Astérisque

DANIEL BENNEQUIN

Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact

Astérisque, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki, exp. nº 725, p. 285-323

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__285_0>

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI juin 1990
42ème année, 1989-90, n° 725

TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE, CONVEXITÉ HOLOMORPHE ET STRUCTURES DE CONTACT
[d'après Y. Eliashberg, D. Mc Duff et al.]

par **Daniel BENNEQUIN**

1. VARIÉTÉS DE STEIN ET STRUCTURES DE CONTACT

1.1. Un champ différentiable F d'hyperplans tangents sur une variété lisse M est une *structure de contact* s'il est défini près de chaque point x de M par une équation de Pfaff $\alpha = 0$, telle que la dérivée extérieure $d\alpha$ de la 1-forme α soit une forme inversible sur l'hyperplan F_x (*cf.* [A, 1 & 2], [E.1], [A.D.], [L,M.]) ; le couple (M, F) est une *variété de contact.* Les composantes connexes d'une variété de contact sont toutes de dimension impaire ; chaque structure de contact est naturellement munie d'une structure de fibré conformément symplectique.

Dans l'exposé qui suit, toutes les structures de contact considérées vont être de classe C^∞ et transversalement orientables : elles seront donc définies par des *formes de contact* de classe C^∞ α sur la variété toute entière. Soit α une forme de contact définissant F sur M^{2n-1} ; la forme volume $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ oriente M. Lorsque M est ainsi orientée et que F est orientée (transversalement) par α, on dit que F est *directe.* Quand n est pair les deux orientations de F donnent la même orientation de M alors qu'elles donnent des orientations différentes de M quand n est impair.

L'espace des éléments de contact d'une variété, l'espace des jets d'ordre 1 de fonctions numériques sur une variété, les variétés pré-quantiques possèdent des structures de contact canoniques. L'analyse complexe est également une source de problèmes de Géométrie de Contact.

1.2. Soient W une variété analytique complexe et G une sous-variété à bord de codimension zéro de la variété réelle sous-jacente à W ; soient Ω l'intérieur de G et M le bord de G ; nous désignerons par J la structure presque complexe du fibré tangent $T(W)$ et par F le sous-fibré (de codimension un) $T(M) \cap J(T(M))$ de $T(M)$. La variété M sera orientée comme bord de Ω (une normale sortante suivie d'une base orientée de $T_x M$ forment un repère orienté de $T_x W$) et F sera orienté par J ; soit α une forme différentielle C^∞ sans singularité sur M, nulle sur F, donnant la bonne orientation transverse de F ; l'équation

$$L(v, w) = d\alpha(v, Jw) + i\, d\alpha(v, w)$$

définit une forme hermitienne sur (F, J) qui s'appelle une *forme de Levi* de M. Sa classe conforme est intrinsèquement définie.

Si $\rho = 0$ est une équation transverse de M avec $\rho < 0$ dans Ω, une forme α convenable sur M est

$$\alpha = \frac{1}{i}\, d'\rho = \frac{1}{2i}\,(d'\rho - d''\rho) = d^J \rho.$$

Le domaine Ω est *strictement pseudo-convexe* (en abrégé s.p.c.) si les formes de Levi sur M sont définies positives. On dit aussi que M et G sont s.p.c..

Pour un domaine de $\mathbf{C}^2$, en coordonnées $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, Ω est s.p.c. si l'expression suivante est strictement positive :

$$\begin{aligned} L(\rho) = {} & \Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_1^2}\Big)\Big(\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\Big)^2\Big) \\ & + \Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_2^2}\Big)\Big(\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\Big)^2\Big) \\ & - 2\Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_1\partial y_2}\Big)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + \frac{\partial\rho}{\partial y_1}\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\Big) \\ & - 2\Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial x_2\partial y_1}\Big)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial y_2} - \frac{\partial\rho}{\partial x_2}\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\Big). \end{aligned}$$

Cette notion de convexité provient des recherches de Hartogs et Levi au début du siècle sur les domaines d'holomorphie dans $\mathbf{C}^2$. (Références d'ensemble [B.,F.,G.], [HÖ], [G.,R.]).

Une *structure de Cauchy-Riemann* (en abrégé C.R.) sur une variété M est une structure presque complexe J sur un champ différentiable F d'hyperplans tangents à M. Si (M, F, J) est une structure C.R., le fibré $F \otimes \mathbf{C}$ se décompose en $F' \oplus F''$, vecteurs de type (1,0) et vecteurs de type (0,1) ; on dit que J est *intégrable* si le crochet de deux sections de F' est encore une section de F'. Une hypersurface d'une variété analytique complexe est une variété C.R. intégrable. Les notions de forme de Levi et de pseudo-convexité appartiennent aux structures C.R. intégrables : en effet, si α définit F et si v et w sont deux sections de F, on a $v + iJv \in F'$, $w + iJw \in F'$ et

$$\begin{aligned} d\alpha(v, Jw) - d\alpha(w, Jv) &= \alpha([w, Jv]) - \alpha([v, Jw]) \\ &= -Im(\alpha[v + iJv, w + iJw]), \end{aligned}$$

donc la restriction de $d\alpha$ à F est compatible avec J dès que J est intégrable.

Pourtant, nous dirons qu'une structure C.R., même non intégrable, est s.p.c. si il existe une forme α définissant F telle que $d\alpha(v, Jv) > 0$ pour tout vecteur $v \neq 0$ dans un des hyperplans F.

Le champ d'hyperplans complexes d'une variété C.R. s.p.c. est une structure de contact. Le champ F du bord M d'un domaine strictement pseudo-convexe Ω dans une variété analytique W est une structure de contact directe si M est orientée comme bord de Ω dans W et si F est orienté par J.

1.3. D'après K. Oka [O. VI & IX], les domaines s.p.c. Ω de $\mathbf{C}^n$ (et ceux qui sont étalés sur $\mathbf{C}^n$) sont des domaines d'holomorphie (il existe des fonctions holomorphes sur Ω qui ne s'étendent pas au-delà de Ω). H. Cartan et P. Thullen ont caractérisé les domaines d'holomorphie par la convexité holomorphe :

Soit E un sous-ensemble de W, l'*enveloppe holomorphe de E par rapport à W*, notée $\hat{E}_W$ est l'ensemble des points de W où la valeur absolue de n'importe quelle fonction holomorphe sur W reste majorée par sa borne supérieure sur E ; et la variété W est dite *holomorphiquement convexe* si $\hat{E}_W$ est compact dès que E l'est.

Si W est holomorphiquement convexe et si l'on peut trouver assez de fonctions holomorphes globalement définies sur W pour séparer deux points

arbitraires et pour former des coordonnées locales holomorphes au voisinage de tout point, on dit que W est une *variété de Stein.*

H. Grauert ([H.G]) a démontré que tout Ω s.p.c. relativement compact dans une W analytique est holomorphiquement convexe, et aussi que W est de Stein si et seulement si elle est holomorphiquement convexe et ne contient aucun sous-ensemble analytique compact à part les points.

Nous appellerons *domaine de Grauert* ouvert (resp. fermé) un ouvert s.p.c. relativement compact d'une variété analytique (resp. sa fermeture).

Donc un domaine de Grauert ne contenant aucun sous-ensemble analytique compact de dimension > 0 est une variété de Stein. En fait, il résulte du travail de H. Grauert, H. Rossi, R. Narasimhan qu'un domaine de Grauert s'obtient toujours par éclatements d'un nombre fini de points (éventuellement singuliers) dans un espace de Stein (*cf.* [G.,R.] et [C.]).

D'après Remmert et Stein, toute variété de Stein de dimension n se plonge dans un $\mathbf{C}^N$; Bishop avait montré que $N = 2n + 1$ suffit, puis Gromov et Eliashberg ont déterminé la meilleure borne possible : $N = [\frac{3n}{2}] + 2$ ([M.G.,E.]).

1.4. Une fonction de W dans $\mathbf{R}$ est *(strictement) pluri-sous-harmonique* (en abrégé (s) p.s.h.) si sa restriction à tout germe de courbe holomorphe est (strictement) sous-harmonique (*cf.* [HÖ]). En d'autres termes, la 2-forme de type $(1,1)$ $\omega = dd^J\rho = 2id'd''\rho$ est une forme symplectique adaptée à J, strictement positive par rapport à J (la formule $\omega(v, Jw) + i\omega(v, w)$ définit une structure hermitienne définie positive). Avec ρ s.p.s.h., W est kählerienne.

Les niveaux réguliers d'une fonction s.p.s.h. sont s.p.c.. Et W est de Stein si et seulement si elle admet une fonction s.p.s.h. φ telle que tous les sous-ensembles $\varphi \leq C$ soient compacts (H. Grauert (*cf.* [HÖ])).

D'après Lefschetz, Serre, Andreotti, Frankel, Milnor, ..., sur une variété analytique de Stein W , de dimension n, il existe une fonction φ s.p.s.h. qui est une fonction de Morse propre avec tous ses points critiques d'indices $\leq n$. En particulier, W a le type d'homotopie d'un CW complexe de dimension $\leq n$.

De plus, si Ω est un domaine de Grauert dans W, il existe une φ

possédant toutes ces propriétés dont $M = \partial\Omega$ est un niveau régulier. (En particulier, M est connexe dès que Ω est connexe.)

Yakov Eliashberg s'est attaché récemment à la caractérisation topologique des variétés de Stein :

THÉORÈME 1 (Eliashberg) ([E.2,3]).— *Soit W une variété C^∞ réelle de dimension $2n$ munie d'une structure* presque complexe *J' et soit φ une fonction de Morse propre minorée sur W dont tous les points critiques sont d'indice $\leq n$. Si $n > 2$, J' est homotope à une structure complexe intégrable J sur W qui rend la fonction φ strictement pluri-sous-harmonique ; la variété analytique complexe (W, J) est une variété de Stein.*

Soit Ω un ouvert relativement compact dans W dont la frontière M est un niveau régulier de φ ; vis-à-vis de J, Ω est un domaine strictement pseudo-convexe et une variété de Stein.

Eliashberg utilise ce résultat (et quelques autres) pour répondre à une question de M. Wodzicki :

COROLLAIRE.— *Toute variété de Stein X de dimension > 2 possède une filtration $X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0$ par des sous-variétés de Stein de dimension n telle que chaque X_k, $k = 0, \cdots, n$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension k et que $\pi_i(X_{k+1}, X_k) = 0$ pour $k = 0, \cdots, n-1$, et $i \leq k$.*

Il faut aussi signaler le travail connexe de A. Weinstein ([W]).

1.5. La dimension (complexe) 2 montre effectivement moins de souplesse mais elle cache aussi beaucoup plus de richesses ; c'est à elle que la plus grande partie de l'exposé est consacrée. Par exemple, je vais tenter de donner une idée de la démonstration du résultat suivant dans les paragraphes 4, 5, 6 :

THÉORÈME 2 (Eliashberg, Bedford & Klingenberg) (*cf.* [E.4], [B.,K.]).— *Soient Ω un domaine de Grauert de dimension 2 et M son bord ;*

toute sphère Σ, de dimension 2 plongée dans M est le bord d'une boule B de dimension 3 plongée dans Ω.

En fait B est C^2-proche d'une boule B' (avec $\partial B' = \Sigma' \subset M$, C^2

proche de Σ) dont l'intérieur est feuilleté par des disques holomorphes plongés dans Ω.

Si Ω est de Stein, $B' \cup \Sigma'$ est l'enveloppe holomorphe de Σ' par rapport à $\Omega \cup M$.

COROLLAIRE.— *La variété $D^2 \times S^2$ n'admet aucune structure analytique complexe qui la rende strictement pseudo-convexe.*

Remarque.— Bedford et Klingenberg ont écrit la démonstration dans le cadre de Stein, Eliashberg a donné tous les éléments d'une démonstration dans un cadre plus général : celui des domaines *presque complexes positifs* (par rapport à une structure symplectique sur $G = \Omega \cup M$) de [M.G.] (*cf.* [D.B.2] p. 115, et voir §3.4, §§4, 5, 6). L'énoncé que je viens de donner est à cheval entre les deux cadres à cause du lemme suivant :

Lemme.— *En dimension 2, un domaine de Grauert fermé G est positif (c'est-à-dire qu'il existe ω symplectique sur G strictement positive par rapport à la structure complexe : $\omega(v, Jv) > 0$ si $v \neq 0$).*

En effet, il existe un sous-ensemble analytique compact X de dimension complexe ≤ 1 dans G, un morphisme propre π de G sur un espace de Stein K qui est un isomorphisme hors de X et qui envoie X sur des points, et une fonction φ s.p.s.h., sur K (voir par exemple [C.]). Soit ρ une fonction C^∞ sur G, s.p.s.h. dans un voisinage U des singularités de X ; soit ω_X une 2-forme fermée sur G qui donne une aire sur $X \backslash (X \cap U)$ (elle existe car aucune des composantes connexes de X n'est homologue à zéro dans G, exercice) ; pour des constantes a et b convenables, la forme fermée

$$\omega = dd^J(\pi^*(\varphi)) + add^J\rho + b\omega_X$$

est strictement positive sur J.

(L'auteur pense qu'en fait G peut être muni d'une structure kählerienne.)

La preuve du théorème 2 est une analyse des disques holomorphes appuyés sur Σ (problème de Riemann-Hilbert non linéaire), commencée par Bishop, Kenig, Webster, Hunt, Moser, Bedford, Gaveau, Gromov... (*cf.* §§4, 5, 6). Une analyse des familles à un paramètre de sphères dans M et de leurs enveloppes permet encore d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 3 (Eliashberg) ([E.4]).— *Toute variété de Stein Ω de bord $M = S^3$ (la sphère de dimension 3 réelle) est difféomorphe à la boule B^4. De plus, il existe sur Ω une fonction s.p.s.h. constante sur M ne présentant qu'un seul point critique, et le champ de plans F sur M est isomorphe à la structure de contact standard directe de S^3 (celle de la sphère ronde dans $\mathbf{C}^2$).*

Si l'on ajoute à ces théorèmes ceux de D. Mc Duff sur les variétés symplectiques de dimension 4 ([M.D.1,2,3] *cf.* §2), il vient :

COROLLAIRE (Y. Eliashberg, D. Mc Duff).— *Tout domaine de Grauert dont le bord est difféomorphe à S^3 est difféomorphe à la somme connexe (intérieure) de la boule B^4 avec un nombre fini de plans projectifs (retournés) $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ (c'est-à-dire la boule de $\mathbf{C}^2$ éclatée en certains points), et la structure de contact au bord est standard.*

On ignore encore comment cela s'étend à d'autres bords que S^3 mais les résultats sur le remplissage symplectique (*cf.* §2) font penser que la marge de manœuvre de Ω ainsi que celle de F seront très limitées par la topologie de M^3.

Les variétés de dimension 3 fermées orientées possèdent une excellente théorie de la divisibilité par somme connexe : J. Milnor ([M.1]) a démontré que toute M^3 (fermée orientée) se décompose de manière unique (aux unités S^3 et $-S^3$ près) en facteurs premiers (indécomposables)

$$M^3 = M_1^3 \# M_2^3 \cdots \# M_N^3.$$

THÉORÈME 4 (Eliashberg) ([E.4]).— *Soit M^3 le bord d'un Ω relativement compact de Stein ; M est décomposable si et seulement si il existe Ω_1 et Ω_2 relativement compacts de Stein non difféomorphes à B^4 dont Ω est la somme connexe au bord.*

De plus, si Ω est somme connexe au bord de Ω_1 et Ω_2 de façon topologique, il est automatiquement somme connexe de deux variétés de Stein Ω_1', Ω_2' (difféomorphes à Ω_1, Ω_2) le long d'une boule B^3 Levi plate standard, c'est-à-dire une boule feuilletée par des disques holomorphes dont les bords

forment un système de parallèles sur la sphère S^2 au bord de B^3 (somme connexe rigide).

Ce théorème peut être rapproché du Théorème de Donaldson [D.1] d'indécomposabilité des surfaces projectives.

2. REMPLISSAGES SYMPLECTIQUES

2.1. Soit ω une structure symplectique sur une variété réelle lisse W de dimension $2n$; une hypersurface orientée M de W est du *type de contact* (Weinstein, *cf.* [W.]) s'il existe une forme de contact α sur M, telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ définisse l'orientation de M (*i.e.* α directe) et telle que $d\alpha$ coïncide avec ω en restriction à $T(M)$ (la forme α est dite *adaptée* à M et à ω). La forme ω est donc exacte au voisinage d'une hypersurface du type de contact.

Soient M du type de contact dans (W,ω) et α adaptée ; soient ξ le champ de Reeb de α ($i(\xi)\alpha = 1$, $i(\xi)d\alpha = 0$) et ν la normale orientée à M dans W (M est le bord du côté où pointe $-\nu$), nous dirons que M est *convexe vis-à-vis* de ω (ou symplectiquement convexe) si $\omega(\nu,\xi) > 0$ (W sera toujours orientée par ω^n).

Notons que la classe d'isomorphisme de la structure de contact (directe) F associée à une forme adaptée est bien définie par M, lorsque M est compacte sans bord (car $t\alpha + (1-t)\alpha'$, $0 \leq t \leq 1$, est adaptée si α et α' le sont). Supposons que M soit le bord orienté d'un domaine relativement compact Ω de W ; si M est du type de contact et convexe du côté de Ω, nous dirons que la structure de contact F sur M adaptée à M et à ω est un *bord* de la variété symplectique (Ω,ω), ou bien que (Ω,ω) est un *remplissage symplectique* de (M,F).

Toute variété symplectique (W,ω) possède une structure *presque complexe* J (bien définie à homotopie près) qui est *positive* ($\omega(v,Jv) > 0$ si $v \neq 0$) ; elle en possède même qui sont adaptées ($\omega(v,Jv)$ définit un produit scalaire). Pour une telle structure J, le bord (M,F) de (Ω,ω) est C.R. et strictement pseudo-convexe.

Inversement, si M est le bord d'un domaine de Grauert Ω d'une variété de Stein, sa structure C.R. est le bord symplectique de Ω pour $\omega = dd^J\rho$ avec ρ s.p.s.h. sur W constante et régulière sur M.

Remarque.— Une notion un peu différente est introduite par Eliashberg [E.5] : dans une variété symplectique (W, ω), supposons que l'hypersurface M soit le bord d'un domaine Ω et orientons M comme bord de Ω, la structure symplectique ω sur Ω *domine* une structure de contact *directe* F sur M si elle induit la structure conforme symplectique canonique sur F (avec la bonne orientation). (Si ξ est une normale directe à F dans M et ν une normale sortante à M, $\omega(\nu, \xi) > 0$ résulte des choix d'orientations.) Lorsque $n > 2$, si ω domine F, il existe une forme adaptée α qui définit F. En effet, soit α une forme de contact nulle sur F et satisfaisant $\omega_{|F} = d\alpha_{|F}$, il existe alors une 1-forme β sur M telle que $d\alpha = \omega + \alpha \wedge \beta$. Soit ξ le champ de Reeb de α ; quitte à changer β en $\beta - \beta(\xi)\alpha$, on peut supposer $\beta(\xi) = 0$. De l'égalité $d\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge d\beta$ résulte alors $d\beta = \alpha \wedge i(\xi)d\beta$, donc $d\alpha \wedge \beta = 0$ et $\omega \wedge \beta = 0$, d'où $\beta = 0$ si $\dim F \geq 4$. Lorsque $n = 2$, il se peut que ω domine F sans que F soit isomorphe à une structure adaptée à M et à ω

Notons que toute structure de contact directe est dominée par sa *symplectisation* (*cf.* [A.1]). (La symplectisation de F sur M est le cône symplectique Σ_F de $T^*M \backslash M$ constitué par les formes linéaires sur les espaces tangents aux points de M qui définissent les hyperplans F avec leur orientation transverse.)

2.2. Une variété symplectique (W, ω) est *asphérique symplectiquement* s'il n'existe pas de classe sphérique dans $H_2(W; \mathbf{Z})$ strictement positive sur ω ; elle est dite *standard à l'infini* (ou *asymptotiquement plate*) si le complémentaire d'un compact dans W est isomorphe symplectiquement au complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel symplectique. Gromov [M.G.] avait démontré que $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure standard est la seule variété symplectiquement asphérique et asymptotiquement plate de dimension 4 ; il s'ensuit que tout remplissage symplectique asphérique de la sphère de contact standard S^3 est symplectomorphe à une boule plongée

dans le $\mathbf{R}^4$ standard.

Disons que (W,ω) est *minimale* si elle ne contient pas de sphère de dimension 2 plongée symplectique et *exceptionnelle* (*i.e.* d'auto-intersection -1 en homologie).

THÉORÈME 5 (D. Mc Duff) (*cf.* [M.D.3]).— *Les espaces lenticulaires L_p, $p \geq 1$ (en particulier $S^3 = L_1$, $SO_3 = L_2$, $\mathbf{P}^3_2(\mathbf{R}) = L_4$ (c'est le fibré en cercles tangents à $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$)), munis de leurs structures de contact standard directes (quotients de celle de S^3) possèdent des remplissages minimaux. Si $p \neq 4$, le remplissage minimal est unique à difféomorphisme près et L_4 a exactement deux remplissages minimaux à difféomorphisme près.*

En fait, D. Mc Duff démontre que tous ces remplissages s'obtiennent en prenant le complémentaire d'une sphère holomorphe C (d'auto-intersection p) dans une surface complexe projective : pour L_p ($p > 1$) une bonne surface est $\mathbf{P}(\mathcal{O}(p) \oplus \mathbf{1})$ (topologiquement, c'est $S^2 \times S^2$ ou $\mathbf{CP}^2 \# \overline{\mathbf{CP}}^2$). Lorsque $p = 1$ ou 4, $\mathcal{O}(p)$ se plonge aussi dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et C est une droite ou une conique.

Le théorème vient d'un résultat sur les variétés symplectiques fermées :

THÉORÈME 6 ([M.D.3]).— *Soit C une sphère de dimension 2 symplectique plongée dans une variété symplectique minimale (W,ω) compacte sans bord ; si l'auto-intersection homologique $p = C.C$ est ≥ 0, alors (W,ω) est isomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (avec un multiple de la structure standard) ou bien à un fibré symplectique en sphère S^2 sur une surface de Riemann compacte X, et C vient, soit d'une droite ou d'une conique dans le cas de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, soit d'une fibre ou de l'image d'une section dans le cas du fibré symplectique. Le type de (W,C) est déterminé à isotopie près sauf si $p = 0$ ou 4.*

Ce théorème permet aussi d'obtenir une sorte d'unicité symplectique des remplissages minimaux Ω_p des lenticulaires L_p : la forme ω sur Ω_p est déterminée dès qu'on se donne sa classe de cohomologie dans $H^2(\Omega_p, \mathbf{R})$ et une forme adaptée $d\alpha$ sur L_p.

Tous les autres remplissages symplectiques des L_p se déduisent des Ω_p minimaux par *éclatements symplectiques* : on remplace une boule isomorphe à la boule de rayon λ dans le $\mathbf{R}^4$ symplectique standard par la courbe

exceptionnelle de $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ (avec la structure $\lambda^2\omega_0$) (*cf.* [M.D.2]).

Remarque.— Dans [MA] Michèle Audin explique pourquoi il n'existe pas de somme connexe symplectique pour les variétés fermées (D. Mc Duff, M. Gromov). (Soulignons que sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ il n'y a pas de structure presque complexe qui induise l'orientation opposée, donc les éclatements ne sont pas des sommes connexes symplectiques.)

Observons que l'on ignore encore s'il existe une structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ non isomorphe à un multiple de la structure standard. Afin de prouver qu'une telle structure est impossible, il suffirait de démontrer l'existence de sphères symplectiques plongées pour toute structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. La récente généralisation par Donaldson des théorèmes d'annulation de Kodaira aux structures presque complexes va dans ce sens.

2.3. En ce qui concerne les variétés symplectiques de dimension > 4, on dispose du résultat suivant :

THÉORÈME 7 (M. Gromov, D. Mc Duff, A. Floer, Y. Eliashberg).— *Les remplissages asphériques de la structure standard sur la sphère S^{2n-1} sont tous* difféomorphes *à la boule B^{2n}. Toute variété symplectique asphérique et standard à l'infini est difféomorphe à $\mathbf{R}^{2n}$.*

Comme les théorèmes 5 et 6, ce théorème se démontre grâce à la technique des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov.

Du théorème 7 et des constructions qui donnent le théorème 1, Eliashberg [E.5] déduit des exemples nouveaux de structures de contact exotiques sur les sphères en dimension ≥ 5.

THÉORÈME 8 (Eliashberg).— *Pour tout $n > 2$, il existe sur S^{2n-1} des structures de contact qui bordent des variétés symplectiques et qui ne sont pas isomorphes à la structure standard. Si n est impair, il existe de telles structures dans la classe d'homotopie de la structure standard.*

La proposition à laquelle Eliashberg fait appel pour la construction du théorème 8 a son intérêt propre pour l'Analyse complexe, puisqu'elle généralise la proposition bien connue (*cf.* Harvey, Wells, Nirenberg, [N.,W.]) :

dans une variété analytique complexe W, toute variété *totalement réelle* V (*i.e.* $T(V) \cap J(T(V)) = 0$) admet un système fondamental de voisinages de Stein s.p.c.. Eliashberg étend cela aux sous-variétés immergées :

soit V une sous-variété immergée totalement réelle à points doubles transverses telle que J laisse stable la réunion des espaces tangents de V aux points doubles ; alors V admet un système fondamental de voisinages de Stein strictement pseudo-convexes.

Les remplissages des structures exotiques du théorème 8 s'obtiennent par sommes connexes au bord de plombages de Milnor des voisinages de S^n dans son cotangent.

Pour des exemples nouveaux de structures exotiques sur $\mathbf{R}^{2n-1}$, $n > 2$, voir le travail de Marie-Paule Muller ([M.P.M.]).

Un problème encore largement ouvert ici est de caractériser les structures de contact qui se remplissent symplectiquement. Il faudrait aussi comprendre quand est-ce qu'un bord symplectique peut être transformé en bord holomorphe C.R..

D'après Milnor, toute variété de contact fermée de dimension $2n-1$ est le bord d'une variété compacte de dimension (réelle) $2n$ qui possède une structure presque complexe ([M.2]). On ne sait pas si une variété fermée de dimension $2n-1$, bord d'une variété compacte presque complexe de dimension $2n$ peut être munie d'une structure de contact.

3. SURFACES RÉELLES DANS LES SURFACES COMPLEXES, ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE ET NŒUDS LEGENDRIENS

3.1. L'une des principales conjectures non résolues sur la topologie des surfaces algébriques complexes s'énonce ainsi :

Conjecture 1.— *Soient X une surface complexe projective lisse et A une courbe algébrique lisse connexe et très ample dans X ; soit S une surface réelle orientée connexe plongée dans X, homologue à A, le genre de S est supérieur à celui de A.*

Cette conjecture appartient maintenant au folklore des topologues et des géomètres. Dans le cas où X est le plan projectif, elle est attribuée à René Thom :

Est-ce qu'une surface fermée orientée connexe plongée dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ *de degré d peut avoir un genre inférieur à* $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$?

Une question analogue est formulée pour les courbes rationnelles :

Est-ce qu'une sphère de dimension 2 immergée dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ *de degré d peut voir un nombre de points doubles inférieur à* $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$?

L'origine de la question est la conjecture de J. Milnor (([M.3]) sur les entrelacs algébriques ; c'est la version "locale" du problème.

Conjecture 2.— *Soit* δ *le nombre de points doubles ordinaires concentrés en une singularité isolée* 0 *d'une courbe algébrique plane sans composante multiple* ($2\delta = \mu + r - 1$ *où* r *est le nombre de branches passant par* 0 *et* μ *la multiplicité), soit* Γ *l'entrelacs de* S^3 *qu'on obtient par intersection de la courbe singulière avec le bord d'une petite boule* B^4 *autour de* 0 *; il n'existe pas de réunion de disques immergés dans* B^4 *s'appuyant sur* Γ *qui ait moins de* δ *points doubles.*

En particulier : *le nombre gordien du nœud associé à une singularité isolée irréductible est égal à* δ.

Le plus probable est que la minoration δ vienne d'une minoration du genre des surfaces connexes plongées S dans B^4 de bord Γ :

Soit $\chi(S)$ *la caractéristique d'Euler de* S *; a-t-on* $\chi(S) \leq 1 - \mu$?

Les principaux résultats sont ceux de Rokhlin [V.R.], et de Donaldson [D.2] :

Rokhlin trouve une borne inférieure du genre de S dans la surface X qui est à peu près la moitié du genre de la courbe A.

À partir du théorème d'indécomposabilité de [D.1], Donaldson démontre qu'il est impossible de chirurgiser directement A, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de disque plongé dans $X \backslash A$, dont le bord est dans A et d'auto-intersection nulle relativement à un déplacement du bord suivant sa normale dans A.

Sur les problèmes de Thom et de Milnor, on pourra consulter l'article de M. Boileau et C. Weber [B.,W.], les travaux de L. Rudolph, O. Viro,

T. Fiedler entre autres. (Dans [L.R.], Rudolph montre qu'aucune des conjectures ne tient si l'on remplace surface lisse par surface topologiquement plate.)

3.2. Y. Eliashberg et V. Harlamov [E.,H.] furent les premiers à relier les questions de 3.1 aux configurations des points complexes sur les surfaces réelles d'une surface complexe et aux enveloppes d'holomorphie.

Considérons une surface fermée orientée immergée S dans une variété presque complexe (W, J) de dimension 4 réelle ; lorsque S se trouve en position générale par rapport à J, il n'y a qu'un nombre fini de points de S où $T(S) = J(T(S))$; on les appelle *points complexes* de S dans W ; ils se répartissent en quatre groupes : les elliptiques positifs (en nombre e_+), les elliptiques négatifs (en nombre e_-), les hyperboliques positifs (en nombre h_+) et les hyperboliques négatifs (en nombre h_-). Positif ou négatif, selon que l'orientation de S est compatible avec J ou $-J$, elliptique ou hyperbolique selon que l'application de Gauss de S dans le fibré en grassmanniennes des deux-plans orientés tangents à W rencontre positivement ou négativement la variété des droites J-complexes (*cf.* [E.1,4] ou [D.B.1,2], par exemple) (voir aussi le §4).

Notons χ la caractéristique d'Euler de S, ν le nombre d'Euler de son fibré normal et c le nombre de Chern de S vis-à-vis de J ; les nombres $d_+ = e_+ - h_+$ et $d_- = e_- - h_-$ se calculent par les formules de Lai [H.L.] :

$$d_+ = \frac{1}{2}(\chi + \nu + c)$$

$$d_- = \frac{1}{2}(\chi + \nu - c)$$

La conjecture 1 de 3.1 revient à

$$d_- \leq 0$$

pour une surface *plongée* S homologue à A. Car $\chi(A) + A \,.\, A = c(A)$ puisque A est loin des points complexes négatifs, et $\nu(S) = S \,.\, S = A \,.\, A$ et $c(S) = c(A)$ (puisque ces nombres sont des invariants homologiques), donc $\chi(S) \leq \chi(A)$ se traduit par $d_-(S) \leq 0$.

3.3. En 1965, E. Bishop [E.BI.] donnait le jour à un phénomène nouveau : lorsque J est intégrable sur W, si P est un point elliptique sur une surface lisse S plongée dans W, il existe un voisinage U de P dans W tel que l'enveloppe d'holomorphie de $S \cap U$ par rapport à U contienne une famille à un paramètre de disques holomorphes. Les bords des *disques de Bishop* sont des courbes simples sur S, deux à deux disjointes, elles entourent P et forment un feuilletage de $S \cap U \backslash \{P\}$.

La réunion des disques de Bishop dans U est une variété C^∞ à bord de dimension 3 et c'est toute l'enveloppe d'holomorphie de $S \cap U$ dans U (voir §4).

Pour comprendre la configuration des points complexes d'une surface S (C^∞ plongée) dans W analytique complexe, il est naturel de chercher à étendre la famille des disques qui naissent aux points elliptiques le plus loin possible. Malheureusement, la proximité des points hyperboliques est en général assez sauvage (exemples de Bedford et de Moser-Webster *cf.* [E.BE.], [M.,W.], et §4.3), et même quand il n'y a pas de points hyperboliques (et que W est le plan complexe), il semble que les disques échappent à un contrôle global (exemple de Eliashberg et Harlamov *cf.* [E.3]). Cependant, il devient possible de décrire ce que deviennent les disques de Bishop lorsque S est au bord d'un domaine strictement pseudoconvexe. C'est ce qui a permis à Bedford, Klingenberg et Eliashberg de prouver le théorème 2 énoncé page 5.

Le premier succès dans le problème global est dû à Bedford et Gaveau [B.,G.] : il s'agissait d'une sphère S^2 plongée dans une hypersurface fermée s.p.c. de $\mathbf{C}^2$, avec seulement deux points complexes génériques (donc $e_+ = 1$ et $e_- = 1$) et qui était le graphe d'une fonction sur une sphère de $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Alors Bedford et Gaveau démontraient que les disques de Bishop se propagent comme il faut d'un point elliptique à l'autre : mis tous ensemble ils remplissent une boule de dimension 3 qui est l'enveloppe d'holomorphie de S dans $\mathbf{C}^2$.

L'étape suivante revient à Gromov, qui établit dans [M.G.] le résultat analogue pour toute sphère S^2 plongée dans le bord d'un domaine de Grauert dans une variété de Stein, mais toujours avec deux points complexes génériques.

Auparavant, Bedford [E.BE.] avait réussi à décrire l'enveloppe de certaines perturbations de surfaces possédant des points hyperboliques. En s'appuyant sur cette analyse et/ou en suivant l'approche de Gromov, Bedford-Klingenberg [B.,K.] et Eliashberg [E.4] ont enfin pu aborder la situation générale d'une surface lisse fermée plongée dans le bord s.p.c. d'une variété de Stein. Le théorème 2, page 5, donne un exemple de leurs résultats, les §§5 et 6 donneront plus de détails ; énonçons seulement quelques corollaires "numériques" en rapport avec les conjectures de 3.1.

THÉORÈME 9 (Eliashberg, Bedford-Klingenberg).— *Soit Σ^2 une sous-variété fermée connexe du bord d'un domaine de Grauert de dimension 2 ; si Σ n'est pas une sphère, les deux nombres d_+ et d_- de Σ sont négatifs (≤ 0).*

Comme l'auto-intersection de Σ est nulle sous les hypothèses du théorème, cela signifie : si Σ n'est pas une sphère, on a $\chi(\Sigma) \leq -|c(\Sigma)|$.

3.4. Les énoncés qui étendent le théorème 9 au cas des surfaces compactes à bord se rapprochent encore plus des conjectures 1 et 2.

Plaçons-nous dans une hypersurface s.p.c. M^3, bord d'un domaine relativement compact Ω et notons F le champ des droites complexes tangentes à M (comme au §1). Considérons une courbe fermée simple (réelle) Γ contenue dans M et transverse à F, et orientons-la dans le sens montant (la tangente orientée à Γ suivie d'un repère direct de F forme un repère orienté de M). Soit Σ une surface orientée plongée dans M, bordée par Γ (avec son orientation), et sans composante connexe fermée (*i.e.* connexe relativement à Γ) ; près de son bord, Σ ne présente aucun point complexe.

THÉORÈME 10 (Eliashberg).— $d_-(\Sigma) \leq 0$.

Un analogue de ce théorème, permettant à Σ de pénétrer à l'intérieur du domaine Ω , démontrerait la conjecture 2.

Dans le cas où $M = S^3$ et où Ω est la boule ronde de $\mathbf{C}^2$, le résultat était démontré dans [D.B.1] (*cf.* [A.D.]) par un mélange de géométrie de contact et de topologie ; lorsque Γ est non nouée dans S^3, il résulte aussi de l'existence du polynôme de Jones comme l'ont montré H. Morton, J.

Franks et R.F. Williams (*cf.* [H.M.] et [F.,W.], ou bien [J] page 325).

Notons $\vec{t}$ (resp. $\vec{n}$) la tangente à Γ (resp. la normale à Γ dans Σ) ; soient c le nombre de Chern de $(T(\Omega)|\Sigma, J)$ relatif à la trivialisation $(\vec{t}, \vec{n})$ le long de Γ, et ν le nombre d'Euler du fibré normal à Σ dans Ω relatif à la section $J\vec{t}$ le long de Γ. Les formules de Lai (p. 14) gardent la même forme et le théorème 10 se réénonce :

$$\chi \leq c.$$

Les résultats sur les courbes transverses à F se reformulent avec des *courbes de Legendre* (les courbes horizontales dans F) :

Soit γ un entrelacs orienté de M dont la tangente appartient constamment aux plans de F et soit Σ une surface orientée plongée dans M, de bord γ (connexe relativement à γ) ; le nombre $\tau(\gamma, \Sigma)$ est le nombre algébrique d'intersections de Σ avec la courbe γ' obtenue par un petit déplacement de γ normal à F, et le nombre $\mu(\gamma, \Sigma)$ est le nombre de tours de la tangente à γ dans un repère trivialisant la restriction de F à Σ. Ces deux nombres ne dépendent que de γ et de la classe de Σ dans $H_2(M, \gamma; \mathbf{Z})$; lorsque $H_1(M; \mathbf{Z}) = 0$, ils sont introduits dans [D.B.1], [A.D.], [T.E.], et dans ce cas, ils ne dépendent que de $\gamma \subset M$.

(Attention : les conventions adoptées ici pour les signes d'enlacement sont différentes de celles de [D.B.1], [A.D.], [T.E.], si bien que les nombres notés ℓ et τ dans [D.B.1] et [A.D.] sont notés ici respectivement $-c$ et $-\tau$.)

La surface Σ peut toujours être perturbée (en gardant γ fixe) pour que les points complexes le long de son bord soient alternativement elliptiques positifs et elliptiques négatifs ; il y aura $|\tau|$ points de chaque type sur γ. Les formules de Lai se réécrivent alors :

$$d_+ = \frac{1}{2}(\chi + \tau + \mu)$$
$$d_- = \frac{1}{2}(\chi + \tau - \mu).$$

Et le théorème 10 entraîne :

THÉORÈME 11 (Eliashberg).— $\chi \leq \tau - |\mu|$.

L'analyse des disques de Bishop (*cf.* §6) permet à Eliashberg d'obtenir encore bien d'autres résultats remarquables sur les structures de contact standard, par exemple :

THÉORÈME 12 (Eliashberg).— *Toutes les courbes de Legendre de la structure standard (directe) de S^3 qui sont non nouées dans S^3 et qui satisfont $\tau = +1$ et $\mu = 0$, sont isotopes entre elles à travers les courbes de Legendre.*

3.5. La plupart des résultats qui précèdent, en particulier le théorème 2 et son corollaire, le théorème 3 et son corollaire, le théorème 4, les théorèmes 9, 10, 11 et 12, s'étendent aux structures complexes non intégrables de la manière suivante : on remplace la variété analytique W par une variété de dimension 4, W munie d'une structure symplectique ω et d'une structure presque complexe J positive par rapport à ω (*cf.* [M.G.], ou [D.B.2]) (*i.e.* $\forall x \in W$, $\forall v \in T_x(W)$, $v \neq 0 \Longrightarrow \omega(v, Jv) > 0$), Ω demeure un domaine relativement compact à bord lisse M, et la condition sur le bord est qu'il soit strictement pseudo-convexe au sens des structures C.R. (§1, p. 3). Notons que pour toute structure de contact F sur une variété fermée M qui borde au sens symplectique (§2, p. 7) une variété symplectique (Ω, ω), il existe une structure presque complexe J qui satisfait ces exigences.

La présence de ω permet le contrôle d'aire des disques (pseudo) holomorphes comme dans [M.G.]. La compacité des familles de disques résulte du contrôle d'aire et d'arguments topologiques (*cf.* §6).

Lorsqu'on étudie les familles de disques (pseudo) holomorphes qui s'appuient sur une surface Σ de M, la non-intégrabilité de J fait apparaître deux difficultés nouvelles : la description des points singuliers intérieurs aux disques et le comportement des disques près des points complexes de Σ.

La première difficulté est heureusement levée par le travail de D. Mc Duff [M.D.3]. On peut lever la seconde artificiellement en changeant J près des points complexes de Σ en une structure intégrable C^0-proche de J (ce qui ne change pas la positivité vis-à-vis de J).

Ceci permet à Eliashberg [E.5,6] d'énoncer des résultats purement sym-

plectiques. Donnons quelques exemples.

THÉORÈME 13 (Eliashberg).— *Soit Ω un remplissage symplectique d'une variété de contact de dimension 3 (M, F) ;*

i) *toute sphère S^2 plongée dans M borde une boule B^3 plongée dans Ω ;*

ii) *si M est difféomorphe à S^3,*
Ω est difféomorphe à $B^4 \# \overline{\mathbf{CP}}^2 \# \cdots \# \overline{\mathbf{CP}}^2$ et F est standard ;

iii) *soit Σ une surface connexe fermée plongée dans M ;*
si $\chi(\Sigma) > -|c(\Sigma)|$, Σ est une sphère (notons que le nombre c a une existence symplectique) ;

iv) *soit Σ une surface orientée à bord Γ transverse montant dans F, sans composante connexe isomorphe à S^2 ; on a*

$$\chi(\Sigma) \leq c(\Sigma);$$

v) *soit Σ une surface orientée à bord γ horizontal dans F, sans composante connexe isomorphe à S^2 ; on a*

$$\chi(\Sigma) \leq \tau - |\mu|.$$

3.6. À plusieurs reprises, nous avons mentionné le travail [M.D.3] de Dusa Mc Duff sur les singularités des courbes intégrales d'une structure presque complexe J (c'est-à-dire les courbes J-holomorphes, ou pseudo-holomorphes) ; il s'agit de résultats techniques de grande importance dans la théorie qui précisent quelques points de [M.G.] (en passant, ils corrigent aussi des affirmations de [D.B.2], par exemple 2.3.2). Ces résultats sont la base de [M.D.1 et 2]. Citons-en deux :

PROPOSITION 1 (D. Mc Duff).— *Toute application J-holomorphe $f : \Sigma \to W$ d'une surface de Riemann dans une variété presque complexe (W, J) peut s'approcher C^1 par une courbe J'-holomorphe d'une structure presque complexe C^0-voisine de J, qui est* immergée.

PROPOSITION 2 (D. Mc Duff).— *Soient C et C' deux germes en 0 de courbes J-holomorphes d'une variété presque complexe de dimension 4*

ayant un point d'intersection isolé en 0, *le nombre d'intersection local de* C *et* C' *est* ≥ 1 *et il vaut* 1 *si et seulement si* C *et* C' *sont transverses.*

3.7. Pour distinguer deux structures de contact en dimension 3 qui appartiennent à la même classe d'homotopie de champs de plans, on doit s'intéresser aux feuillages qu'elles tracent sur des surfaces plongées (une idée qui remonte à Sophus Lie [L]).

Par exemple, sur S^3 d'équation $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$ dans $\mathbf{R}^4$, considérons les deux structures suivantes :
F_0 (standard directe) d'équation

$$x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1 + x_2\, dy_2 - y_2\, dx_2 = 0,$$

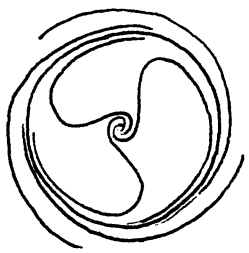
et F_1 (une des structures de Gonzalo-Varela)

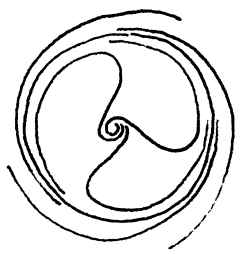
$$\cos\Big(\frac{\pi}{4}+2\pi(x_2^2+y_2^2)\Big)(x_1dy_1-y_1dx_1)+\sin\Big(\frac{\pi}{4}+2\pi(x_1^2+y_1^2)\Big)(x_2dy_2-y_2dx_2) = 0;$$

elles sont homotopes à travers les champs de plans tangents sur S^3, mais elle ne sont pas isomorphes, car dans F_1 on peut voir sur un *disque plongé* un cycle limite (*cf.* figure 1), alors que dans F_1 une telle figure ne peut exister. C'est le théorème 11 qui l'interdit (on aurait $\chi = 1$, $\tau = 0$, $\mu = \pm 1$) (c'est l'argument de [D.B.1], (*cf.* [A.D.])).

DÉFINITION.— *Une structure de contact en dimension* 3 *est* supertordue *si l'on peut trouver dans la variété un disque plongé avec un seul point critique et un cycle limite.*

Ce qui peut donner l'une des figures suivantes :





Eliashberg a donc démontré qu'aucune structure de contact qui *borde*

au sens symplectique n'est super-tordue. En particulier, les bords de Grauert dans les surfaces analytiques ne sont pas super-tordus.

Soulignons que la figure 1 est la seule exoticité connue en dimension 3 et l'on peut se demander (Eliashberg) par exemple :

Est-ce qu'une structure de contact sur S^3 non super-tordue est isomorphe à la structure standard ?

Il s'avère que les structures super-tordues sont plus maniables que les structures standard.

THÉORÈME 14 (Eliashberg [E.7]).— *Sur une variété de dimension* 3 *compacte, si deux structures super-tordues sont homotopes en tant que champs de plans, elles sont isomorphes.*

En fait, Eliashberg établit que l'inclusion de l'espace des structures de contact super-tordues dans l'espace des champs de plans est une équivalence d'homotopie faible.

4. POINTS COMPLEXES ET DISQUES HOLOMORPHES

4.1. Soit J une structure presque complexe de classe C^∞ sur une variété W de dimension 4 ; notons G le fibré sur W dont la fibre en $x \in W$ est la grassmannienne Q_x des sous-espaces vectoriels orientés de dimension 2 de l'espace tangent T_xW. L'espace total de G contient les fibrés G_+ et G_- dont les fibres $x \in W$ sont respectivement la droite projective complexe Q_+ des droites J-complexes de T_xW et celle Q_- des droites $-J$-complexes de T_xW. Soit Σ une sous-variété orientée de dimension 2 dans W ; elle se relève par ses plans tangents en une sous-variété $\widetilde{\Sigma}$ de G ; les points complexes de Σ sont les points de rencontre de $\widetilde{\Sigma}$ avec G_+ et G_-.

Si l'on choisit une structure riemannienne sur W adaptée à J, en chaque point x de W la fibre Q_x s'identifie à $S_+ \times S_-$, où S_+ est la sphère de rayon 1 dans l'espace des bivecteurs autoduaux et S_- celle des bivecteurs anti-autoduaux ; Q_+ et Q_- sont respectivement $\{$pôle nord de $S_+\} \times S_-$ et $\{$pôle sud de $S_+\} \times S_-$. C'est donc la projection g_+ sur S_+ parallèlement à S_- qui détermine le type d'un point complexe ; il est > 0 ou < 0 selon qu'on

tape au pôle nord ou au pôle sud, elliptique ou hyperbolique selon que g_+ préserve ou renverse l'orientation. (Remarque corrective : dans [D.B.2], p. 118 en haut, il faut échanger S_+ et S_- de la ligne 5 à la ligne 11.)

Si Σ se tient dans une sous-variété M de dimension 3 dans W et si l'on induit la métrique sur M, g_+ est l'application de Gauss ordinaire ; les points elliptiques apparaissent à courbure positive et les points hyperboliques à courbure négative.

Soit $P \in W$ un point complexe positif de Σ où $\widetilde{\Sigma}$ est transverse à G_+ ; choisissons des coordonnées locales x_1, y_1, x_2, y_2 centrées en P, de manière à ce qu'au point P on ait $J(\partial_{x_1}) = \partial_{y_1}$, $J(\partial_{x_2}) = \partial_{y_2}$. Les fonctions $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ sont des coordonnées analytiques complexes pour une structure J_0 telle que $J_0(P) = J(P)$.

Les arguments de Bishop (voir aussi [M.,W.]) montrent qu'on peut changer (de façon bianalytique pour J_0) les coordonnées (z_1, z_2) pour que l'équation Σ près de P soit :

$$z_2 = z_1\bar{z}_1 + \gamma(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + S(z_1, \bar{z}_1)$$

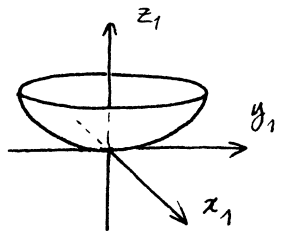
où S est un $O(|z_1|^3)$ et γ un nombre réel > 0 et $\neq \frac{1}{2}$.

L'axe des z_1 est alors la tangente complexe de Σ à l'origine.

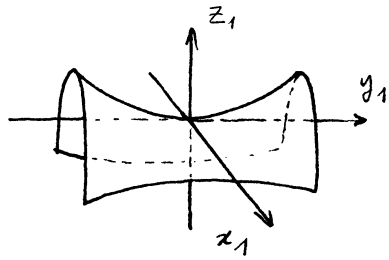
Le nombre γ est un invariant complexe de Σ (c'est-à-dire qu'il est inchangé par toute transformation respectant J en P). Il est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ lorsque P est elliptique et il est supérieur à $\frac{1}{2}$ si P est hyperbolique.

Au troisième ordre en z, la surface Σ est dans l'hyperplan $\mathbf{R}^3$ d'équation $y_2 = 0$, et elle se présente comme suit :

dans le cas elliptique :



dans le cas hyperbolique :



4.2. À présent, supposons J intégrable auprès de P dans W et Σ analytique réelle. Choisissons les coordonnée z_1 et z_2 holomorphes.

Pour faire l'analyse d'un point complexe, Moser et Webster font appel à une complexification locale de Σ.

Soit U un ouvert de W stable par l'involution anti-holomorphe $z = (z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \bar{z}$ autour de 0, tel que la fonction $R(z, \bar{z}) = z_1\bar{z}_1 + \gamma(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + S(z_1, \bar{z}_1) - z_2$ soit analytique réelle de V dans $\mathbf{C}$. L'équation de $\Sigma \cap U$ est $R(z, \bar{z}) = 0$.

Dans $U \times U$, on considère la surface analytique complexe Z définie par les équations :

$$R(z, w) = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{R}(w, z) = 0;$$

$z = (z_1, z_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ sont des coordonnées sur $U \times U$ et (z_1, w_1) forment des coordonnées locales sur Z.

Désignons par π' (resp. π'') la restriction à Z de la projection de $U \times U$, sur le facteur des z (resp. des w) ; toutes les deux sont des revêtements ramifiés à deux feuillets, π' se ramifie le long de $C' \subset Z$ tangente à la droite $z_1 + 2\gamma w_1 = 0$ et π'' le long de $C'' \subset Z$ tangente à la droite $2\gamma z_1 + w_1 = 0$ Notons τ' et τ'' les involutions de Z qui échangent les feuillets ; on a $\pi'\tau' = \pi'$, $\pi''\tau'' = \pi''$, τ' fixe C' et τ'' fixe C''.

Introduisons aussi l'involution anti-holomorphe de $U \times U$ et de Z :

$$\rho(z, w) = (\bar{w}, \bar{z}).$$

On a

$$\tau''\rho = \rho\tau'.$$

Soit $\varphi = \tau'\tau'' = \tau'\varphi^{-1}\tau'$ de Z dans Z ; l'application φ est un difféomorphisme analytique complexe de Z qui possède un point fixe en 0.

C'est la dynamique de φ près de 0 qui dicte le comportement des courbes holomorphes appuyées sur Σ (Moser-Webster).

En effet, soit f une fonction analytique réelle de Σ dans $\mathbf{R}$; elle a un prolongement analytique complexe sur un voisinage de Σ dans Z et la réalité de f sur Σ se traduit par $\bar{f}(\rho) = f$ sur Z. Si $f\tau'' = f$ (ou $f\tau' = f$ qui lui est équivalent), la fonction g de U dans $\mathbf{C}$ définie par $g\pi' = f$ est holomorphe (extension de Riemann) et prolonge f. Réciproquement, une fonction f réelle sur Σ qui est la trace d'une g holomorphe sur U s'étend en f sur Z qui vérifie $f\tau'' = f\tau' = f$, donc $f\varphi = f$ (*i.e.* f est une intégrale première holomorphe de φ).

Soient λ et λ^{-1} les solutions de $\gamma = \frac{1}{\lambda+\lambda^{-1}}$ (*i.e.* $\gamma\lambda^2 - \lambda + \gamma = 0$) ; les valeurs propres de $D\varphi$ en 0 sont $\mu = \lambda^2$ et $\mu^{-1} = \lambda^{-2}$. Lorsque $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, λ est réelle > 0 et différente de 1 ; lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$, λ est complexe de module 1 différente de 1.

Donc un point elliptique donne un φ hyperbolique et une méthode de série majorante permet à Moser et Webster de ramener φ, τ' et τ'' à une forme normale ; il existe des coordonnées (z_1, z_2) où Σ s'écrit :

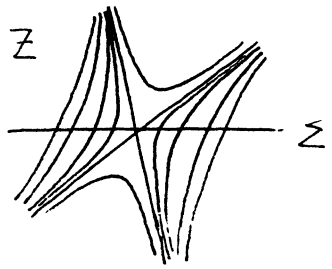
$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ x_2 = z_1\bar{z}_1 + (\gamma + \varepsilon x_2^s)(z_1^2 + \bar{z}_1^2), \end{cases}$$

ε valant 0, 1 ou -1, et s étant un entier non nul lorsque $\varepsilon = \pm 1$.

Les nombres (γ, ε, s) sont les invariants holomorphes du germe de Σ ; il existe une variété H^3 Levi-plate qui contient Σ, et l'enveloppe d'holomorphie locale de Σ est la partie de H à l'intérieur de Σ.

L'application φ possède une intégrale première holomorphe et les bords des disques de Bishop sont les traces sur $\Sigma \subset Z$ des niveaux de l'intégrale ;

ce sont les trajectoires d'un flot où φ se plonge pour les valeurs imaginaires pures du paramètre.



Notons que la classification des paires d'involutions conjuguées (comme τ' et τ'') apparaissait dans les recherches de Birkhoff sur le problème restreint des trois corps.

4.3. Pour un point complexe hyperbolique, le point fixe de φ est elliptique et l'on doit faire face à un problème de petits diviseurs. Il existera bien une forme normale, mais les séries qui doivent conjuguer φ à sa forme normale sont en général divergentes ; et Moser-Webster montrent un exemple de surface Σ qui *ne peut pas* être plongée dans une hypersurface Levi-plate (analytique réelle) ; c'est

$$z_2 = z_1\bar{z}_1 + \gamma\bar{z}_1^2 + \gamma z_1^3\bar{z}_1 \qquad \left(\text{avec } \gamma > \frac{1}{2}\right).$$

Ceci n'a pas découragé nos auteurs Bedford, Klingenberg, Eliashberg : pour étudier le passage des disques de Bishop par les points hyperboliques, il suffira de se restreindre à des cas très spéciaux où Σ est déjà aplatie *et* φ complètement intégrable. Nous allons voir que cela peut se faire avec une surface Σ' C^2-proche d'une surface Σ donnée.

Reprenons les notations de 4.2 ; la contre-image de Σ par π' dans Z est constituée par deux surfaces totalement réelles L_1 et L_2 transverses entre elles et transverses à C' et C'' : L_1 est le plan $w_1 = \bar{z}_1$ et $L_2 = \tau'(L_1)$ est tangente en 0 au plan $w_1 = \bar{z}_1 - z_1/\gamma$.

L'idée de D. Burns, E. Bedford et W. Klingenberg est de relever les surfaces holomorphes dans U à bord sur Σ qui arrivent près du point hyperbolique en surfaces holomorphes de Z qui s'appuient sur L_1 *et* L_2.

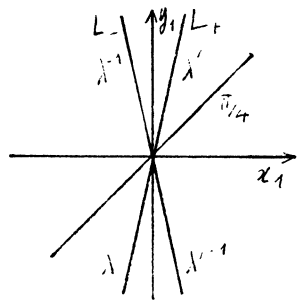
Comme réflexion dans L_1, on choisit $\rho_1 = \rho$, et comme réflexion dans L_2, on choisit $\rho_2 = \tau'\rho\tau' = \varphi\rho$.

Le groupe engendré par ρ_1 et ρ_2 est également engendré par φ et ρ, avec les relations $\rho\varphi\rho^{-1} = \varphi^{-1}$ et $\rho^2 = 1$. C'est un groupe dihédral si $\varphi^n = 1$ ($n \in \mathbf{N}$).

Lorsqu'il existe $n \in \mathbf{N}$ avec $\varphi^n = 1$, nous dirons que le point P de Σ est *rationnel* (vis-à-vis de J). Alors la valeur propre μ est de la forme $\exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\right)$.

On obtient des points rationnels sur la quadrique Σ_γ d'équation $z_2 = z_1\bar{z}_1 + \gamma(z_1^2 + \bar{z}_1^2)$ lorsque les racines λ de $\gamma\lambda^2 - \lambda + \gamma = 0$ sont de la forme $\exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$.

Dans le plan des z_1, les droites d'intersection de Σ_γ avec $z_2 = 0$ ont pour pentes $y_1/x_1 = \pm tg\theta'$, où $\lambda' = \exp(i\theta')$ est donnée par $\lambda'^2 + \gamma(\lambda'^4 + 1) = 0$ donc $\lambda'^2 = -\lambda$ et $(\lambda')^{-2} = -\lambda^{-1}$. Comme $Re(\lambda) < 0$, on a le dessin suivant, où tous les angles sont rationnels (en radians) :



Nous noterons Δ_+^+ (resp. Δ_+^-) le secteur qui contient le $\frac{1}{2}$ axe $x_1 = 0$, $y_1 > 0$ (resp. $y_1 < 0$), Δ_-^+ (resp. Δ_-^-) celui qui contient le $\frac{1}{2}$ axe $y_1 = 0$, $x_1 > 0$ (resp. $x_1 < 0$) ; $\Delta_+ = \Delta_+^+ \cup \Delta_+^-$ et $\Delta_- = \Delta_-^+ \cup \Delta_-^-$ Nous appellerons Δ_+^+ et Δ_+^- les *secteurs aigus* et Δ_-^+, Δ_-^- les *secteurs obtus.*

En examinant le lieu de ramification de π', on voit que les parties des droites complexes $z_2 =$ constante délimitées par Σ_γ et rencontrant les secteurs aigus se relèvent par π' en des bandes holomorphes dans Z qui vont de L_1 à L_2. (De même, dans le cas des points elliptiques, les disques de Bishop se relèvent en des anneaux holomorphes dont un bord est sur L_1 et l'autre sur L_2.)

Soient D le disque de rayon 1 dans $\mathbf{C}$, Δ un voisinage de $1 \in D$ dans D et $f : \Delta \to V$ une application holomorphe qui envoie 1 sur P et $S^1 \cap \bar{\Delta}$ dans Σ ; supposons que $f(\Delta)$ soit un graphe au-dessus de l'axe du z_1 dans l'un des secteurs aigus. Relevons f par π' et prolongeons-la par *réflexion de Schwarz* dans L_1 et L_2. Si P est *rationnel*, on aboutit ainsi au prolongement de f, sur un revêtement ramifié ℓ fois de $\mathbf{C}$ en 1, en une application holomorphe qui est un revêtement ramifié k fois de l'axe des z_1.

Au-dessus de Δ_+, on a un développement limité de l'image :

$$z_2 = g(z_1) = a\, z_1^2 + o(|z_1|^2)$$

car le bord est dans Σ où $z_2 = o(|z_1|^2)$. En regardant de plus près, on voit que $a = 0$ (comparer le long du bord de Δ_+ les expressions $x_1^2(1+2\gamma) + y_1^2(1-2\gamma)$ et $(\alpha + i\beta)(x_1^2 - y_1^2 + 2ix_1y_1)$).

Donc *le bord de $f(\Delta)$ est asymptote aux deux côtés L_- et L_+ de Δ_+.* Et cela, c'est l'essentiel du contrôle qu'il faudra pour faire passer les disques par les points hyperboliques.

5. ENVELOPPE HOLOMORPHE DE SURFACES RÉELLES

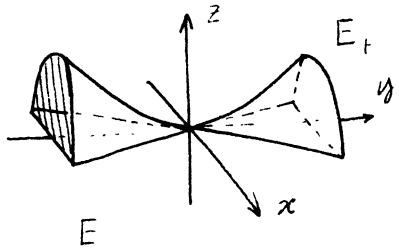
5.1. La partie de l'enveloppe d'holomorphie d'une surface réelle plongée au bord d'un domaine strictement pseudo-convexe de dimension 2, que Eliashberg, Bedford et Klingenberg sont capables de décrire est une *variété à angles H^3* d'un genre spécial ; commençons par la présenter abstraitement.

Les points de H auront tous un modèle local C^∞ isomorphe à celui d'un des points du fermé E de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$z \geq 0 \quad , \quad z \leq y^2 - x^2$$

ou bien du fermé E_+ de $\mathbf{R}^3$ inclus dans E défini par

$$z \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad z \leq y^2 - x^2$$



Les points de H qui ont pour modèle les points intérieurs de E sont les points *réguliers*, ceux qui ont pour modèle un point de E avec $z = 0$ ou bien $z = y^2 - x^2$ sont les points du *bord* de H, ceux qui ont pour modèle des points de $z = 0$, $y^2 = x^2$ appartiennent aux *arêtes* de H, ceux qui sont comme 0 dans E_+ sont des *pointes* du type I et ceux qui sont comme 0 dans E sont des pointes du type II. Le bord de H est une surface à coins, sauf aux pointes de type II.

Lorsque H n'a pas d'arête, c'est une variété à bord C^∞. Quand il n'y a pas de pointes, H est une variété à coins ordinaire.

Les modèles locaux de H sont ceux de la *théorie de Morse à bord.*

Pour les variétés à angles qui vont nous intéresser, le bord de H pourra toujours s'écrire comme une réunion de deux surfaces (à angles) A et B séparées par les arêtes, et tout sera naturellement orienté.

Il est maintenant possible d'énoncer le théorème principal de [E.5,6] et [B.,K.] :

THÉORÈME 15 (Eliashberg, Bedford-Klingenberg).— *Soit Σ une surface réelle C^∞ orientée fermée plongée dans le bord M d'un domaine de Grauert Ω d'une variété analytique complexe W ; il existe une surface Σ', C^2-proche de Σ dans M et une variété à angle H plongée dans $\Omega \cup M$ dont le bord est réunion le long des arêtes de $A \subset \Sigma'$ et de B, telle que l'intérieur de $B \subset \Omega$. Les pointes de H sont des points complexes hyperboliques de Σ', toutes les arêtes de H sont dans Σ' ; de plus, en un point du type II, la composante adhérente de B est non simplement connexe.*

A contient tous les points complexes elliptiques de Σ', et B est réunion

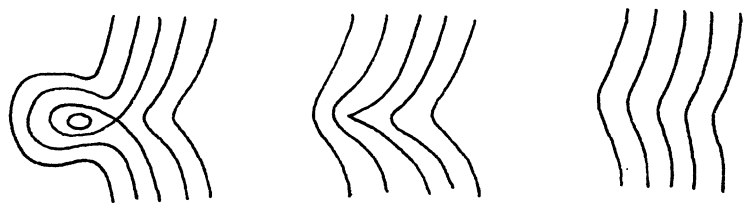
de disques holomorphes.

L'intérieur de H est feuilleté en disques holomorphes, et les bords de ces disques sont des courbes simples C^∞ plongées dans A, sauf aux points hyperboliques de Σ' (où les bords des disques font des angles).

De plus, il existe un unique H maximal possédant toutes ces propriétés.

Remarque 1.— Eliashberg sait démontrer que ce théorème reste vrai sans supposer l'intégrabilité de J sur W, mais en supposant J positive strictement par rapport à une structure symplectique. À proprement parler, Bedford et Klingenberg demandent à W d'être de Stein, mais un argument d'indice (d'opérateurs elliptiques) assez simple permet d'éliminer cette hypothèse (voir §6).

Remarque 2.— Eliashberg énonce aussi la version à un paramètre du théorème 15. Les modèles locaux sont ceux des familles à un paramètre génériques de fonctions sur les variétés à bord de dimension 3, et il faut décrire le passage des points complexes *paraboliques* :



Remarque 3.— Les conclusions du théorème 15 entraînent l'existence d'une variété à bord C^∞ K de bord Σ' contenant H et d'une fonction de Morse $\varphi : K \to \mathbf{R}$ dont les niveaux sont des feuilles holomorphes de H.

Remarque 4.— En un point hyperbolique P de Σ', il n'y a que 4 possibilités :

1) le point est hors de H ;

2) c'est une pointe du type I de H ; une des composantes de B arrive dans un secteur seulement ;

3) le point est régulier dans A ; les disques passent

4) c'est une pointe du type II de H ; les disques s'arrêtent à cause d'un croissant.

Remarque 5.— Comme Σ est dans un bord strictement pseudo-convexe, on peut décider *a priori* dans quel secteur les disques atteignent un point hyperbolique : c'est dans le secteur *aigu* (calculer $L(\rho)$, p. 2 pour $\rho = x_2 - (x_1^2(1+2\gamma) + y_1^2(1-2\gamma)))$.

5.2. Montrons, d'après Eliashberg, comment le théorème 15 entraîne le théorème 2 et le théorème 9. Pour cela, il suffit de voir que sous les hypothèses du théorème 15, avec Σ *connexe*, on a $\chi \leq -|c|$ sauf si Σ' est entièrement remplie par H (*i.e.* $B = \emptyset$).

Mais, si $B \neq \emptyset$, on peut "arrondir" H en une variété à bord C^∞ H' plongée dans $\Omega \cup M$. Notons X le bord de H' ; chaque pointe (de type I ou II) qui est hyperbolique positive (resp. négative) sur Σ' donne lieu à un point elliptique négatif (resp. positif) de X ; soient k_+ (resp. k_-) le nombre de ces points.

Si b_0 est le nombre de composantes connexes de X, on a $k_+ + k_- \geq b_0$. Notons $e'_\pm$ et $h'_\pm$ les nombres de points complexes sur X. Comme X borde

dans W, on a $\nu(X) = c(X) = 0$, donc

$$\frac{1}{2}\chi(X) = e'_+ - h'_+ = e'_- - h'_-,$$

mais $2b_0 \geq \chi(X)$, donc $b_0 \geq e_+ + k_- - h'_+$, d'où $k_+ \geq e_+ - h'_+$ et $e_+ - h_+ \leq e_+ - h'_+ - k_+ \leq 0$. De même, $b_0 \geq e_- + k_+ - h'_-$, d'où $k_- \geq e_- - h'_-$ et $e_- - h_- \leq e_- - h'_- - k_- \leq 0$. C.Q.F.D.

Remarque.— Ceci entraîne que sur une sphère plongée dans M, il n'y a jamais de pointe du type II.

Les théorèmes 10 et 11 résultent d'une combinatoire analogue.

6. PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT ET PSEUDO-CONVEXITÉ

6.1. Soit M une sous-variété de dimension 3 d'une variété C^∞ presque complexe (W, J) ; considérons la variété de Fréchet $\mathcal{D}$ des disques C^∞ (non paramétrés) plongés dans W, transverses à M le long de leurs bords. Les propriétés de la transformée de Hilbert usuelle (essentiellement $\|T(u)\|_{C^m} \leq C\|u\|_{C^{m+1}}$ lorsque u est une fonction C^{m+1} du cercle dans $\mathbf{R}$), montrent que le sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}$ constitué par les disques J-holomorphes est une *bonne sous-variété de Fréchet* de $\mathcal{D}$ (au sens de Hamilton ([R.H.]). Considérons aussi la variété de Fréchet $\mathcal{S}$ des surfaces orientées compactes (éventuellement à bord) Σ, de type topologique donné, plongées dans M et totalement réelles vis-à-vis de J ; c'est aussi une *bonne* variété de Fréchet. Dans le produit $\mathcal{H} \times \mathcal{S}$, on définit l'ensemble $\mathcal{R}$ des couples (D, Σ) tels que le bord de D appartienne à l'intérieur de Σ ; en projetant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{H}$, on voit que $\mathcal{R}$ est une *bonne fibration* au-dessus de $\mathcal{H}$,donc $\mathcal{R}$ est une bonne sous-variété de $\mathcal{H} \times \mathcal{S}$. Soit $\Delta : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ la restriction de la seconde projection.

PROPOSITION.— *L'application Δ est Fredholm et son indice en un point (D_0, Σ_0) de $\mathcal{R}$ est $1 + 2\nu$, où ν est le nombre d'intersection de D_0 avec un indice égal à D_1 C^1-voisin de D_0 dont le bord est dans Σ_0 et ne rencontre pas le bord de D_0.*

Remarque.— En remplaçant le disque par une surface de Riemann à bord X, on aurait la même chose avec indice $\chi(X) + 2\nu$; et en considérant le problème paramétré, on verrait à la place de ν apparaître un nombre de Chern relatif (indice de Maslov).

De la proposition, et des théorèmes de Sard banachiques (applications C^k, $k < \infty$), on déduit en particulier que, étant donné un ouvert C^k-borné $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$, il est C^k-générique en $\mathcal{S}$ que $\Delta^{-1}(\Sigma) \cap \mathcal{B}$ soit une variété C^∞ de dimension $1 + 2\nu$.

Dans le cas des disques de Bishop, et de tous ceux que considèrent Eliashberg, Bedford et Klingenberg, on a $\nu = 0$: les disques rentrent dans des familles à un paramètre de disques disjoints.

6.2. Plaçons-nous à présent dans les hypothèses du théorème 15.

Le premier endroit où la pseudo-convexité de M intervient est l'utilisation du lemme de E. Hopf (sur la dérivée au bord des fonctions strictement sous-harmoniques) pour démontrer que le bord d'un disque holomorphe de Ω dans la partie totalement réelle Σ^* de Σ est une courbe immergée.

Le second endroit est le contrôle sur la tangente du bord Γ d'un disque holomorphe D de Ω : elle est astreinte à rester dans une distribution de cônes sur Σ^* ; ces cônes sont les complémentaires des traces des plans complexes des hypersurfaces s.p.c. voisines de M contenant Σ.

6.3. Si D est un disque plongé dans Ω, à bord plongé dans Σ^*, avec $\nu(D) = 0$, il entre dans une famille à un paramètre de disques D_t qui ne peuvent pas attraper de singularités au bord. Les bords restent plongés à cause des cônes. Les singularités à l'intérieur contrediraient $\nu = 0$. (Ici dans le cas non-intégrable, il faut utiliser [M.D.3].)

6.4. Supposons que Γ borde une surface compacte dans Σ, et choisissons une métrique riemannienne dans W.

Pour la compacité de la famille de disques, il suffit de faire intervenir une structure symplectique contrôlant J comme dans [M.G.] (*cf.* [D.B.2]).

En effet, l'aire des disques D_t est bornée par une constante fois l'aire de

Σ, et la majoration de l'aire entraîne une majoration de toutes les dérivées *sauf si* des bulles apparaissent. Si l'on n'a pas supposé Ω de Stein, il se pourrait *a priori* que D_t dégénère en réunion d'un disque et d'une sphère (ou de plusieurs sphères) ; c'est là que la généricité est utile :

Si D_t tend vers $D_1 \cup S$, on a $D_1 \,.\, S \geq 1$, et $S \,.\, S \geq 1$ (sinon une petite perturbation de J fait sauter la sphère), donc $D_1 \,.\, D_1 \leq -1$, ce qui n'arrive pas pour Σ générique (l'indice de D_1 serait -1).

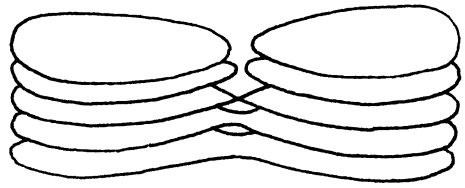
(Notons qu'apparaissent ici des structures complexes non nécessairement intégrables.)

6.5. Démarrons donc avec une famille de disques de Bishop près d'un point elliptique P de Σ ; les arguments précédents "démontrent" que la famille se poursuit gentiment jusqu'au voisinage d'un autre point complexe Q. Ce point ne peut être elliptique que si les disques viennent en coïncidence avec les disques de Bishop de Q (encore la stricte pseudo-convexité et l'argument d'intersection). Supposons donc Q hyperbolique. Si l'on a pris soin de perturber Σ en topologie C^2 pour que tous ses points hyperboliques soient *rationnels*, les disques convergent vers un disque passant par Q. Alors, on applique la remarque 5, page 23, et la discussion de 4.3. Les théorèmes d'approximation pour les fonctions d'une variable complexe (*cf.* [E.BE.]) montrent que quatre possibilités seulement se présentent pour Σ générique :

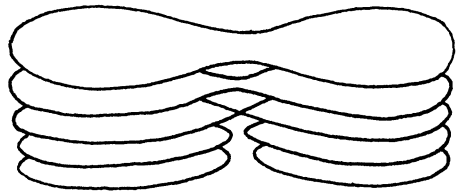
1) le disque arrive par un seul des secteurs Δ_+ et aucun autre disque venant d'une autre famille n'arrive dans le secteur aigu opposé : on a une pointe de type I ;

2) le disque arrive par l'intérieur des deux secteurs aigus et sa limite est un croissant : on a une pointe de type II ;

3) le disque arrive dans Δ_+^+ (resp. Δ_+^-) et un autre disque arrive dans Δ_+^- (resp. Δ_+^+) ; mis ensemble, les deux disques s'approchent par un disque un peu plus grand (Mergelyan), et en perturbant Σ, on continue la famille ;



4) le disque arrive en couvrant tout Δ_+, on l'approche par un disque un peu plus grand (Mergelyan), et on perturbe Σ pour continuer la famille.



7. ANALYSE COMPLEXE ET TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

7.1. Plusieurs autres travaux récents manifestent la fécondité des rapprochements entre la géométrie symplectique (et de contact) et la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (ou la géométrie C.R. et presque complexe).

Les notions de domaine d'holomorphie, de stricte pseudo-convexité, de variétés de Stein proviennent des recherches pour étendre la solution du *problème de Cousin* en plusieurs variables, mais lorsqu'Oka présentait dans [O.], article 1, les principaux problèmes à résoudre, il parlait aussi de la généralisation du *théorème de Runge.* Une belle extension de ce théorème à $\mathbf{C}^2$ est due à Julien Duval ; elle fait encore appel à une notion symplectique.

THÉORÈME 16 (J. Duval [J.D.1]).— *Une sous-variété compacte de* $\mathbf{C}^2$, *lagrangienne pour la structure symplectique standard de* $\mathbf{C}^2$, *est rationnellement convexe.*

COROLLAIRE.— *Les fractions rationnelles sur* $\mathbf{C}^2$ *sont denses dans les fonctions continues sur une sous-variété lagrangienne compacte.*

Inversement, si une sous-variété V fermée de dimension n totalement réelle de $\mathbf{C}^2$ est rationnellement convexe, J. Duval [J.D.2] démontre l'existence d'une structure symplectique adaptée à la structure complexe (et standard à l'infini) pour laquelle V est lagrangienne.

7.2. Les variétés lagrangiennes et les variétés legendriennes interviennent dans pas mal d'endroits en analyse complexe ; par exemple, les *ensembles pics* d'un bord M d'un domaine s.p.c. Ω d'une variété de Stein W sont les sous-ensembles E de M pour lesquels il existe une fonction holomorphe sur Ω C^∞ sur M dont la valeur absolue atteint 1 sur E et reste < 1 sur $\Omega \cup M \backslash E$. Ce sont aussi les sous-ensembles E sur lesquels n'importe quelle fonction C^∞ s'étend en une fonction holomorphe sur Ω, C^∞ sur M. Les sous-variétés de M qui sont des ensembles pics sont horizontales dans la structure C.R. de M (*cf.* [C.,C.], par exemple).

7.3. Polterovitch [L.P.] vient de montrer, en utilisant les disques holomorphes de Gromov que la classe de Maslov d'un tore lagrangien plongé de $\mathbf{C}^2$ ne peut être nulle. Ce résultat est généralisé en toute dimension (dans $\mathbf{C}^n$) par Claude Viterbo ([C.V]) en utilisant le calcul des variations.

7.4. Soient Ω et Ω' deux domaines de Grauert à bords C^∞ M et M' dans des variétés de Stein W et W' ; d'après C. Fefferman (voir [C.F.] et [B.,F.,G.]), tout biholomorphisme $f : \Omega \to \Omega'$ s'étend en un difféomorphisme de M sur M' (et si M et M' sont analytiques réelles, f s'étend analytiquement à un voisinage de M dans W). L'une des principales questions posées par Eliashberg est l'analogue symplectique de ce théorème. Si Ω et Ω' sont des remplissages symplectiques de deux variétés de contact M et M', et s'il existe un difféomorphisme symplectique de Ω sur Ω', quel genre d'équivalence a-t-on entre $\Omega \cup M$ et $\Omega' \cup M'$?

En terminant, je veux remercier tout particulièrement Julien Duval et Yakov Eliashberg pour les discussions passionnantes et instructives que j'ai eues avec eux.

BIBLIOGRAPHIE

[A.1] V.I. ARNOLD - *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Éditions MIR, Moscou, 1974.

[A.2] V.I. ARNOLD - *Contact geometry and wave propagation*, L'enseignement mathématique, Genève, 1989.

[MA] M. AUDIN - *Sommes connexes de variétés symplectiques ou presque complexes*, preprint IRMA Strasbourg, 1990.

[B.,F.,G.] M. BEALS, C. FEFFERMAN and R. GROSSMAN - *Strictly pseudo-convex domains in* $\mathbf{C}^n$, B.A.M.S., vol. 8 (1983), 125-322.

[E.BE.] E. BEDFORD - *Levi flat hypersurfaces on* $\mathbf{C}^2$ *with prescribed boundary : stability*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa IX (1982), 529-570.

[B.,G.] E. BEDFORD and B. GAVEAU - *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in* $\mathbf{C}^2$, Amer. J. of Math., 105 (1983), 975-1009.

[B.,K.] E. BEDFORD and W. KLINGENBERG - *On the envelope of holomorphy of a 2-sphere in* $\mathbf{C}^2$, preprint Indiana, 1989.

[D.B.1] D. BENNEQUIN - *Entrelacements et équations de Pfaff*, 3ème rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Astérisque 107-108 (1983), 87-161.

[D.B.2] D. BENNEQUIN - *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques (d'après M. Gromov)*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 657, Astérisque 145-146 (1987), 111-136.

[E.BI.] E. BISHOP - *Differentiable manifolds in complex Euclidian space*, Duke Math. J. 32 (1965), 1-22.

[B.,W.] M. BOILEAU et C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Séminaire des plans sur Bex., 1982.

[C.] H. CARTAN - *Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques*, Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, Florence, 1961.

[C.,C.] J. CHAUMAT et A.M. CHOLLET - *Ensembles pics pour* $A^\infty(D)$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble XXIX (1979), 171-200.

[D.1] S. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth 4-manifolds*, to appear in Topology.

[D.2] S. DONALDSON - *Complex curves and surgery*, volume dédié à R.

Thom, Publ. IHES 1988, 91-97.

[A.D.] A. DOUADY - *Nœuds et structures de contact en dimension* 3 *(d'après Bennequin)*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 604, Astérisque 105-106 (1983), 129-148.

[J.D.1] J. DUVAL - *Convexité rationnelle des surfaces lagrangiennes de* $\mathbf{C}^2$, preprint 1990 & *Convexité rationnelle de tores lagrangiens de* $\mathbf{C}^2$, Note aux C.R.A.S. 307, série 1, 1988, 943-948.

[J.D.2] J. DUVAL - *Une contrainte géométrique pour certaines sous-variétés rationnellement convexes*, preprint Strasbourg, 1990.

[E.1] Y.ELIASHBERG - *Three lectures on Symplectic Topology* in Cala Gonone. Basic notions, problems and some methods (Septembre 1988).

[E.2] Y.ELIASHBERG - *Existence and non-existence of a Stein complex structure on differentiable manifolds*, preprint MSRI, Berkeley, 1989.

[E.3] Y.ELIASHBERG - *Topological characterization of Stein manifolds of dimension* > 2, Intern. J. of Math. I (1990).

[E.4] Y.ELIASHBERG - *Filling by holomorphic discs and its applications*, preprint Stanford, 1990.

[E.5] Y.ELIASHBERG - *On symplectic manifolds which are bounded by standard contact spheres and exotic contact structures on spheres of dimension* > 3, preprint Berkeley, 1988.

[E.6] Y.ELIASHBERG - *Killing of elliptic complex points and the Legendrian isotopy*, in preparation.

[E.7] Y.ELIASHBERG - *Classification of overtwisted contact structures on* 3*-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989) 623-637.

[E.,H.] Y.ELIASHBERG and V. HARLAMOV - *Some remarks on the number of complex points of a real surface in the complex one*, preprint, 1982.

[T.E.] T. ERLANDSSON - *Geometry of contact transformations in dimension* 3, Doctoral dissertation, Uppsala, 1981.

[C.F.] C. FEFFERMAN - *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1-65.

[F.,W.] J. FRANKS and R.F. WILLIAMS - *Braids & the Jones polynomials*, T.A.M.S. 303, n° 1, 1987, 97-108.

[H.G.] H. GRAUERT - *On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds*, Annals of Math., vol. 68 (1958), 460-472.

[M.G.] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[G.,E.] M. GROMOV and Y. ELIASHBERG - *Non-degenerate mappings of Stein manifolds*, Funkt. Ana. i. Pril. 5 (1971), 82-83.

[G.,R.] R.C. GUNNING and H. ROSSI - *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, 1962.

[R.H.] R.S. HAMILTON - *The inverse function theorem of Nash and Moser*, B.A.M.S. (New Series), vol. 7, n° 1 (1982), 65-222.

[HÖ] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland, 1973.

[L.H.] L.R. HUNT - *The local envelope of holomorphy of an n-manifold in* $\mathbf{C}^n$, Bol. Un. Mat. Ital. 4 (1971), 12-35.

[J.] V.F.R. JONES - *Hecke algebra representations of braid groups & link polynomial*, Annals of Math. 126 (1987), 335-388.

[K.,W.] C.E. KENIG et S.M. WEBSTER - *The local hull of holomorphy of a surface in the space of two complex variables*, Invent. Math. 1982, 1-19.

[H.L.] H.F. LAI - *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds*, T.A.M.S. 172 (1972), 1-33.

[L.,M.] P. LIBERMANN et C.M. MARLE - *Géométrie symplectique. Bases de la Mécanique*, vol. 3, publications mathématiques de Paris 7, 1986.

[L.] S. LIE - *Geometrie der Berührungstransformationen*, erster Bandm Teubner, Leipzig, 1896.

[M.D.1] D. Mc DUFF - *Blow-ups and symplectic embeddings in dimension* 4, preprint Stony Brook, 1989, à paraître dans Topology.

[M.D.2] D. Mc DUFF - *The structure of rational and ruled symplectic* 4*-manifolds*, preprint Stony Brook, 1989.

[M.D.3] D. Mc DUFF - *The local behaviour of holomorphic curves in almost-complex* 4*-manifolds*, preprint Stony Brook, 1989.

[M.1] J. MILNOR - *A unique decomposition theorem for* 3*-manifolds*, Am. J. of Math. (1961), 1-7.

[M.2] J. MILNOR - *On the cobordian ring* Ω^* *and a complex analogue* I, Am. J. of Math. 82 (1960), 505-521.

[M.3] J. MILNOR - *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Study n° 61, Princeton, 1968.

[H.M.] H. MORTON - *Closed braids representations for a link & its 2 variable polynomials*, preprint Liverpool, 1985.

[M.,W.] J. MOSER and S. WEBSTER - *Normal forms for real surfaces in* $\mathbf{C}^2$ *near complex tangents and hyperbolic surface transformations*, Acta Math. 150 (1983), 255-296.

[M.P.M.] M.-P. MULLER - *Une structure symplectique complète sur* $\mathbf{R}^6$ *avec une sphère lagrangienne plongée*, Thèse, IRMA Strasbourg, 1989.

[N.,W.] R. NIRENBERG et R.O. WELLS Jr. - *Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold*, T.A.M.S. 142 (1969), 15-35.

[O.] K. OKA - *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo, Japon (1961), 1983.

[L.P.] L.V. POLTEROVITCH - *The Maslov class of the Lagrange surfaces and Gromov's pseudo-holomorphic curves*, preprint Moscou, 1989.

[V.R.] V.A. ROKHLIN - *Two-dimensional submanifolds of* 4 *dim-manifolds*, Funct. Analysis Appl. 6 (1972), 136-138.

[L.R.] L. RUDOLPH - *Some topologically locally flat surfaces in the complex projective plane*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 592-599.

[C.V.] C. VITERBO - *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*, Invent. Math. 100, 1989, 301-320.

[W.] A. WEINSTEIN - *Contact surgery and symplectic handlebodies*, preprint University of California, Berkeley, 1989.

Daniel BENNEQUIN

Université de Strasbourg
I.R.M.A.
CNRS LA 1
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX