

Astérisque

HEDY ATTOUCH

Homogénéisation

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 686, p. 7-30

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__7_0>

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMOGÉNÉISATION

par Hedy ATTOUN

PLAN :

1. Introduction.
2. Exemples.
3. Méthodes énergétiques et compacité par compensation.
4. Convergences variationnelles. Méthodes de Γ -convergence, épi-convergence.
5. Comparaison des différentes méthodes.
6. Homogénéisation avec information incomplète. Homogénéisation stochastique.

1. INTRODUCTION

Ces dernières années ont vu un développement considérable dans l'étude et l'utilisation des matériaux composites, principalement dans les branches à technologie avancée (matériaux nouveaux, industrie nucléaire, aérospatiale...). La structure de ces matériaux peut être très diverse (structures stratifiée, fibrée, matériaux poreux...) leur point commun étant d'être composés de divers constituants intimement mélangés, imbriqués. Une difficulté majeure rencontrée dans l'étude des équations de la physique dans de tels matériaux est que les divers paramètres physiques (coefficients de conductivité, d'élasticité...) sont discontinus et varient très vite d'un constituant à l'autre. Une approche numérique, type éléments finis, basée sur une méthode de discrétisation, tombe alors en défaut. En effet, pour prendre en compte les conditions de transmission d'un constituant à l'autre, le pas de discrétisation doit être pris très petit, à l'échelle de la structure microscopique du matériau, le temps et le coût du calcul devenant, par conséquent, prohibitifs.

La théorie de l'homogénéisation repose sur la remarque suivante : lorsque les constituants sont intimement mêlés, la structure *microscopique* du matériau devient très complexe, en contrepartie d'un point de vue *macroscopique* le matériau tend à se comporter comme un matériau idéal, homogène. La théorie de l'homogénéisation se propose de déterminer ce problème homogénéisé (il est préférable de penser en terme de problème homogénéisé plutôt que de matériau homogénéisé car le processus d'hom-

généralisation dépend du phénomène physique étudié). Le traitement numérique du problème homogénéisé relève alors des méthodes classiques. Au départ, ce sont donc des considérations numériques qui ont motivé le développement de la théorie de l'homogénéisation. Nous verrons plus loin d'autres champs d'application de cette théorie (contrôle, optimum design...). Sans entrer dans les détails, disons tout de suite que l'étude du processus d'homogénéisation soulève des problèmes mathématiques fort délicats à résoudre. Outre l'importance technologique du sujet, c'est ce challenge et la grande curiosité suscitée par l'apparition de termes dits "étranges" dans certains problèmes homogénéisés qui ont motivé de nombreux travaux mathématiques. Il y a autant de problèmes d'homogénéisation qu'il y a de problèmes physiques, de lois de comportement et de conditions aux limites (lorsque celles-ci interviennent à l'échelle microscopique comme dans les matériaux poreux, rugueux, fissurés...). Nous nous attacherons donc plutôt à décrire les méthodes les plus générales fonctionnant aussi bien pour les problèmes linéaires que non linéaires, mettant l'accent sur :

a) les méthodes énergétiques avec l'utilisation d'outils type compacité par compensation développées par Murat & Tartar [31] [34] [41] ...

b) les méthodes variationnelles avec l'utilisation des concepts de convergence variationnelles (Γ -convergence, épi-convergence, Mosco-convergence) introduits par De Giorgi [20], Mosco [30], Attouch & Wets [7] ... et utilisés en homogénéisation par Marcellini [28], Carbone [13], Dal-Maso & Modica [19], Attouch et Buttazzo [4]... D'autres méthodes sont également très intéressantes en vue de la résolution de problèmes d'homogénéisation, citons

c) développement asymptotique par la méthode des échelles multiples cf. A. Bensoussan & J.L. Lions & G. Papanicolaou [9], E. Sanchez-Palencia [38] particulièrement adaptées à l'étude des problèmes linéaires.

d) méthodes probabilistes lorsque le problème a une interprétation probabiliste, cf. Papanicolaou & Varadhan [36], Yurinskij [46]...

Pour le lecteur désireux d'aller plus avant dans cette théorie, citons parmi les nombreux ouvrages parus sur la question :

A. Bensoussan & J.L. Lions & G. Papanicolaou [9], E. Sanchez-Palencia [38], H. Attouch [1], A.V. Marchenko & E. Ya Hruslov [29], J.L. Lions [26], N.S. Bahvalov & G.P. Panasenko [8] .

2. EXEMPLES

Nous nous intéresserons principalement à deux situations "modèles", significatives quant à l'utilisation des diverses méthodes exposées ci-dessus. Nous

considérerons des problèmes aux limites posés dans Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$ ou 3 dans les applications). Nous noterons $x \in \Omega$ la variable d'espace et ε réel strictement positif désignera la "périodicité" de la structure microscopique. Dans un premier temps, nous étudierons le cas des structures périodiques déterministes (nous parlerons plus loin du problème d'homogénéisation stochastique). A cet effet, étant donné

$$Y = [0, 1]^N \text{ la cellule unité dans } \mathbb{R}^N$$

nous considérons la structure ε -périodique dans $\mathbb{R}^N$ engendrée par εY .

2.1 - Equation de l'électrostatique

Supposant les différents constituants homogènes et isotropes, la conductivité du matériau est décrite par la fonction

$$x \longmapsto a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction Y -périodique donnée. Pour visualiser cette situation nous avons représenté ci-dessous un matériau formé à partir de deux composants de conductivités respectives α et β .

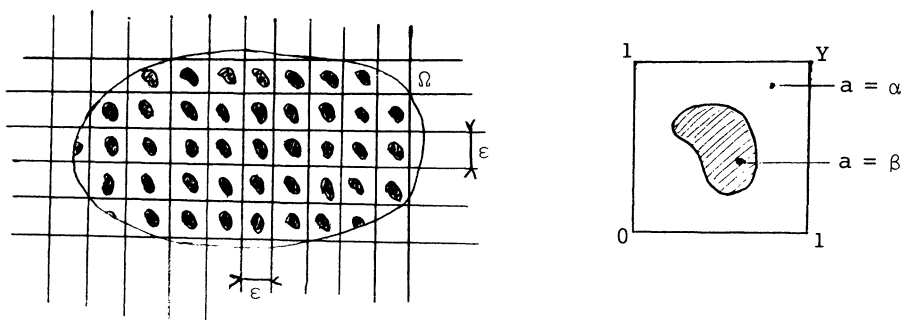


fig. 1

Si la frontière de Ω est maintenue au potentiel u_0 donné, en présence d'une densité de charge f sur Ω ($f \in L^2(\Omega)$), le potentiel d'équilibre $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution du problème variationnel suivant :

$$(1) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |Du(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

dont l'équation d'Euler est :

$$(2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) Du(x)\right) = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le véritable problème physique se pose à $\varepsilon = \varepsilon_0$, petit mais fixé. Comme nous l'avons expliqué, bien que les problèmes (1), (2) soient bien posés mathématiquement, leur

résolution numérique est difficile. L'idée de la théorie de l'homogénéisation est de considérer ε comme un paramètre et de faire tendre ε vers zéro dans les équations considérées. Ce faisant, pour chaque $\varepsilon > 0$, on va avoir u_ε solution de :

$$(2_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} (a(\frac{x}{\varepsilon}) Du_\varepsilon) = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

la question étant de passer à la limite sur (2_ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Supposant $+\infty > \beta > \alpha > 0$, on a $a_\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon}) \geq \alpha > 0$ sur Ω . Il résulte de l'inégalité de Poincaré que la suite $\{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ reste bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc faiblement relativement compacte dans $H^1(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite (que l'on notera encore u_ε) telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Cette information ne nous permet pas pour autant de passer à la limite sur (2_ε)

$$(3) \quad \begin{cases} a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \longrightarrow \int_Y a(y) dy & L^\infty \text{ étoile faible} \\ Du_\varepsilon \longrightarrow Du & \text{dans } L^2 \text{ faible} \end{cases}$$

car le produit de deux suites faiblement convergentes n'est pas en général convergent, même au sens des distributions !

Le passage à la limite dans le cas $N = 1$ est à cet égard significatif :

Introduisant

$$(4) \quad \xi_\varepsilon = a_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon$$

on a

$$(5) \quad Du_\varepsilon = \frac{1}{a_\varepsilon} \cdot \xi_\varepsilon.$$

La suite $\{\xi_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ reste bornée dans $L^2(\Omega)$, ainsi que la suite des dérivées $\{\frac{d}{dx} \xi_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ (car $\operatorname{div} = \frac{d}{dx}$ lorsque $N = 1$!). Elle reste donc bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$ fort d'après le théorème de Rellich-Kondrakov. On peut alors passer à la limite sur (5) :

Notant

$$\xi_\varepsilon \longrightarrow \xi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

on obtient

$$(6) \quad Du = (\int_Y \frac{1}{a}) \cdot \xi.$$

Passant à la limite au sens des distributions sur

$$-\frac{d}{dx} \xi_\varepsilon = f$$

on obtient

$$(7) \quad -\frac{d\zeta}{dx} = f.$$

Combinant (6) et (7) il vient

$$(8) \quad -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\left(\int_Y \frac{1}{a} \right) \frac{du}{dx}} \right) = f.$$

Le coefficient homogénéisé en dimension un est donc $\frac{1}{\int_Y \frac{1}{a}}$ qui est différent de

$\int_Y a$ lorsque $\alpha \neq \beta$! Lorsque les deux constituants sont également répartis, on obtient comme conductivité homogénéisée la *moyenne harmonique* de α et β .

Ce résultat particulièrement simple est propre à la dimension 1. Un raisonnement physique élémentaire montre que, dès la dimension 2, la répartition géométrique (et non seulement la proportion) des différents constituants va jouer un rôle important : prendre une structure stratifiée avec des inclusions "isolantes" :

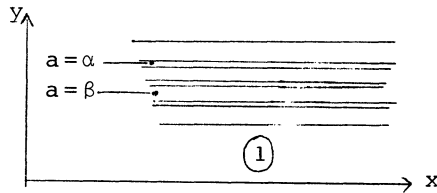


fig. 2

Supposant α petit devant β le matériau va être bon conducteur dans la direction x et mauvais conducteur dans la direction y .

Le matériau homogénéisé va hériter de ces propriétés ce que l'on peut résumer en disant que :

Un matériau homogénéisé obtenu en mélangeant des matériaux homogènes isotropes n'est plus nécessairement isotrope.

L'exemple de la structure en échiquier est intéressant : on considère $\Omega = Y =]0, 1[$ ² constitué de n^2 carrés élémentaires de côtés $\frac{1}{n}$:

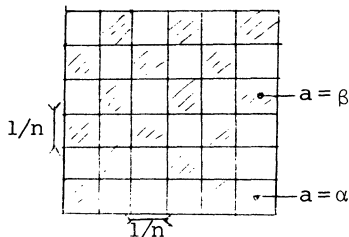


fig. 3

Le coefficient homogénéisé est égal à la *moyenne géométrique* de α et β :

$$a_{\text{hom}} = \sqrt{\alpha\beta}$$

A partir de la dimension 3 on ne connaît pas, pour l'échiquier, de formule explicite donnant a_{hom} en fonction de α et β (les formules générales que nous donnerons plus loin font intervenir la résolution de problèmes variationnels auxiliaires) !

2.2 - Ecoulement de fluides dans les milieux poreux

La modélisation mathématique que nous décrivons ci-dessous est volontairement simplifiée (nous considérons en particulier un problème scalaire au lieu du problème vectoriel type Stokes ou Navier-Stokes) mais contient les éléments significatifs relatifs à l'homogénéisation de tels problèmes.

On considère un domaine Ω avec de nombreux petits "trous" notés $\{T_{\varepsilon,i} ; i \in I(\varepsilon)\}$. Le matériau $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i \in I(\varepsilon)} T_{\varepsilon,i}$ est formé par le complémentaire des "trous".

Pour prendre en compte la densité de matière on va supposer que les trous $T_{\varepsilon,i}$ se déduisent tous par translation h , $h \in \varepsilon \mathbb{Z}^N$, d'un homothétique $r_\varepsilon T$ d'un trou $T \subset Y$ (avec $r_\varepsilon < 1$) :

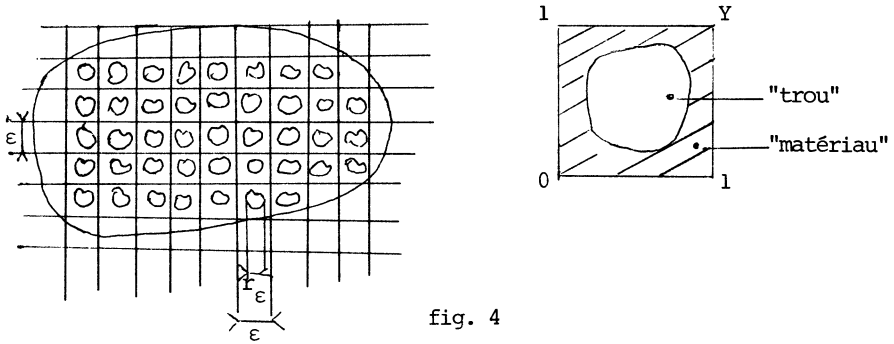


fig. 4

Supposant le fluide visqueux la condition aux limites considérée sera de type

$$\text{Dirichlet :} \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon = \partial T_\varepsilon \cup \partial\Omega$$

$$\text{où } T_\varepsilon = \bigcup_{i \in I(\varepsilon)} T_{\varepsilon,i} .$$

On est donc amené à étudier un problème aux limites sur un ouvert finement perforé Ω_ε (sa frontière est non connexe, fragmentée en de nombreuses composantes)

$$(9_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon = \partial T_\varepsilon \cup \partial\Omega \end{cases}$$

dont la formulation variationnelle est :

$$(10_\varepsilon) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |Du(x)|^2 dx - \int_\Omega f u dx : u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} .$$

L'étude du comportement limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de cette suite de problèmes dépend en fait de r_ε , c'est-à-dire de la densité de trous. Lorsque r_ε est de l'ordre de ε on obtient la loi de Darcy, lorsque r_ε est de l'ordre de $\varepsilon^{N/N-2}$ ($N > 2$) on obtient

la loi de Brinkman.

Nous reviendrons plus loin sur ces exemples. Mentionnons juste l'apparition dans la loi de Brinkman d'un "terme étrange" : $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H^1_0(\Omega)$ faible où u est solution de :

$$(11) \quad \begin{cases} -\Delta u + Cu = f & \text{sur } \Omega \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où C est une constante positive s'interprétant en termes de capacité harmonique du trou T dans $\mathbb{R}^N$.

Nous allons maintenant décrire les outils mathématiques permettant d'étudier les situations précédentes.

3. MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE ET COMPACTITÉ PAR COMPENSATION.

La méthode énergétique peut se résumer ainsi : on établit tout d'abord des estimations uniformes sur les $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$, puis l'on passe à la limite sur la suite des problèmes considérés en multipliant par des fonctions tests choisies de façon ad hoc. Elles doivent être choisies suffisamment nombreuses de façon à pouvoir identifier le problème limite, la difficulté principale résidant, comme nous l'avons signalé, à passer à la limite sur le produit de suites faiblement convergentes. La méthode de compacité par compensation permet dans de nombreuses situations de surmonter cette difficulté.

Etant données deux suites $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ et $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$, la méthode de compacité classique peut se formuler ainsi : supposons toutes les dérivées de la suite $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors la suite $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$ fort d'après le théorème de Rellich-Kondrakov. On a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)$$

$$v_\varepsilon \longrightarrow v \text{ fortement dans } L^2(\Omega)$$

et donc

$$u_\varepsilon v_\varepsilon \longrightarrow uv \text{ dans } D'(\Omega) \text{ (en fait } \sigma(L^1, L^\infty) \text{)!}.$$

Dans un raisonnement-type compacité par compensation, on va supposer que certaines dérivées de u_ε restent bornées et que certaines dérivées de v_ε restent bornées, l'information sur v_ε devant être en quelque sorte complémentaire de celle sur u_ε , de façon à compenser le manque d'information sur certaines dérivées de u_ε . Le résultat le plus connu est le théorème dit divergence-rotationnel (F. Murat [31] et L. Tartar [41]). Avant de l'énoncer introduisons quelques notations : Etant donné une distribution $u \in (D'(\Omega))^N$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{rot} u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} ; 1 \leq i, j \leq N \right) \in D'(\Omega)^{N^2}.$$

On note $\langle ., . \rangle$ et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme sur $\mathbb{C}^N$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \overline{y_i} \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

On introduit les deux espaces :

$$X(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^N, \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}$$

$$Y(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^N, \operatorname{rot} v \in L^2(\Omega)^{N^2}\}$$

munis respectivement des normes

$$\|u\|_{X(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

$$\|v\|_{Y(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|\operatorname{rot} v\|_{L^2(\Omega)^{N^2}}^2)^{1/2}.$$

Théorème 3.1 - Soient $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ et $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ deux suites vérifiant :

$u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)^N$ faible, la suite $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ restant bornée dans $X(\Omega)$.
 $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $L^2(\Omega)^N$ faible, la suite $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ restant bornée dans $Y(\Omega)$.

Alors :

$$\langle u_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle u, v \rangle \text{ dans } D'(\Omega).$$

■

Montrons comment la technique précédente s'applique à l'exemple 1. Énonçons tout d'abord le résultat de convergence, et ce dans un cadre plus général avec des lois de comportement éventuellement non linéaires :

Théorème 3.2 - Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère u_ε solution de

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)\right) = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $A : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ satisfait, avec $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0 < +\infty$:

- (i) $A(., z)$ est Y -périodique
- (ii) $\langle A(y, z_2) - A(y, z_1), z_2 - z_1 \rangle \geq \lambda_0 |z_2 - z_1|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$
- (iii) $|A(y, z_2) - A(y, z_1)| \leq \Lambda_0 |z_2 - z_1| \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$.

Alors $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ faible où u est solution de :

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} (A^{\text{hom}}(Du)) = f & \text{sur } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec pour tout $z \in \mathbb{R}^N$

$$(3.3) \quad A^{\text{hom}}(z) = \int_Y A(y, z + Dw_Z(y)) dy$$

w_Z étant défini comme solution du problème variationnel

$$(3.4) \quad \begin{cases} \operatorname{div} A(y, z + Dw_Z(y)) = 0 & \text{sur } Y \\ w_Z & Y\text{-périodique} . \end{cases}$$

Démonstration du théorème 3.2 - On obtient immédiatement à l'aide des hypothèses (ii) et (iii) que la suite $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \longrightarrow 0\}$ reste bornée dans $H^1(\Omega)$. Notons

$$(3.5) \quad \xi_\varepsilon = A\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, Du_\varepsilon\right) .$$

La suite (ξ_ε) reste, d'après (iii), bornée dans $L^2(\Omega)^N$. On peut donc extraire des sous-suites telles que :

$$(3.6) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \longrightarrow u & \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \\ \xi_\varepsilon \longrightarrow \xi & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} . \end{cases}$$

Passant à la limite au sens des distributions sur

$$-\operatorname{div} \xi_\varepsilon = f \quad \text{sur } \Omega$$

on obtient

$$(3.7) \quad -\operatorname{div} \xi = f \quad \text{sur } \Omega .$$

Le problème est de faire le lien entre ξ et u !

Introduisons les fonctions tests suivantes : étant donné $z \in \mathbb{R}^N$ fixé, on pose

$$(3.8) \quad v_\varepsilon(x) = \langle z, x \rangle + \varepsilon w_Z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où w_Z est solution de (3.4). D'après la monotonie de A , pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varphi \in D(\Omega)$ on a :

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} \varphi(x) < A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du_{\varepsilon}\right) - A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Dv_{\varepsilon}\right), Du_{\varepsilon} - Dv_{\varepsilon} > dx \geq 0.$$

On passe à la limite sur (3.9) grâce au théorème 3.1 (argument de compacité par compensation). En effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du_{\varepsilon}\right) &= -f \text{ reste borné dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Dv_{\varepsilon}\right) &= \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, z + Dw_z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \text{ par construction de } w_z \\ \operatorname{rot}(Du_{\varepsilon}) &= \operatorname{rot}(Dv_{\varepsilon}) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du_{\varepsilon}\right) &\longrightarrow \xi \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ A\left(\frac{x}{\varepsilon}, Dv_{\varepsilon}\right) &= A\left(\cdot, z + Dw_z(\cdot)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \int_Y A(Y, z + Dw_z(Y)) dY \text{ dans } L^2(\Omega)^N \text{ faible.} \\ Du_{\varepsilon} &\longrightarrow Du \quad \text{dans } L^2(\Omega)^N \text{ faible.} \\ Dv_{\varepsilon} &\longrightarrow z \quad \text{dans } L^2(\Omega)^N \text{ faible.} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_{\Omega} \varphi(x) < \xi(x) - A^{\operatorname{hom}}(z), Du(x) - z > dx \geq 0.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, en localisant on obtient

$$< \xi(x) - A^{\operatorname{hom}}(z), Du(x) - z > \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N.$$

De la maximale monotonie de A^{hom} (que l'on vérifie facilement sur la formule (3.3)) il résulte

$$\xi(x) = A^{\operatorname{hom}}(Du(x))$$

ce qui combiné avec (3.7) donne

$$-\operatorname{div}(A^{\operatorname{hom}}(Du)) = f \text{ sur } \Omega$$

qui est le problème homogénéisé.

4. CONVERGENCES VARIATIONNELLES : MÉTHODES de Γ -CONVERGENCE, ÉPI-CONVERGENCE.

Dans la méthode énergétique exposée précédemment on travaillait directement sur l'équation d'Euler du problème variationnel. Dans la méthode variationnelle on travaille sur la formulation variationnelle du problème sous forme d'un problème de minimisation

$$(4.1) \quad F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq F_{\varepsilon}(v) \quad \forall v \in X.$$

Rappelons quelques résultats classiques d'optimisation convexe permettant de faire le lien entre les deux approches.

Etant donné $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semicontinue inférieurement et propre ($\neq +\infty$) on désigne par $\partial\varphi : X \longrightarrow X^*$ son sous-différentiel :

$$f \in \partial\varphi(u_0) \iff \varphi(u) \geq \varphi(u_0) + \langle f, u - u_0 \rangle \quad \forall u \in X$$

On a alors

$$(4.2) \quad u_0 \text{ minimise } \varphi \text{ sur } X \iff \partial\varphi(u_0) \ni 0.$$

L'opérateur $\partial\varphi$ est maximal monotone de X dans X^* (lorsque X est un Banach réflexif). L'intérêt de considérer des fonctions φ à valeurs éventuellement $+\infty$ est de pouvoir inclure les contraintes éventuelles dans la fonction.

Supposons que l'on cherche à minimiser φ_0 , u étant assujéti à rester dans un sous-ensemble C de X :

$$(4.3) \quad \min \{ \varphi_0(u) : u \in C \}.$$

Introduisant

$$\delta_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in C \\ +\infty & \text{si } u \in X \setminus C \end{cases}$$

la fonction indicatrice de C , le problème (4.3) se formule de façon équivalente

$$\min \{ \varphi(u) : u \in X \} \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \varphi_0(u) + \delta_C(u).$$

L'exemple 2 se formule alors ainsi :

$$(4.4)_\varepsilon \quad \min \{ F_\varepsilon(u) : u \in H_O^1(\Omega) \}$$

avec

$$F_\varepsilon(u) = \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx + \delta_{C_\varepsilon}(u) \right) - \int_\Omega f u dx$$

$$C_\varepsilon = \{ u \in H_O^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \}.$$

Décrivons à présent la méthode d'épi-convergence (cf. Attouch [1], Attouch & Wets [7] ...) (encore appelée Γ -convergence). La première étape, comme dans la méthode énergétique, consiste à établir des estimations uniformes sur la suite $\{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$. Il en résulte que la suite $\{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ est relativement compacte pour une certaine topologie τ . Soit

$$(4.5) \quad u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u.$$

Pour passer à la limite sur (4.1), il faut passer à la limite sur le membre de gauche et le membre de droite. En vue de caractériser u comme solution d'un problème limite

$$(4.6) \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in X$$

on aura besoin de la notion de convergence suivante : en tout point $v \in X$

$$(4.7) \quad \begin{cases} \forall v_{\varepsilon} \xrightarrow{\tau} v & F(v) \leq \liminf_{\varepsilon} F_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \\ \exists v_{0\varepsilon} \xrightarrow{\tau} v & \limsup_{\varepsilon} F_{\varepsilon}(v_{0\varepsilon}) \leq F(v) . \end{cases}$$

On dira alors que F est la limite épigraphique ou plus brièvement l'épi-limite (relativement à la topologie τ) de la suite $\{F_{\varepsilon} : \varepsilon \rightarrow 0\}$, et l'on notera :

$$(4.8) \quad F = \tau - \lim_e F_{\varepsilon} .$$

(Dans la terminologie de la Γ -convergence, cf. De Giorgi [21], on dira que F est la $\Gamma(\tau)$ -limite de la suite (F_{ε}) et l'on écrira $F = \Gamma(\tau) \lim F_{\varepsilon}$). La terminologie épi-limite repose sur l'interprétation géométrique suivante :

$$F = \lim_e F_{\varepsilon} \iff \text{épi } F = \text{Lim} (\text{épi } F_{\varepsilon})$$

où

$$\text{épi } F = \{(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \lambda \geq F(u)\}$$

est l'épigraphe de F et

$$C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{\varepsilon}$$

signifie que C est la limite de la suite d'ensemble (C_{ε}) au sens de Kuratowski-Painlevé ($C = \liminf C_{\varepsilon} = \limsup C_{\varepsilon}$ où $\liminf C_{\varepsilon}$ est l'ensemble des limites de suites (x_{ε}) avec $x_{\varepsilon} \in C_{\varepsilon}$ pour tout ε , et $\limsup C_{\varepsilon}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de telles suites). Le résultat suivant résume les propriétés variationnelles de l'épi-convergence :

Théorème 4.1 - Soit $\{F_{\varepsilon} : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ une suite de fonctions .

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, soit u_{ε} minimisant F_{ε} sur X :

$$F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq F_{\varepsilon}(v) \quad \forall v \in X .$$

Supposons que la suite $\{u_{\varepsilon} ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ soit τ -relativement compacte pour une topologie τ sur X . Alors l'implication suivante a lieu a) $\implies$ b)

$$a) \quad F = \tau - \lim_e F_{\varepsilon}$$

$\Downarrow$

$$b) \quad \inf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\varepsilon} \xrightarrow{\tau} \min F \text{ et toute } \tau\text{-valeur d'adhérence de la suite}$$

$\{u_{\varepsilon} ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ minimise F sur X .

En particulier la suite $\{u_{\varepsilon} ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ converge tout entière vers u , solution de

$$F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in X$$

lorsque la solution de ce dernier problème est unique.

(ii) Pour tout $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continue pour la topologie τ ,

$$\tau - \lim_e (F_\varepsilon + G) = \tau - \lim_e F_\varepsilon + G$$

(i.e. stabilité par perturbation continue). ■

On peut montrer qu'en un certain sens l'épi-convergence est la notion de convergence la moins forte possédant les propriétés variationnelles (i) et (ii).

L'exemple élémentaire suivant $X = \mathbb{R}$, τ = topologie usuelle est déjà, à cet égard, significatif :

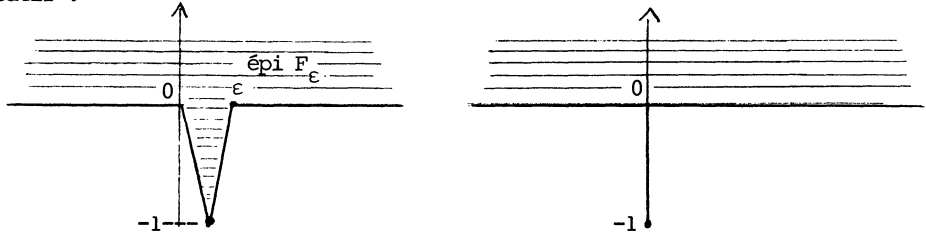


fig. 5

Pour tout $\varepsilon > 0$, F_ε atteint son minimum en $u_\varepsilon = \varepsilon/2$ et $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = -1$.

On a $\text{Lim}(\text{épi } F_\varepsilon) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{(0, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq -1\}$

$$= \text{épi } F$$

avec

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et F atteint bien son minimum en $u = 0$, limite de u_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus

$$F(u) = \lim_{\varepsilon} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Montrons à présent comment appliquer ces notions sur l'exemple 2. (On pourrait aussi bien le faire sur l'exemple 1, cf. [1]). D'après (4.4) la suite (F_ε) est équi-coercive sur $H_0^1(\Omega)$: on peut donc prendre pour τ la topologie forte de $L^2(\Omega)$. La perturbation $\int f u$ étant continue pour la topologie τ d'après le théorème 4.1, ii), on peut, sans diminuer la généralité du résultat, prendre $f = 0$. On note donc $F_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 + \delta_{C_\varepsilon}(u)$.

Théorème 4.2 - Prenons $N = 3$. La taille des trous étant de l'ordre de r_ε , le comportement limite des problèmes (4.4) $_\varepsilon$ dépend du rapport "critique" $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$:

a) si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} = 0$ alors

$$\lim_e F_\varepsilon = F \quad \text{avec} \quad F(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

b) si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} = +\infty$ alors

$\lim_e F_\varepsilon = \delta_{\{0\}}$ la fonction indicatrice de zéro.

c) si $r_\varepsilon \approx \varepsilon^3$ alors

$\lim_e F_\varepsilon = F$ avec

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{C}{2} \int_\Omega u^2(x) dx$$

C étant égal à la capacité du trou T dans $\mathbb{R}^3$:

$$C = \inf \{ \int_\Omega |Dw|^2 dx : w \in H^1(\mathbb{R}^3), \tilde{w} \geq 1 \text{ quasi-partout sur } T \}.$$

Corollaire 4.3 - Suivant le comportement de $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$ la suite u_ε converge vers u solution de :

a) si $r_\varepsilon \ll \varepsilon^3$
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

b) si $r \gg \varepsilon^3$
$$u \equiv 0 \quad \text{sur } \Omega$$

c) si $r \approx \varepsilon^3$
$$\begin{cases} -\Delta u + Cu = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Remarque 4.4 - a) Lorsque l'on raisonne en terme d'épi-convergence de fonctionnelles le terme "étrange" Cu apparu dans l'équation limite trouve une interprétation naturelle : on peut écrire

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx + \int_\Omega a_\varepsilon(x) u^2(x) dx$$

où
$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in T_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonctionnelle limite

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{C}{2} \int_\Omega u^2(x) dx$$

apparaît alors comme étant du même type, la contrainte $u = 0$ ayant pris une forme relaxée, pénalisée.

b) Lorsque $r_\varepsilon \approx \varepsilon$ on a donc $u_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La recherche de la partie principale de u_ε conduit à la loi de Darcy.

Esquissons la démonstration par épi-convergence du théorème 4.2. L'idée générale réside dans la remarque suivante : supposant que $F = \tau - \lim_e F_\varepsilon$ existe, alors F est donnée par la formule :

$$(4.9) \quad \forall u \in X \quad F(u) = \min\{\lim F_\varepsilon(u_\varepsilon) : u_\varepsilon \xrightarrow{T} u\},$$

ce qui conduit à chercher parmi toutes les suites $u_\varepsilon \xrightarrow{T} u$ celle qui réalise le minimum de $\lim F_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Tirant parti du caractère local du problème étudié, on est donc amené à introduire pour chaque $\varepsilon > 0$, p_ε le potentiel capacitaire de $r_\varepsilon T$ dans la boule εB de diamètre ε contenue dans εY . On étend cette fonction par ε -périodicité à $\mathbb{R}^3$ tout entier et l'on pose

$$w_\varepsilon = 1 - p_\varepsilon.$$

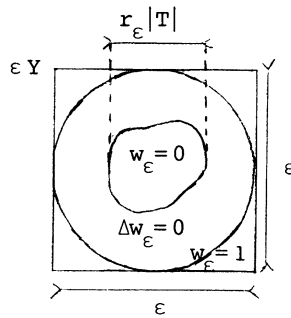


fig. 6

Un calcul élémentaire donne, pour tout ouvert régulier $\omega \subset \Omega$

$$(4.10) \quad \int_{\omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \approx \text{Cap } T. \text{ mes } \omega. \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}.$$

Lorsque $\limsup \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} < +\infty$, la suite $\{w_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ reste donc bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Introduisant χ_ε la fonction égale à 1 sur $\varepsilon Y \setminus \varepsilon B$, à zéro sur εB et εY -périodique on a :

$$(4.11) \quad (1-w_\varepsilon)\chi_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Omega \text{ tout entier.}$$

Notant que la suite χ_ε converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers une constante $\theta > 0$ par passage à la limite sur (4.11) on obtient que :

$$(4.12) \quad w_\varepsilon \longrightarrow 1 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Etant donné un $u \in H^1_0(\Omega)$, (que l'on suppose régulier tout d'abord) on pose

$$u_{0\varepsilon} = u \cdot w_\varepsilon.$$

On a bien

$$u_{0\varepsilon} \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et

$$u_{0\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } T_\varepsilon.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon}(u_{0\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_{0\varepsilon}|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ w_{\varepsilon}^2 |\text{grad } u|^2 + 2w_{\varepsilon} Dw_{\varepsilon} \cdot u \cdot Du + u^2 |Dw_{\varepsilon}|^2 \} dx . \end{aligned}$$

Supposant $r_{\varepsilon} \approx \varepsilon^3$, il résulte de (4.10)

$$\lim F_{\varepsilon}(u_{0\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \text{Cap } T \cdot \int_{\Omega} u^2 dx .$$

On complète la démonstration du point (i) de l'épi-convergence par un argument de densité et diagonalisation.

La vérification du point (ii) de l'épi-convergence repose sur la comparaison entre $F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$, $u_{\varepsilon} \xrightarrow{\tau} u$ quelconque et $F_{\varepsilon}(u_{0\varepsilon})$, $u_{0\varepsilon} \xrightarrow{\tau} u$ construite précédemment.

D'après l'inégalité de convexité

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_{\varepsilon}|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_{0\varepsilon}|^2 dx + \int_{\Omega} \langle Du_{0\varepsilon}, D(u_{\varepsilon} - u_{0\varepsilon}) \rangle dx$$

on se ramène à montrer que

$$\lim \int_{\Omega} \langle Du_{0\varepsilon}, D(u_{\varepsilon} - u_{0\varepsilon}) \rangle dx = 0 .$$

De nouveau le problème se pose en terme de passage à la limite sur le produit de deux suites faiblement convergentes. Après intégration par parties on se ramène à étudier la limite de la suite

$$I_{\varepsilon} = \langle -\Delta w_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} ,$$

que l'on résoud grâce à un argument de D. Cioranescu & F. Murat [15] : on remarque que

$$-\Delta w_{\varepsilon} = \mu_{\varepsilon} - \gamma_{\varepsilon}$$

où μ_{ε} mesure positive est supportée par les sphères $\partial B_{\varepsilon}^1$ et

$$\mu_{\varepsilon} \longrightarrow \text{Cap } T \, dx \text{ dans } H^{-1} \text{ fort !}$$

et γ_{ε} mesure positive est portée par ∂T_{ε} (où $u_{\varepsilon} = 0$) et donc n'intervient pas dans le passage à la limite.

5. COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES.

Disons tout d'abord quelques mots sur la méthode des développements asymptotiques avec échelles multiples. On cherche u_{ε} sous la forme

$$(5.1) \quad u_{\varepsilon}(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) + \dots$$

où les fonctions $u_i(x, y)$ sont Y -périodiques par rapport à y . On remplace u_{ε} par

son développement dans les équations et l'on identifie suivant les puissances de ε . Cette méthode familière aux mécaniciens (cf. Roseau ...) a été développée systématiquement grâce aux travaux de Bensoussan & J.L. Lions & Papanicolaou [9] et de Sanchez-Palencia [38]. Elle est particulièrement adaptée aux problèmes linéaires et fournit assez rapidement la forme du problème homogénéisé, ainsi que les termes suivants du développement $u_1, u_2, \dots$, information fort utile numériquement. En contrepartie, la justification du développement (5.1) est fort délicate et les résultats fournis restent souvent formels.

A l'origine de la méthode énergétique on trouve les travaux de Spagnolo [40] sur la G-convergence, portant sur les opérateurs linéaires elliptiques du second ordre et les opérateurs paraboliques et hyperboliques associés. F. Murat [34], L. Tartar [42] avec l'introduction de la H-convergence et de la compacité par compensation ont élargi le champ d'application de ces méthodes à nombreuses autres branches de la physique mathématique (élasticité linéaire et non linéaire, hyperboliques non linéaires, contrôle ...)

Lorsque les problèmes considérés ont une formulation variationnelle la méthode de Γ -convergence ou épi-convergence, notions introduites par De Giorgi [20], Mosco [30], Joly [23], Attouch & Wets [7] ... s'avère d'un usage très souple. Elle s'impose tout naturellement lorsque, par exemple, l'équation d'Euler du problème variationnel est difficile (voire impossible) à décrire, par exemple dans l'étude des équations de la plasticité où l'espace énergétique est du type $BV(\Omega)$ (Du est alors une mesure !), cf. G. Bouchitté [11] ... ou dans l'étude d'inéquations variationnelles, par exemple la torsion élastoplastique, cf. Carbone [13], Attouch [2]. Ces méthodes fournissent en outre la convergence des énergies et se marient fort bien avec les techniques d'approximation et d'optimisation, comme la dualité, cf. Suquet [41], Attouch & Aze & Wets [3].

Lorsque les problèmes variationnels sont convexes le lien entre les deux approches est fourni par le théorème suivant (H. Attouch [1], théorème 3.66) :

Théorème 5.1 - Soit X un Banach réflexif. Pour toute suite $\{F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions convexes, sci., propres les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Mosco-épi-converge vers F
 - (ii) $\partial F_n \rightarrow \partial F$ au sens des graphes (G-convergence)
- + condition de normalisation. ■

La Mosco-épi-convergence est l'épi-convergence à la fois pour les topologies fortes (s.) et faibles (w.) ce qui se traduit par : pour tout $u \in X$

- (i) il existe $u_{on} \xrightarrow{s} u$ telle que $F_n(u_{on}) \rightarrow F(u)$

(ii) pour toute suite $u_n \xrightarrow{w} u$ on a $\liminf F_n(u_n) \geq F(u)$

∂F désigne le sous-différentiel de F , $\partial F : X \rightarrow X^*$ (cf. paragraphe 4).

Le théorème 5.1 donne forme, dans le cas des fonctions convexes, au théorème rêvé par nombre d'étudiants : si les fonctions convergent alors les dérivées convergent !

6. HOMOGENÉISATION AVEC INFORMATION INCOMPLÈTE.

Nous nous sommes jusqu'à présent intéressés au cas des structures périodiques. Dans de nombreux matériaux d'origine naturelle (étude des sols), industrielle (béton...) ou ayant subi des endommagements (matériaux fissurés...) la structure n'est pas périodique. Les différents constituants sont distribués suivant une structure dont la description exacte est hors de portée.

Nous allons examiner les informations que l'on peut néanmoins obtenir quant au comportement macroscopique de tels matériaux dans les cas suivants :

6.1 Mélange quelconque de matériaux donnés

6.2 Mélange avec proportion donnée

6.3 Mélange avec information statistique sur la structure

classement qui correspond à une information de plus en plus précise sur la structure. L'outil clé dans ce type de résultat est l'obtention d'un théorème de compacité pour une classe de fonctionnelles ou d'opérateurs (correspondant à l'information donnée) et ce au sens de la G -convergence ou Γ -convergence introduits précédemment. Pour tenir compte du caractère local des problèmes considérés nous serons amenés à les localiser notant $\mathcal{O}_b$ l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$. Le résultat suivant qui décrit une classe contenant tous les matériaux que l'on peut obtenir en mélangeant deux matériaux isotropes de conductivité α et β a été démontré dans le cadre de la Γ -convergence par Carbone & Sbordone [14], Sbordone [39], Attouch [1], Buttazzo & Dal Maso [12] et de la G ou H convergence par Spagnolo [40], Tartar [42], Murat [34].

Théorème 6.1 - Etant donnés $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ et $1 < p < +\infty$, considérons la classe

de fonctionnelles $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^j = \{F : W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{O}_b \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ définies par}$

$F(u, A) = \int_A j(x, Du(x)) dx$ où $j(x, z) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ est mesurable en x , convexe continue en z et vérifie $\alpha |z|^p \leq j(x, z) \leq \beta(1 + |z|^p)\}$.

Alors $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^j$ est séquentiellement compacte au sens de la Γ -convergence. Plus précisément, de toute suite $\{F_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de fonctionnelles de la classe $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^j$ on peut extraire une sous-suite $\{F_{n_k} ; k \in \mathbb{N}\}$ et trouver $F \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta}^j$ telles que :

$$F(., A) = \Gamma(\tau) \lim_{n_k} F_{n_k}(., A)$$

ait lieu pour tout $A \in \mathcal{G}_b$ de frontière négligeable pour la mesure de Lebesgue, la topologie τ étant prise égale à la topologie forte de $L^p(A)$.

Le résultat précédent en contrepartie de sa grande généralité ne nous renseigne que sur la forme du problème limite : en mélangeant deux matériaux élastiques on obtiendra encore un matériau élastique... Il est très intéressant de caractériser des sous-classes de $\mathcal{F}'_{\alpha, \beta}$ qui soient fermées, ou bien encore de caractériser la fermeture d'une sous-classe. Le résultat suivant dû à Murat & Tartar [35] caractérise tous les matériaux que l'on peut obtenir en mélangeant deux matériaux isotropes dans une proportion donnée.

Théorème 6.2 - Soit $a_\varepsilon(x) = \alpha \chi_\varepsilon(x) + \beta(1 - \chi_\varepsilon(x))$ une suite de fonctions données où $0 < \alpha < \beta < +\infty$ et χ désigne la fonction caractéristique du domaine occupé par le matériau de conductivité α . On suppose que $\chi_\varepsilon \rightharpoonup \theta$ (proportion du matériau α) dans $L^\infty(\Omega)$ faible *. Considérons les équations suivantes :

$$(6.1)_\varepsilon \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \operatorname{Du}_\varepsilon(x)) = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors on peut extraire une sous-suite notée a_η telle que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ la suite des solutions u_η des problèmes $(6.1)_\eta$ converge faiblement dans $H^1_0(\Omega)$ vers la solution u du problème

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a_*(x) \operatorname{Du}(x)) = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $a_*(x)$ est une matrice symétrique définie positive ayant ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ vérifiant :

Notant $\mu_-(\theta) = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta}\right)^{-1}$ et $\mu_+(\theta) = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$ les moyennes harmoniques et arithmétiques (suivant la proportion θ !) de α et β , on a :

$$(6.3) \quad \mu_-(\theta(x)) \leq \lambda_j(x) \leq \mu_+(\theta(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \alpha} \leq \frac{1}{\mu_-(\theta) - \alpha} + \frac{N-1}{\mu_+(\theta) - \alpha} \\ \sum_j \frac{1}{\beta - \lambda_j} \leq \frac{1}{\beta - \mu_-(\theta)} + \frac{N-1}{\beta - \mu_+(\theta)} \end{cases}$$

Inversement si une matrice a_* a ses valeurs propres vérifiant (6.3) et (6.4) on peut trouver une suite correspondante de χ_ε .

Ce type de résultats joue un rôle clé en optimum design où sans hypothèses très restrictives sur la géométrie des domaines un phénomène d'homogénéisation peut survenir lorsque l'on considère une suite minimisante de domaines relativement au critère considéré. La résolution du problème se fait par l'introduction d'une formulation relaxée, cf. Murat & Tartar [35], Lurie & Cherkhev [27], Kohn & Strang [24]...

Dans l'étude des matériaux poreux (exemple 2) citons le résultat de compacité, ou relaxation suivant (H. Attouch & Picard [6], [1]) :

Théorème 6.3 - Soit $\{T_n ; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de trous dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Notons

$$(6.5) \quad F_n(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \delta_{C_n}(u)$$

$$\text{où } C_n = \{v \in H^1_0(\Omega) ; v = 0 \text{ sur } T_n\}.$$

On peut extraire une sous-suite n_k telle que :

$$\tau - \lim_e F_{n_k} = F \text{ existe}$$

avec

$$(6.6) \quad F(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \int_{\Omega} a(x) \tilde{u}(x)^2 d\mu(x)$$

μ désignant une mesure positive d'énergie finie ($\mu \in H^{-1}(\Omega)^+$), a une fonction positive μ -mesurable, $\tilde{u}$ désignant un représentant quasi-continu de u . ($\tau = s - L^2(\Omega)$). Inversement toute fonctionnelle du type (6.6) peut être obtenue comme limite de fonctionnelles (6.5) avec un choix approprié des (T_n) . ■

Terminons par quelques mots concernant l'homogénéisation stochastique, un domaine de recherche au confluent des E.D.P. et des probabilités et statistiques.

Une des approches les plus prometteuses et fonctionnant même pour des problèmes non linéaires consiste à regarder un problème d'optimisation stochastique

$$\min \{F_{\varepsilon}(u, \omega) ; u \in X\}$$

où $(\Sigma, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, comme la donnée d'une variable aléatoire

$$\omega \longrightarrow F_{\varepsilon}(\cdot, \omega)$$

à valeurs dans l'espace des fonctionnelles définies sur X muni de la topologie de la Γ ou épi-convergence. Cet espace est en général un espace métrique compact et l'application $F \longmapsto \min F$ y est continue. Sous une hypothèse d'indépendance ad hoc, Dal Maso & Modica [19] obtiennent la convergence presque sûre d'un processus d'homogénéisation stochastique. De nombreux travaux d'optimisation stochastique s'appuient également sur la même approche, cf. Salinetti & Wets [37], Attouch & Wets (définition d'un problème moyen à l'aide d'une loi des grands nombres épigraphiques). ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.ATTOUCH - *Variational convergence for functions and operators*. Applicable Mathematics Series, Pitman (1984).
- [2] H.ATTOUCH - *Introduction à l'homogénéisation d'inéquations variationnelles*, Rend.Sem.Mat.Univers.Politecn. Torino (Italy) 40, 2, (1981).
- [3] H.ATTOUCH, D.AZE et R.WETS - *Convergence of convex-concave saddle functions. Continuity properties of the Legendre-Fenchel transform with applications to convex programming and mechanics*, to appear Annales de l'Institut H. Poincaré.
- [4] H.ATTOUCH et G.BUTTAZZO - *Homogenization of reinforced periodic one-codimensional structures*, publication AVAMAC, Université de Perpignan 86-06 (1986). A paraître Ann.Scuola Normale Pisa.
- [5] H. ATTOUCH et F.MURAT - *Homogenization of fissured elastic materials*, Publication AVAMAC, Université de Perpignan 85-03, (1985), Vol.1.
- [6] H.ATTOUCH et C.PICARD - *Variational inequalities with varying obstacles*, Journal of functional analysis, Vol.50, n°3 (1983).
- [7] H.ATTOUCH et R.WETS - *Approximation and convergence in nonlinear optimization; Nonlinear programming* 4.Ed by Mangasarian, Meyer, Robinson. Academic Press (1981), 367-394.
- [8] N.S.BAHVALOV et G.PANASENKO - *Averaged processes in periodic media*, Moscow, Nauka, (1984) (in russian).
- [9] A.BENSOUSSAN, J.L.LIONS et G.PAPANICOLAOU - *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland (1978).
- [10] L.BOCCARDO et F.MURAT - *Homogénéisation de problèmes quasi-linéaires*, (Bresanone, 7-9 sett.1981). Pitagora Editrice, Bologna, (1982), pp.13-51.
- [11] G.BOUCHITTE - *Convergence et Relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. Application à l'homogénéisation en plasticité*, Ch.5 thèse d'état, Université de Perpignan (1987). A paraître Ann. Fac. Sc. Toulouse.
- [12] B.BUTTAZZO et G.DAL MASO - *Γ -limits of integral functionals*, J. Analyse Math., 37, (1980), 145-185.
- [13] L.CARBONE - *Sur un problème d'homogénéisation avec des contraintes sur le gradient*, J. Math.Pures.Appl.58, 275-297 (1979).
- [14] L.CARBONE et C.SBORDONE - *Some properties of Γ -limits of integral functionals*, Ann. Mat.Pura Appl (4) 122, 1-60 (1979).

- [15] D.CIORANESCU et F.MURAT - *Un terme étrange venu d'ailleurs, I & 2. Nonlinear partial differential and their applications*, Collège de France Seminar, Vol II & III, ed. H.Brezis & J.L.Lions. Research Notes in Math. N^{OS} 60 & 70, Pitman, 98-138, 154-178 (1982).
- [16] D.CIORANESCU et J.SAINT JEAN PAULIN - *Homogenization in open sets with holes*, J.Math.Pures Appl.71, 590-607 (1979).
- [17] D.CIORANESCU et J.SAINT JEAN PAULIN - *Reinforced and alveolar structures*, publication 85042 du Laboratoire d'Analyse Numérique Paris VI, (1985).
- [18] G.DAL MASO et L.MODICA - *A general theory of variational functionals. "Topics in Functional Analysis 1980-81"*, Scuola Normale Superiore, Pisa (1982), 149-221.
- [19] G.DAL MASO et L.MODICA - *Stochastic homogenization and ergodic theory*, proceedings Erice 1984, ed.R.Conti, E.De Giorgi, F.Gianessi, Ch.15. Lectures Notes Springer.
- [20] E.DE GIORGI - *Convergence problems for functionals and operators*, proceedings Rome 1978, ed by E.De Giorgi, E.Magenès, U.Mosco, Pitagora, Bologna (1979), 131-188.
- [21] E. DE GIORGI - *G-operators and Γ -convergence*, proceedings International Congress of Mathematicians, Warszawa 1983.
- [22] G.DUVAUT - *Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement*, Lectures Notes in Mathematics, n°594, Springer-Verlag, (1977), 131-145.
- [23] J.L.JOLY - *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue*, J. Math.Pures Appl., 52, 421-441 (1973).
- [24] R.KOHN et G.STRANG - *Structural design and optimization, homogenization and relaxation of variational problems*, in *Macroscopic Properties of Disordered Media*, Burridge, Childress, Papanicolaou ed., Lectures Notes in Physics 154, Springer (1982), 131-147.
- [25] C.LICHT - *Frottement, viscoplasticité et homogénéisation* Thèse Université Montpellier (1987).
- [26] J.L.LIONS - *Some methods in Mathematical Analysis and their Control*, Science Press, Beijing (China) - Gordon Breach New York (1984)
- [27] K.A.LURIE et A.V.CHERKAEV - *Optimal structural design and relaxed controls*, Opt.Control.Appl.Math.4 (1983) 387-392.

- [28] P.MARCELLINI - *Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems*, Ann.Mat.Pura Appl. 117 (1978), 139-152.
- [29] A.V.MARCHENKO et E.Ya.HRUSLOV - *Boundary value problems in domains with close-grained boundaries* (Russian), Naukova Dumka, Kiev (1974).
- [30] U.MOSCO - *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances in Math., 3, (1979), 510-585.
- [31] F.MURAT - *Compacité par compensation*, Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa, Cl.Sci (4) 5 (1978) 481-507.
- [32] F.MURAT - *Compacité par compensation II*, Proc.Int.Meeting on "Recent Methods in nonlinear analysis", Rome 1978, ed.E.De Giorgi, E.Magenes, U.Mosco, Pitagora ed.Bologna, 245-256 (1979).
- [33] F.MURAT - *Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, Ann.Sc.Norm. Sup.Pisa.Cl.Sci. (4) 8, 69-102 (1981).
- [34] F.MURAT - *H-convergence. Rapport du séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger* (1978).
- [35] F.MURAT et L.TARTAR - *Optimality conditions and homogenization in Nonlinear Variational Problems*, ed. by A.Marino et al., Research Notes in Maths, 127, Pitman, London (1985), pp.1-8.
- [36] G.C.PAPANICOLAOU et S.R.S.VARADHAN - *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*, Proceed.of Colloq.on Random fields rigorous results in statistical mechanics and quantum fields, ed by J.Fritz, J.L.Lebowitz, D.Szasz. Colloque Mathematics Soviet. Janos Bolyai, 10, North Holland, Amsterdam (1979), 835-873.
- [37] G.SALINETTI et R.WETS - *On the convergence of closed - valued measurable multifunctions*, Trans.Amer.Maths.Soc., 266, 275-289 (1981).
- [38] E.SANCHEZ-PALENCIA - *Nonhomogenous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Springer, 127 (1980).
- [39] C.SBORDONE - *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa.Cl.Sci.(4), 2, (1975), 617-638.
- [40] S.SPAGNOLO - *Sulla convergenza delle soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa.Cl.Sci.Fis.Mat. (3), 22, (1968), 575-597.
- [41] P.SUQUET - *Plasticité et homogénéisation*, Thèse, Univ. Paris XI (1982).

- [42] L.TARTAR - *Cours Peccot*, Collège de France, Paris (1977).
- [43] L.TARTAR - *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. *Nonlinear analysis and mechanics*, Heriot-Watt symposium vol. IV. *Research Notes in Mathematics* 39. Pitman (1979) 136-212.
- [44] L.TARTAR - *Problèmes de contrôle de coefficients dans des équations aux dérivées partielles*, in *control theory, numerical methods and computer systems modelling*, *Lecture notes in economical and mathematical systems* 107, Springer (1974), 420-426.
- [45] L.TARTAR - *Estimations fines de coefficients homogénéisés*, Ennio De Giorgi colloquium ed by P.Krée, *Research Notes in Mathematics* 125, Pitman, London (1985).
- [46] V.V.YURINSKIJ - *Averaging an elliptic value problem with random coefficients*, *Siberian Math.Journal*, 21 (1980) 470-482.
- [47] R.WETS - *Convergence of convex functions, variational inequalities and convex optimization problems*, in *variational inequalities and complementary problems*, eds.P.Cottle, F.Gianessi, J.L.Lions, Wiley, Chichester (UK) (1980), 375-403.

Nous nous sommes efforcés de faire une bibliographie donnant un panorama le plus étendu possible des différents travaux ayant trait à la théorie mathématique de l'homogénéisation. Nous n'avons pu malheureusement, faute de place, citer de nombreux travaux, forts intéressants, ayant trait à ses applications, notamment en mécanique.

Monsieur H. ATTOUCH
Professeur
A.V.A.M.A.C.
Université

66025 - PERPIGNAN Cedex