

Astérisque

FRANCIS COMETS

Limites hydrodynamiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 735, p. 167-192

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__167_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__167_0)

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIMITES HYDRODYNAMIQUES

par Francis COMETS

On peut obtenir certaines équations de la mécanique des fluides à partir de systèmes de particules aléatoires évoluant selon une dynamique markovienne avec lois de conservation. Après renormalisation en espace et en temps (passage à la “limite hydrodynamique”), la mesure associée aux quantités conservées converge vers la solution d’une équation aux dérivées partielles non linéaire. Récemment, Guo, Papanicolaou et Varadhan ont proposé une méthode générale pour montrer la convergence, en utilisant des estimations *a priori* basées sur l’entropie (probabiliste) et la production d’entropie.

Cet exposé présente les idées générales en se limitant à la dynamique hors équilibre, certains développements à travers des exemples, et le schéma de la nouvelle méthode.

1. INTRODUCTION

L’idée selon laquelle les équations régissant un fluide à l’échelle macroscopique peuvent être obtenues à partir d’une dynamique microscopique n’est pas neuve. Par exemple, dans le cas d’une dynamique déterministe, Morrey tente dans [M] de déduire les équations d’Euler de la mécanique statistique, et Sinaï formule une condition de validité dans [Si]. Nous considérerons ici des dynamiques aléatoires.

Parmi les systèmes dynamiques aléatoires, les modèles les plus étudiés S.M.F.

sont les systèmes de particules disposées sur un réseau, évoluant selon des échanges entre sites voisins avec lois de conservation (réseaux gazeux, modèle de Ginzburg-Landau,...). Ces systèmes de particules ont été introduits par Spitzer au début des années 70 ; Dobrushin fut le premier à remarquer quelques années plus tard qu'ils permettaient de reproduire des phénomènes hydrodynamiques et à étudier cette procédure de limite [DS].

À l'échelle microscopique, le système est localement à l'équilibre, d'après la loi des grands nombres ; les équilibres sont paramétrés par les valeurs moyennes des quantités (extensives) conservées. Ces paramètres diffèrent en général d'un point macroscopique à l'autre, et dans une échelle de temps bien choisie, ils évoluent selon une équation aux dérivées partielles non linéaire ; l'équation sera du premier ordre pour un système soumis à une force extérieure, à une source où un puits ("sink"), du second ordre pour un système invariant par retournement du temps. Même si le système admet une description autonome au niveau macroscopique, les deux niveaux ne sont pas indépendants : les équations possédant parfois plusieurs solutions, l'étude microscopique nous indique en général quelle est la solution significative.

La difficulté est que l'interaction (échange entre sites) de caractère local ne conduit pas directement à des équations closes, mais à une hiérarchie d'équations (hiérarchie BBGKY, des initiales de Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon) : typiquement, l'équation régissant le moment d'ordre 1 contient celui d'ordre 2, dont la propre équation contient celui d'ordre 3, etc.

Dans la partie II, nous décrivons les équations hydrodynamiques obtenues formellement à partir de la notion d'équilibre local utilisé comme un ansatz, pour clore la hiérarchie d'équations. Cette partie, plutôt heuristique et générale, nous a semblé indispensable à la compréhension du sujet. Ensuite, nous donnons des exemples de processus de saut attractifs ; puis nous présenterons la méthode de preuve de la production d'entropie pour le modèle de Ginzburg-Landau (§4), et enfin d'autres exemples et développements (§5). Nous n'abordons ici que la dynamique de non-équilibre, laissant de côté d'autres aspects importants comme les fluctuations à l'équilibre et loin de l'équilibre, le théorème de fluctuation-dissipation, ... Un point assez

complet sur le sujet est fait dans le gros article de synthèse de De Masi, Ianiro, Pellegrinotti et Presutti [DIPP], et dans celui — tout récent — de Spohn [Sp] consacré aux réseaux gazeux.

L'auteur remercie vivement C. Kipnis pour son aide durant la préparation de cet exposé.

2. LIMITES HYDRODYNAMIQUES : GÉNÉRALITÉS

2.1. Modèle aléatoire

Considérons des variables aléatoires $Y = (Y(i))_{i \in \mathbf{L}}$ à valeurs entières ou réelles indexées par un réseau $\mathbf{L}$. $\mathbf{L}$ pourra être le réseau $\mathbf{Z}^d$ de dimension d , ou au §4, le réseau torique $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ avec N grand ; $Y(i)$ représente une quantité algébrique de charges, le nombre de molécules au point i , la présence ou l'absence d'une particule en i (réseaux gazeux, $Y(i) \in \{0, 1\}$), ...

La configuration Y évolue au cours du temps selon un processus de Markov homogène dans le temps de générateur $\mathcal{L} = \sum_{i,i'} \mathcal{L}_{i,i'}$ invariant par translation, avec $\mathcal{L}_{i,i'} f = 0$ pour toute fonction test f ne dépendant pas de $(y(i), y(i'))$. Nous supposerons pour la simplicité de cet exposé que les échanges ne s'effectuent qu'entre sites plus proches voisins, de sorte que la somme ne porte que sur les paires de points i, i' à distance 1. Nous supposerons aussi que la masse totale, formellement $\sum_i y(i)$, est la seule quantité conservée par le semi-groupe de générateur $\mathcal{L}$. Si E est un espace topologique, notons $\mathcal{M}(E)$ [*resp.*, $\mathcal{M}_1^+(E)$] l'ensemble des mesures de Radon [*resp.*, de probabilité] sur la tribu borélienne de E .

Un ingrédient essentiel au comportement hydrodynamique est l'existence, liée à la loi de conservation, d'une famille paramétrique $\nu_\rho \in \mathcal{M}_1^+(\mathbf{R}^L)$, $\rho \in I$ intervalle réel, de mesures de probabilité invariantes par le semi-groupe, qui soient invariantes par translation et ergodiques (analogue des Maxwelliennes). Sous cette hypothèse, on choisira le paramétrage comme la valeur moyenne de la quantité conservée

$$(1) \quad \rho = \mathbf{E}^{\nu_\rho} Y(i).$$

Ces mesures ν_ρ diffèrent l'une de l'autre par la valeur de leur potentiel chimique, variable duale de y .

Soit ε un paramètre de renormalisation en espace, que l'on fera tendre vers 0 ; dans le cas du tore, $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Les échanges étant locaux, il faut accélérer le temps par un facteur $1/a(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = 0$; les variables d'espace et de temps i, u au niveau microscopique seront notées $x = \varepsilon i$, $t = a(\varepsilon)u$ au niveau macroscopique. La distribution initiale P_0^ε dépendra de ε ; soit P^ε la loi du processus de générateur $\mathcal{L}$ sur l'espace des trajectoires, et $P_u^\varepsilon = \exp(u\mathcal{L}^*) P_0^\varepsilon$ sa marginale à l'instant u . Notons enfin $\mathcal{T}^i$ la translation du vecteur i sur l'espace des configurations ($\mathcal{T}^i y(i') = y(i + i')$ pour tout $i' \in \mathbf{L}$).

2.2. Équilibre local

DÉFINITIONS.— 1) *La distribution initiale satisfait à l'équilibre local si*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, P_0^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho_0(x)}$$

pour une fonction régulière ρ_0 ; ρ_0 s'appelle le profil d'équilibre local ($\xrightarrow{\text{et.}}$ désigne la convergence étroite des mesures de probabilité).

2) *il y a alors conservation de l'équilibre local si il existe une fonction régulière $\rho(t, x)$ telle que*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall t \geq 0, P_{t/a(\varepsilon)}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho(t, x)}.$$

La définition 1 signifie que le système se trouve, au voisinage du site microscopique $i = x/\varepsilon$, dans l'état d'équilibre dicté par la moyenne locale de la quantité conservée. On peut obtenir des distributions d'équilibre local en imposant un "équilibre" avec potentiel chimique variant lentement dans l'espace des sites : lorsque les ν_ρ sont des mesures produits, un exemple simple est $\otimes_{i \in \mathbf{Z}^d} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$. La définition 2 signifie quant à elle que la valeur moyenne de Y évolue lentement (à cause du caractère local des échanges), et que sur des intervalles de temps longs, l'ergodicité entraîne localement le système vers l'équilibre possédant cette valeur moyenne. Les systèmes possédant une limite hydrodynamique conservent en général l'équilibre local ; nous rencontrerons deux exceptions, celle de la courbe de choc (§3.5) et celle de la transition de phase (§4.4).

Introduisons deux vecteurs liés à la loi de conservation ; soit $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbf{Z}^d$. Pour $k \leq d$, le *flux* $J_{u,k}(i)$ est le nombre algébrique de charges ayant migré de i vers $i + e_k$ dans l'intervalle de temps $]0, u]$; on a alors l'équation de bilan instantané

$$(2) \quad dY_u(i) = - \sum_{k=1}^d [d J_{u,k}(i) - d J_{u,k}(i - e_k)].$$

Notons que $J_{u,\cdot}$ n'est défini en général que sur un espace plus gros que l'espace des trajectoires du processus originel Y , par exemple un espace contenant les processus de Wiener ou de Poisson sous-jacents à Y ; $J_{u,\cdot}$ est fonction mesurable de tout le passé avant u . Le *courant instantané* $j(i; y) = (j_k(i; y))_{k \leq d}$ est défini comme la dérive (instantanée) du flux ; c'est une fonction de la configuration courante ; l'invariance par translation de $\mathcal{L}$ entraîne que $j(i, y) = j(0, T^i y)$. Avec (2), on a donc

$$(3) \quad Y_u(i) - \int_0^u \mathcal{L} Y_v(i) dv \quad \text{est une } P^\varepsilon - \text{martingale,}$$

avec

$$\mathcal{L} Y_u(i) = - \sum_{k=1}^d [j_k(0, T^i Y_u) - j_k(0; T^{i-e_k} Y_u)].$$

La relation précédente lie au niveau microscopique la “dérivée temporelle de la densité” à la divergence du courant. On la retrouve au niveau macroscopique dans le premier des régimes suivants.

2.3. Forme générale des équations

On s'intéresse à la mesure $\hat{Y}_t^\varepsilon \in M(\mathbf{R}^d)$ associée à la quantité conservée (mesure de charges, mesure d'occupation, ...)

$$(4) \quad \hat{Y}_t^\varepsilon = \varepsilon^d \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} Y_{t/a(\varepsilon)}(i) \delta_{i/\varepsilon}.$$

Soit $\tilde{j}(\rho) = \mathbf{E}^{\nu_\rho} j(0; y)$ le vecteur de courant à l'équilibre ν_ρ .

DÉFINITION 3.— *Le système est dans le régime d'Euler si $\tilde{j} \neq 0$.*

La bonne normalisation du temps est alors $a(\varepsilon) = \varepsilon$.

THÉORÈME 1 (th. 4.1 [DIPP]).— *Si le système satisfait à la conservation de l'équilibre local avec $a(\varepsilon) = \varepsilon$, alors le profil d'équilibre local $\rho(t, x)$ est solution faible de*

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho) = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

La preuve, élémentaire, consiste à expliciter le terme de dérive d'une martingale associée à $\hat{Y}_t^\varepsilon$, à l'aide de (3) et de l'hypothèse de conservation de l'équilibre local.

De plus, on voit aisément que sous les hypothèses de non-accumulation de masse au voisinage d'un point et d'une majoration (linéaire en temps) du processus croissant associé à J , la mesure $\hat{Y}_t^\varepsilon$ converge en probabilité vers la limite déterministe $\rho(t, x) dx$ pour tout $t \geq 0$ (loi des grands nombres). Comme nous le verrons, les preuves de limite hydrodynamique établissent souvent simultanément la convergence de $\hat{Y}_t^\varepsilon$ et la conservation de l'équilibre local.

L'équation hyperbolique non linéaire (5) admet en général plusieurs solutions faibles, que l'on détermine par la méthode des caractéristiques. Néanmoins, elle possède une solution naturelle unique, ou solution entropique (cf. Smoller [Sm]), obtenue comme limite de la solution ρ_ε dite de viscosité

$$(5.b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho_\varepsilon) = \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans tous les cas où la convergence de $\hat{Y}_t^\varepsilon$ a été établie, la limite est la solution entropique de (5), voir §3.

DÉFINITION 4.— *Le système est en régime diffusif si $\tilde{j}(\rho) = 0$, $\forall \rho \in I$.*

Alors l'équation (5) est triviale et la normalisation requise est $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Le cas le plus simple est celui des *systèmes gradients*, où le courant s'écrit comme gradient discrétisé d'une fonction U ,

$$(6) \quad j_k(0; y) = (U \circ T^{e_k} - U)(y).$$

Soit $\tilde{U}(\rho) = \mathbf{E}^{\nu_\rho} U$.

THÉORÈME 2 (th. 4.1 [DIPP]).— *Si le système satisfait à la conservation de l'équilibre local avec $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$, alors le profil $\rho(t, x)$ est solution faible de l'équation de diffusion*

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \Delta[\tilde{U}(\rho)] = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

Sous les mêmes hypothèses supplémentaires que plus haut, $\hat{Y}_t^\varepsilon$ converge vers $\rho(t, x) dx$ en probabilité.

L'équation parabolique non linéaire (7) ne pose pas de problème d'unicité ; la limite de $\hat{Y}_t^\varepsilon$ est continue en temps, on peut tirer des estimées probabilistes une majoration de sa norme dans H_{-1} [GPV], ou invoquer l'unicité pour des équations d'évolution non linéaires gouvernées par un opérateur accréatif ou maximal monotone ([Re 1]).

Pour les systèmes diffusifs non gradients, l'équation conjecturée, à partir de la loi de Fick de la Physique, est

$$(7.b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = \operatorname{div} [D(\rho) \nabla \rho]$$

où le coefficient de diffusion (bulk coefficient) D — intervenant aussi dans les fluctuations à l'équilibre — est donné par la formule de Green-Kubo [Sp] qui fait intervenir un terme dynamique ; dans le cas gradient, cette équation coïncide avec (7). Le cas général est moins bien connu, nous nous limiterons au cas gradient, sauf au §5.2.

Pour introduire les équations limites (5), (7), nous avons utilisé la conservation de l'équilibre local comme un ansatz commode. Les démonstrations traitent simultanément la convergence du champ vers la solution de l'équation et la conservation de l'équilibre local. Cependant, la distribution initiale est le plus souvent supposée d'équilibre local, pour éviter de considérer une période initiale courte à l'échelle macroscopique (mais grande microscopiquement) nécessaire au système pour s'équilibrer localement ("initial layer").

3. PROCESSUS DE SAUT PUR

Ils décrivent des systèmes de particules sur $\mathbf{Z}^d$ qui peuvent sauter d'un site à l'autre ; les variables $Y(i)$ sont à valeurs entières. Nous nous limitons encore aux sauts à distance 1. Pour l'existence et les propriétés des exemples ci-dessus, voir Liggett [Li].

3.1. Des exemples

a) Processus d'exclusions simple ($Y(i) \in \{0, 1\}$, une particule au plus par site). Au bout d'un temps aléatoire, indépendant d'une particule à l'autre, de loi exponentielle de moyenne 1, une particule choisit le site voisin dans la direction $\pm e_k$ avec probabilité $p_{\pm k}$ ($p_{\pm k} \geq 0$, $\sum_k (p_{+k} + p_{-k}) = 1$). Si le site est libre, elle y saute, elle reste à sa place sinon. Ce mécanisme est ensuite réitéré.

Le générateur $\mathcal{L}$ est alors défini sur les fonctions f cylindriques de la configuration $y \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}^d}$ par (avec la notation $e_{-k} = -e_k$)

$$\mathcal{L}f(y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} \sum_{1 \leq |k| \leq d} y(i)[1 - y(i + e_k)] p_k [f(y + \delta_{i+e_k} - \delta_i) - f(y)].$$

Le processus est dit symétrique si $p_k = p_{-k}$, $k = 1, \dots, d$, asymétrique sinon. Le cas symétrique est trivial, l'équation de la densité étant close ; à la limite, on obtient une équation de diffusion linéaire [DIPP].

Ici, les mesures ν_ρ sont les mesures de Bernoulli produit, de moyenne $\rho \in [0, 1]$.

b) Processus d'exclusion simple avec vitesse : exclusion simple où la moyenne de la loi exponentielle dépend du nombre de sites voisins occupés. Les ν_ρ sont des mesures de Gibbs, comme celle du modèle d'Ising, que l'on peut obtenir avec une vitesse de Kawasaki ou de Metropolis ([DIPP], [Sp]).

c) Processus d'interaction purement locale, dit de "zero-range" : plusieurs particules peuvent occuper le même site. La moyenne du temps aléatoire au bout duquel une particule saute est fonction décroissante du nombre d'occupants. Alors, elle choisit son nouveau site selon la probabilité de transition $p_{\pm k}$ sans restriction. Comme dans l'exemple de l'exclusion

simple a), les mesures invariantes ν_ρ sont des mesures produit, malgré l'interaction dynamique entre particules, ce qui constitue une simplification importante par rapport au cas général, *e.g.* l'exemple b).

3.2. Processus attractifs

Cette propriété de monotonie est un outil essentiel pour prouver des théorèmes limites pour des systèmes de particules (*cf.* [Li], p. 70). Les exemples a) et c) ci-dessus la possèdent toujours.

Définissons des relations d'ordre partiel : si $y, y' \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$, on notera $y \leq y'$ si $y(i) \leq y'(i)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}^d$. Une fonction $f : \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d} \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante si elle préserve l'ordre. Enfin, si $\nu, \nu' \in M_1^+(\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d})$, on notera $\nu \leq \nu'$ si $\int f d\nu \leq \int f d\nu'$ pour toute fonction f croissante. Un processus de générateur $\mathcal{L}$ est *attractif* si $\nu \leq \nu' \implies \exp(u\mathcal{L}^*)\nu \leq \exp(u\mathcal{L}^*)\nu', \forall u \geq 0$.

La propriété d'attractivité permet de comparer des profils d'équilibres réalisés à l'instant t par un même processus partant de profils initiaux ordonnés. Au-delà de cette comparaison stochastique, une comparaison trajectorielle s'obtient alors par la technique du *couplage* dynamique, consistant à construire simultanément sur un même espace plusieurs versions du même processus partant de configurations arbitraires ; pour un processus attractif et deux distributions initiales ordonnées, il existe un couplage préservant l'ordre des configurations à chaque instant. Enfin, la procédure de *priorité* introduite par Andjel et Kipnis [AK] permet de tirer parti des mesures invariantes.

3.3. Équation d'Euler pour les processus de saut en dimension un

Commençons par l'exclusion simple asymétrique. En dimension $d = 1$, la limite prévue (5) pour la densité d'occupation ρ est l'équation de *Burgers*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (p_{+1} - p_{-1}) \frac{\partial}{\partial x} [\rho(1 - \rho)] = 0$$

(dont la forme usuelle est obtenue pour $u = \rho - \frac{1}{2}$). Définissons d'abord la solution entropique. Nous supposons que $p_{+1} > p_{-1}$ sans perte de

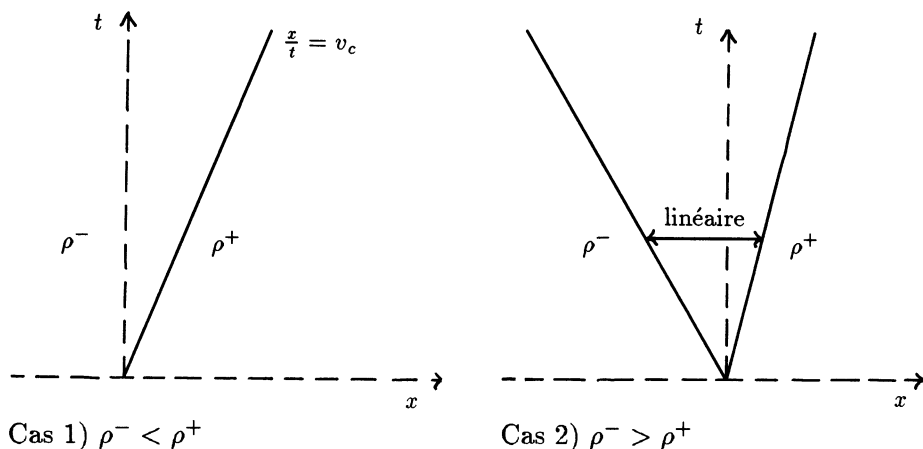
généralité (déplacement libre “moyen” vers la droite). La plupart des résultats mentionnés dans cette section sont obtenus pour la loi initiale

$$\bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$$

— voir la remarque après la définition 1 — avec profil initial

$$(8) \quad \rho_0(x) = \rho^- \mathbf{1}_{x < 0} + \rho^+ \mathbf{1}_{x \geq 0},$$

où $\rho^+, \rho^- \in [0, 1]$. Deux cas se présentent : si $\rho^- < \rho^+$, le choc (discontinuité) se propage à vitesse $v_c = (p_{+1} - p_{-1})(1 - \rho^- - \rho^+)$, d’après la condition de Rankine-Hugoniot ; si au contraire, $\rho^- > \rho^+$, les caractéristiques correspondant à ρ^- et ρ^+ sont séparées par un “éventail de raréfaction” où la solution entropique est linéaire dans la variable d’espace. Résumons ceci par la représentation de $\rho(t, x)$:



D’abord Rost [Ro 1] dans un cas particulier, puis Benassi et Fouque [BF 1] ont montré la convergence du champ $\hat{Y}_t^\varepsilon$ vers la solution entropique ρ de l’équation de Burgers ci-dessus, et la conservation de l’équilibre local (sauf au choc, c’est-à-dire sauf dans le cas 1 lorsque $x = v_c t$).

La preuve traditionnelle (par opposition à la nouvelle méthode de Guo, Papanicolaou, Varadhan de la production d’entropie, cf. §4), utilise l’attractivité du processus, la monotonie du profil initial et la connaissance de la solution de l’équation limite. Cette preuve fonctionne plus

généralement pour les autres processus attractifs introduits dans cette section ; elle comporte trois étapes :

- des arguments de couplage et priorité, un théorème ergodique sous-additif permettent d'abord de montrer la convergence de la mesure d'occupation $\hat{Y}_t^\varepsilon$ vers une densité $u(t, x)$ déterministe, monotone en x si le profil initial l'est ;
- par couplage et priorité on peut encore clore ensuite l'équation de la mesure de densité, en établissant la propriété de décorrélation limite

$$\mathbf{E}^{P^\varepsilon} Y_{t/\varepsilon} \left(\left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor \right) Y_{t/\varepsilon} \left(\left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, x)^2,$$

c'est-à-dire la propagation du chaos ; cette propriété suffit pour fermer l'équation. À propos de ce modèle de réseau gazeux, il est amusant de noter que le mot "gaz" a été introduit au XVIIIe siècle comme traduction du mot latin "chaos" ;

- L'équation close obtenue exprime exactement que u est solution faible de l'équation de Burgers. On prouve alors que u est égale à la solution entropique ρ explicite en utilisant sa propriété de monotonie et des comparaisons avec d'autres profils initiaux.

Pour le processus de zéro-range, Andjel et Vares [AVA] d'abord, puis Andjel et Kipnis [AK], Benassi et Fouque [BF 2] pour des sauts à distance plus que un, ont montré le même type de résultat, avec une équation limite pour la densité d'occupation ρ (à valeurs $\mathbf{R}_+$ cette fois) de la forme $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{j}(\rho) = 0$; la fonction $\tilde{j}$ est une fonction régulière de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, soit strictement convexe, soit strictement concave.

3.4. Cas de la dimension d

Même si l'équation limite (5) se ramène par changement d'axes à celle de la dimension un d'espace, l'étude microscopique est cependant bien plus délicate. Landim [La 1] vient d'adapter la méthode au cas du zéro-range, avec profil initial constant par morceaux, égal à ρ^- à l'intérieur d'un demi-cône, ρ^+ à l'extérieur ; lorsque le bord du cône est entièrement diffusant ou entièrement propageant (*i.e.* : notant $\vec{v}$ le déplacement moyen d'une par-

ticule libre, l'un exactement des deux vecteurs $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ pointe à l'intérieur du demi-cône).

Plus récemment encore, Rezakhanlou [Re 2] montre la convergence de $\hat{Y}_t^\varepsilon$ pour l'exclusion simple asymétrique, vers la solution de (5) vérifiant les conditions d'entropie de Kružkov, sans restriction sur le profil initial. Cette solution est par définition l'unique fonction ρ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rho - c| + \operatorname{div} \{ \operatorname{signe}(\rho - c) [\tilde{j}(\rho) - \tilde{j}(c)] \} \leq 0$$

au sens des distributions, pour toute constante réelle c . La preuve, très générale, combine attractivité du processus et certains des arguments de production d'entropie (probabiliste) décrits au §4. Dans un couplage entre le processus et celui partant de ν_c , les configurations sont ordonnées localement d'après l'attractivité, ce qui permet de traiter la non-linéarité due au signe.

3.5. Étude microscopique du choc

Dans le cas d'un choc se propageant, deux questions naturelles se posent, à propos de la structure fine au voisinage de la courbe de choc :

- i) quelle est la loi des grands nombres en ces points ?
- ii) peut-on trouver une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique, où le profil devient régulier, ou reste-t-il au contraire rigide et discontinu ?

Nous détaillons les résultats avec les notations de l'exclusion simple asymétrique (cas a) du §3.1) partant de ρ_0 donnée par (8), en dimension $d = 1$.

i) Andjel, Bramson et Liggett remarquent dans [ABL] que l'équilibre local ne se conserve pas le long de la droite de choc $x = v_c t$, mais que la distribution locale est asymptotiquement une superposition de "Maxwelliennes" :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[v_c t/\varepsilon]} = \frac{1}{2} (\nu_{\rho^-} + \nu_{\rho^+}).$$

ii) D'abord dans un cas particulier (Wick [W 1]), puis plus généralement (par De Masi, Kipnis, Presutti, Saada [DKPS], Ferrari, Kipnis, Saada

[FKS]), on s'est aperçu que seul le second cas se produisait :

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ T^{[v_c \frac{t}{\varepsilon} + \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}]} = \lambda \nu_{\rho^-} + (1 - \lambda) \nu_{\rho^+}$$

avec $\lambda = \lambda(t, r) = \text{Probabilité}(\sqrt{v} B_t \leq r)$ où B_t est un mouvement brownien réel. L'interprétation pour $\rho^- = 0$ est liée à la position de X_u de la particule la plus à gauche (l'interface), qui vérifie $\sqrt{\varepsilon}(X_{t/\varepsilon} - v_c t/\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{v} B_t$: il n'y a bien sûr pas de particule à gauche de l'interface $X_{t/\varepsilon}$, tandis qu'à distance d'ordre $\varepsilon^{-1/2}$ à droite, le système se trouve dans l'équilibre ν_{ρ^+} d'après (9). Le choc est même sensible à distance microscopique, à droite de l'interface.

Par conséquent, la moyenne empirique locale (en x) de particules n'est donc pas uniformément proche au voisinage du choc de la solution d'une équation de viscosité faible comme (5b) ; pour obtenir une asymptotique réminiscente de la correction de Navier-Stokes, il faut régulariser cette moyenne en temps [W 1].

4. LE MODÈLE DE GINZBURG-LANDAU ET LA MÉTHODE DE LA PRODUCTION D'ENTROPIE

Le but de cette partie est de présenter la méthode remarquable de la production d'entropie, introduite en 1988 par Guo, Papanicolaou et Varadhan dans [GPV]. Elle dépend de manière cruciale de la réversibilité du système, à l'heure actuelle. Comme cadre de présentation, je reprends le modèle de Ginzburg-Landau discret utilisé dans [GPV].

4.1. Le modèle de Ginzburg-Landau

Sur le tore discrétisé à une dimension $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, vu comme l'intervalle $\{0, 1, \dots, N\}$ avec ses extrémités identifiées, considérons le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dY_u(i) = dJ_u(i-1) - dJ_u(i) & , \quad i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \\ dJ_u(i) = -\frac{1}{2} \{ \phi'[Y_u(i+1)] - \phi'[Y_u(i)] \} du + dB_u(i) \end{cases}$$

où les $B(i)$, $i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ sont des mouvements browniens indépendants, et où $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\int e^{-\phi(y)} dy = 1$$

$$(10) \quad \alpha(\lambda) = \text{Log} \int e^{\lambda y - \phi(y)} dy \quad \text{existe pour tout } \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\int e^{\lambda |\phi'(y)| - \phi(y)} dy < +\infty \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Le système est diffusif, gradient, avec

$$(11) \quad U(y) = -\frac{1}{2} \phi'[y(0)].$$

Rappelons que la normalisation dans (4) est alors $\varepsilon = 1/N$, $a(\varepsilon) = 1/N^2$. Soit Y le processus de Markov continu à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, de générateur infinitésimal

$$(12) \quad \mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \mathcal{H}_N \right] \left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \right\}$$

où le hamiltonien $\mathcal{H}_N$ est donné par

$$(13) \quad \mathcal{H}_N(y(0), \dots, y(N-1)) = - \sum_{i=0}^{N-1} \phi[y(i)].$$

Dans (12), l'exposant 2 signifie que l'on itère l'opérateur. La masse totale $\sum_{i=0}^{N-1} y(i)$ est conservée. Introduisons la duale h de α au sens de Legendre-Fenchel,

$$(14) \quad h(\rho) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{ \lambda y - \alpha(\lambda) \} \quad , \rho \in \mathbf{R}.$$

Alors h et α sont des fonctions convexes conjuguées, dont les dérivées sont régulières, strictement croissantes et inverses l'une de l'autre. Les mesures de probabilité invariantes pour le processus, invariantes par translation et extrémales sont les $\nu_\rho^N \in M_1^+(\mathbf{R}^N)$, $\rho \in \mathbf{R}$

$$(15) \quad \begin{aligned} & \nu_\rho^N(dy(0), \dots, dy(N-1)) \\ &= \exp \left\{ \lambda \sum_{i=0}^{N-1} y(i) - N\alpha(\lambda) + \mathcal{H}_N \right\} dy(0) \cdots dy(N-1) \end{aligned}$$

où l'on choisit le paramétrage $\lambda = h'(\rho)$ de sorte que $\mathbf{E}^{\nu_\rho^N} y(0) = \rho$, c'est-à-dire (1). Le générateur $\mathcal{L}_N$ est formellement auto-adjoint dans $\mathbf{L}^2(\nu_\rho^N)$, et le processus restreint à chaque hyperplan $\sum y(i) = \text{constante}$ est ergodique avec pour unique probabilité invariante, la distribution ν_ρ^N conditionnelle à cet hyperplan (indépendante de ρ). Dans la suite, le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est muni de la mesure de Haar, notée dx .

THÉORÈME [GPV].— *Supposons que la distribution initiale P_0^N satisfait à l'équilibre local avec profil $\rho_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$, P_0^N absolument continue par rapport à ν_0^N de densité f_0^N vérifiant*

$$(16) \quad H^N(f_0^N) = \int f_0^N \text{Log } f_0^N d\nu_0^N \leq CN.$$

Alors, il y a conservation de l'équilibre local avec profil $\rho(t, x)$, $x \in \mathbf{T}$, vérifiant

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h'(\rho) \quad , \quad \rho(0, x) = \rho_0(x)$$

$$(18) \quad \int h(\rho) dx \leq C \quad , \quad \frac{1}{2} \int \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} h'(\rho) \right|^2 dt dx \leq C.$$

D'après (11) et (15), $\tilde{U} = -\frac{1}{2} h'$, et donc l'équation (17) est celle attendue (7) ; elle admet une unique solution avec (18) dans l'espace $H_{-1}(\mathbf{T})$. La condition (16) est un contrôle de l'entropie P_0^N par rapport à une mesure

invariante. Guo, Papanicolaou et Varadhan en déduisent les estimations *a priori* (21.a et b, ci-dessous), qui seront les seuls ingrédients nécessaires à la preuve.

4.2. Entropie

Si $f^N : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^+$ est une densité de probabilité pour la mesure ν_0^N , notons

$$H^N(f^N) = \int f^N \operatorname{Log} f^N d\nu_0^N$$

l'*entropie* (ou information de Kullback-Leibler) de la distribution $f^N d\nu_0^N$ par rapport à ν_0^N . Rappelons que $H^N(f^N)$ est positif, nul seulement si $f^N = 1$. Il est commode ici de considérer, non pas des mesures de probabilité, mais leurs densités par rapport à une mesure invariante arbitraire — ici, ν_0^N —. Sous les hypothèses de l'énoncé, la loi P_0^N du système reste absolument continue par rapport à ν_0^N ; sa dérivée de Radon-Nykodim $f_t^N = \frac{dP_{N,t}^N}{d\nu_0^N}$ vérifie l'équation progressive de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^N = N^2 \mathcal{L}_N f_t^N$$

et on obtient facilement

$$(19) \quad \frac{d}{dt} H^N(f_t^N) = -N^2 I^N(f_t^N) \leq 0$$

où

$$(20) \quad I^N(f) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \sqrt{f} \right]^2 d\nu_0^N$$

est la valeur au point $\sqrt{f}$ de la forme de Dirichlet associée à l'opérateur symétrique $\mathcal{L}_N$. La décroissance de l'entropie dans (19) est connue sous le nom de "théorème H " de Boltzmann. Elle n'apporte pas de renseignement direct sur la densité locale. Au contraire, la *production d'entropie* I^N , qui s'annule si f est l'une des densités invariantes, se décompose en une somme sur les liens, ce qui est informatif.

Soit f^N la densité (sur $\mathbf{R}^N$) moyennée en temps $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$.

Par convexité des fonctionnelles H^N et I^N , on déduit immédiatement de (16), (19) et (20) les estimations *a priori*

$$(21.a) \quad H^N(f^N) \leq CN$$

$$(21.b) \quad I^N(f^N) \leq C/N$$

4.3. Les principales étapes de la preuve de Guo, Papanicolaou, Varadhan [GPV]

Pour toute fonction test g régulière sur $\mathbf{T}$, la formule d'Ito appliquée à $\hat{Y}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_{N^2 t}(i) \delta_{i/N}$ s'écrit

$$(22) \quad \langle g, \hat{Y}_t^N \rangle - \langle g, \hat{Y}_0^N \rangle = \int_0^t S_s^N ds + M_t^N$$

et deux calculs élémentaires montrent que la martingale M_t^N converge vers 0 en probabilité, uniformément sur les intervalles de temps bornés, et que

$$(23) \quad S_t^N = \mathcal{L}_N \langle g, \hat{Y}_t^N \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} g''\left(\frac{i}{N}\right) \phi'(Y_{N^2 t}(i)) (1 + o(1)).$$

Sauf dans le cas gaussien où ϕ est quadratique, l'équation résultant de (22) n'est pas close, car (23) n'est plus fonction de $\hat{Y}_t^N$. Considérons au lieu de ϕ' dans (23), $\psi(y) = \psi(y(-k), \dots, y(k))$ une fonction "locale" continue ; Guo, Papanicolaou et Varadhan montre à l'aide de (21.a,b) que pour toute fonction test g

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{P^N} \left\{ \frac{1}{N} \int_0^t \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ T^i(Y_{N^2 s}) - \int \psi d\nu_{\rho(Y_{N^2 s}, i, [N\varepsilon])} \right] ds \right\} = 0$$

avec

$$(24) \quad \rho(y, i, \ell) = \frac{1}{2\ell + 1} [y(i - \ell) + \dots + y(i + \ell)]$$

et où $\nu_\rho \in M_1^+(\mathbf{R}^Z)$ est le prolongement naturel de ν_ρ^N .

Soit $P^N \circ (\hat{Y}_t^N)^{-1}$ la mesure image de P^N par $(\hat{Y}_t^N)_{t \geq 0}$. On peut montrer (essentiellement à partir de (16)) que cette suite de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}^+; M(\mathbf{T}))$ est compacte ; ses points limites Q se concentrent sur des trajectoires déterministes μ_t d'après (22), de la forme $\mu_t(dx) = \rho(t, x)dx$; (23) et (24) entraînent que

$$\langle g, \mu_t \rangle - \langle g, \mu_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{T}} g''(x) h'(\rho(s, x)) dx ds,$$

ce qui est la formulation faible de (17). L'unicité de la solution de (17) assure alors la convergence des $P^N \circ (\hat{Y}_t^N)^{-1}$, et donc celle de la mesure de charges $\hat{Y}_t^\varepsilon$ vers $\rho(t, x) dx$.

Preuve de (24) : L'espérance dans (24) s'écrit en terme de $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$ comme

$$\int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\varepsilon])} \right] \right| f^N d\nu_0^N.$$

Les estimations *a priori* (21.a et b) suffisent à assurer (24). Définissons

$$A(N, C) = \{ \text{densités } f \text{ sur } \mathbf{R}^N : H^N(f) \leq CN, I^N(f) \leq CN^{-1} \};$$

$$(25) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\varepsilon])} \right] \right| f d\nu_0^N = 0$$

implique (24). La difficulté est que le nombre $2[N\varepsilon] + 1$ de variables tend vers l'infini, et semble échapper à tout contrôle. La première étape consiste à remplacer le petit bloc macroscopique de taille $N\varepsilon$ par un grand bloc microscopique de taille ℓ dans (25):

Estimée pour un bloc :

$$(26) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{1}{2\ell+1} (\psi \circ T^{i-\ell} + \dots + \psi \circ T^{i+\ell}) \right. \\ \left. - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, \ell)} \right| f d\nu_0^N = 0.$$

L'intégrale figurant dans (26) porte sur la moyenne glissante de la fonction $\bar{\psi}_\ell = \left| \frac{1}{2\ell+1} (\psi \circ T^{-\ell} + \dots + \psi \circ T^\ell) - \int \psi d\nu_{\rho(y, 0, \ell)} \right|$ qui dépend de $2(k+\ell)+1$ variables : elle est donc égale à $\int \bar{\psi}_\ell f_\ell d\nu_0^N$ où f_ℓ est la moyenne glissante des densités de $2(k+\ell)+1$ variables consécutives. L'intérêt de fixer ℓ est que (21.a) assure la compacité de ces distributions sur $\mathbf{R}^{2(\ell+k)+1}$, et l'on peut remplacer $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)}$ dans (26) par le supremum sur les points limites lorsque $N \rightarrow \infty$; (21.b) assure que ces points limites sont des combinaisons convexes des mesures invariantes $\nu_\rho^{2(\ell+k)+1}$.

Il suffit donc de montrer $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \bar{\psi}_\ell d\nu_\rho^{2(\ell+k)+1} = 0$, c'est-à-dire que les mesures $\nu_\rho^{2\ell+1}$ conditionnées par $\rho(y, 0, \ell) = \rho^*$ ont asymptotiquement le même comportement ergodique que ν_{ρ^*} ; ce point (substantiel) s'obtient à l'aide de techniques de grandes déviations (théorème 3.5 dans [GPV]).

Estimée pour deux blocs : les moyennes dans deux grands blocs microscopiques séparés par une faible distance macroscopique, sont proches :

$$(27) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\ell \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{\substack{m \in (-N\varepsilon, N\varepsilon) \\ |m| \geq 2(k+\ell)+1}} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\rho(y, i, \ell) - \rho(y, i+m, \ell)| f d\nu_0^N = 0.$$

Cette fois, l'intégrale s'exprime à l'aide de la moyenne glissante de la distribution jointe de deux groupes de $2(k+\ell)+1$ variables consécutives, à distance m ; en plus de l'étude des deux marginales menée pour établir (26), il s'agit de contrôler les échanges entre les deux groupes à l'aide de (21.b) et d'un générateur fictif (cf. théorèmes 4.3 et 4.6 de [GPV]).

Par continuité de $\rho \mapsto \int \psi d\nu_\rho$, les relations (26) et (27) entraînent (25).

4.4. Les modèles de Ginzburg-Landau gibbsiens

Sur le tore $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ à d dimensions, considérons maintenant un générateur de la forme (12) où la somme porte sur les plus proches voisins, et où

$$(28) \quad \mathcal{H}_N = - \sum_i (\phi + F) \circ T^i$$

avec F une fonction locale régulière bornée. Les mesures invariantes extrémales sont combinaisons convexes des mesures de Gibbs avec interaction de portée finie

$$\nu_\rho^N(dy) = Z_N^{-1} \exp \left\{ -\lambda(\rho) \sum_i y(i) + \mathcal{H}_N(y) \right\} dy(0) \cdots dy(N-1)$$

avec λ choisi selon (1) ; contrairement au modèle (12), les variables sont dépendantes à l'équilibre. Le système est gradient avec $U = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y(0)} \mathcal{H}_N$ (indépendant de N pour N assez grand). Définissons cette fois

$$(29) \quad \alpha(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nd} \text{Log } \mathbf{E}^{\nu_0^N} \exp \left\{ \lambda \sum_i y(i) \right\}$$

et notons encore h sa duale. Rezakhanlou [Re 1] montre par la méthode de production d'entropie, la convergence de $\hat{Y}_t^N$ vers la solution de l'équation (17) ainsi obtenue.

L'intérêt du modèle est l'existence de transition de phase, c'est-à-dire l'existence de plusieurs mesures de Gibbs $\nu_\rho \in M_1^+(\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d})$ à volume infini correspondant à un même potentiel chimique λ . Dans ce cas, la fonction convexe h n'est plus strictement convexe, et l'évolution décrite par l'équation de diffusion limite est dégénérée dans la région critique.

À cause de la transition de phase, la validité de (25) n'est pas établie pour toute fonction test ψ , mais seulement pour $\psi = U$ intervenant dans l'analogue de (41).

Fritz [Fr 1] étudie des modèles de Ginzburg-Landau gibbsiens et gaussiens. Dans [Fr 2], il étend la méthode de production d'entropie au cas du volume infini au lieu du tore ; la difficulté est de contrôler la production

d'entropie au bord d'un volume fixe. Notons enfin la méthode plus ancienne de la résolvante proposée par Papanicolaou et Varadhan [PV] : Fritz l'utilise dans [Fr 1] en l'absence de transition de phase.

Tout récemment, Yau propose dans [Y] une simplification de la méthode de la production d'entropie, en calculant l'entropie relative de la distribution instantanée $f_t^N d\nu_0^N$ non plus par rapport à l'équilibre global ν_0^N comme au 4.2, mais directement par rapport à un équilibre local dont le profil varie en temps et en espace : lorsque ce profil est solution de l'équation hydrodynamique, il remarque qu'alors l'entropie reste $o(N)$ à chaque instant, ce qui permet d'établir la convergence de $\hat{Y}_t^N$ comme plus haut, mais sans avoir recours à l'estimée pour deux blocs. La limitation essentielle de cette simplification est de ne fonctionner que lorsque l'équation hydrodynamique a une solution régulière.

5. D'AUTRES DÉVELOPPEMENTS

5.1. Modèles à espace continu

Olla et Varadhan [OV] étudient dans l'espace des phases (avec positions dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$) un grand nombre de particules dont les vitesses sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck couplés par une force répulsive ; ce système est non réversible. La limite fait intervenir le formalisme canonique de la mécanique statistique. Voir aussi Varadhan [V] pour des particules browniennes sur le tore couplées comme ci-dessus, et Rost [Ro 2] pour le modèle stochastique des sphères dures en dimension 1.

Funaki pose directement le modèle de Ginzburg-Landau sur la droite réelle, c'est-à-dire comme une équation aux dérivées partielles stochastique [Fu].

5.2. D'autres modèles de réseau

Le modèle du votant ne possède pas de quantité conservée, mais son comportement est tout à fait semblable à ceux étudiés ici ; la hiérarchie est close, et il donne lieu à des équations linéaires ($d \geq 3$) [PS].

D'autres modèles sans loi de conservation conduisent à des équations de réaction-diffusion ou des équations cinétiques, en ajoutant à (5) ou à (8) un terme non linéaire de degré 0 ; leur générateur est de la forme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + a(\varepsilon) \mathcal{L}_2$ où $\mathcal{L}_1$ est du type considéré jusqu'à présent, et où $\mathcal{L}_2$ est un générateur de saut ne possédant pas de quantité conservée. La dynamique $\mathcal{L}_2$ étant ralentie par le facteur $a(\varepsilon)$, le système s'équilibre localement selon la dynamique "hydrodynamique" $\mathcal{L}_1$ entre les sauts, espacés dans le temps, provoqués par $\mathcal{L}_2$; le système relève encore de méthodes hydrodynamiques. De Masi, Ferrari et Lebowitz[DFL], dans le cas où $\mathcal{L}_1$ est l'exclusion simple symétrique, $\mathcal{L}_2$ la dynamique de Glauber, montrent que le profil limite vérifie $\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho + F(\rho)$ où F est un polynôme ; Caprino, de Masi, Pulvirenti et Presutti obtiennent l'équation de Carleman (l'équation de Boltzmann avec vitesse discrète) comme équation limite [CDPP].

5.3. Cas diffusifs non gradients

Le seul système non gradient pour lequel la limite (7b) a été établie est l'exclusion simple en milieu périodique (symétrique en moyenne) étudié par Wick [W 2] ; la contribution dynamique au coefficient de diffusion se calcule explicitement. Eyink, Lebowitz et Spohn envisagent le cas unidimensionnel où le courant est somme d'un gradient spatial et d'une dérivée temporelle [ELS].

5.4. Grandes déviations

Le comportement hydrodynamique étant une loi des grands nombres, l'étude des grands écarts à la limite hydrodynamique peut être menée, grosso modo avec les mêmes ingrédients. Donsker et Varadhan [DV] pour le modèle de Ginzburg-Landau, Kipnis, Olla, Varadhan [KOV] pour l'exclusion simple symétrique, procèdent au recentrage exponentiel de la mesure $\hat{Y}_t^\varepsilon$ par une perturbation, faible et à variation lente en espace et en temps, du générateur. Dans le premier cas, l'intégrale d'action est la norme $\frac{\partial}{\partial t} \rho - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h'(\rho)$ dans l'espace $H_{-1}(\mathbf{T})$ intégrée en temps. Dans le deuxième, la perturbation s'interprète comme une asymétrie faible du processus d'exclusion simple. Notons que la probabilité de grande déviation est exponentiel-

lement petite pour la mesure $\hat{Y}_t^\varepsilon$ associée à la quantité conservée, mais superexponentiellement petite pour les autres mesures — lorsque ces déviations ne résultent pas de celles de $\hat{Y}_t^\varepsilon$; ce phénomène rappelle les différentes échelles de temps des fluctuations [DIPP]. Notons enfin que Landim [La 2] a pu résoudre complètement le problème des grandes déviations du temps d'occupation d'un site pour le processus d'exclusion simple symétrique en dimension un, en construisant la passerelle liant cette question à celle, plus simple, concernant la mesure d'occupation $\hat{Y}_t^\varepsilon$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AVA] E.D. ANDJEL, M.E. VARES - *Hydrodynamic equations for attractive particle systems in $\mathbb{Z}$* , J. Stat. Phys. **47** (1987), 265-288.
- [ABL] E.D. ANDJEL, M.D. BRAMSON, T.M. LIGGETT - *Shocks in the asymmetric exclusion process*, Prob. Th. Rel. Fields **78** (1988), 231-247.
- [AK] E.D. ANDJEL, C. KIPNIS - *Derivation of the hydrodynamical equation for the zero-range interaction process*, Ann. Prob. **12** (1984) 325-334.
- [BF 1] A. BENASSI, J.-P. FOUQUE - *Hydrodynamic limit for the asymmetric simple exclusion process*, Ann. Prob. **15** (1987), 546-560.
- [BF 2] A. BENASSI, J.-P. FOUQUE - *Hydrodynamic limit for the asymmetric zero range process*, Ann. Inst. H. Poincaré **24** (1988), 184-200.
- [BR] T. BROX, H. ROST - *Equilibrium fluctuations of stochastic particle systems : The role of conserved quantities*, Ann. Prob. **12** (1984), 742-759.
- [DKPS] A. DE MASI, C. KIPNIS, E. PRESUTTI, E. SAADA - *Microscopic structure at the shock in the asymmetric simple exclusion*, Stochastics (1989).
- [DFL] A. DE MASI, P. FERRARI, J.L. LEBOWITZ - *Reaction-diffusion equations for interacting particle systems*, J. Stat. Phys. **44**, (1986), 589-644.
- [DIPP] A. DE MASI, N. IANIRO, A. PELLEGRINOTTI, E. PRESUTTI - *A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems. In*

- non equilibrium phenomena II, from stochastics to hydrodynamics*, J.L. Lebowitz and E.W. Montroll, eds., North-Holland, Amsterdam (1984), 123-294.
- [DV] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Large deviations from a hydrodynamic scaling limit*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 243-270.
- [DS] R.L. DOBRUSHIN, R. SIEGMUND-SCHUTZE - *Hydrodynamical limit for systems of particles with independent evolution*, Math. Nachr. **105** (1982), 199-224.
- [ELS] G. EYINK, J.L. LEBOWITZ, H. SPOHN - *Hydrodynamics of stationary non-equilibrium states from stochastic lattice gas models*, Comm. Math. Phys. **132** (1990), 253-283.
- [Fr 1] J. FRITZ - *On the hydrodynamic limit of a Ginzburg-Landau model. The law of large numbers in arbitrary dimensions*, Prob. Theory Rel. Fields **81** (1989), 291-318.
- [Fr 2] J. FRITZ - *On the diffusive nature of entropy flow in infinite systems...*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 331-352.
- [Fu] T. FUNAKI - *The hydrodynamical limit for scalar Ginzburg-Landau model on $\mathbf{R}$* , in stochastic Analysis, Lect. Notes in Math. **1322** (1988), 28-36.
- [FKS] P. FERRARI, C. KIPNIS, E. SAADA - *Microscopic structure of travelling wave in the asymmetric simple exclusion process*, Ann. Prob. **19** (1991), 226-244.
- [GPV] MZ. GUO, G.C. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN - *Non linear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), 31-59.
- [KOV] C. KIPNIS, S. OLLA, S.R.S. VARADHAN - *Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion process*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 115-137.
- [La 1] C. LANDIM - *Hydrodynamic equation for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$* , preprint, Paris (1989).
- [La 2] C. LANDIM - Thèse Université de Paris 7 (1990).
- [Li] T.M. LIGGETT - *Interacting particle systems*, Springer, Berlin (1985).
- [M] C.B. MORREY - *On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 279-

326.

- [OV] S. OLLA, S.R.S. VARADHAN - *Scaling limit for interacting Ornstein-Uhlenbeck processes*, preprint New York (1990).
- [PV] G. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN - *Boundary value problems with rapidly oscillating coefficients*, in Random fields II, ed. Fritz, Lebowitz, Szász, North Holland, Amsterdam (1981).
- [Pr] E. PRESUTTI - *Collective behavior of interacting particle systems*, Proceed. 1st World Congress Bernoulli Society (1986).
- [PS] E. PRESUTTI, H. SPOHN - *Hydrodynamics of the voter model*, Ann. Prob. **11** (1983), 867-875.
- [Re 1] F. REZAKHANLOU - *Hydrodynamic limit for a system with finite range interactions*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), 445-480.
- [Re 2] F. REZAKHANLOU - *Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$* , preprint, New York (1990).
- [Ro 1] H. ROST - *Non-equilibrium behavior of a many particle systems : density profile and local equilibrium*, Z. Wahr. verw. Geb. **58** (1981), 41-54.
- [Ro 2] H. ROST - *Diffusion de sphères dures dans la droite réelle. Comportement macroscopique et équilibre local*, Lect. Notes in Math. **1059** (1984), 127-143.
- [Si] Ya.G. SINAI - *Dynamics of local equilibrium Gibbs distributions and Euler equations. The one-dimensional case*, Selecta Math. Soviet. **7** (1988), n° 3, 279-289.
- [Sm] J. SMOLLER - *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Berlin (1982).
- [Sp] H. SPOHN - *Large scale dynamics of interacting particles. Part B : stochastic lattice gases*, preprint, Munich (1989), 260 pages. À paraître aux Lect. Notes in Physics.
- [V] S.R.S. VARADHAN - *Scaling limits for interacting diffusions*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 313-353.
- [W. 1] D. WICK - *A dynamical phase transition in an infinite particle system*, J. Stat. Phys. **38** (1985), 1015-1025.
- [W. 2] D. WICK - *Hydrodynamic limit of non-gradient interacting particle process*, J. Stat. Phys. **54** (1989), 873-892.

- [Y] H. YAU - *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models*, Let. Math. Phys. **22** (1991), 63-80.

Francis COMETS

URA 756 et 1321 du CNRS

Université de Paris 7

U.F.R. de Mathématiques

Tour 45-55 - 5ème étage

2 place Jussieu

F-75251 PARIS CEDEX 05