base dans la notation.



$(y_1, \ldots, y_n)$. Il s'agit de décider si toute famille de matrices $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ satisfaisant à $\prod_{\alpha\in\Sigma} \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{I}$ peut être obtenue de cette manière.

b) *Plemelj, Birkhoff*

Le problème était certainement dans l'air au début du vingtième siècle; j'ignore quand il a été formulé explicitement pour la première fois. Il apparaît par exemple dans le livre de Schlesinger [S], qui lui consacre un chapitre entier (sous le nom de problème de Riemann) et en donne une "solution" hautement fantaisiste. Une autre solution est proposée par Plemelj [P], développant une idée de Hilbert. En 1913, G. Birkhoff donne une variante plus simple de la démonstration de Plemelj [Bi].

Plemelj et Birkhoff procèdent tous deux en 3 étapes. Suivant une idée qui remonte à Riemann, ils construisent d'abord une matrice multiforme inversible $\mathrm{Y}(z)$ qui se transforme en $\mathrm{Y}(z)\,\rho(\gamma)$ par monodromie le long d'un lacet γ. La matrice $\mathrm{Y}'(z)\,\mathrm{Y}(z)^{-1}$ est alors invariante par monodromie, donc provient d'une matrice $\mathrm{A}(z)$ holomorphe dans $\mathbf{P}^1 - \Sigma$: ainsi $\mathrm{Y}(z)$ est une matrice fondamentale de solutions du système $y'(z) = \mathrm{A}(z)\,y(z)$, et celui-ci admet ρ comme représentation de monodromie. En outre, la matrice $\mathrm{Y}(z)$ construite est *à croissance polynomiale* au voisinage des points de Σ (voir le § 3 pour une définition précise); cela implique qu'il en est de même de $\mathrm{A}(z)$, qui est donc méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. Par

définition, les singularités d'un tel système sont dites régulières (*cf.* § 3) : Plemelj et Birkhoff réalisent donc ρ comme représentation de monodromie d'un système à singularités régulières.

Un point α de Σ étant fixé, ils montrent ensuite qu'on peut choisir $\mathrm{Y}(z)$ de manière que la matrice $\mathrm{A}(z)$ ait un pôle simple en tous les points de $\Sigma - \{\alpha\}$. Enfin ils modifient $\mathrm{Y}(z)$ de façon que le système ait également un pôle simple en α. C'est cette dernière étape qui est insuffisante : Plemelj comme Birkhoff supposent que la matrice M_α est diagonalisable (l'hypothèse est implicite chez Plemelj, tandis que Birkhoff affirme que "le cas général se traite de la même manière"). L'erreur de Plemelj est analysée en détail par Treibich dans [ENS].

Retenons de cet épisode malheureux que *le problème admet une solution lorsque l'une des matrices* M_α *est diagonalisable.*

c) *Lappo-Danilevskiĭ*

En 1928, le jeune mathématicien russe I. Lappo-Danilevskiĭ propose une approche tout-à-fait différente [L-D] : il écrit explicitement les solutions de (A) sous forme de séries de polylogarithmes. La méthode est si élégante que je ne résiste pas à l'envie d'en dire deux mots. Notons $\widetilde{\mathrm{U}}$ le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ et o son point base. Soit $\mathcal{S}(\Sigma)$ l'ensemble des suites finies d'éléments de Σ. Définissons par récurrence la fonction L_σ sur $\widetilde{\mathrm{U}}$, pour $\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)$, de la façon suivante. On pose $\mathrm{L}_\sigma(z) \equiv 1$ lorsque σ est la suite vide; si $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, on désigne par σ' la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ et on pose

$$\mathrm{L}_\sigma(z) = \int_o^z \frac{\mathrm{L}_{\sigma'}(u)\, du}{u - \alpha_p} .$$

Pour $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, posons $\mathrm{A}_\sigma := \mathrm{A}_{\alpha_p} \cdots \mathrm{A}_{\alpha_1}$. *Alors* $\mathrm{Y}(z) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} \mathrm{L}_\sigma(z)\, \mathrm{A}_\sigma$ *est une matrice fondamentale de solutions de* (A) : la convergence de cette série est un exercice, la relation $\mathrm{Y}'(z) = \mathrm{A}(z)\,\mathrm{Y}(z)$ est immédiate, et l'on a $\mathrm{Y}(o) = \mathrm{I}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, la matrice de monodromie M_α est donc égale à $\mathrm{Y}(o_\alpha)$, où o_α désigne le transformé de o par l'action de l'élément γ_α de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$. On obtient

$$\mathrm{M}_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} \mathrm{L}_\sigma(o_\alpha)\, \mathrm{A}_\sigma .$$

Lorsque $\sigma = (\alpha)$, on a $\mathrm{L}_\sigma(o_\beta) = \mathrm{L}_\sigma(o) = 0$ pour $\beta \neq \alpha$, et $\mathrm{L}_\sigma(o_\alpha) = 2\pi i$; l'égalité précédente se réécrit donc

$$\mathrm{M}_\alpha = \mathrm{I} + 2\pi i \mathrm{A}_\alpha + \sum_{\mathrm{Card}(\sigma)\geq 2} \mathrm{L}_\sigma(o_\alpha)\, \mathrm{A}_\sigma \ .$$

Il en résulte que l'application $(\mathrm{A}_\alpha) \mapsto (\mathrm{M}_\alpha)$ est analytique, et que son application tangente à l'origine est $2\pi i$ fois l'application identique. Le théorème d'inversion locale permet de conclure que *les matrices* $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ *sont les matrices de monodromie d'un système* $y'(z) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{\mathrm{A}_\alpha}{z-\alpha}\, y(z)$ *dès qu'elles sont suffisamment proches de l'identité* (on peut aussi déduire ce résultat de l'approche de Plemelj, *cf.* l'exposé IV.3 de [ENS]).

d) *Le point de vue moderne*

Il a été introduit par Röhrl [Rö]. Soient U une surface de Riemann, E un fibré holomorphe sur U. Rappelons qu'une *connexion* (holomorphe) sur E est un opérateur différentiel d'ordre 1

$$\nabla : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \otimes \Omega^1_{\mathrm{U}}$$

qui vérifie l'identité de Leibnitz $\nabla(fs) = f\nabla(s) + s \otimes df$ pour toute section s de E sur un ouvert V de U et toute fonction f holomorphe sur V (autrement dit, le symbole de ∇ est l'identité). Si $\mathrm{U} = \mathbf{P}^1 - \Sigma$, avec $\Sigma \neq \emptyset$, le fibré E est trivial, de sorte qu'une section de E s'identifie à une fonction holomorphe $y : \mathrm{U} \to \mathbf{C}^n$; il existe alors une application holomorphe $\mathrm{A} : \mathrm{U} \to \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\nabla y(z) = \big(y'(z) - \mathrm{A}(z)\, y(z)\big)\, dz \ .$$

Les sections horizontales de (E, ∇) (c'est-à-dire, par définition, les sections de E annulées par ∇) correspondent donc aux solutions du système différentiel $y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$.

Les sections horizontales multiformes (autrement dit holomorphes sur le revêtement universel de U) de (E, ∇) forment un espace vectoriel S de dimension n, sur lequel le groupe $\pi_1(\mathrm{U})$ opère; la représentation $\rho : \pi_1(\mathrm{U}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{S})$ est la *représentation de monodromie* associée à (E, ∇). On déduit facilement du théorème d'existence des solutions d'équations différentielles que *le foncteur qui*

associe à (E, ∇) *sa représentation de monodromie est une équivalence de la catégorie des fibrés holomorphes sur* U *munis d'une connexion sur la catégorie des représentations de* $\pi_1(\mathrm{U})$. On voit en particulier que toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système $y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$ holomorphe en dehors de Σ – mais cela ne nous donne aucune information sur le comportement de $\mathrm{A}(z)$ aux points de Σ.

Celui-ci a été étudié (dans un cadre beaucoup plus général) par Deligne [D]. Deligne montre qu'un couple (E, ∇) sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ admet un prolongement $(\overline{\mathrm{E}}, \overline{\nabla})$, où $\overline{\mathrm{E}}$ est un fibré sur $\mathbf{P}^1$ et $\overline{\nabla} : \overline{\mathrm{E}} \longrightarrow \overline{\mathrm{E}} \otimes \Omega^1_{\mathbf{P}^1}(\Sigma)$ une connexion méromorphe, admettant au plus des pôles simples aux points de Σ. De plus, deux tels prolongements diffèrent par un isomorphisme *méromorphe* aux points de Σ.

On en déduit facilement que toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système $y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$ méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et admettant des *singularités régulières* aux points de Σ (voir le § 3 pour une définition précise). Mais notre problème est plus subtil : il équivaut à trouver, pour tout fibré E sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ muni d'une connexion ∇, un prolongement $(\overline{\mathrm{E}}, \overline{\nabla})$ pour lequel le fibré $\overline{\mathrm{E}}$ est *trivial.* Les résultats de Deligne ont permis à Dekkers [Dk] de prouver que *ce problème admet une solution pour* $n = 2$.

Mentionnons pour finir l'approche très différente de Sato, Miwa et Jimbo [JMS], qui utilisent la théorie quantique des champs pour construire explicitement la matrice fondamentale $\mathrm{Y}(z)$ en fonction des matrices M_α, pourvu que celles-ci soient assez proches de l'identité.

3. L'étude locale

Notons D un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbf{C}$, $\mathrm{D}^* = \mathrm{D} - \{0\}$, et $\pi : \widetilde{\mathrm{D}^*} \to \mathrm{D}^*$ un revêtement universel de D^*. Nous choisirons une fois pour toutes une fonction $\log z$ sur $\widetilde{\mathrm{D}^*}$, et nous poserons $z^{\mathrm{C}} := e^{(\log z)\,\mathrm{C}}$ pour toute matrice complexe C.

On dira qu'une fonction holomorphe f sur $\widetilde{\mathrm{D}^*}$, à valeurs vectorielles, est *à croissance polynomiale* s'il existe un nombre réel A tel qu'on ait $\lim_{z \to 0} z^{-\mathrm{A}} f(s(z)) = 0$ pour tout secteur circulaire ouvert U d'angle $< 2\pi$ et toute section s du

revêtement π au-dessus de U. Le plus grand entier ν tel que ceci ait lieu pour tout $A < \nu$ est appelé *l'ordre* de f en 0, et noté $\nu(f)$. Toute fonction f holomorphe dans D^* et méromorphe en 0 est à croissance polynomiale, et son ordre est simplement l'ordre du zéro de f à l'origine. La fonction multiforme $z^\lambda(\log z)^k$ ($k \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{C}$) est à croissance polynomiale, et son ordre est $[\Re e\, \lambda]$.

On considère dans ce paragraphe un système différentiel d'ordre n

$$\text{(A)} \qquad y'(z) = A(z)\, y(z)$$

où la matrice $A(z)$ est holomorphe dans D^*.

DÉFINITION. – *On dit que le système* (A) *a une singularité régulière en* 0 *si toutes ses solutions ont une croissance polynomiale.*

Il est facile de voir qu' *un pôle simple de* $A(z)$ *est une singularité régulière* (majorer $\|y\|$ à l'aide d'une inéquation différentielle par rapport à $|z|$). La réciproque est fausse : un pôle d'ordre arbitrairement grand peut être une singularité régulière (exemple : $A(z) = \begin{pmatrix} n/z & 0 \\ 1/z^n & 0 \end{pmatrix}$). Je dois avertir le lecteur que la terminologie ne s'est imposée qu'assez récemment ; la littérature classique ([Bi], [G], [I]) réserve le nom de "singularité régulière" au cas où $A(z)$ a un pôle simple.

Choisissons une base de l'espace des solutions S de (A) ; notons $Y(z)$ la matrice fondamentale de solutions correspondante, et M la matrice de monodromie : la matrice $Y(z)$ est transformée en $Y(z)M$ par monodromie autour de l'origine. Notons L l'unique matrice carrée d'ordre n telle que $e^{2\pi i L} = M$ et que chaque valeur propre λ de L satisfasse à $0 \leq \Re e\,(\lambda) < 1$. La matrice $Y(z)\, z^{-L}$ est invariante par monodromie, donc définit une application holomorphe de D^* dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Comme la matrice z^L est à croissance polynomiale, on voit que *le système* (A) *admet une singularité régulière en* 0 *si et seulement si la matrice* $Y(z)\, z^{-L}$ *est méromorphe à l'origine.* Lorsque c'est le cas, les solutions de (A) sont des sommes finies de fonctions (à valeurs vectorielles) de la forme $z^\lambda(\log z)^k \varphi(z)$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{N}$ et φ holomorphe dans D.

Supposons désormais que le système (A) *admette une singularité régulière à l'origine.* L'ordre définit une filtration décroissante de l'espace S des solutions :

$$F^\nu(S) := \{y \in S \mid \nu(y) \geq \nu\}.$$

Les ordres des solutions de (A) forment donc une famille finie d'entiers (les entiers ν tels que $F^\nu \neq F^{\nu+1}$). Ecrivons ces entiers par ordre décroissant, chaque entier ν étant répété autant de fois que $\dim(F^\nu/F^{\nu+1})$. On obtient une suite $\nu^1 \geq \ldots \geq \nu^n$, la *suite des ordres* de (A) en 0. Elle est caractérisée par le fait qu'il existe une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de S telle que $\nu(y_i) = \nu^i$, et que toute base $(u_1, \ldots, u_n)$ de S, ordonnée de façon que $\nu(u_1) \geq \ldots \geq \nu(u_n)$, vérifie $\nu(u_i) \leq \nu^i$. On notera N la matrice $\operatorname{diag}(\nu^1, \ldots, \nu^n)$.

La filtration $F^\nu(S)$ est invariante par monodromie; on en déduit aussitôt qu'on peut trouver une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de S qui satisfait à $\nu(y_i) = \nu^i$ pour tout i, et dans laquelle la matrice de monodromie M est triangulaire supérieure. Une telle base sera appelée *base adaptée* de S en 0. Le lecteur se convaincra sans peine que la matrice $(y_1(z), \ldots, y_n(z))$ peut s'écrire dans une telle base sous la forme $V(z)\, z^N z^L$, où la matrice $V(z)$ est *holomorphe*. Le résultat suivant, qui semble dû à Gantmacher ([G], ch. XIV, § 10; voir aussi [L]) est plus subtil.

PROPOSITION 1. – *Supposons que le système* (A) *ait une singularité régulière à l'origine. Soit* $(y_1, \ldots, y_n)$ *une base adaptée de* S, *et soit* $Y(z)$ *la matrice fondamentale de solutions dont les colonnes sont* $y_1, \ldots, y_n$. *Pour que* $A(z)$ *ait au plus un pôle simple à l'origine, il faut et il suffit que l'on ait* $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$, *où la matrice* $V(z)$ *est holomorphe et* inversible *dans* D.

Je vais me contenter ici de démontrer que la condition est suffisante, en renvoyant à [B2] ou [L] pour la nécessité. Supposons donc qu'une matrice fondamentale de solutions de (A) s'écrive $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$, où $V(z)$ est holomorphe et inversible. En reportant dans l'égalité $Y'(z) = A(z)\, Y(z)$, on obtient

$$A(z) = V'(z)\, V(z)^{-1} + \frac{1}{z} V(z) \big(N + z^N L\, z^{-N}\big) V(z)^{-1} . \tag{1}$$

Comme L est triangulaire supérieure, la matrice $z^N L\, z^{-N}$ est holomorphe; on conclut que $A(z)$ admet un pôle simple à l'origine. ∎

COROLLAIRE 1. – *Notons* A_0 *la matrice résidu de* $A(z)$ *en* 0. *Le nombre* $\operatorname{Tr}(A_0 - N - L)$ *est un entier positif; pour qu'il soit nul, il faut et il suffit que* $A(z)$ *ait au plus un pôle simple à l'origine.*

Soit $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$ une matrice fondamentale de solutions correspondant à une base adaptée de S ; on a

$$\frac{d}{dz} \log \det Y(z) = \frac{d}{dz} \log \det V(z) + \frac{\operatorname{Tr} N}{z} + \frac{\operatorname{Tr} L}{z} .$$

Par ailleurs, on a $\frac{d}{dz}\log\det \mathrm{Y}(z) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Y}'(z)\,\mathrm{Y}(z)^{-1} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(z)$; en comparant les résidus à l'origine, on obtient

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}_0 - \mathrm{N} - \mathrm{L}) = \nu(\det \mathrm{V}(z)) \ .$$

Le corollaire résulte alors de la prop. 1. ∎

Le corollaire suivant ne sera pas utilisé dans la construction du contre-exemple, mais il me semble mériter d'être mentionné :

COROLLAIRE 2. – *Supposons que* $\mathrm{A}(z)$ *ait un pôle simple à l'origine. Soient* $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ *les valeurs propres de* A_0 *, comptées avec multiplicité, et rangées de façon que* $\Re e\,(\lambda^1) \geq \ldots \geq \Re e\,(\lambda^n)$ *. On a alors* $\nu^i = [\Re e\,(\lambda^i)]$ *, et les valeurs propres de* L *sont* $\lambda^1 - \nu^1, \ldots, \lambda^n - \nu^n$ *. Les valeurs propres de* M *sont* $(e^{2\pi i\lambda^1}, \ldots, e^{2\pi i\lambda^n})$ *.*

En multipliant par z les deux membres de l'égalité (1) et faisant tendre z vers 0 , on obtient

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{V}(0)\big(\mathrm{N} + \lim_{z\to 0} z^{\mathrm{N}}\mathrm{L}\,z^{-\mathrm{N}}\big)\,\mathrm{V}(0)^{-1} \ .$$

Comme la matrice L est triangulaire supérieure, on en déduit le corollaire. ∎

On prendra garde cependant que la matrice A_0 ne détermine pas la monodromie : il se peut par exemple que A_0 soit diagonalisable alors que L (ou M) ne le sont pas.

4. Le contre-exemple.

Revenons à l'étude d'un système différentiel à singularités régulières

$$\text{(A)} \qquad y'(z) = \mathrm{A}(z)\,y(z) \ ,$$

où la forme $\mathrm{A}(z)\,dz$ est méromorphe dans $\mathbf{P}^1$, à pôles dans Σ . Pour $\alpha \in \Sigma$, on notera $\nu_\alpha^1 \geq \ldots \geq \nu_\alpha^n$ la suite des ordres de (A) en α et N_α la matrice $\mathrm{diag}(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$; une base de S étant choisie, on notera M_α la matrice de la monodromie en α , et L_α la matrice L correspondante (§ 3). La formule des résidus permet de donner une formulation globale du cor. 1 ci-dessus :

COROLLAIRE 1′ . – *On a* $\sum_{\alpha\in\Sigma} \mathrm{Tr}(\mathrm{N}_\alpha + \mathrm{L}_\alpha) \leq 0$; *pour que l'égalité ait lieu, il faut et il suffit que tous les pôles de* $\mathrm{A}(z)$ *soient simples.* ∎

THÉORÈME. – *Soit* $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ *une représentation satisfaisant aux hypothèses suivantes :*

(i) ρ *n'est pas irréductible.*

(ii) *Chacune des matrices* M_α *a une seule valeur propre* μ_α *et un seul bloc de Jordan.*

(iii) $\prod_{\alpha \in \Sigma} \mu_\alpha \neq 1$.

Alors ρ *n'est pas isomorphe à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples.*

Supposons qu'il existe un système différentiel à pôles simples

$$\text{(A)} \qquad y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z)$$

dont la représentation de monodromie $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{S})$ s'identifie à ρ. Soient $\overline{\mathrm{S}}$ un sous-espace non trivial de S invariant par ρ, et p sa dimension.

Choisissons une base de S dont les p premiers vecteurs forment une base de $\overline{\mathrm{S}}$; chacune des matrices M_α s'écrit alors

$$\mathrm{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{M}}_\alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix} .$$

Ecrivons la matrice fondamentale de solutions correspondante sous la forme

$$\mathrm{Y}(z) = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{Y}}(z) & * \\ \mathrm{U}(z) & * \end{pmatrix} .$$

La matrice $\begin{pmatrix} \overline{\mathrm{Y}}(z) \\ \mathrm{U}(z) \end{pmatrix}$, étant de rang p, admet p lignes linéairement indépendantes ; en multipliant $\mathrm{Y}(z)$ à gauche par une matrice de permutation, on peut supposer que la fonction $\det \overline{\mathrm{Y}}(z)$ n'est pas identiquement nulle. La matrice $\overline{\mathrm{Y}}'(z)\,\overline{\mathrm{Y}}(z)^{-1}$ est méromorphe sur le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$, invariante par monodromie, et à croissance polynomiale aux points de Σ ; elle provient donc d'une matrice $\overline{\mathrm{A}}(z)$ méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. Ainsi $\overline{\mathrm{Y}}(z)$ est une matrice fondamentale de solutions du système différentiel

$$(\overline{\mathrm{A}}) \qquad \overline{y}'(z) = \overline{\mathrm{A}}(z)\, \overline{y}(z) .$$

C'est un système à singularités régulières ; ses singularités proviennent des points de Σ, et aussi de l'ensemble Σ' des zéros de $\det \overline{\mathrm{Y}}(z)$. Aux points de Σ', toutes

les solutions sont holomorphes; par conséquent la monodromie est triviale, et les ordres sont positifs.

Soit $\alpha \in \Sigma$. La monodromie de $(\overline{\mathrm{A}})$ en α est donnée par la matrice $\overline{\mathrm{M}}_\alpha$; comparons les ordres de $(\overline{\mathrm{A}})$ en α à ceux de (A). Quelle que soit la base adaptée $(y_1, \ldots, y_n)$ de S en α (§ 3), le sous-espace de S engendré par $(y_1, \ldots, y_p)$ est égal à $\overline{\mathrm{S}}$ (c'est l'unique sous-espace de dimension p invariant par M_α), et l'on obtient une base de solutions $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_p)$ de $(\overline{\mathrm{A}})$ en supprimant les $n-p$ dernières coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_p$. On a $\nu_\alpha(\overline{y}_i) \geq \nu_\alpha(y_i) = \nu_\alpha^i$, et les ordres $(\overline{\nu}_\alpha^i)$ de $(\overline{\mathrm{A}})$ en α vérifient

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\nu}_\alpha^i \geq \sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha(\overline{y}_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha^i .$$

La matrice M_α admet pour unique valeur propre μ_α, donc L_α admet pour unique valeur propre $\lambda_\alpha := \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\alpha$ (avec $0 \leq \Re e\, \lambda_\alpha < 1$). Le cor. 1′ donne alors

$$0 \geq \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{p} \overline{\nu}_\alpha^i + p\lambda_\alpha \Big) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \beta \in \Sigma'}} \nu_\beta^i \geq \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha^i + p\lambda_\alpha \Big) \geq \frac{p}{n} \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{n} \nu_\alpha^i + n\lambda_\alpha \Big) = 0$$

(la dernière inégalité signifie simplement que la moyenne de $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^p)$ est supérieure à celle de $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$, ce qui est clair puisqu'on a $\nu_\alpha^1 \geq \ldots \geq \nu_\alpha^n$).

Toutes ces inégalités sont donc des égalités; on en déduit qu'on a $\nu_\alpha^1 = \ldots = \nu_\alpha^n$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, et $\sum_{\alpha \in \Sigma} (\nu_\alpha^1 + \lambda_\alpha) = 0$. Prenant l'exponentielle on obtient $\prod_{\alpha \in \Sigma} \mu_\alpha = 1$, ce qui contredit l'hypothèse (iii). ∎

Exemple. – Les hypothèses du théorème entraînent $n \geq 4$ (ρ ne peut admettre une sous-représentation ou représentation quotient de dimension 1). Pour $n \geq 4$, il est facile de trouver des exemples de représentations satisfaisant aux hypothèses du théorème. Voici celui que donne Bolibruch, avec $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$:

$$\mathrm{M}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

On a $M_\alpha M_\beta M_\gamma = I$. Il est à peu près clair que chacune de ces matrices a une seule valeur propre, avec $\mu_\alpha = \mu_\beta = 1$ et $\mu_\gamma = -1$. Il n'est guère plus difficile de voir que M_β et M_γ ont un seul bloc de Jordan. Par suite *la représentation de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ *définie par ces* 3 *matrices ne peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

5. Autres résultats

L'article [B2] contient une étude complète du cas $n = 3$. Donnons d'abord deux définitions. On appelle *poids* d'un système $y'(z) = A(z)\,y(z)$ l'entier positif $\gamma(A) = \sum_{\alpha\in\Sigma}(\nu_\alpha^1 - \nu_\alpha^n)$; on appelle *poids fuchsien* d'une représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, et l'on note $\gamma(\rho)$, le minimum des poids des systèmes à pôles simples dont la représentation de monodromie est isomorphe à ρ.

Soit ρ une représentation de dimension 3 de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$. On peut résumer comme suit les résultats principaux de [B2] :

PROPOSITION 2. – a) *Si* ρ *est irréductible, ou si l'une des matrices* M_α *admet au moins* 2 *blocs de Jordan,* ρ *est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

b) *Supposons qu'aucune des conditions de* a) *ne soient réalisées, de sorte que* ρ *admet une sous-représentation ou une représentation quotient* $\overline{\rho}$ *de dimension* 2. *Pour que* ρ *soit la représentation de monodromie d'un système à pôles simples, il faut et il suffit qu'on ait* $\gamma(\overline{\rho}) = 0$.

Lorsqu'elle est possible, la construction d'un système à pôles simples réalisant la représentation ρ requiert une analyse délicate, qui occupe la plus grosse partie de [B2]. La démonstration de l'égalité $\gamma(\overline{\rho}) = 0$ dans le cas b) lorsque ρ provient d'un système à pôles simples est essentiellement la même que celle du théorème 1.

Cette proposition a fourni à Bolibruch ses premiers contre-exemples au problème des pôles simples :

COROLLAIRE. – *Considérons le système différentiel* $y'(z) = \mathrm{A}(z)\,y(z)$, *avec*

$$\mathrm{A}(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation de monodromie de ce système ne peut être réalisée comme la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.

Je vais me contenter d'indiquer les grandes lignes de la démonstration. Notons S l'espace des solutions du système, et $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{S})$ sa représentation de monodromie. La matrice $\mathrm{A}(z)$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{A}(z) = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & & \\ 0 & \overline{\mathrm{A}}(z) & \end{pmatrix}.$$

Le vecteur constant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de S, invariant par ρ. La représentation $\overline{\rho}$ induite par ρ sur $\mathrm{S}/\mathbf{C}e_1$ est la représentation de monodromie du système à pôles simples $\overline{y}'(z) = \overline{\mathrm{A}}(z)\,\overline{y}(z)$. Compte tenu du cor. 2 (p. 8), on a $\gamma(\overline{\mathrm{A}}) = 2$. Une analyse un peu plus fine donne en fait $\gamma(\overline{\rho}) = 2$. D'autre part, une étude locale permet de montrer que chacune des matrices de monodromie M_α n'a qu'un bloc de Jordan. Le corollaire résulte alors de la prop. 2. ∎

Plus récemment, Kostov [K] et indépendamment Bolibruch [B5] ont résolu le cas d'une représentation irréductible :

PROPOSITION 3. – *Toute représentation* irréductible *de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ *est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

Les deux démonstrations sont de nature algorithmique, et passablement compliquées. O. Gabber m'a communiqué une démonstration simple et élégante. Il réalise la représentation donnée par un fibré holomorphe $\mathrm{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_n)$ sur $\mathbf{P}^1$, muni d'une connexion méromorphe ∇ admettant des pôles simples aux points de Σ (*cf.* § 2 d)). Il montre qu'on peut modifier (E, ∇) au voisinage

d'un point de Σ de façon à diminuer le "défaut" $\operatorname{def}(\mathrm{E}) := n \sup_k a_k - \sum_{i=1}^{n} a_i$ (une telle manipulation ne change pas la monodromie à cause de la relation $\prod_{\alpha\in\Sigma} \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{I}$). Il prouve finalement qu'on peut continuer la procédure juqu'à arriver à $\operatorname{def}(\mathrm{E}) = 0$, grâce à la majoration $\operatorname{def}(\mathrm{E}) \leq \frac{1}{2}n(n-1)(\operatorname{Card}(\Sigma) - 2)$ que l'on déduit facilement de l'hypothèse d'irréductibilité.

6. Autres problèmes

A toute classe d'équations différentielles est associé un problème de monodromie : peut-on réaliser toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ comme représentation de monodromie d'une équation différentielle de la classe fixée ? Voici quelques exemples.

a) *Systèmes à singularités régulières*

La réponse est positive d'après Plemelj et Birkhoff, ou encore d'après la théorie de Deligne.

b) *Systèmes à pôles simples, en admettant des singularités apparentes*

Cela signifie que l'on autorise pour la matrice $\mathrm{A}(z)$ des pôles en dehors de Σ en lesquels la monodromie est triviale (autrement dit, toutes les solutions sont méromorphes). La réponse est positive, même en n'acceptant qu'une seule singularité apparente σ ; cela résulte de nouveau, soit de Plemelj et Birkhoff (prendre $\Sigma' = \Sigma \cup \{\sigma\}$ et $\mathrm{M}_\sigma = \mathrm{I}$), soit de la théorie de Deligne (tout fibré sur $\mathbf{P}^1 - \{\sigma\}$ admet une base méromorphe qui est holomorphe en dehors de σ).

c) *Equations différentielles de Fuchs*

Considérons une équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = 0\ ,$$

où les a_i sont des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^1$. Un point singulier α de (E) est dit *régulier* si toutes les solutions de (E) sont à croissance polynomiale au voisinage de α ; on dit que (E) est une *équation de Fuchs* si toutes ses singularités sont régulières. La théorie de Fuchs donne un critère commode pour décider si l'équation (E) a une singularité régulière en α : il faut et il suffit que a_i ait au plus un pôle

d'ordre i. Un calcul très simple montre alors qu'une équation de Fuchs d'ordre n avec s points singuliers dépend de $\frac{n}{2}(ns+s-2n)$ paramètres, alors que les représentations de dimension n de $\pi_1(\mathbf{P}^1-\Sigma)$ (à isomorphisme près) dépendent de $n^2(s-2)+1$ paramètres; on ne peut donc espérer obtenir n'importe quelle représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1-\Sigma)$ comme monodromie d'une telle équation.

d) *Equations différentielles de Fuchs en admettant des singularités apparentes*

C'est le vingt-et-unième des 23 problèmes proposés par Hilbert au Congrès international de Paris en 1900 :

"Prouver qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de Fuchs avec des singularités et un groupe de monodromie donnés."

Ce problème admet une réponse positive, qui est conséquence de a). D'après a), toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1-\Sigma)$ est la monodromie d'une connexion ∇ à singularités régulières; dans une base méromorphe convenable, on peut écrire

$$\nabla = \frac{d}{dz} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

où les a_i sont des fonctions rationnelles ("existence d'un vecteur cyclique", *cf.* par exemple [D], lemme 1.3, p. 42). L'équation $y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = 0$ a alors la même monodromie que ∇, et ses singularités sont régulières; mais les a_i peuvent avoir des pôles en des points où ∇ est holomorphe, ce qui crée des singularités apparentes. Dans [B4], Bolibruch donne une majoration du nombre de singularités apparentes qu'il est nécessaire d'introduire pour réaliser de cette façon une représentation donnée; il prouve en particulier que si la représentation est irréductible, ce nombre est au plus celui prédit par le calcul des constantes (dimension de l'espace des représentations moins dimension de l'espace des équations).

(3) Bien que Hilbert ne le précise pas, le contexte montre clairement que l'équation peut avoir des singularités apparentes en d'autres points.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] A. BOLIBRUCH : *The Riemann-Hilbert problem on the complex projective line* (en russe). Mat. Zametki **46**, 118-120 (1989).

[B2] A. BOLIBRUCH : *The Riemann-Hilbert problem.* Russian Math. Surveys **45**, 1-47 (1990).

[B3] A. BOLIBRUCH : *Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem.* Lecture Notes in Math. **1520**, 139-155; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).

[B4] A. BOLIBRUCH : *Construction of a Fuchsian equation from a monodromy representation.* Math. Notes **48**, 1090-1099 (1990).

[B5] A. BOLIBRUCH : *On sufficient conditions for the positive solvability of the Riemann-Hilbert problem* (sic). Math. Notes **51**, 110-117 (1992).

[Bi] G. BIRKHOFF : *The generalized Hilbert problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.* Proc. Amer. Acad. **49**, 521-568 (1913).

[D] P. DELIGNE : *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[Dk] W. DEKKERS : *The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank* 2 *on* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Lecture Notes in Math. **712**, 33-43; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[ENS] *Mathématique et Physique* (Séminaire de l'ENS 79-82). Progress in Math. **37**, Birkhäuser, Boston (1983).

[G] F. GANTMACHER : *The theory of matrices,* vol. II. Chelsea, New York (1959).

[I] E. INCE : *Ordinary differential equations.* Dover, New York (1956).

[JMS] M. SATO, T. MIWA, M. JIMBO : *Holonomic quantum fields II : the Riemann-Hilbert problem.* Publ. RIMS Univ. Kyoto **15**, 201-278 (1979).

[K] V. KOSTOV : *Fuchsian linear systems on* $\mathbf{CP}^1$ *and Riemann-Hilbert's problem.* Prépublication Université de Nice (1991).

[L-D] I. LAPPO-DANILEVSKIĬ : *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires.* Chelsea, New York (1953).

[L] A. LEVELT : *Hypergeometric functions.* Indag. Math. **23**, 361-403 (1961).

[P] J. PLEMELJ : *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* Monatshefte für Math. und Physik **19**, 205-246 (1908).

[Rö] H. RÖHRL : *Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Math. Annalen **133**, 1-25 (1957).

[S] L. SCHLESINGER : *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen.* Teubner, Leipzig-Berlin (1908).

Arnaud BEAUVILLE (*)
URA 752 du CNRS
Mathématiques – Bât. 425
Université Paris-Sud
F-91 405 Orsay Cedex

(*) L'auteur a bénéficié du soutien financier du projet européen "Geometry of Algebraic Varieties", Contrat n° SCI-0398-C(A).