CHRISTOPHE SOULÉ

Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 713, p. 327-343
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__327_0>

Séminaire BOURBAKI juin 1989
41ème année, 1988-89, n° 713

GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV DES SURFACES ARITHMÉTIQUES

par Christophe SOULÉ

L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres est depuis longtemps une voie royale de l'arithmétique.

Weil établit dans [43] un parallèle entre le théorème de Minkowski (sur l'existence de points d'un réseau dans un ensemble convexe et symétrique de volume assez grand) et le théorème de Riemann-Roch pour une courbe projective sur les nombres complexes. La caractéristique d'Euler-Poincaré de celle-ci a pour analogue le logarithme du discriminant d'un corps de nombres.

Arakelov étend cette analogie à la dimension deux [1] [2]. Il fonde ainsi une nouvelle géométrie [24], qui permet d'employer les méthodes de géométrie des nombres dans l'étude des variétés arithmétiques. La preuve de la conjecture de Mordell par Faltings [17] [34] [35] s'inspire indirectement de cette théorie. Vojta a récemment annoncé une autre preuve de la conjecture de Mordell, utilisant la géométrie d'Arakelov du produit de deux copies d'une surface arithmétique [42].

Le but de cet exposé est de décrire les concepts et résultats principaux dans le cas des surfaces arithmétiques (modèles d'une courbe sur un corps de nombres). On combine pour cela la géométrie algébrique d'un schéma de dimension deux avec la géométrie complexe de la surface de Riemann associée. Un fait remarquable est que l'on ne se contente pas des invariants cohomologiques classiques sur cette dernière mais que l'on utilise aussi des métriques sur les fibrés holomorphes, des fonctions de Green sur la surface et le déterminant des Laplaciens. Les énoncés sont cependant formellement analogues aux énoncés connus pour les surfaces projectives lisses sur les complexes : nombres d'intersection, théorème de Riemann-Roch, formule de Noether, etc.

On espère que le lecteur aura envie d'en savoir plus et de lire les nombreux travaux sur le sujet, en premier lieu ceux d'Arakelov [1] [2], qui ne sont d'ailleurs pas totalement compris à ce jour (voir la formule pour T dans [2], p. 408).

0. SURFACES ARITHMÉTIQUES

0.1. Dans ce texte F est une extension finie de $\mathbf{Q}$, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F , et $S = Spec(\mathcal{O}_F)$ le schéma associé. On note Σ l'ensemble des plongements complexes de F. Si K est une extension finie de F , on note $[K : F]$ le degré et $d(K/F)$ la valeur absolue du discriminant de K sur F . Une *surface arithmétique* sur S est la donnée d'un schéma régulier X de dimension deux et d'un morphisme $X \to S$ projectif et plat. On fait aussi l'hypothèse que la fibre générique X_F (une courbe lisse sur F) est géométriquement irréductible.

0.2. Une surface arithmétique est dite *semi-stable* si la fibre géométrique X_v de X en tout point fermé v de S est réduite, et n'a pour singularités que des points doubles ordinaires, et si toute composante de genre zéro de X_v rencontre au moins deux autres composantes. Si δ_v est le nombre de points doubles de X_v , le diviseur sur S

(1) $$\Delta = \sum_v \delta_v \, [v]$$

est le *discriminant* de X sur S .

Toute courbe lisse X_F , après extension finie du corps de base, admet un modèle X régulier et semi-stable [10][13].

0.3. Étant donnée une surface arithmétique X sur S , on note X_∞ l'ensemble des points complexes du schéma sur $\mathbf{Z}$ défini par X . C'est la réunion disjointe

$$X_\infty = \coprod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$$

des surfaces de Riemann obtenues à partir de X_F en étendant les scalaires de F à $\mathbf{C}$ par les plongements complexes $\sigma \in \Sigma$. Sur X_∞ agit la conjugaison complexe c .

0.4. On va étudier les *fibrés hermitiens* sur X . Il s'agit de la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un fibré algébrique sur X (un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et localement libre) et d'une métrique hermitienne lisse h sur le fibré holomorphe défini par E sur X_∞ . On suppose de plus que h est invariante par c . Si E est de rang un, on dira que $\overline{E}$ est un *fibré inversible hermitien.*

On pourra aussi considérer des fibrés hermitiens $\overline{E}$ sur S . Le fibré E est alors un $\mathcal{O}_F$-module projectif de rang fini.

0.5. On dira qu'un diviseur sur X est *horizontal* (resp. *vertical*) si chacune de ses composantes irréductibles a pour image S tout entier (resp. un point fermé de S) par l'application f .

1. INTERSECTION DE DEUX FIBRÉS INVERSIBLES HERMITIENS

1.1. Soient $\overline{L}$ et $\overline{M}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur une surface arithmétique X sur S. Faisons l'hypothèse que L et M possèdent une section non nulle, notée respectivement ℓ et m. Supposons aussi que le diviseur $div(\ell)$ de ℓ n'a pas de composante commune avec celui de m. Si x est un point de X , on note $\mathcal{O}_x$ l'anneau local au point x et $(\ell,m)_x$ l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_x$ par les sections ℓ et m après un choix (quelconque) d'une trivialisation de L et M en ce point. L'anneau artinien $\mathcal{O}_x/(\ell,m)_x$ est fini. On pose :

$$(\ell.m)_{fin} = \sum_{x\in X} log \ \sharp(\mathcal{O}_x/(\ell,m)_x) \ , \tag{2}$$

où $\sharp$ désigne le cardinal d'un ensemble fini. La somme (2) est finie ; elle ne porte que sur les points d'intersection de $div(\ell)$ avec $div(m)$.

Par ailleurs, si le diviseur de ℓ sur X_∞ s'écrit

$$\sum_\alpha n_\alpha \ P_\alpha \ , \ n_\alpha \in \mathbf{Z} \ , \ P_\alpha \in X_\infty \ ,$$

on pose

$$(log\|m\|) \ [div(\ell)] = \sum_\alpha n_\alpha \ log\|m(P_\alpha)\| \tag{3}$$

où $\|.\|$ est la norme associée à la métrique choisie sur M . On désigne enfin par $c_1(\overline{M})$ la première forme de Chern de $\overline{M}$. C'est la $(1,1)$ forme différentielle sur X_∞ égale à $-dd^c \ log\|m\|^2$ en dehors des zéros de m (avec $dd^c = \overline{\partial}\partial/2i\pi$) ; elle dépend de $\overline{M}$, mais pas du choix de m . Posons

$$(\ell.m)_\infty = -(log\|m\|) \ [div(\ell)] - \int_{X_\infty} (log\|\ell\|) \ c_1(\overline{M}) \tag{4}$$

et

$$\overline{L}.\overline{M} = (\ell.m)_{fin} + (\ell.m)_\infty \ . \tag{5}$$

Notons $\widehat{Pic}(X)$ le groupe des classes de fibrés inversibles hermitiens sur X pour les isomorphismes préservant les métriques, muni du produit tensoriel.

THÉORÈME 1 [1]. *La formule* (5) *induit un accouplement bilinéaire et symétrique*

$$\widehat{Pic}(X) \times \widehat{Pic}(X) \to \mathbf{R} \ .$$

On appelle $\overline{L}.\overline{M}$ le *nombre d'intersection* des deux fibrés inversibles hermitiens $\overline{L}$ et $\overline{M}$.

1.2. *Résumé de la preuve du Théorème* 1 (voir [1] et [23]) :

1.2.1. Notons d'abord que $(\ell.m)_{fin} = (m.\ell)_{fin}$. De même $(\ell.m)_\infty = (m.\ell)_\infty$. En effet, si l'on désigne par X_ϵ le fermé de X_∞ obtenu en ôtant les boules ouvertes de rayon ϵ autour des zéros de ℓ et m sur X_∞ (pour un choix quelconque de métrique sur X_∞), on peut écrire

$$\int_{X_\infty} (log\ \|\ell\|)\ c_1(\overline{M}) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{X_\epsilon} (log\ \|\ell\|)\ (-dd^c\ log\ \|m\|^2).$$

La formule de Stokes sur X_ϵ et celle des résidus aux zéros de m montrent alors que

$$(\ell.m)_\infty = -(log\ \|m\|)\ [div(\ell)] - (log\ \|\ell\|)\ [div(m)] - 2\int_{X_\infty} (dlog\ \|\ell\|)\ (d^c log\ \|m\|)\ ,$$

d'où il suit que $(\ell.m)_\infty = (m.\ell)_\infty$.

1.2.2. Si ℓ' est une section non nulle d'un fibré inversible hermitien $\overline{L}'$ et si $div(\ell')$ et $div(m)$ n'ont pas de composante commune, on a $(\ell\otimes\ell'.m)_\infty = (\ell.m)_\infty + (\ell'.m)_\infty$. De même, $(\ell\otimes\ell'.m)_{fin} = (\ell.m)_{fin} + (\ell'.m)_{fin}$ à cause des suites exactes

$$0 \to \mathcal{O}_x/(\ell,m)_x \to \mathcal{O}_x/(\ell.\ell',m)_x \to \mathcal{O}_x/(\ell',m)_x \to 0\ .$$

Il en résulte qu'on peut étendre par bilinéarité la définition de $(\ell.m)_{fin}$ et $(\ell.m)_\infty$ au cas où ℓ et m sont des sections rationnelles dont les diviseurs n'ont pas de composante commune.

1.2.3. Il reste à voir que quand $\overline{M} = (\mathcal{O}_X, |.|)$ est le fibré trivial muni de la métrique évidente et f une fonction rationnelle sur X , on a

$$(\ell.f)_{fin} + (\ell.f)_\infty = 0\ . \tag{6}$$

On note d'abord que $c_1(\overline{M}) = 0$. Supposons que $div(\ell)$ soit irréductible et horizontal, de corps de fonctions K (voir *loc. cit.* pour le cas vertical). Soit $\varphi \in K^*$ la restriction de f à $div(\ell)$. On constate que

$$(log\ |f|)\ [div(\ell)] = -\sum_{\tau:K\to\mathbf{C}} log\ |\tau(\varphi)|\ . \tag{7}$$

Si v est une place finie de K , notons $\mathcal{O}_v$ l'anneau local correspondant. Si $u \in \mathcal{O}_x$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_x/(\ell,u)_x = \prod_{v(x)\neq 0} \mathcal{O}_v/(\ell,u)_v\ . \tag{8}$$

Il en résulte que

$$(\ell.f)_{fin} = \sum_v v(\varphi) \log (Nv) , \tag{9}$$

où Nv est le cardinal du corps résiduel en v . La formule (6) s'obtient à l'aide de (7) et (9) et de la formule du produit pour le corps de nombres K .

1.3. Étant donnés $\overline{L}$ et $\overline{M}$ comme en 1.1., on peut définir un fibré inversible hermitien $\langle \overline{L}, \overline{M} \rangle$ sur S de la façon suivante [12]. Il nous permettra de réinterpréter le nombre d'intersection $\overline{L}.\overline{M}$.

Appelons $\langle L, M \rangle$ le $\mathcal{O}_S$-module engendré, localement pour la topologie étale, par des symboles $\langle \ell, m \rangle$, où ℓ (resp. m) est une section rationnelle de L (resp. M). On suppose de plus que $div(\ell) = D_1 - D_2$ et $div(m) = D'_1 - D'_2$, où D_i et D'_j sont effectifs, horizontaux et disjoints si $i, j \in \{1, 2\}$. Par ailleurs on impose les relations

$$\langle \ell, fm \rangle = f(div(\ell)) \langle \ell, m \rangle \tag{10}$$

et

$$\langle f\ell, m \rangle = f(div(m)) \langle \ell, m \rangle , \tag{11}$$

pour toute fonction rationnelle f dont le support est tel que (10) ou (11) a un sens. Si D est un diviseur horizontal de corps de fonctions K , $f(D) \in F^*$ désigne la norme de la restriction de f à D . Par "linéarité", on étend cette définition à $f(div(\ell)) = f(D_1)\ f(D_2)^{-1}$. On montre que $\langle L, M \rangle$ est un fibré inversible en tordant L et M par un fibré très ample et en utilisant la loi de réciprocité de Weil

$$f(div(g)) = g(div(f)) . \tag{12}$$

D'autres définitions de $\langle L, M \rangle$ sont possibles ([11], [15] et (31)).

La formule

$$\log \|\langle \ell, m \rangle\| = (\log \|m\|)\ [div(\ell)] + \int_{X_\infty} (\log \|\ell\|)\ c_1(\overline{M}) \tag{13}$$

définit une norme sur $\langle L, M \rangle$, d'où un fibré inversible hermitien sur S, noté $\langle \overline{L}, \overline{M} \rangle$. Cet accouplement est bilinéaire et symétrique.

1.4. Si $\overline{\Lambda}$ est un fibré inversible hermitien sur S et λ une section non nulle de Λ , on pose [34]

$$deg(\overline{\Lambda}) = \log \sharp(\Lambda/\mathcal{O}_F\lambda) - \sum_{\sigma\in\Sigma} \log \|\sigma(\ell)\| . \tag{14}$$

Ce nombre réel ne dépend pas du choix de λ ; c'est le *degré* de $\overline{\Lambda}$. On a la formule

(15) $$\overline{L}.\overline{M} = deg\ \langle \overline{L}, \overline{M} \rangle \ .$$

2. MÉTRIQUES ADMISSIBLES [1]

2.1. Soit $\mathcal{X}$ une surface de Riemann (compacte et connexe) de genre $g > 0$. Si α_j , $j = 1, \ldots, g$, est une base orthonormale de l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{X}$ pour le produit scalaire

(16) $$(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{X}} \alpha \wedge \overline{\beta} \ ,$$

on pose

$$\mu = \frac{i}{2g} \sum_j \alpha_j \wedge \overline{\alpha_j} \ .$$

Étant donné un fibré inversible holomorphe L sur $\mathcal{X}$, on dit que la métrique h sur L est ***admissible*** si la forme de Chern $c_1(L,h)$ est le produit de μ par une constante. Tout fibré inversible admet une métrique admissible, et le quotient de deux métriques admissibles est une constante.

2.2. Soit D un diviseur sur $\mathcal{X}$. On note $[D]$ le fibré inversible $\mathcal{O}(D)$ sur $\mathcal{X}$, muni de l'unique métrique admissible telle que, si 1_D est la section rationnelle canonique de $\mathcal{O}(D)$,

(17) $$\int_{\mathcal{X}} log\ \|1_D\|\ \mu = 0 \ .$$

Si $D = P$ est réduit à un point, la *fonction de Green*

(18) $$g(P,Q) = log\ \|1_P(Q)\|$$

est symétrique ($g(P,Q) = g(Q,P)$) et définit une métrique sur le fibré inversible $\mathcal{O}(\Delta_{\mathcal{X}})$ sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, associé à la diagonale $\Delta_{\mathcal{X}}$, par la formule

(19) $$log\ \|1_{\Delta_{\mathcal{X}}}(P,Q)\| = g(P,Q) \ .$$

Le fibré ω des 1-formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{X}$ est la restriction à la diagonale du dual de $\mathcal{O}(\Delta_{\mathcal{X}})$. Il est donc lui aussi muni d'une métrique, appelée *métrique d'Arakelov.* On montre que celle-ci est admissible. Pour tout point P de $\mathcal{X}$, l'isomorphisme de résidu en P :

$$\omega(P)_{|P} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C} \tag{20}$$

est une isométrie quand $\mathbf{C}$ est muni de la métrique triviale et $\omega(P) = \omega \otimes \mathcal{O}(P)$ des métriques choisies ci-dessus.

2.3. Supposons choisie une base symplectique A_i, B_i de $H_1(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ telle que $\int_{A_i} \alpha_j = \delta_{ij}$. Soient $\Omega = (\int_{B_j} \alpha_i)$ la matrice des périodes de $\mathcal{X}$, $J = \mathbf{C}^g/\Lambda$, où $\Lambda = \mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g$, la jacobienne de $\mathcal{X}$, $H = Im(\Omega)^{-1}$, $Z = X + iY$ le vecteur colonne de $\mathbf{C}^g$, Z^t son transposé et $\varphi : \mathcal{X} \to J$ le plongement de $\mathcal{X}$ dans J associé au choix d'un point de $\mathcal{X}$. Si

$$\nu = \frac{i}{2g} \, (dZ)^t \, H(d\overline{Z}) \tag{21}$$

on a $\mu = \varphi^*(\nu)$. On peut en déduire que, si l'on pose

$$\|\theta\|^2(Z) = (det\ H)^{-1/2}.exp(-2\pi\ Y^t H Y)\ .\ |\sum_{\lambda \in \Lambda} exp(\pi i\ \lambda^t \Omega \lambda + 2\pi i \lambda^t Z)|^2\ , \tag{22}$$

on a [6]

$$g(P,Q) = \frac{1}{g!} \int_{\Theta + \varphi(P) - \varphi(Q)} \nu^{g-1}\ log\ \|\theta\| + A \tag{23}$$

où A est une constante, et Θ désigne le lieu des zéros de $\|\theta\|$ (voir aussi [25]).

2.4. Soit X une surface arithmétique semi-stable sur S , de genre $g > 0$. Un fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur X est dit ***admissible*** s'il en est ainsi de sa restriction à X_σ quel que soit $\sigma \in \Sigma$. En particulier le faisceau dualisant relatif ω de X sur S est muni de la métrique d'Arakelov par 2.2 ; on note $\overline{\omega}$ le fibré inversible hermitien admissible associé.

THÉORÈME 2 (formule d'adjonction) [1] [37] [23]. *Soient D un diviseur horizontal irréductible sur X , $P_i \in X_\infty$ les points complexes définis par D , et K son corps de fonctions. Alors*

$$[D].[D] + \overline{\omega}.[D] = log\ (d(K/F)) - \sum_{i \neq j} g(P_i, P_j)\ . \tag{24}$$

2.5. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur une surface arithmétique X tel que L soit ample. Si $P \in X_F(K)$ est un point rationnel de X_F sur une extension finie K de F , et

$$s : Spec(\mathcal{O}_K) \to X$$

la multisection associée, le nombre réel

$$h(P) = (deg\ s^*(\overline{L}))/[K:F] = ([Im(s)].\overline{L})/[K:F] \tag{25}$$

est la *hauteur "naïve"* du point P dans le plongement projectif associé à (une puissance de) L .

Si $\overline{L} = \overline{\omega}$ et si X est semi-stable de genre $g \geq 2$, on peut exprimer $h(P)$ en termes de la *hauteur "canonique"* d'un point de la jacobienne de X_F . On en déduit que l'indice de la forme quadratique d'intersection sur le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles hermitiens admissibles est $(1, -1, \ldots, -1)$ (théorème de l'indice de Hodge) [16] [20].

3. DÉTERMINANT DE LA COHOMOLOGIE

3.1. Si M est un $\mathcal{O}_F$-module de type fini, il existe une résolution

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{26}$$

de M par des $\mathcal{O}_F$-modules projectifs de type fini. Si r_0 (resp. r_1) est le rang de P_0 (resp. P_1) , on pose

$$det(M) = \Lambda^{r_0}(P_0) \otimes \Lambda^{r_1}(P_1)^{-1} \ , \tag{27}$$

où Λ^k désigne la puissance extérieure k-ième, et $(.)^{-1}$ le dual d'un $\mathcal{O}_F$-module inversible. On peut montrer que $det(M)$ ne dépend pas du choix de la résolution (26), à isomorphisme unique près. Il y a cependant des problèmes de signe, et il convient de penser à $det(M)$ comme la donnée du fibré inversible (27) et de la classe modulo 2 de $r_0 - r_1$. Dans la suite, nous négligerons cette question de signe (*cf.* [22]).

3.2. Si E est un fibré sur une surface arithmétique et $H^q(X, E)$ sa cohomologie cohérente, on pose

$$\lambda(E) = det\ H^0(X,E) \otimes (det\ H^1(X,E))^{-1} \ . \tag{28}$$

Ce fibré inversible sur S s'appelle le *déterminant de la cohomologie* de E . Si

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \tag{29}$$

est une suite exacte de fibrés sur X , on a un isomorphisme canonique de fibrés inversibles

$$\lambda(E) \simeq \lambda(E') \otimes \lambda(E'') \ . \tag{30}$$

Par ailleurs, si L et M sont deux fibrés inversibles sur X , il existe un isomorphisme canonique [12]

$$\langle L, M \rangle \simeq \lambda(L \otimes M) \otimes \lambda(L)^{-1} \otimes \lambda(M)^{-1} \otimes \lambda(\mathcal{O}_X) \ . \tag{31}$$

3.3. On cherche à définir une métrique sur $\lambda(E)$. La première solution de ce problème est due à Faltings.

THÉORÈME 3 [16]. *Soit $\mathcal{X}$ une surface de Riemann de genre > 0 . Il existe une unique façon d'associer à tout fibré inversible hermitien admissible $\overline{L}$ sur $\mathcal{X}$ une métrique h_F sur $\lambda(L)$ telle que*

F1. *Tout isomorphisme isométrique de fibrés inversibles hermitiens admissibles induit un isomorphisme isométrique sur le déterminant de leur cohomologie.*

F2. *Si $L = \omega$ est le fibré des 1-formes différentielles holomorphes, la métrique h_F sur $\lambda(\omega)$ est celle induite par le produit scalaire (16) sur $H^0(\mathcal{X}, \omega)$ et la métrique triviale sur $H^1(\mathcal{X}, \omega) = \mathbf{C}$.*

F3. *Si $P \in \mathcal{X}$, la suite exacte*

$$0 \to L \to L(P) \to L(P)_{|P} \to 0 \tag{32}$$

induit une isométrie

$$\lambda(L(P)) \simeq \lambda(L) \otimes L(P)_{|P} \tag{33}$$

(la métrique sur $L(P) = L \otimes \mathcal{O}(P)$ est le produit tensoriel de la métrique sur L avec celle de 2.2 sur $\mathcal{O}(P)$) .

3.4. **Preuve du Théorème** 3 (d'après Mazur) : L'unicité de h_F n'est pas difficile à voir; montrons son existence. Les constructions de 3.2 restent valables si E désigne un fibré holomorphe sur $\mathcal{X}$. Appliquant (31) à L et ωL^{-1} , on obtient un isomorphisme

$$\lambda(L)^2 \simeq \langle L, \omega L^{-1} \rangle \ \lambda(\omega)^2 \ . \tag{34}$$

La métrique de F2) sur $\lambda(\omega)$ et celle de 1.3. sur $\langle L, \omega L^{-1} \rangle$ définissent, via (34), une métrique h_F sur $\lambda(L)$. Les propriétés F1) et F2) sont faciles à vérifier.

Étant donnée la suite exacte (32), on déduit de (34) une isométrie

$$\lambda(L(P))^2\ \lambda(L)^{-2} \simeq \langle L(P)), \omega L(P)^{-1}\rangle\ \langle L, \omega L^{-1}\rangle^{-1}\ . \tag{35}$$

Par bilinéarité de $\langle , \rangle$ et grâce à l'isométrie

$$\langle \mathcal{O}(P), L\rangle = L_{|P} \tag{36}$$

(voir (13) et (32)), on obtient une isométrie

$$\langle L(P), \omega L(P)^{-1}\rangle\ \langle L, \omega L^{-1}\rangle^{-1} = (\omega L_{|P}^{-1}) \otimes (L(P)_{|P}^{-1})\ . \tag{37}$$

Le composé des isomorphismes (35) et (37) avec l'isomorphisme

$$(L(P)_{|P})^2 \xrightarrow{\sim} \lambda(L(P))^2\ \lambda(L)^{-2} \tag{38}$$

est le produit tensoriel de l'identité sur $L(P)_{|P}$ avec le résidu (20). C'est donc une isométrie. Par conséquent (38) est une isométrie, ce qui démontre F3).

3.5. Quillen définit comme suit une métrique h_Q sur $\lambda(E)$, pour tout fibré holomorphe sur une surface de Riemann $\mathcal{X}$. Fixons une métrique de Kähler sur $\mathcal{X}$ et une métrique hermitienne sur E . La cohomologie $H^q(\mathcal{X}, E)$ s'identifie alors aux formes harmoniques de type $(0,q)$ sur $\mathcal{X}$ à coefficients dans E . Étant données deux formes $\eta, \eta' \in A^{0q}(\mathcal{X}, E)$ à coefficients dans E, on pose

$$(\eta, \eta')_{L^2} = \int_{\mathcal{X}} (\eta(x), \eta'(x))\ dx\ , \tag{39}$$

où, localement sur $\mathcal{X}$, $dx = (i/2\pi)(\alpha \wedge \bar{\alpha})\|\alpha\|^{-2}$ pour toute forme α non nulle de type $(0,1)$. Ce produit scalaire induit une métrique h_{L^2} sur $\lambda(E)$. Par ailleurs, considérons le Laplacien
$_E = \bar{\partial}^* \bar{\partial}$ sur les sections lisses de E , et

$$\zeta_E(s) = Tr(\ _E^{-s} \mid Ker(\ _E)^{\perp})\ ,\ Re(s) > 1\ , \tag{40}$$

sa fonction zêta. On peut prolonger $\zeta_E(s)$ analytiquement au plan complexe et prendre sa dérivée $\zeta'_E(0)$ à l'origine . On pose [31] [5]

$$h_Q = h_{L^2}\ exp(\zeta'_E(0))\ . \tag{41}$$

4. LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

4.1. Soient X une surface arithmétique sur S et E un fibré de rang r sur X . On pose

$$(42) \qquad IC_2(E) = \lambda(E)^{-1}\, \lambda(det\ E)\, \lambda(\mathcal{O}_X)^{r-1} ,$$

avec $det(E) = \Lambda^r E$. Si $\overline{E}$ est un fibré hermitien sur X , on définit un fibré inversible hermitien $IC_2(\overline{E})$ sur S en spécifiant comme suit le choix d'une métrique sur $IC_2(E)$. Quand $r = 1$, le fibré $IC_2(\overline{E})$ est trivial. Étant donnée une suite exacte (29) et une métrique h sur E , notons $\alpha \in \Omega^{01}(X_\infty, Hom(E'', E'))$ la forme différentielle obtenue par projection orthogonale (pour la métrique h) de l'opérateur de Cauchy-Riemann du fibré E . Si α^* est la transposée de α, on considère la 2-forme sur X_∞

$$(43) \qquad \widetilde{c_2} = (1/2i\pi)\ Tr(\alpha^* \wedge \alpha)$$

($cf.$ [9] et [14]). De (42) et (30) on déduit un isomorphisme

$$(44) \qquad IC_2(E) \xrightarrow{\sim} IC_2(E')\ IC_2(E'')\ \langle det\ E', det\ E''\rangle\ .$$

Il multiplie les métriques par $exp(\int_{X_\infty} \widetilde{c_2})$.

4.2. Soit $\overline{E}$ un fibré hermitien de rang r sur une surface arithmétique semi-stable X sur S. Munissons ω d'une métrique hermitienne et l'espace tangent à X_∞ de la métrique de Kälher duale. Soit $\mathcal{O}(\Delta)$ le fibré inversible sur S associé au discriminant (1).

THÉORÈME 4 (Riemann-Roch) [12].
(i) *Il existe un isomorphisme canonique de fibrés inversibles sur S*

$$(45) \qquad \lambda(E)^{12} \simeq \mathcal{O}(\Delta)^r\ \langle\omega,\omega\rangle^r\ \langle det\ E, det(E)\ \omega^{-1}\rangle^6 IC_2(E)^{-12}.$$

(ii) *Si $\lambda(E)$ est muni de la métrique de Quillen h_Q (cf 3.5), et avec les choix de 1.3 et 4.1, l'isomorphisme (45) multiplie les normes par $exp(r\ a(g))$, où $a(g)$ ne dépend que du genre g des composantes de X_∞ .*

4.3. Pour prouver (i) quand $g > 0$, on combine l'isomorphisme de Mumford [28] [26]

$$(46) \qquad \lambda(\omega)^{13} \xrightarrow{\sim} \lambda(\omega^2)\ \mathcal{O}(\Delta) ,$$

la dualité de Serre

(47) $$\lambda(L) \xrightarrow{\sim} \lambda(\omega L^{-1}) ,$$

la formule (31) dans le cas $L = M = \omega$, (42) et (34). Quand $g = 0$, on calcule $\lambda(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$.

Pour montrer (ii) on désigne par φ_E le logarithme de la norme de l'isomorphisme (45). Étant données une variété complexe lisse Y et une famille lisse $C \to Y$ de courbes sur Y , φ_E définit une fonction réelle sur Y . Le calcul de la courbure de $\lambda(E)$ pour la métrique de Quillen [31] [4] montre que $dd^c\ \varphi_E = 0$. Il en résulte que φ_E ne dépend pas du choix de la métrique sur X_∞ et qu'étant donnés une suite exacte (29) et un choix arbitraire de métriques sur E' , E et E'' , on a $\varphi_E = \varphi_{E'} + \varphi_{E''}$ ([12] [4]). On est ainsi ramené au cas où E est un fibré inversible L . Quand $g = 0$ ou 1 , un calcul direct est possible. Quand $g \geq 2$, on suppose que Y est l'espace de modules des courbes de genre g et l'on montre que

$$\varphi_L = a(g) + b(g)\ deg(L)$$

([12] et 4.4 si $g = 2$). Comme (45) est compatible à la dualité de Serre (47), on obtient $b(g) = 0$.

4.4. Il reste à calculer $a(g)$. Un calcul direct (on connaît le spectre du Laplacien sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = S^2$) donne [40]

(48) $$a(0) = -24\zeta'(-1) + 1 ,$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann. On montre aussi que $a(1) = 0$. Si $g \geq 2$, un argument de Bost montre que $a(g) = a(2)\ (g-1)$. En effet, si $\pi : X' \to X$ est un revêtement galoisien cyclique de degré n entre surfaces arithmétiques, et g' le genre de X', $\lambda(\pi^* E)$ est isométrique à $\lambda(E)^n$ et le côté droit de (45) est aussi élevé à la puissance n . Comme $(g' - 1) = n(g - 1)$, on en tire $a(g) = a(2)\ (g - 1)$.

On peut montrer que $a(g) = a(0)\ (1 - g)$ [19].

4.5. Du Théorème 4 et de la définition de la métrique de Faltings via l'isomorphisme (34) résulte que la métrique de Faltings sur $\lambda(L)$ est le multiple de celle de Quillen (pour le choix d'Arakelov d'une métrique sur ω, *cf.* 2.2) par l'exponentielle de $-\zeta'_{\mathbf{C}}(0) - log\ A(\mathcal{X}) + g\ log(\pi)$, où $\zeta_{\mathbf{C}}(s)$ est la fonction zêta du Laplacien scalaire et $A(\mathcal{X})$ l'aire de $\mathcal{X}$ (pour la métrique d'Arakelov).

4.6. Quand E est le fibré ω, l'isomorphisme (45) s'écrit

(49) $$\lambda(\omega)^{12} \xrightarrow{\sim} \langle \omega, \omega \rangle \otimes \mathcal{O}(\Delta) .$$

Sur X_∞ l'isomorphisme (49) peut aussi être obtenu à l'aide d'identités entre fonctions thêta sur la jacobienne. Si L est un fibré inversible de degré $g-1$ sur une surface de Riemann $\mathcal{X}$ de genre $g > 0$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$u(L) : \lambda(L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_J(-\Theta)_L \tag{50}$$

(où L est vu comme un point de la jacobienne J). On munit $\lambda(L)$ de la métrique h_F et $\mathcal{O}_J(-\Theta)$ de la métrique telle que $\|1_\Theta\| = \|\theta\|$ (*cf.* (22)). La norme de $u(L)$ est alors indépendante de L ; on la note $exp(\delta(\mathcal{X})/8)$ [16].

THÉORÈME 5 (formule de Nœther) [16] [26]. *Si X est semi-stable sur S et $g > 0$ on a*

$$12\ deg(\lambda(\omega), h_F) = \overline{\omega}.\overline{\omega} + \sum_v \delta_v\ log(Nv) + \sum_{\sigma\in\Sigma} \delta(X_\sigma) - 4g[F:\mathbf{Q}]\ log(2\pi)\ . \tag{51}$$

Quand X n'est pas semi-stable, les Théorèmes 4 et 5 restent vrais à condition de remplacer δ_v par des conducteurs d'Artin [32]. Le lien entre les Théorèmes 4 et 5 est la formule suivante [7] [33] :

$$\delta(\mathcal{X}) = 6\zeta'_{\mathbf{C}}(0) + 6\ log\ A(\mathcal{X}) - 2g\ log(\pi) + 4g\ log(2) - a(g)\ . \tag{52}$$

4.7. Plusieurs auteurs ont étudié le comportement de $\delta(\mathcal{X})$ quand la surface de Riemann dégénère (un problème auquel s'intéresse aussi la théorie des cordes) [16] [45] [33] [3] [44] [21]. Par exemple, considérons une famille $\mathcal{X}_t$ de courbes complexes, lisses de genre g si $t \neq 0$, d'équation locale $xy = t$ en un point P . Supposons que la fibre spéciale $\mathcal{X}_0$ soit la réunion en P de deux courbes de genre g_1 et g_2 . Alors

$$\delta(\mathcal{X}_t) + 4(g_1 g_2/g)\ log|t|$$

a une limite finie quand $|t|$ tend vers 0 .

4.8. Le Théorème de Riemann-Roch a aussi la conséquence suivante :

THÉORÈME 6 [16] [18]. *Soit $\overline{L}$ un fibré inversible sur une surface arithmétique X , tel que la forme $c_1(\overline{L})$ soit strictement positive. Pour tout fibré hermitien $\overline{E}$ sur X , et tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, si $n \geq n_0$, $E \otimes L^n$ possède une section non nulle s telle qu'en tout point $x \in X_\infty$*

$$\|s(x)\| < exp(n(\epsilon - (\bar{L}.\bar{L})/deg\ L)))\ .$$

5. UN PROJET

5.1. Si $g \geq 2$, le nombre réel $\bar{\omega}.\bar{\omega}$ est un invariant important, qui ne dépend que de la courbe X_F . On montre qu'il est positif [16], mais on ne sait pas s'il peut s'annuler (s'il est non nul, voir [36] [38] pour une application à la hauteur canonique des points de X_F). On sait parfois le calculer [8]. On aimerait lui trouver une borne supérieure de la forme

$$\bar{\omega}.\bar{\omega} \leq \alpha \, log(d(F/\mathbf{Q})) + \beta[F:\mathbf{Q}] \ , \tag{53}$$

où les nombres α et β restent inchangés par extension des scalaires et dépendent aussi peu que possible de la courbe X_F (*cf.* 5.4).

5.2. Kodaira et Parshin construisent une famille lisse non isotriviale $\pi : Y_F \to X_F$ de courbes de genre $\gamma \geq 2$, où γ est fonction de g . Notons $\bar{\omega}_{Y/X}$ le fibré dualisant relatif de π muni de la métrique d'Arakelov (2.2) et $\bar{\omega}_P$ sa restriction à la fibre $\pi^{-1}(P)$, où $P \in X_F(K)$ est un point rationnel de X_F . Le nombre $h(P) = (\bar{\omega}_P.\bar{\omega}_P)/[K:F]$ est une hauteur naïve (*cf.* 2.5) sur X_F ([27] ; noter que le fibré inversible $\langle \omega_{Y/X}, \omega_{Y/X} \rangle$ est ample sur X_F).

5.3. **CONJECTURE (Mordell "effectif").** *Si $g \geq 2$ et si h est une hauteur naïve sur X_F, il existe des constantes a et b telles que, pour tout point rationnel $P \in X_F(K)$, on ait*

$$h(P) \leq a(log(d(K/F)))/[K:F] + b \ . \tag{54}$$

5.4. L'inégalité (54) résulterait de (53) si l'on savait que les constantes α et β des fibres de π (*cf.* 5.2) sont bornées. Ce sera le cas si α et β dépendent continûment de g , du nombre $(\sum_v \delta_v \, log(Nv))/[F:\mathbf{Q}]$, et des points x_σ de l'espace de modules des courbes complexes de genre g définis par X_σ , $\sigma \in \Sigma$ [30] [27].

5.5. Szpiro note que (53) équivaut à l'existence d'un point de hauteur petite sur X_F [34] [36]. Parshin [30] remarque que (53) est analogue à l'inégalité

$$c_1^2 \leq 3 \, c_2 \ , \tag{55}$$

connue pour les nombres caractéristiques d'une surface complexe de type général.

5.6. Vojta ([41], 5.5.1) et Parshin [30] ont montré que l'inégalité (54) a pour conséquence que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solution non triviale si n est grand. La courbe elliptique associée à une telle solution ("courbe de Frey" [29]) conduirait à un point de hauteur trop grande sur une courbe modulaire [30] [27] [39].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory of divisors on an arithmetic surface*, Math USSR Izv. 8, n° 6, 1974, 1167-1180.

[2] S.J. ARAKELOV - *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proc. Int. Congress of Math., Vancouver, Vol. 1, 1974, 405-408.

[3] J.-M. BISMUT, J.-B. BOST - *Quillen metrics and degenerating Riemann surfaces*, à paraître.

[4] J.-M. BISMUT, H. GILLET, C. SOULÉ - *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles* I, II, III, Comm. Math. Physics 115, 1988, 49-78, 79-126, 301-350.

[5] J.-B. BOST - *Fibrés déterminants et espaces de modules de courbes*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 676, 1986-87, Astérisque 152-153, 113-149.

[6] J.-B. BOST - *Fonctions de Green-Arakelov, fonctions thêta et courbes de genre 2*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 305, Série I, 1987, 643-646.

[7] J.-B. BOST - *Conformal and holomorphic anomalies on Riemann surfaces and determinant bundles*, in VIIIth Congress on Math. Physics, M. Mebkhout, R. Sénéor Ed., 1986, World Scientific, 768-775.

[8] J.-B. BOST, J.- F. MESTRE, L. MORET-BAILLY - *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2*, à paraître dans [34].

[9] R. BOTT, S.S. CHERN - *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. 114, 1968, 71-112.

[10] G. CORNELL, J. SILVERMAN - *Arithmetic geometry*, 1986, Springer-Verlag.

[11] P. DELIGNE - *Cohomologie à supports propres*, SGA 4, Exposé XVII.

[12] P. DELIGNE - *Le déterminant de la cohomologie*, Contemporary Mathematics, Vol. 67, American Mathematical Society, 1987, 93-177.

[13] P. DELIGNE, D. MUMFORD - *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES 36, 1969, 75-110.

[14] S. DONALDSON - *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. 50, 1985, 1-26.

[15] R. ELKIK - *Intersections relatives de fibrés en droites et intégrales de classes de Chern*, Ann. Scient. École Normale Sup. Paris, à paraître.

[16] G. FALTINGS - *Calculus on arithmetic surfaces* , Ann. of Maths. 119, 1984, 387-424.

[17] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. 73, 1983, 349-366.

[18] H. GILLET, C. SOULÉ - *Amplitude arithmétique*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 307, 1988, 887-890.

[19] H. GILLET, C. SOULÉ - *Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique*, C.R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

[20] P.M. HRILJAC - *Heights and Arakelov's intersection theory*, Amer. J. Math. 107, n^0 1, 1985, 23-38.

[21] J. JORGENSON - *Faltings' delta function and analytic torsion for line bundles*, thèse Stanford, 1989.

[22] F.F. KNUDSEN, D. MUMFORD - *The projectivity of the moduli space of stable curves* I : *Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. 39, 1976, 19-55.

[23] S. LANG - *Introduction to Arakelov theory*, 1988, Springer-Verlag.

[24] Yu.I. MANIN - *New dimensions in geometry*, Springer Lecture Notes 1111, 1985, 59-101.

[25] L. MORET-BAILLY - *Métriques permises*, dans [32], 29-87.

[26] L. MORET-BAILLY - *La formule de Nœther pour les surfaces arithmétiques*, Inventiones, à paraître.

[27] L. MORET-BAILLY - *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques*, à paraître dans [35].

[28] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, L'Enseignement mathématique 23, 1977, 33-100.

[29] J. OESTERLÉ - *Nouvelles approches du "théorème" de Fermat*, Sém. Bourbaki, exp. n^o 694, février 1988, Astérisque 161-162, 1988, 165-186.

[30] A.N. PARSHIN - *The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for the arithmetical surfaces and its applications*, dans Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1986-87, C. Goldstein ed., 1988, Birkhäuser, 299-312.

[31] D. QUILLEN - *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funct. Anal. Appl. 19, 1986, 31-34.

[32] T. SAITO - *Conductor, discriminant and the Nœther formula of arithmetic surfaces*, Duke Math. J. 57, 1988, n^o 1, 151-173.

[33] D.J. SMIT - *String theory and algebraic geometry of moduli spaces*, Comm. Math. Phys. 114, 1988, 645-686.

[34] L. SZPIRO - *La conjecture de Mordell (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 619, novembre 1983, Astérisque 121-122, 1985, 83-103.

[35] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque vol. 127, 1985.

[36] L. SZPIRO - *Small points and torsion points*, Contemporary Mathematics, Vol. 58, American Mathematical Society, 1986, 251-260.

[37] L. SZPIRO -*Présentation de la théorie d'Arakelov*, Contemporary Mathematics, Vol. 67, American Mathematical Society, 1987, 279-293.

[38] L. SZPIRO - *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique*, à paraître.

[39] L. SZPIRO - Séminaire 1988, à paraître.

[40] I. VARDI - *Determinants of Laplacians and multiple gamma functions*, SIAM J. Math. Anal. 19, 1988, 493-507.

[41] P. VOJTA - *Diophantine approximations and value distribution theory*, Springer Lecture Notes 1239, 1987.

[42] P. VOJTA - *An extension of the Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond theorem*, Février 1989, preprint.

[43] A.WEIL - *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, in Œuvres Scientifiques, 1939a, 236-240.

[44] R. WENTWORTH - *The asymptotics of the Green's function in the Arakelov metric*, 1989, preprint.

[45] S. WOLPERT - *Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function of Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. 112, 1987, 283-315.

Christophe SOULÉ

C.N.R.S. et I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE