Astérisque

ANDRÉ GRAMAIN

Rapport sur la théorie classique des nœuds (2ème partie)

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 732, p. 89-113
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__89_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1990
43ème année, 1990-91, n° 732

RAPPORT SUR LA THÉORIE CLASSIQUE DES NŒUDS (2ème partie)

par **André GRAMAIN**

Un *nœud* (non orienté) est une sous-variété différentiable (ou PL) de la sphère S_3 difféomorphe au cercle. Deux nœuds k et k' ont *même type* s'il existe un homéomorphisme h de S_3 sur S_3 tel que $h(k') = k$. Si deux nœuds k et k' ont même type, leurs complémentaires $S_3 - k$ et $S_3 - k'$ sont homéomorphes. La réciproque vient d'être démontrée par C. McA. Gordon et J. Luecke [GL].

THÉORÈME 1.— *Deux nœuds dont les complémentaires sont homéomorphes ont même type.*

La question se ramène à savoir si la donnée du complémentaire $S_3 - k$ détermine la classe d'homotopie du méridien du nœud k (prop. 1). La propriété était connue pour diverses classes de nœuds, notamment les nœuds composés (D. Noga [N], voir prop. 2) et pour les nœuds toriques (voir [BZ], p. 274) ; évidemment aucun contre-exemple n'était connu. Un résultat partiel avait été obtenu en 1987 [CGLS] selon lequel un complémentaire de nœud ne pouvait provenir que de deux types de nœuds au plus.

Le groupe d'un nœud k est le groupe fondamental $\pi_1(S_3 - k)$. C.D. Feustel et W.Whitten avaient démontré en 1978 [FW] que le théorème 1 implique le résultat suivant :

THÉORÈME 2.— *Deux nœuds indécomposables dont les groupes sont isomorphes ont des complémentaires homéomorphes.*

Ce théorème a été établi avant le théorème 1 par W. Whitten ([Wh], 1987) en utilisant seulement les résultats partiels de [CGLS]. Pour un nœud

composé, la donnée du groupe ne détermine pas le type du nœud lui-même, mais elle détermine les types de ses composants indécomposables dont l'assemblage avec des orientations différentes peut donner un groupe isomorphe ([FW]).

Dans leur article [GL], C. McA. Gordon et J. Luecke donnent en 40 pages agréables à lire la démonstration complète du théorème 1. Nous en donnons un aperçu dans la deuxième partie de cet exposé. Pour commencer, nous abordons la question de remonter du groupe à la variété du nœud. Nous avons rassemblé en Appendice certains théorèmes utilisés ; signalons comme ouvrage de référence le livre bleu de G. Burde et H. Zieschang [BZ, 85] et, comme introduction rapide, un précédent exposé [Gr].

1. CHIRURGIE DE DEHN

Étant donné un nœud k dans S_3, on entoure k d'un voisinage tubulaire fermé $U(k)$. La *variété du nœud* est le complémentaire $E(k)$ de l'intérieur de $U(k)$. Elle a l'homologie d'un cercle. Le bord commun de $U(k)$ et $E(k)$ est un tore $T(k)$. Inversement, d'après un théorème classique d'Alexander [A], un tore plongé sépare la sphère S_3 en deux composantes dont l'une est un tore plein et l'autre, par conséquent, la variété d'un nœud. Sur le tore $T(k)$, on appelle *méridien* un cercle plongé m dont la classe d'homotopie $[m]$ est, à l'orientation près, celle d'une fibre de la fibration du voisinage

Figure 1

tubulaire. Un *parallèle* (ou *longitude*) est un cercle homotope à une section de cette fibration et dont la classe d'homologie est nulle dans $E(k)$. Le *groupe* $G(k)$ *du nœud* k est le groupe fondamental $\pi_1(E(k))$ relatif à un point-base $*$ que nous supposons situé sur $T(k)$. Si le nœud k n'est pas

trivial, l'homomorphisme canonique de $\pi_1(T(k))$ dans $G(k)$ est injectif (voir [Gr]) ; son image $H(k)$ est appelée *sous-groupe périphérique.*

PROPOSITION 1.— *Soient k et k' deux nœuds et φ un isomorphisme de $G(k')$ sur $G(k)$.*

(a) *Il existe une équivalence d'homotopie f de $(E(k'),*)$ dans $(E(k),*)$ telle que $\pi_1(f) = \varphi$.*

(b) *Si φ induit un isomorphisme de $H(k')$ sur $H(k)$, il existe un homéomorphisme h de $E(k')$ sur $E(k)$ tel que $\pi_1(h) = \varphi$.*

(c) *Soient m et m' des méridiens de k et k', $[m]$ et $[m']$ leurs classes d'homotopie. Si l'hypothèse* (b) *est satisfaite, pour que l'homéomorphisme h se prolonge en un homéomorphisme de S_3 sur S_3, il faut et il suffit que $\varphi([m']) = \pm[m]$.*

La variété E d'un nœud a l'homotopie d'un 2-complexe. En outre, le groupe $\pi_2(E)$ est nul : en effet, s'il n'était pas nul, il existerait une sphère plongée différentiablement non homotope à 0 (théorème de la sphère) et une telle sphère sépare S_3 en deux boules fermées (théorème d'Alexander-Schönflies) dont l'une est contenue dans E, ce qui est contradictoire. Par suite l'isomorphisme φ se réalise par une équivalence d'homotopie f de $(E(k'),*)$ dans $(E(k),*)$.

Notons m, m', ℓ, ℓ' des méridiens et parallèles de k et k' aux points $*$. Sous l'hypothèse (b), par prolongement des homotopies, on peut déformer l'application f pour qu'elle envoie m' et ℓ' dans le bord $bE(k)$ de $E(k)$, puis, comme $\pi_2(E(k)) = 0$, pour que f induise un homéomorphisme de $bE(k')$ sur $bE(k)$. Le *théorème de Waldhausen* permet alors de déformer f en un homéomorphisme et même un difféomorphisme.

Les parallèles de k sont caractérisés comme générateurs du noyau de $H_1(bE(k)) \to H_1(E(k))$. Sous l'hypothèse (b), on a donc $\varphi([\ell']) = \pm[\ell]$, donc $\varphi([m']) = \pm[m]+n[\ell]$. Pour que h se prolonge en un homéomorphisme de S_3 sur S_3, il faut et il suffit que $n = 0$.

Remarque.— Un nœud k possède la propriété (P) s'il y a une unique manière, à homotopie près, d'obtenir une sphère d'homotopie en collant un tore plein à $E(k)$ le long de $bE(k)$. Il revient au même de dire que le

sous-groupe distingué de $G(k)$ engendré par $[m][\ell]^n$ n'est égal à $G(k)$ que si $n = 0$. Si les variétés de deux nœuds sont homéomorphes, et si l'un des deux nœuds possède la propriété (P), les nœuds ont même type. La propriété (P) a été introduite par les chercheurs de contre-exemple à la conjecture de Poincaré.

2. ANNEAUX ESSENTIELS

Posons $A = S_1 \times [0,1]$, $bA = S_1 \times \{0,1\}$. Un *anneau singulier* dans une variété à bord V est une application $f : (A, bA) \to (V, bV)$. L'anneau singulier f est *essentiel* si :

(a) l'anneau f est incompressible (*i.e.* $\pi_1(f)$ est injectif),

(b) le chemin $f|(* \times [0,1])$ n'est pas strictement homotope à un chemin dans bV.

Supposons que le bord bV est incompressible (*i.e.* $\pi_1(bV_i) \to \pi_1(V)$ injectif pour chaque composante bV_i de bV), que $\pi_2(V) = 0$ et que $\pi_1(f)$ est injectif. Alors, si l'anneau f n'est pas essentiel, l'application f est homotope relativement à bA à une application dont l'image est dans le bord bV.

Le *théorème de l'anneau* ([CF], [Ja], [Sc]) affirme qu'une variété de dimension 3 qui contient un anneau singulier essentiel dont le bord est plongé, contient un anneau essentiel plongé de même bord.

Si E est la variété d'un nœud et $f : A \to E$ un anneau incompressible plongé, l'image $f(bA)$ du bord découpe deux anneaux B_1 et B_2 sur le tore bE. Les tores $B_1 \cup f(A)$ et $B_2 \cup f(A)$ séparent E en deux variétés à bord torique qui sont soit des tores pleins, soit des variétés de nœud (théorème d'Alexander). Si l'anneau f n'est pas essentiel, on peut démontrer à l'aide du théorème du lacet qu'il est parallèle au bord, c'est-à-dire qu'il existe un plongement $F : A \times [0,1] \to E$ tel que $F(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et $F((A \times \{1\}) \cup (bA \times [0,1])) \subset bE$.

Exemples.— 1) Si un nœud k est *composé* de deux nœuds k_1 et k_2, la variété $E(k)$ est la réunion des variétés $E(k_1)$ et $E(k_2)$ recollées le long d'un anneau dont le bord est constitué de méridiens pour les trois nœuds k_1, k_2 et k. Si

aucun des nœuds k_1 ou k_2 n'est trivial, cet anneau est essentiel. Le groupe $G(k)$ est somme amalgamée $G(k_1) *_{\mathbf{Z}} G(k_2)$ où les classes de méridiens convenables $[m_1]$ et $[m_2]$ sont identifiées entre elles.

composé **cable**

Figure 2

2) Soient h un nœud, m et ℓ un méridien et un parallèle de h et (p, q) un couple de nombres premiers entre eux. Un cercle k plongé dans le tore $T(h) = bE(h)$, dont la classe (d'homotopie ou d'homologie) est $p[m] + q[\ell]$, est par définition un (p, q)-*cable* du nœud *porteur* h. Prenons un voisinage tubulaire $U(k)$ dont l'intersection avec $T(h)$ soit un anneau B. L'anneau $A = T(h) - int(B)$ sépare $E(k)$ en un tore plein $U(h) - int(U(k))$ d'âme h et une variété $E(h) - int(U(k))$ difféomorphe à $E(h)$. Les composantes de bA ont pour classe $q[\ell]$ dans le tore plein $U(h) - int(U(k))$, p fois un générateur dans $H_1(E(h))$ et pq fois un générateur dans $H_1(E(k))$. Si le nœud h n'est pas trivial et si $|q| \geq 2$, l'anneau A est donc essentiel. Si le nœud h est trivial, le nœud k est le *nœud torique* de type (p, q) ; si $|p| \geq 2$ et $|q| \geq 2$, ce nœud n'est pas trivial et l'anneau A est essentiel.

PROPOSITION 2 (*cf* [FW], [Wh 74], [Si]).— *Supposons que la variété d'un nœud k contienne un anneau essentiel plongé A. L'anneau A sépare $E(k)$ en deux variétés X_1, X_2 et l'on est dans l'un des deux cas suivants qui s'excluent :*

(a) *Aucune des variétés X_1 ou X_2 n'est un tore plein, le nœud k est décomposable, chaque composante de bA est un méridien de k.*

(b) *L'une au moins des variétés X_1 ou X_2 est un tore plein, le nœud k est un (p, q)-cable, $|q| \geq 2$, de l'âme de ce tore, les composantes de bA ont pour classe $[m]^n[\ell]^{\pm 1}$ dans $G(k)$.*

On a déjà vu que bA sépare le tore $T(k)$ en deux anneaux B_1, B_2 et que A sépare $E(k)$ en deux variétés X_1 et X_2 dont les bords sont les tores $B_1 \cup A$ et $B_2 \cup A$.

Figure 3

Supposons que ni X_1 ni X_2 ne soient des tores pleins. Les variétés $X_2 \cup U(k)$ et $X_1 \cup U(k)$ qui sont les adhérences de leurs complémentaires dans S_3 sont alors des tores pleins (théorème d'Alexander), leurs âmes sont des nœuds k_1, k_2 et X_i est la variété du nœud k_i. D'après le théorème de Van Kampen, le groupe $\pi_1(X_1 \cup U(k))$ est somme amalgamée de $\pi_1(X_1)$ et $\pi_1(U(k))$ le long de $\pi_1(B_1)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi_1(X_1) \arrow[dr] & \\ \pi_1(B_1) = \mathbf{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z}. \\ & \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si $\pi_1(B_1) \to \pi_1(U(k))$ était injectif, $\pi_1(X_1) \to \pi_1(X_1 \cup U(k))$ serait injectif, ce qui est absurde car le nœud k_1 n'est pas trivial. Les homomorphismes $\pi_1(B_1) \to \pi_1(U(k))$ et $\pi_1(B_1) \to \pi_1(X_1 \cup U(k))$ sont donc nuls ; les composantes de bB_1 $(= bA)$ sont des méridiens de k et k_2, et similairement de k_1. Cette démonstration, dûe à D. Noga [N], prouve aussi qu'un nœud décomposable possède la propriété (P). En effet, si l'on attache à $X_1 \cup X_2$ un tore plein V au lieu de $U(k)$, de telle sorte que $X_1 \cup X_2 \cup V$ soit une sphère d'homotopie, alors $X_1 \cup V$ est un tore d'homotopie, et bA est encore constitué de méridiens de V.

Supposons au contraire que X_1 soit un tore plein. Remarquons d'abord que $X_1 \cup U(k)$ est un tore plein. Cela résulte du théorème d'Alexander si X_2 est une vraie variété de nœud. Si X_2 est un tore plein, la variété $E(k) = X_1 \cup X_2$ est la variété d'un nœud torique k'. Comme les nœuds toriques ont la propriété (P) ([BZ], p. 274), les méridiens et parallèles pour

k' et pour k sont les mêmes sur $bE(k)$, donc $X_1 \cup U(k)$ est un tore plein puisque $X_1 \cup U(k')$ en est un. Appliquons alors le théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1(X_1 \cup U(k))$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi_1(X_1) = \mathbf{Z} \arrow[dr] & \\ \pi_1(B_1) = \mathbf{Z} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z}. \\ & \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

L'un des deux homomorphismes φ ou ψ est un isomorphisme ; comme l'anneau A est essentiel, l'homomorphisme φ est injectif, mais pas bijectif ; c'est donc la multiplication par un entier q tel que $|q| \geq 2$. Le nœud k est alors un (p,q)-cable du nœud k_2, âme du tore plein X_1.

3. ÉQUIVALENCES D'HOMOTOPIE (d'après [FW])

Dans ce n°, nous admettons le théorème 1 pour démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.— *Soient k et k' deux nœuds dont les groupes sont isomorphes. Si l'un est indécomposable, l'autre aussi et ils ont même type. Si k est un composé $k_1 \# \cdots \# k_{m+1}$ de nœuds indécomposables, k' est un composé $k'_1 \# \cdots \# k'_{m+1}$ de nœuds tels que k_i et k'_i aient même type* (non orienté).

Le théorème de Gordon-Luecke intervient pour le passage de la variété au type du nœud dans le cas des nœuds indécomposables, mais aussi pour démontrer que les variétés sont homéomorphes dans le cas particulier des cables.

3.1. *Si la variété $E(k)$ ne contient pas d'anneau essentiel*, un théorème profond de K. Johannson ([Jo], prop. 14.9) et C.D. Feustel ([F], th. 10) (voir aussi [Ja], th. X.15) affirme que les variétés $E(k)$ et $E(k')$ sont homéomorphes, et on conclut par le théorème 1. Nous n'expliquerons pas ici le théorème de Johannson-Feustel.

3.2. Dans le cas contraire, nous utiliserons le lemme suivant (*cf.* [Wa], 1967, lemma 1.1, [St]) :

Lemme 1.— *Soient* $g : E(k') \to E(k)$ *une application telle que* $\pi_1(g)$ *soit injectif et* A *un anneau essentiel plongé dans* $E(k)$. *L'application* g *est homotope à une application différentiable* f *telle que :*

(a) *L'application* f *est transverse à* A, *l'image réciproque* $A' = f^{-1}(A)$ *est une surface compacte orientable sans bord relatif.*

(b) *Toute composante* A'_i *de* A' *est un anneau essentiel dans* $E(k')$ *et* f *induit une injection de* $\pi_1(A'_i)$ *dans* $\pi_1(A)$.

(c) *Si* $\pi_1(g)$ *est un isomorphisme,* A' *n'est pas vide.*

Par densité, on déforme g en une application différentiable f transverse à A, d'où (a). Soit A'_1 une composante de A'. Si A'_1 est une sphère, on peut la supprimer purement et simplement car A'_1 borde une boule dans $E(k')$ et $f|A'_1$ est homotope à 0 dans $E(k)$. Si $\pi_1(A'_1) \to \pi_1(A)$ n'est pas injectif, il existe un cercle C plongé non homotope à 0 dans A'_1 et tel que $f|C$ soit homotope à 0 dans A. Ce cercle C est homotope à 0 dans $E(k')$; d'après le lemme de Dehn, il borde un disque D plongé dans $E(k')$. On peut supposer le disque D transversal à A' ; en éliminant les composantes de $A' \cap D$ qui sont homotopes à 0 dans A', on peut trouver une composante C_0 de $A' \cap D$ non homotope à 0 dans A' et bordant un disque D_0 tel que $A' \cap D_0 = C_0$. On peut alors déformer f au voisinage de D_0 de façon que la composante A'_0 de A' qui contient C_0 subisse une chirurgie éliminant C_0 (procédé de Stallings [St]). Une telle chirurgie augmente de 2 unités la caractéristique

Figure 4

$\chi(A')$, elle ne produit pas de sphère, elle augmente d'au plus une unité le cardinal de $\pi_0(A')$. Comme A' ne contient pas de sphère, on a $\chi(A') \leq \#\pi_0(A')$, et au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient l'injectivité de $\pi_1(f)$ pour chaque composante de A'. Les composantes de A' ont alors

des groupes fondamentaux isomorphes à des sous-groupes de $\mathbf{Z}$; ce sont des disques ou des anneaux. Si une composante est un disque D, son bord bD est homotope à 0 dans $E(k')$ donc dans $bE(k')$ (car le nœud k' n'est pas trivial) ; bD borde un disque D_0 dans $bE(k')$ et la sphère $D \cup D_0$ borde une boule dans $E(k')$; on peut déformer f au voisinage de cette boule pour éliminer D. Si une composante de A' est un anneau non essentiel, comme il est incompressible, il est parallèle au bord et on peut aussi le supprimer, d'où (b).

Enfin, si $f^{-1}(A)$ est vide, l'image de f est contenue dans l'une des sous-variétés de $E(k)$ découpées par A, par exemple X_1. Comme l'anneau A est essentiel, $\pi_1(X_1)$ est un vrai sous-groupe de $\pi_1(E(k))$ et $\pi_1(f)$ ne peut être un isomorphisme.

3.3. *Supposons que la variété $E(k)$ contienne un anneau essentiel.* Le nœud k est alors un cable ou un nœud décomposable (prop. 2) et ces deux possibilités s'excluent mutuellement d'après un théorème de H. Schubert ([Schu], 21, Satz 2).

Supposons dans cette section que k soit un (p, q)-cable. Soient A un anneau essentiel comme dans la proposition 2,b et f une homéotopie de $E(k')$ dans $E(k)$ satisfaisant aux conditions du lemme 1. Si une composante A'_i de A' séparait $E(k')$ en deux variétés de nœuds non triviaux, les composantes bA'_i seraient des méridiens de k' (prop. 2) et engendreraient $H_1(E(k'))$. Or la classe d'une composante de bA est pq fois un générateur de $H_1(E(k))$. Par suite, l'anneau A'_i décompose $E(k')$ en un tore plein V'_i et une variété W'_i, et l'homomorphisme $\pi_1(A'_i) \to \pi_1(V'_i)$ n'est pas surjectif, sinon l'anneau A'_i serait parallèle au bord. Si W'_i est un tore plein, k' est un nœud torique. Ce cas est entièrement résolu par un théorème de G. Burde et H. Zieschang [BZ, 66] : pour qu'un nœud k soit un nœud torique, il faut et il suffit que le centre du groupe $G(k)$ ne soit pas trivial, et le type d'un nœud torique est déterminé par son groupe.

Écartons le cas des nœuds toriques ; la variété W'_i est alors la variété d'un nœud non trivial h'_i, âme de V'_i, et le nœud k' est un (p', q')-cable du nœud porteur h'_i (prop. 2). Comme l'homéomorphisme $\pi_1(A'_i) \to \pi_1(A)$ est injectif, pq divise $p'q'$. D'après un résultat de H. Schubert ([Schu], 21,

Satz 5), la donnée d'un cable k détermine le porteur h et le couple (p, q) aux signes près. Appliquant ce qui précède à une homéotopie de $E(k)$ dans $E(k')$, on en déduit que $p'q'$ divise pq. Par suite $pq = \pm p'q'$ et f induit une homéotopie de A'_i dans A. On peut donc supposer que f induit un homéomorphisme de A'_i sur A, et ceci pour chaque composante A'_i de A'.

Si A'_1 et A'_2 sont deux composantes de A', les variétés W'_1 et W'_2 sont emboîtées et leur différence est un tore plein. En effet, les anneaux disjoints A'_1 et A'_2 séparent la variété $E(k')$ en V'_1 et W'_1 d'une part, V'_2 et W'_2 d'autre

Figure 5

part ; on a donc les possibilités suivantes : (a) $W'_1 \cap W'_2 = \phi$, (b) $V'_1 \cap V'_2 = \phi$, (c) $W'_1 \subset W'_2$ ou $W'_1 \subset W'_2$.

Dans le cas (a), l'anneau A'_1 étant incompressible dans $E(k')$, les homomorphismes $\pi_1(A'_1) \to \pi_1(W'_1)$ et $\pi_1(A'_1) \to \pi_1(V'_1 \cap V'_2)$ sont injectifs, donc l'homomorphisme $\pi_1(W'_1) \to \pi_1(V'_2)$ est injectif (théorème de van Kampen), ce qui est absurde.

Dans le cas (b), l'anneau A'_2 décompose W'_1 en le tore plein V'_2 et la variété $Y = W'_1 \cap W'_2$ qui est soit un tore plein, soit la variété d'un nœud. Dans les deux cas, l'anneau A'_2 est essentiel dans W'_1 et les composantes de bA'_2 ont même classe, dans le tore plein $S_3 - \mathrm{int}(W'_1)$ que l'âme de ce tore plein (prop. 2). Les composantes de bA'_1 sont parallèles à celles de bA'_2 sur le tore bW'_1 et l'homomorphisme $\pi_1(A'_1) \to \pi_1(V'_1)$ est donc surjectif, ce qui est absurde.

Figure 6

On est donc dans une des configurations de (c), par exemple $W_1' \subset W_2'$. Le même argument que dans le cas (a) montre alors que l'homomorphisme $\pi_1(W_2' \cap V_1') \to \pi_1(V_1')$ est injectif et que $W_2' \cap V_1'$ est nécessairement un tore plein.

D'après ce qui précède, on peut numéroter les composantes $A_1', \cdots, A_k'$ de A' de sorte que $W_1' \subset W_2' \subset \cdots W_k'$. *Démontrons que l'on peut déformer l'homéotopie f pour rendre A' connexe.* Pour $i = 2, \cdots, k$, posons $X_i' = W_i' \cap V_{i-1}'$, et $X_{k+1}' = V_k'$. Notons X_1 et X_2 les variétés découpées par l'anneau A dans $E(k)$. L'application f envoie chaque X_i' dans X_1 ou X_2.

Figure 7

Supposons par exemple $f(W_1') \subset X_1$, on a alors $f(X_i') \subset X_{[i]}$, où $[i] = 1$ ou 2, et $i \equiv [i] \bmod.2$. Soit $*$ un point-base dans A, et pour $i = 1, \cdots k$, soit $*_i'$ l'image réciproque de $*$ par f dans A_i'. Comme f est une homéotopie, le théorème général de van Kampen implique qu'il existe un indice $i \in [2, k]$ et un chemin α reliant $*_{i-1}'$ à $*_i'$ dans X_i' tel que $f \circ \alpha$ soit un lacet en $*$ homotope à 0 dans $X_{[i]}$. Cet argument du "binding tie" de Stallings ([St]) est détaillé dans [BZ], p. 293. Comme X_i' est un tore plein, il existe deux arcs β et γ reliant $*_{i-1}'$ à $*_i'$ dans bX_i' dont la réunion borde un disque

Figure 8

méridien D de X'_i et tels que les lacets $f \circ \beta$ et $f \circ \gamma$ soient homotopes à 0 dans $X_{[i]}$. Comme $\pi_2(X_{[i]}) = 0$, on peut, par une déformation constante hors d'un voisinage de X'_i, déformer f de façon que l'image de D soit concentrée au point $*$. Puis, comme $\pi_3(X_{[i]}) = 0$, on peut déformer f pour que $f(X'_i) \subset A$. Il reste alors à déplacer un peu f vers l'intérieur de $X_{[i+1]}$ pour supprimer les composantes A'_i et A'_{i+1} de $f^{-1}(A)$. Par récurrence, on arrive donc à rendre A' connexe.

On est alors dans la situation suivante : le nœud k est un (p,q)-cable, $E(k)$ est la réunion de la variété $E(h)$ du nœud porteur h et d'un tore plein V collés le long de l'anneau A. De même le nœud k' est un (p',q')-cable, $E(k')$ est la réunion d'une variété de nœud $E(h')$ et d'un tore plein V' collés le long de A'. L'application $f : E(k') \to E(k)$ est une homéotopie, elle induit un homéomorphisme de A' sur A, et $A' = f^{-1}(A)$. Comme $\pi_1(f)$ est un isomorphisme de $\pi_1(E(h')) *_{\pi_1(A')} \pi_1(V')$ sur $\pi_1(E(h)) *_{\pi_1(A)} \pi_1(V)$, et que les homomorphismes $\pi_1(A') \to \pi_1(V')$ et $\pi_1(A) \to \pi_1(V)$ sont injectifs, nécessairement l'application f induit une homéotopie de $E(h')$ dans $E(h)$ et une homéotopie de V' dans V.

Soit B' l'anneau complémentaire de A' dans $bE(h')$; la restriction $f|B'$ est un anneau incompressible dans $E(h)$, mais pas essentiel car les composantes de $f(bB') = bA$ ont pour classe $p[m] + q[\ell]$, $|q| \geq 2$, où m et ℓ sont un méridien et un parallèle de h (prop. 2). Par suite, on peut supposer $f(B') \subset bE(h)$, donc $f(bE(h')) \subset bE(h)$. D'après le théorème de Waldhausen, on peut supposer que f induit un homéomorphisme de $E(h')$ sur $E(h)$ et une homéotopie de V' dans V. En regardant la classe des

Figure 9

composantes de bA' et bA dans V' et V, on voit que $q' = \pm q$, donc $p' = \pm p$. L'homéomorphisme f de $E(h')$ sur $E(h)$ respecte les parallèles et les méridiens de h' et h (*théorème de Gordon-Luecke*). Les variétés $E(k')$ et $E(k)$ sont donc homéomorphes. Les nœuds k et k' ont même type d'après le théorème de Gordon-Luecke.

3.4. *Supposons enfin que le nœud k soit décomposable* et soit A un anneau essentiel séparant $E(k)$ en deux variétés de nœud non triviales X_1 et X_2. Soit $f : E(k') \to E(k)$ une homéotopie satisfaisant aux conditions du lemme 1. Alors $f^{-1}(A)$ est constitué d'anneaux essentiels dont les bords sont des méridiens de k'.

Figure 10

En effet, dans le cas contraire, k' serait un cable (prop. 2) donc k serait aussi un cable d'après 3.3, ce qui est contraire à l'hypothèse que k est décomposable. Les anneaux $A'_1 \cdots A'_k$ qui composent $f^{-1}(A)$ partagent $E(k')$ en des variétés $X'_1 \cdots X'_{k+1}$ qui sont des tores pleins ou des variétés de nœud, et les homomorphismes de $\pi_1(X'_i)$ dans $\pi_1(X_j)$ induits par f sont

injectifs car les homomorphismes de $\pi_1(X_i')$ dans $\pi_1(E(k'))$ sont injectifs (théorème de van Kampen).

Si le nœud k est un composé $k_1\#\cdots\#k_{m+1}$ de nœuds indécomposables, on peut supposer, par récurrence sur m, que la variété $E(k)$ est partagée en variétés $E(k_1),\cdots,E(k_{m+1})$ par des anneaux essentiels disjoints $A_1,\cdots,A_m$, que l'homéotopie f est transversale à la réunion A des anneaux A_i et que $f^{-1}(A)$ est constitué d'anneaux essentiels $A_1'\cdots A_n'$ dont les bords sont des méridiens et qui partagent $E(k')$ en variétés E_j', $1\leq j\leq n+1$. La variété E_j', pour $j\neq 1$, $n+1$, est bordée par des anneaux A_{j-1}', A_j' et deux anneaux B_j', C_j' de $bE(k')$; la variété E_1' (resp. E_{n+1}') est bordée par A_1' (resp. A_n') et un anneau B_1 (resp. B_{n+1}) de $bE(k')$. L'application f envoie E_j' dans une variété $E(k_i)$ et $\pi_1(f|E_j')$ est injectif. Les anneaux $f|B_j'$ et $f|C_j'$ ne peuvent être essentiels, sinon $E(k_i)$ contiendrait un anneau essentiel plongé dont le bord est constitué de méridiens (théorème de l'anneau) ce qui contredirait l'hypothèse que k_i est indécomposable (prop. 2). Les anneaux $f|B_j'$ et $f|C_j'$ sont donc parallèles au bord de $E(k_i)$. Deux cas se présentent :

(a) Le parallèle de E_j' est homotope à 0, la variété E_j' est un tore plein et $f|E_j'$ est homotope dans $E(k_i)$ à une application dont l'image est un méridien. On peut alors supprimer au moins un des anneaux A_j' ou A_{j+1}'.

(b) L'application f se déforme en une application telle que $f|bE_j'$ soit un revêtement de $bE(k_i)$ respectant les méridiens. D'après le théorème de Waldhausen, $f|E_j'$ est homotope, relativement au bord, à un revêtement de $E(k_i)$.

Le raisonnement est analogue pour E_1' et E_{n+1}'.

Lorsqu'on met ensemble tous ces revêtements, on doit obtenir une homéotopie. Après suppression des anneaux superflus de a), on a donc $m=n$, tous les revêtements sont des homéomorphismes et les variétés $E(k)$ et $E(k')$ sont homéomorphes.

4. PRÉSENTATIONS FINES ET SURFACES PLANAIRES

Venons-en à la démonstration du théorème de Gordon et Luecke. Soient k un nœud non trivial et, comme au n° 1, U un voisinage tubulaire de k, T son bord et $E = S_3 - \mathrm{int}(U)$. Si π est la classe d'homotopie d'un cercle (non orienté) plongé dans T, on note $K(\pi)$ la variété obtenue en collant à E, le long de T, un tore plein V_π de sorte que π borde un disque dans V_π (chirurgie de Dehn). Si γ est la classe d'un méridien de k, la variété $K(\gamma)$ est isomorphe à S_3. Soient π une autre classe et $n = |\pi.\gamma|$ le nombre d'intersection arithmétique de π et γ. Il s'agit de démontrer que la variété $K(\pi)$ ne peut être homéomorphe à S_3 si $n \neq 0$. La démonstration procède par l'absurde ; elle utilise des surfaces sphériques transversales au nœud.

PROPOSITION 4.— *Si $K(\pi)$ est homéomorphe à S_3, il existe des surfaces planaires P et Q* (sphères trouées) *proprement plongées dans E telles que :*

(a) *bP* (resp. *bQ*) *est réunion de cercles de classe π* (resp. γ).

(b) *P et Q se coupent transversalement et chaque composante de bP rencontre chaque composante de bQ en n points.*

(c) *$P \cap Q$ ne contient pas d'arc parallèle au bord dans P ni dans Q.*

Cette proposition a été démontrée indépendamment par David Gabai et améliore un résultat antérieur ([Ga], 4.A).

Identifions la sphère S_3 privée de deux points $\pm\infty$ à $S_2 \times \mathbf{R}$ et notons $h : S_3 - \{\pm\infty\} \to \mathbf{R}$ la deuxième projection. Supposons que le nœud k évite les points $\pm\infty$ et que la restriction $h|k$ soit une fonction de Morse (points critiques non-dégénérés, en nombre fini et à valeurs critiques distinctes). Une telle donnée est appelée *présentation* du nœud k. Soient $S_1, \cdots, S_m$ des sphères de niveau situées entre chaque couple de valeurs critiques consécutives ; la *complexité* de la présentation est la somme $\sum_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Card}(S_i \cap k)$. Une *présentation fine* est une présentation de complexité minimale.

La surface Q de la proposition 4 est l'intersection avec E d'une surface de niveau convenable pour une présentation fine h du nœud k, qui rencontre V_γ suivant des disques méridiens. La surface P est obtenue de façon

analogue à l'aide d'une présentation fine h_π du nœud k_π, âme du tore plein V_π dans $K(\pi) \cong S_3$. La condition (a) est alors satisfaite ; la condition (b) est réalisée après une déformation de h_π constante au voisinage de k_π. Il reste à réaliser la condition (c).

Introduisons deux terminologies. Supposons que $P \cap Q$ contienne un arc α qui, avec un arc β de bP, borde dans P un disque Δ qui ne contienne aucun arc de $P \cap Q$ autres que α (mais qui peut contenir des composantes circulaires de $P \cap Q$). On dit que Δ est un *disque haut* ou *bas* pour Q suivant que l'arc β est au-dessus ou en-dessous de Q (pour la fonction hau-

Figure 11

teur h). On peut donner une définition analogue pour P.

Désignons par I l'intervalle $[0,1]$. Étant donné un plongement de $Q \times I$ dans E, nous identifierons $Q \times I$ à son image, nous notons $Q(\lambda)$ l'image de $Q \times \{\lambda\}$ et nous parlerons de famille plongée. Une famille plongée $Q \times I$ de surfaces de niveau de h est une *tranche médiane* si $h(Q \times I) \subset]a, b[$, où a et b sont deux valeurs critiques consécutives de $h|k$ telles que a soit un minimum local et b un maximum local.

Lemme 2.— Il existe des familles $P \times I$ et $Q \times I$ de surfaces planaires proprement plongées dans E telles que :

(a) *$Q \times I$ est une tranche médiane dans une présentation fine de k.*

(b) *$P \times I$ est isotope à une tranche médiane dans une présentation fine de k_π.*

(c) *Toute composante de $bP(\lambda)$ rencontre toute composante $bQ(\mu)$ transversalement en n points.*

(d) *Il existe* $\lambda_0 \in]0,1[$ *tel que* $P(\lambda_0)$ *contienne un disque haut pour* $Q(1)$ *et un disque bas pour* $Q(0)$.

(e) *Il existe* $\mu_0 \in]0,1[$ *tel que* $Q(\mu_0)$ *contienne un disque haut pour* $P(1)$ *et un disque bas pour* $P(0)$.

(f) *La fonction* $h|P \times I$ *est une fonction de Cerf.*

On a déjà vu comment réaliser la condition (c). Choisissons $\lambda_0 \in]0,1[$ et rendons $P(\lambda_0)$ transversal à $Q(0)$ et $Q(1)$ par une petite isotopie du plongement de $P \times I$ fixe au voisinage de $bP \times I$. La position de $Q \times I$ en tranche médiane permet alors de réaliser la condition (d). Le même raisonnement peut s'appliquer à $Q(\mu_0)$, mais alors, on prolonge à E l'isotopie de $Q \times I$, et, en l'inversant, on obtient une isotopie de $P \times I$ qui donne le même résultat sans bouger $Q \times I$.

La condition (f) a la signification suivante :

(i) les fonctions $h|P(\lambda)$ n'ont pas de point critique au voisinage de $bP(\lambda)$,

(ii) la fonction $h|P(\lambda)$ est une fonction de Morse sauf pour un nombre fini de valeurs de λ,

(iii) les singularités autorisées sont le croisement de deux valeurs critiques et les singularités de naissance ou de mort.

Cette condition est réalisée par une petite isotopie de $P \times I$ en raison de la densité des fonctions de Cerf. Bien sûr, j'ai omis un certain nombre de détails et notamment qu'il faut s'assurer que P a une forme convenable au voisinage de bP.

Supposons la fonction h choisie de sorte que les surfaces $Q(\mu)$ soient les surfaces de niveau $h^{-1}(\mu)$. Le *graphique* Γ de $h|P \times I$ est l'ensemble des points (λ, μ) de $I \times I$ tels que μ soit la valeur de h en un point singulier de $h|P(\lambda)$ (voir figure 12). Pour un couple $(\lambda, \mu) \in I^2 - \Gamma$, les surfaces $P(\lambda)$ et $Q(\mu)$ sont transverses. La proposition 4 sera démontrée si l'on établit l'existence d'un point (λ, μ) de $I^2 - \Gamma$ tel que $P(\lambda)$ ne contienne pas de disque haut ni de disque bas pour $Q(\mu)$ et inversement.

Figure 12

On remarque que, si $P(\lambda)$ contient un disque haut pour $Q(\mu)$, pour tout λ', la surface $P(\lambda')$ ne peut contenir de disque bas pour $Q(\mu)$. La démonstration de cette remarque utilise le fait que k n'est pas trivial et que h est une présentation fine de k. On peut donc définir une fonction $q(\lambda, \mu)$ sur $I^2 - \Gamma$ prenant pour valeur l'une des trois lettres H, L, N suivant que $P(\lambda)$ contient un disque haut pour $Q(\mu)$, un disque bas ou aucun des deux. On définit de façon symétrique une fonction $p(\lambda, \mu)$. Ces fonctions sont localement constantes. Les propriétés (d) et (e) du lemme 2 donnent des indications sur p et q au bord du carré I^2. On démontre aussi que la traversée d'un arc de Γ ne peut produire que certains changements des valeurs de p et q. Raisonnant à nouveau par l'absurde, les auteurs démontrent que, s'il n'existe pas de point (λ, μ) tel que $p(\lambda, \mu) = q(\lambda, \mu) = N$, il existe dans le graphique Γ un croisement comme sur la figure 13, puis que cette éventualité est impossible.

Figure 13

5. GRAPHES LABELLÉS

Nous pouvons maintenant décrire le principe de la démonstration de Gordon et Luecke. Au couple de surfaces P et Q de la proposition 4, on associe deux *graphes labellés* G_P et G_Q satisfaisant à une *règle de parité* (voir ci-dessous). Vient alors un raisonnement combinatoire sur un tel couple de graphes. Dans le cas $n \geq 2$, traité dans [CGLS], on conclut que l'un des graphes contient une face d'un certain type (cycle de Scharlemann). Dans le cas $n = 1$, traité dans [GL], on démontre que G_Q contient un cycle de Scharlemann ou que G_P possède une propriété (T) plus faible que la précédente. Revenant alors à la situation topologique, on démontre que, si G_P (resp. G_Q) contient un cycle de Scharlemann, la variété $K(\gamma)$ (resp. $K(\pi)$) contient un espace lenticulaire percé. Un raisonnement plus élaboré montre que la seule propriété (T) pour G_P implique la même conclusion pour $K(\gamma)$. Le groupe fondamental d'un espace lenticulaire, percé ou non, est un groupe cyclique non nul et ne peut donc se plonger dans $\pi_1(S_3)$, d'où la dernière contradiction.

Nous définissons les graphes G_P et G_Q dans ce n^o ; dans le n^o suivant, nous définissons un cycle de Scharlemann et nous démontrons comment il lui correspond un espace lenticulaire troué. Pour la démonstration complète, nous renvoyons aux mémoires originaux [CGLS] et [GL].

Supposons, pour simplifier, que $n = 1$, c'est-à-dire que chaque composante de bP rencontre chaque composante de bQ en un point unique. Orientons arbitrairement les surfaces P et Q et numérotons de 1 à p, consécutivement sur le tore T, les composantes de bP et de 1 à q celles de bQ. L'ensemble des sommets du graphe G_Q est l'ensemble des composantes de bQ. Les sommets ne sont pas des points mais des disques. Pour $j \in [1, q]$, le sommet q_j de G_Q est représenté par un disque dont le bord est la composante bQ_j. Les arêtes sont les arcs de $P \cap Q$. Les arêtes issues de q_j ont pour *points d'attache* les p points $bQ_j \cap bP_i$; l'indice i est le *label* du point d'attache. Ces points d'attache se présentent en ordre consécutif dans le sens direct ou rétrograde ; on associe au sommet q_j le signe $+$ ou $-$ suivant le cas. Le graphe G_P est défini de façon analogue. Les signes des sommets ne sont pas indépendants. Notons (j, i) le point

d'attache $bQ_j \cap bP_i$ de label i au sommet q_j de G_Q ; le *caractère* de ce point est $\mathrm{char}(j,i) = (\mathrm{signe}\, q_j)(\mathrm{signe}\, p_i)$. Du fait que la variété E est orientable, on vérifie que si une arête joint deux points d'attache (de G_P ou de G_Q), les caractères de ces points sont opposés (*règle de parité*).

Le graphe G_Q est tracé sur la surface Q à l'exception des disques Q_j que l'on peut considérer comme disques méridiens de V_γ. Une face de G_Q est une composante du complémentaire dans Q des arêtes de G_Q. On remarque qu'on oublie complètement les composantes circulaires éventuelles de $P \cap Q$. D'après la proposition 4,c, les graphes G_P et G_Q n'ont pas de face bordée par une seule arête.

De tels graphes labellés, à sommets épais, ont été utilisés et étudiés par M. Scharlemann [Scha], D. Gabai [Ga] et [CGLS].

6. CYCLE DE SCHARLEMANN

Un *cycle de Scharlemann* Σ dans G_Q est un cycle d'arêtes tel que :

(1) si l'on imagine que les sommets de G_Q sont ponctuels, Σ est homéomorphe à un cercle qui borde un disque Δ dans Q tel que $G_Q \cap \mathrm{int}(\Delta) = \emptyset$,

(2) si l'on oriente le cycle Σ, les queues de toutes les arêtes ont même label,

(3) tous les sommets de G_Q appartenant au cycle Σ ont même signe.

Figure 14

Il résulte de la définition que toutes les arêtes de Σ ont des origines ayant un même label x et des extrémités ayant le même label voisin x'. À

la fin du n° précédent, on a remarqué que les graphes G_P et G_Q ne peuvent contenir de cycle bordé par une seule arête.

Lemme 3.— Si G_Q contient un cycle de Scharlemann bordé par k arêtes, la variété $K(\pi)$ contient un sous-espace homéomorphe à un espace lenticulaire percé de deux trous, dont le groupe fondamental est $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Soit Σ comme ci-dessus un cycle de Scharlemann dans G_Q. Les labels x et x' sont des composantes de bP adjacentes dans T et de signes opposés puisque tous les sommets de Σ ont même signe. Ces composantes bordent des disques méridiens disjoints D et D' dans V_π. Soit C le cyclindre découpé dans V_π par D et D' qui ne contient dans son bord pas d'autres composantes de bP que x et x'. Notons $\hat{P}$ la sphère contenue dans $K(\pi)$ obtenue en bouchant tous les trous de P par des disques méridiens de V_π. Soit enfin

Figure 15

R la réunion de $\hat{P}$ un peu épaissi et de l'anse C attachée à $\hat{P}$ en D et D'. L'espace R est homéomorphe à un tore plein percé d'un trou. Le disque Δ de Q bordé par le cycle Σ est attaché à R le long d'un cercle qui parcourt k fois l'anse C ; sa classe est k fois un générateur de $\pi_1(R)$. Par suite, l'espace réunion de R et du disque Δ un peu épaissi est homéomorphe à un espace lenticulaire $L(k,h)$ percé de deux trous. Plus simplement, son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ (théorème de van Kampen) et son bord est réunion de deux sphères disjointes, ce qui suffit à lui interdire d'être un sous-espace de S_3.

Indiquons maintenant quelle est la propriété (T) qui intervient dans la démonstration du cas $n = 1$ (*cf.* n° 5). Un *q-type* est un élément de $\{+,-\}^q$.

Soit E une face de G_P, homéomorphe à un disque. Ce disque touche un sommet v du graphe suivant un intervalle joignant des points d'attache dont les labels sont consécutifs. Pour $k \in [1, q]$, notons $S_k(E)$ l'ensemble des sommets de la face E pour lesquels ces labels sont k et $k+1$ (avec la convention $q+1=1$). Le graphe G_P possède la propriété (T) si, et pour tout q-type τ, il existe une face E de G_P, homéomorphe à un disque et telle que :

(1) pour tout $k \in [1, q]$, les sommets de l'ensemble $S_k(E)$ ont un même signe $\varepsilon(k)$,

(2) la fonction ε et la restriction de τ à l'ensemble $L(E)$ des entiers k tels que $S_k(E) \neq \emptyset$, sont égales ou opposées.

On remarque immédiatement qu'un cycle de Scharlemann représente tout q-type.

APPENDICE

Les théorèmes suivants sont des outils usuels de la topologie de dimension 3 et ont été utilisés dans l'exposé.

THÉORÈME (J.W. Alexander).— *Une sphère différentiablement plongée dans S_3 sépare S_3 en deux variétés homéomorphes à des boules fermées.*

Un tore différentiablement plongé dans S_3 sépare S_3 en deux variétés dont l'une est homéomorphe à un tore plein. ([A], [M], [Schu] ; on peut d'ailleurs lire "difféomorphe" au lieu de "homéomorphe".)

THÉORÈME (C. Papakyriakopoulos).— *Soit V une variété de dimension 3, de bord bV.*

a) *Si $\pi_1(bV) \to \pi_1(V)$ n'est pas injectif, il existe un cercle plongé dans bV dont la classe d'homotopie est 0 dans V et $\neq 0$ dans bV* (théorème du lacet).

b) *Soit C un cercle plongé dans bV, homotope à 0 dans V. Il existe un disque D plongé dans V tel que $C = D \cap bV$* (lemme de Dehn).

c) *Si $\pi_2(V) \neq 0$, il existe une sphère plongée dans V qui n'est pas*

homotope à 0 (théorème de la sphère). ([Pa], voir aussi [H] ou [Ja].)

DÉFINITION.— *Une variété V de dimension 3, de bord bV, est une* variété de Haken *si elle est compacte, connexe, orientable, irréductible (une sphère plongée dans V borde une boule), suffisamment grande (elle contient une surface orientable proprement plongée S telle que $\pi_1(S) \to \pi_1(V)$ soit injectif).*

Le bord bV est incompressible *si, pour chaque composante connexe bV_i de bV, l'homomorphisme $\pi_1(bV_i) \to \pi_1(V)$ est injectif.*

THÉORÈME (F. Waldhausen).— *Soient V et V' deux variétés de Haken à bords incompressibles. Soit $f : (V, bV) \to (V', bV')$ une application continue telle que l'homomorphisme $\pi_1(f)$ soit injectif. Alors ou bien l'application f est homotope, dans les applications de (V, bV) dans (V', bV'), à un revêtement, ou bien V est difféomorphe à un produit $S \times [0,1]$ et f est homotope à une application dont l'image est contenue dans le bord bV'.*

Si $\pi_1(f)$ est un isomorphisme, f est homotope à un homéomorphisme. ([Wa], 1968, th. 6.1, voir aussi [Ja], X, [He], XIII et [L].)

Les propriétés analogues pour les surfaces sont connues depuis Nielsen. Elles ont été utilisées tacitement dans cet exposé pour le tore.

BIBLIOGRAPHIE

[A] J.W. ALEXANDER - *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **10** (1924), 8-10.

[BZ] G. BURDE, H. ZIESCHANG - *Eine Kennzeichnung der Torusknoten*, Math. Annalen, **167** (1966), 169-176.

- *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin New-York (1985).

[CF] J.W. CANNON, C.D. FEUSTEL - *Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds*, Trans. AMS, **215** (1976), 219-239.

[CGLS] M. CULLER, C.McA. GORDON, J. LUECKE, P.B. SHALEN - *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math.,**125** (1987), 237-300.

[F] C.D. FEUSTEL - *On the torus theorem and its applications*, Trans. AMS, **217** (1976), 1-43.

[FW] C.D. FEUSTEL, W. WHITTEN - *Groups and complements of knots*, Can. J. of Math., **30** (1978), 1284-1295.

[Ga] D. GABAI - *Foliations and the topology of 3-manifolds*, III, J. Diff. Geom., **18** (1987), 479-536.

[GL] C.McA. GORDON, J. LUECKE - *Knots are determined by their complements*, Journal of AMS, **2** (1989), 371-415.

[Gr] A. GRAMAIN - *Rapport sur la théorie classique des nœuds (1ère partie)*, Sém. Bourbaki, exposé n° 485, 1975-76, Lect. Notes in Math. n° 567, Springer (1977), 222-237.

[H] J. HEMPEL - *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies n° 86 (1976), Princeton Univ. Press.

[Ja] W. JACO - *Lectures on Three-Manifolds Theory*, Reg. Conf. in Math. n° 43, AMS (1980).

[Jo] K. JOHANNSON - *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math. n° 761, Springer (1979).

[F] F. LAUDENBACH - *Topologie de la Dimension 3*, Astérisque n° 12, S.M.F., Paris (1974).

[M] E.E. MOÏSE - *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Math. **47**, Springer (1977).

[N] D. NOGA - *Über den Aussenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen*, Math. Zeit., **101** (1967), 131-141.

[P] C. PAPAKYRIAKOPOULOS - *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math., **66** (1957), 1-26.

[Scha] M. SCHARLEMANN - *Smooth spheres in R^4 with four critical points are standard*, Invent. Math., **70** (1985), 125-141.

[Schu] H. SCHUBERT - *Knoten und Vollringe*, Acta Mat., **90** (1953), 131-286.

[Sc] P. SCOTT - *A new proof of the annulus and torus theorem*, Amer. J. of Math., **102** (1980), 241-277.

[Si] J. SIMON - *An algebraic classification of knots in S^3*, Ann. of Math., **97** (1973), 1-13.

[ST] J. STALLINGS - *On fibering certain 3-manifolds*, in Topology of 3-manifolds and related topics (Proceedings of the 1961 Topology Conference, Univ. of Georgia), Prentice-Hall (1962).

[Wa] F. WALDHAUSEN - *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology **6** (1967), 505-517.

- *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math., **87** (1968), 56-88.

[Wh] W. WHITTEN - *Algebraic and geometric characterizations of knots*, Invent. Math., **26** (1974), 259-270.

- *Knots complements and groups*, Topology, **26** (1987), 41-44.

André GRAMAIN
Université de Tours
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
F-37200 TOURS