

Astérisque

PIERRE CARTIER

**Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente
et intégrales itérées**

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 687, p. 31-52

http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__31_0

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

JACOBIENNES GÉNÉRALISÉES,
MONODROMIE UNIPOTENTE ET INTÉGRALES ITÉRÉES

par Pierre CARTIER

Dédié à la mémoire de
Kuo-Tsai CHEN

1. INTRODUCTION À LA MONODROMIE

1.1. La monodromie est apparue dans l'étude faite par Riemann (après Gauss et Kummer) de l'équation différentielle hypergéométrique. Rappelons que la série hypergéométrique

$$(1) \quad F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n \geq 1} (a)_n (b)_n z^n / (c)_n n !$$

(avec la convention $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$) admet le rayon de convergence 1 en la variable complexe z . Elle est définie si c n'est pas un entier négatif et elle satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \quad z(1-z) D^2 F + (c - (a+b+1)z) DF - abF = 0$$

(on pose $D = d/dz$). Coupons le plan $\mathbb{C}$ de la variable complexe z en enlevant les intervalles réels $I_0 =]-\infty, 0]$ et $I_1 = [1, +\infty[$; l'ensemble restant Ω est simplement connexe. On étend la fonction $F(a, b; c; z)$, au-delà du cercle de convergence, par la représentation intégrale (due à Euler)

$$(3) \quad F(a, b; c; z) = \Gamma(c) \Gamma(b)^{-1} \Gamma(c-b)^{-1} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

qui garde un sens pour z dans Ω . Avec cette définition de F , on obtient un système fondamental de solutions dans Ω de l'équation différentielle hypergéométrique sous la forme

$$(4) \quad u_1(z) = F(a, b; c; z) \quad u_2(z) = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z),$$

du moins si aucun des nombres $a, b, c-a, c-b, a-b, c-a-b$ n'est un entier.

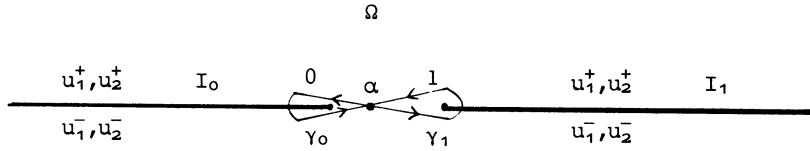


Figure 1

1.2. Lorsque t est réel, les limites $u_k(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_k(t \pm i\varepsilon)$ (pour $k = 1, 2$ et $\varepsilon > 0$) existent. Convenons d'écrire $u(z)$ pour la matrice $\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$. Comme l'intervalle $]0, 1[$ est contenu dans Ω où $u(z)$ est holomorphe, on a $u(t + i0) = u(t - i0)$ pour t dans $]0, 1[$. Mais, lorsque t appartient à l'un des intervalles I_0 et I_1 , on a des relations

$$(5) \quad u(t + i0) = M_0 u(t - i0) \quad \text{pour } t \in I_0$$

$$(6) \quad u(t - i0) = M_1 u(t + i0) \quad \text{pour } t \in I_1$$

où M_0 et M_1 sont des matrices 2×2 , à coefficients complexes (constants). Ces relations sont essentiellement dues à Kummer (1836) et se déduisent de la relation

$$(7) \quad F(a, b, c; z) = A_1 F(a, b; a + b - c + 1; 1 - z) + A_2 (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c - a - b + 1; 1 - z)$$

(où A_1 et A_2 sont des constantes) et d'une relation analogue avec $1 - z$ remplacé par $1/z$; ces relations sont valables pour z non réel et elles exploitent les propriétés d'invariance de l'équation hypergéométrique dans le changement de z en $1 - z$ ou $1/z$. Pour Kummer, la monodromie de la fonction hypergéométrique s'exprime par les relations (5) et (6), et donc par les matrices M_0 et M_1 .

1.3. Le point de vue "moderne" est dû à Riemann, qui en donne la formulation générale en 1851 et l'application à la fonction hypergéométrique en 1857. Posons $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et notons $\tilde{X}$ un revêtement universel de X , et Γ le groupe fondamental, qui opère sur $\tilde{X}$ de sorte qu'on ait $X = \tilde{X}/\Gamma$. Comme Ω est simplement connexe, on peut - et l'on doit - choisir une section $s : \Omega \rightarrow \tilde{X}$ de la projection canonique $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Ceci permet d'identifier canoniquement Γ à $\pi_1(X, \alpha)$ pour tout point base α dans Ω . Alors Γ est le groupe libre à deux générateurs γ_0 et γ_1 correspondant aux lacets de la figure 1. Comme $\tilde{X}$ est localement homéomorphe à X , c'est une variété analytique complexe de dimension 1; il existe alors deux fonctions holomorphes u_k sur $\tilde{X}$, dont les branches principales $u_k \circ s$ sur Ω coïncident avec u_k (pour k égal à 1 ou 2). Posons encore $U(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} u_1(\tilde{z}) \\ u_2(\tilde{z}) \end{pmatrix}$. Il existe alors une représentation

linéaire $M : \Gamma \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait

$$(8) \quad U(\gamma \tilde{z}) = M(\gamma) U(\tilde{z}) \quad (\tilde{z} \in \tilde{X}, \gamma \in \Gamma).$$

Comme Γ est un groupe libre, la représentation M est définie par la donnée des matrices $M(\gamma_0)$ et $M(\gamma_1)$ qui ne sont autres que M_0 et M_1 . Pour Riemann, la relation (8) exprime la monodromie, d'où le nom de représentation de monodromie donné à M .

Il est facile de jeter un pont entre les points de vue de Kummer et de Riemann. Les diverses "branches" $u_{k,\gamma}$ des fonctions u_k sont définies par la formule

$$(9) \quad M(\gamma) \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,\gamma}(z) \\ u_{2,\gamma}(z) \end{pmatrix} = u_\gamma(z)$$

pour z dans Ω et γ dans Γ . Les conditions de raccordement se déduisent des relations (5) et (6) :

$$(10) \quad u_\gamma(t+i0) = u_{\gamma\gamma_0}(t-i0) \quad \text{pour } t \in I_0$$

$$(11) \quad u_\gamma(t-i0) = u_{\gamma\gamma_1}(t+i0) \quad \text{pour } t \in I_1.$$

La fonction hypergéométrique $u_1(z) = F(a,b;c;z)$ est donc multiforme, mais ses branches, comme celles de z^α , ou de $\log z$, sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de fonctions. On dit que c'est une fonction à détermination finie.

1.4. Les résultats précédents se généralisent à toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Comme tout étudiant le sait, une équation différentielle linéaire se ramène à un système du premier ordre que nous écrirons sous la forme

$$(12) \quad DF(z) = R(z) F(z);$$

on cherche une matrice $F(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ \vdots \\ F_n(z) \end{pmatrix}$ solution et $R(z)$ est une matrice carrée d'ordre n , fonction rationnelle de z . Le cas régulier de Fuchs est celui où la forme différentielle $R(z)dz$ a des pôles d'ordre 1, y compris à l'infini. Soient $a_1, \dots, a_k$ les pôles à distance finie et $A_1, \dots, A_k$ des matrices constantes telles que $R(z) - A_j/(z-a_j)$ n'ait pas de pôle pour $z = a_j$. On pose $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Le groupe fondamental est un groupe libre Γ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_k$; le générateur γ_j correspond à un lacet dans le sens direct autour de a_j . La représentation de monodromie est telle que $M(\gamma_j)$ soit de la forme $U_j e^{2\pi i A_j} U_j^{-1}$ (généralisation du cas $n=1$, où l'on retrouve les fonctions z^a).

Le problème direct est le calcul explicite des matrices $M(\gamma_j)$, comme dans le cas hypergéométrique. Le problème inverse, connu sous le nom de problème de Riemann-Hilbert, ou 21ème problème de Hilbert, est de montrer que toute représentation linéaire du groupe Γ est la représentation de monodromie d'une équation

tion telle que (12), régulière au sens de Fuchs. Il a été résolu par D. Birkhoff et Plejmel, et sous une forme plus générale par Deligne dans [E 1].

1.5. Considérons d'abord un système différentiel linéaire dans le domaine réel, de la forme

$$(13) \quad d\chi(t) / dt = A(t) \cdot \chi(t) .$$

La procédure de Picard consiste à le transcrire en l'équation intégrale

$$(14) \quad \chi(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \chi(s) ds ;$$

on la résout par itération en posant $\chi_0(t) = \chi(t_0)$ et, pour $n \geq 0$,

$$(15) \quad \chi_{n+1}(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \chi_n(s) ds$$

de sorte que la limite $\chi(t)$ des $\chi_n(t)$ existe et satisfait à l'équation (14). En explicitant, on trouve la solution sous la forme $\chi(t_1) = U(t_1, t_0) \chi(t_0)$; la matrice $U(t_1, t_0)$ est donnée par la série de Dyson

$$(16) \quad U(t_1, t_0) = \sum_{n \geq 0} \int \dots \int A(s_n) \dots A(s_1) ds_1 \dots ds_n ,$$

où l'intégrale n -uple est étendue au domaine $t_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t_1$ dans $\mathbb{R}^n$.

1.6. Lappo-Danilevsky a donné une formule analogue dans le cas complexe [A 6].

De manière invariante, considérons une variété analytique complexe X , de dimension 1, et un revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$ de X . Soit $\omega = (\omega_{ij})$ une matrice $n \times n$ formée de formes différentielles holomorphes sur X . L'équation différentielle prend la forme

$$(17) \quad dF = \omega \cdot F .$$

Si z_0 et z_1 sont deux points de $\tilde{X}$, et α une forme différentielle holomorphe sur $\tilde{X}$, l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} \alpha$ est bien définie. On définit les intégrales

itérées $\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \dots \alpha_1$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des formes différentielles holomorphes sur $\tilde{X}$ (ou sur X), par la récurrence suivante

$$(18) \quad \int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \dots \alpha_1 = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \cdot f ;$$

la fonction f est définie sur $\tilde{X}$ par

$$(19) \quad f(z) = \int_{z_0}^z \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 .$$

Plus explicitement, choisissons un chemin $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{X}$ d'extrémités z_0 et z_1 ; posons $\gamma^* \alpha_i = a_i(t) dt$. On a alors

$$(20) \quad \int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \dots \alpha_1 = \int \dots \int \alpha_n(s_n) \dots \alpha_1(s_1) ds_1 \dots ds_n$$

avec le même domaine d'intégration que dans la formule de Dyson. Ceci étant, l'équation différentielle $dF = \omega \cdot F$ se résout par la formule $F(z_1) = U(z_1, z_0) F(z_0)$, où la matrice $U(z_1, z_0)$ est donnée par la formule

$$(21) \quad U(z_1, z_0) = \sum_{n \geq 0} \int_{z_0}^{z_1} \omega \dots \omega$$

(n facteurs ω), en étendant la définition (20) au cas des formes différentielles matricielles.

1.7. Le cas *unipotent* est celui où la série (21) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Voici un cas typique :

$$(22) \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & 0 \\ & 0 & \alpha_2 & \\ & & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U correspondante est donnée par

$$(23) \quad u_{ij} = 0 \text{ si } i > j, \quad u_{ii} = 1, \quad u_{ij}(z_1, z_0) = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_i \dots \alpha_{j-1} \text{ pour } i < j.$$

L'équation de la résolvante $U(z_2, z_0) = U(z_2, z_1) U(z_1, z_0)$ se traduit par la relation fondamentale

$$(24) \quad \int_{z_0}^{z_2} \alpha_1 \dots \alpha_n = \sum_{j=0}^n \int_{z_1}^{z_2} \alpha_1 \dots \alpha_j \cdot \int_{z_0}^{z_1} \alpha_{j+1} \dots \alpha_n;$$

on peut aussi la démontrer par décomposition du domaine d'intégration.

1.8. Un exemple intéressant est celui où X est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'une partie finie $\{a_1, \dots, a_n\}$, et où l'on pose $\alpha_j = dz/(z - a_j)$. La fonction $\int_0^z \alpha_1 \dots \alpha_n$ est holomorphe sur le revêtement universel de X ; c'est le polylogarithme $L(z | a_1, \dots, a_n)$ déjà considéré par Lappo-Danilevsky. Elle sert de base aux développements en séries des fonctions résurgentes d'Écalle; son prolongement analytique et sa monodromie ont été étudiés par Bloch et Ramakrishnam, et plus complètement par Dupont [H 1].

Expliquons leurs méthodes sur le cas du *dilogarithme*. On considère la matrice de formes différentielles

$$(25) \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & dz/z & 0 \\ 0 & 0 & dz/(1-z) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sur le plan coupé Ω (voir au n° 1.1), on définit la matrice

$$(26) \quad u(z) = \begin{pmatrix} 1 & \log z & \text{Li}_2(z) \\ 0 & 1 & \log 1/(1-z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui satisfait à l'équation $du = \omega u$. On a pris les branches principales des logarithmes, et le dilogarithme $\text{Li}_2(z)$ s'obtient par prolongement analytique de la série $\sum_{n \geq 1} z^n/n^2$, qui converge pour $|z| \leq 1$. Notons $G(\mathbb{C})$ le groupe de Lie complexe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G(\mathbb{Z})$ le sous-groupe défini par le tableau $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}(1) & \mathbb{Z}(2) \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; selon la notation de Deligne, on pose $\mathbb{Z}(p) = (2\pi i)^p \mathbb{Z}$. Avec les notations du n° 1.3, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{U} & G(\mathbb{C}) \\ P \downarrow & & \downarrow P' \\ X & \xrightarrow{V} & G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z}) \end{array}$$

où U et V sont holomorphes, et u est la branche principale $U \circ s$ de U . La monodromie du dilogarithme est entièrement expliquée par ce diagramme; la représentation de monodromie apparaît comme un homomorphisme $M: \Gamma \rightarrow G(\mathbb{C})$ d'image $G(\mathbb{Z})$. Cette construction a été généralisée par Paršin [C 3].

Considérons $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et notons $\Lambda_{\mathbb{Q}}^p \mathbb{C}$ les puissances extérieures de cet espace vectoriel. On définit une application ϕ de $G(\mathbb{C})$ dans $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{C}$ par

$$(27) \quad \phi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\pi i)^{-2} (2b - ac) \wedge 1 - (2\pi i)^{-1} a \wedge (2\pi i)^{-1} c.$$

Cette application passe au quotient en une application Φ de $G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z})$ dans $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{C}$; l'application $\Phi \circ V$ de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ dans $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{C}$ a été introduite par Bloch. Explicitement, sa valeur en un point z de Ω est

$$(28) \quad \Phi(V(z)) = (2\pi i)^{-2} (\text{Li}_2(z) - \text{Li}_2(1-z)) \wedge 1 - (2\pi i)^{-1} \log z \wedge (2\pi i)^{-1} \log \left(\frac{1}{1-z} \right).$$

L'idée de passer par Φ a été exploitée de manière générale par Dupont dans [H 1].

2. RAPPORT SUR LES INTÉGRALES ITÉRÉES

2.1. Les intégrales itérées ont été développées de manière systématique par Chen, qui en a donné un exposé synthétique dans [C 2]. La présentation que nous en donnons est nouvelle sur plusieurs points, et utilise largement les méthodes simplicielles.

Rappelons quelques points de la théorie simpliciale. Pour tout entier $n \geq 0$, nous réalisons le *simplexe* Δ^n comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant aux relations $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$; il est commode d'introduire les coordonnées superflues $t_0 = 0$, $t_{n+1} = 1$ et de plonger Δ^n dans $\mathbb{R}^{n+2}$. Les *sommets* de Δ^n sont les points $e_i^n = (0^{i+1}, 1^{n+1-i})$ avec $i+1$ coordonnées égales à 0, et $n+1-i$ coordonnées égales à 1 (pour i parcourant l'ensemble $[n]$ des entiers $0, 1, \dots, n$).

La catégorie $\mathcal{D}$ a pour objets les ensembles $[n]$, pour morphismes les applications croissantes (au sens large). Une application φ de $[m]$ dans $[n]$ détermine une application affine $\bar{\varphi}$ de Δ^m dans Δ^n , qui applique le sommet e_i^m sur le sommet $e_{\varphi(i)}^n$. En particulier, pour i dans $[n]$, on dispose des applications de face $\delta^i : [n-1] \longrightarrow [n]$ et de dégénérescence $\sigma^i : [n+1] \longrightarrow [n]$. Les applications $d^i = \bar{\delta}^i$ de Δ^{n-1} dans Δ^n , et $s^i = \bar{\sigma}^i$ de Δ^{n+1} dans Δ^n se décrivent ainsi

$$(29) \quad d^i(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, t_i, \dots, t_n) \quad (\text{répétition de } t_i).$$

$$(30) \quad s^i(t_0, \dots, t_{n+2}) = (t_0, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{n+2}) \quad (\text{omission de } t_{i+1}).$$

Un *ensemble simplicial* E est un foncteur contravariant de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des ensembles; définition analogue d'un groupe simplicial, d'une variété simpliciale, etc. On décrit E par la donnée d'une suite d'ensembles

$E_0, E_1, E_2, \dots$ et d'applications de face $d_i : E_n \longrightarrow E_{n-1}$ et de dégénérescence $s_i : E_n \longrightarrow E_{n+1}$, pour $0 \leq i \leq n$, qui satisfont à des relations que nous ne répèterons pas ici. Un *ensemble cosimplicial* est un foncteur covariant défini dans $\mathcal{D}$; il se décrit par une suite d'ensembles $E^0, E^1, E^2, \dots$ et des applications de face $d^i : E^{n-1} \longrightarrow E^n$ et de dégénérescence $s^i : E^{n+1} \longrightarrow E^n$ (pour $0 \leq i \leq n$).

2.2. Soit X une variété différentielle, disons de classe C^∞ . On lui associe classiquement l'ensemble simplicial $C_*(X)$, qui en degré n se compose de l'ensemble $C_n(X)$ des applications continues de Δ^n dans X ("simplexes singuliers"). Nous utiliserons une version géométrique de la cobar-construction; c'est la variété cosimpliciale $M^*(X)$ qui se compose des variétés $M^n(X) = X^{n+2}$, et des opérateurs d^i et s^i donnés respectivement par les formules (29) et (30).

Pour toute variété différentielle Y , on note $\alpha^p(Y)$ l'espace des p -formes différentielles extérieures sur Y , et $d : \alpha^p(Y) \longrightarrow \alpha^{p+1}(Y)$ la différentielle extérieure.

Revenant à la variété X , nous lui associons un bicomplexe C tel que $C^{m,-n} = \alpha^m(X^{n+2})$ pour $m \geq 0$, $n \geq 0$ (dans le "quatrième quadrant"). Les deux différentielles sont, d'une part, la différentielle extérieure d qui applique $C^{m,-n} = \alpha^m(X^{n+2})$ dans $C^{m+1,-n} = \alpha^{m+1}(X^{n+2})$, et la différentielle combinatoire Δ

de $C^{m,-n} = a^m(X^{n+2})$ dans $C^{m,-n+1} = a^m(X^{n+1})$ qui transforme μ en $\sum_{i=0}^n (-1)^{m+i} (d^i)^* \mu$ (on note $(d^i)^* \mu$ l'image réciproque de μ par l'application d^i de X^{n+1} dans X^{n+2}). On note Γ^* le complexe total associé ; un élément de Γ^p est une suite $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ où μ_n est une forme différentielle de degré $n+p$ sur X^{n+2} , et sa différentielle est la suite $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ dans Γ^{p+1} décrite par

$$(31) \quad \nu_n = d\mu_n + \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+p+i} (d^i)^* \mu_{n+1}.$$

C'est le complexe de Chen.

Si α et β sont deux formes différentielles sur X , on note $\alpha \times \beta$ la forme $\pi_1^* \alpha \wedge \pi_2^* \beta$ sur X^2 , où π_1 et π_2 sont les projections de X^2 sur X . Définition analogue de $\alpha \times \beta \times \gamma$ sur X^3 , etc. Le complexe de de Rham $a^*(X)$ de X est une algèbre différentielle graduée ; la bar-construction de $a^*(X)$ s'identifie au sous-complexe de Γ^* formé des suites où chaque μ_n est décomposable en somme finie de termes $\alpha_0 \times \dots \times \alpha_{n+1}$, et nulle pour tout n assez grand.

2.3. L'espace PX des chemins dans X se compose des applications γ de classe C^∞ de $I = [0,1]$ dans X . Ce n'est pas une variété ; on peut cependant définir un vecteur tangent à PX en un chemin γ comme un relèvement ξ de classe C^∞ dans le fibré tangent TX (autrement dit, $\xi(t)$ est tangent à X au point $\gamma(t)$). On définit ainsi l'espace vectoriel $T_\gamma(PX)$ tangent en γ à PX . Une p -forme différentielle extérieure ω sur PX est ainsi une fonction $\omega(\gamma; \xi_1, \dots, \xi_p)$ multilinéaire alternée en les éléments $\xi_1, \dots, \xi_p$ de $T_\gamma(PX)$.

Soient S une variété différentielle et φ une application de classe C^∞ de $S \times I$ dans X ; on lui associe une application Φ de S dans PX par $\Phi(s)(t) = \varphi(s,t)$. On imagine facilement ce que sera l'image réciproque $\Phi^* \omega$ d'une p -forme ω sur PX . On dira que ω est (faiblement) de classe C^∞ si toutes les formes du type $\Phi^* \omega$ sont de classe C^∞ . On peut alors définir le complexe de de Rham $a^*(PX)$ de sorte que $\Phi^* : a^*(PX) \longrightarrow a^*(S)$ soit toujours compatible aux différentielles.

Dans le cas particulier $p = 0$, on obtient la définition d'une fonction F (faiblement) de classe C^∞ sur PX ; sa différentielle est un élément de $a^1(PX)$ qui n'est autre que la "variation $\delta F(\gamma; \xi)$ de la fonctionnelle $F(\gamma)$ " au sens du calcul des variations.

2.4. L'intégrale itérée est un homomorphisme I du complexe de Chen Γ^* dans le complexe de de Rham de PX .

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application h_n de $PX \times \Delta^n$ dans X^{n+2} qui associe à $(\gamma, t_1, \dots, t_n)$ le point $(\gamma(0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n), \gamma(1))$ de $M^n(X) = X^{n+2}$. En généralisant un peu le point de vue du n° 2.3, on peut définir

des formes différentielles sur $PX \times \Delta^n$; on connaît aussi le procédé d'intégration partielle (ou d'image directe) qui, à une forme différentielle Λ de degré $n+p$ sur $S \times \Delta^n$ associe la p -forme $\lambda = \int_{\Delta^n} \Lambda$ sur S . Grâce à l'artifice d'envoyer de (vraies) variétés S dans PX , on étend ce procédé aux formes différentielles sur $PX \times \Delta^n$.

Soit alors $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ un élément de Γ^p ; pour tout entier $n \geq 0$, la forme différentielle $h_n^* \mu_n$ de degré $n+p$ est définie sur $PX \times \Delta^n$. On pose $I(\mu) = \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta^n} h_n^* \mu_n$; sous réserve de convergence de la série, c'est une p -forme sur PX . On a $dI(\mu) = I(v)$ si l'élément $v = d\mu + \Delta\mu$ de Γ^{p+1} est défini par la formule (31).

Le cas le plus usuel est le suivant : on se donne n formes différentielles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de degré 1 sur X , on pose $\mu_n = 1 \times \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \times 1$ et $\mu_m = 0$ pour $m \neq n$. On obtient un élément μ de Γ^0 et $I(\mu)$ est une fonction de classe C^∞ sur PX , dont Chen note $\int_Y \alpha_1 \dots \alpha_n$ la valeur en Y . Naturellement, les intégrales itérées du n° 1.6 sont des cas particuliers de cette construction.

2.5. Fixons deux points a et b de X , et notons $P_{a,b}X$ l'espace des chemins d'origine a et extrémité b . On peut modifier les définitions précédentes et définir un complexe de Chen $\Gamma_{a,b}^*$ et une intégrale itérée

$I_{a,b} : \Gamma_{a,b}^* \longrightarrow a^*(P_{a,b}X)$. Le théorème fondamental de Chen [C 1] affirme que l'homologie du complexe $\Gamma_{a,b}^*$ calcule la cohomologie singulière de l'espace $P_{a,b}X$ de chemins au moins lorsque X est compact et simplement connexe. En particulier, pour $a = b$, on obtient la cohomologie de l'espace des lacets de X .

2.6. Un autre type d'application concerne la définition de fonctions multiformes au moyen d'intégrales itérées. Si a et b sont deux points de X , on note $\Pi_{a,b}X$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $P_{a,b}X$; en particulier, $\Pi_{a,a}X$ est le groupe fondamental $\pi_1(X, a)$ de X . On peut en fait définir un espace quotient ΠX de PX qui est un revêtement de $X \times X$, et tel que $\Pi_{a,b}X$ soit sa fibre au-dessus du point (a, b) de $X \times X$ ("groupoïde de Poincaré" de X). Choissant un point-base a dans X , on réalise le revêtement universel $\tilde{X}$ de X comme la sous-variété de ΠX , réunion des $\Pi_{a,b}X$, pour b parcourant X .

Soit alors $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ un élément de Γ^0 ; autrement dit, μ_n est une forme différentielle de degré n sur X^{n+2} . Alors $I(\mu)$ est une fonction sur PX ; elle se descend en une fonction F sur ΠX si et seulement si sa restriction à $P_{a,b}X$ est localement constante pour a, b fixés. Sous forme différentielle, ceci se traduit par le système d'équations

$$(32) \quad d\mu_n + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} (d^i)^* \mu_{n+1} = 0.$$

Si, d'aventure, on veut calculer la différentielle dF , on combinera les formules (31) et (32) qui donnent $dI(\mu) = I(v)$ avec

$$(33) \quad v_n = (-1)^n (d^0)^* \mu_{n+1} - (d^{n+1})^* \mu_{n+1}.$$

Par choix d'un point-base a dans X , on restreint la fonction F en une fonction $\tilde{F}$ sur le revêtement universel $\tilde{X}$ de X . C'est la fonction multiforme sur X associée à μ .

2.7. Il est temps de revenir à la monodromie. Soit $\omega = (\omega_{ij})$ une matrice $m \times m$ de 1-formes différentielles sur X . On considère le système différentiel $dF = \omega F$, ou plus explicitement

$$(34) \quad dF_i = \sum_{j=1}^m \omega_{ij} F_j \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m.$$

Le transport parallèle s'exprime par la formule

$$(35) \quad U(\gamma) = \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} \omega \dots \omega \quad (n \text{ facteurs } \omega)$$

pour tout chemin γ (généralisation du n° 1.6). Autrement dit, l'application $\gamma \mapsto U(\gamma) = (U_{ij}(\gamma))$ de PX dans $GL_m(\mathbb{C})$ est donnée par $U_{ij} = I(\Omega_{ij})$ où $\Omega_{ij} = (\Omega_{ij,0}, \Omega_{ij,1}, \dots)$ est l'élément de Γ^0 décrit comme suit :

$$(36) \quad \Omega_{ij,n} = \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} 1 \times \omega_{ii_1} \times \omega_{i_1 i_2} \times \dots \times \omega_{i_{n-1} j} \times 1.$$

La condition d'intégrabilité du système (34) s'écrit classiquement sous la forme $d\omega - \omega \wedge \omega = 0$, ou explicitement

$$(37) \quad d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = 0.$$

Pour que la matrice $U(\gamma)$, pour des chemins d'extrémités fixées a et b , ne dépende que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ , il faut et il suffit que les formes $\Omega_{ij,n}$ satisfassent à la condition (32). Un calcul facile montre que ceci équivaut à la relation d'intégrabilité (37). S'il en est ainsi, après choix d'un point-base a , la représentation de monodromie $M : \pi_1(X; a) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ est donnée par $M([\gamma]) = U(\gamma)$.

2.8. On introduit l'algèbre $A_p = \mathbb{C} \langle T_1, \dots, T_p \rangle$ des polynômes en des variables non commutatives $T_1, \dots, T_p$. Le plus petit sous-espace vectoriel de A_p contenant les variables $T_1, \dots, T_p$ et stable par le crochet $[u, v] = uv - vu$ est l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_p$. Il existe un homomorphisme d'algèbres $c : A_p \longrightarrow A_p \otimes A_p$ caractérisé par $c(T_j) = T_j \otimes 1 + 1 \otimes T_j$ et $\mathcal{L}_p$ se compose des éléments u de A_p tels que $c(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$. On considère aussi l'algèbre $\hat{A}_p = \mathbb{C} \langle\langle T_1, \dots, T_p \rangle\rangle$ des séries formelles en $T_1, \dots, T_p$ et l'adhérence $\hat{\mathcal{L}}_p$ de $\mathcal{L}_p$ dans $\hat{A}_p$; caractérisation de $\hat{\mathcal{L}}_p$ analogue à celle de $\mathcal{L}_p$.

(pour tout ceci, lire Bourbaki [A 2], chap. 2).

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des 1-formes différentielles sur X , et soit $\omega = T_1 \alpha_1 + \dots + T_p \alpha_p$. Reprenant la formule de transport parallèle (35), on est conduit à introduire les séries formelles

$$(38) \quad U(\gamma) = \sum_{n \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_n} \left(\int_{\gamma} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} \right) \cdot T_{i_1} \dots T_{i_n}.$$

Soient $\mu_1, \dots, \mu_m, \mu_{m+1}, \dots, \mu_{m+n}$ des 1-formes sur X . Pour tout chemin γ , on a la relation "des shuffles"

$$(39) \quad \int_{\gamma} \mu_1 \dots \mu_m \int_{\gamma} \mu_{m+1} \dots \mu_{m+n} = \sum_{\sigma} \int_{\gamma} \mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(m+n)},$$

où σ parcourt l'ensemble de toutes les permutations dans S_{m+n} , croissantes sur les intervalles $[1, m]$ et $[m+1, m+n]$. Géométriquement, cela revient à décomposer $\Delta^m \times \Delta^n$ en simplexes. Il n'en faut pas plus pour établir la relation $c(U(\gamma)) = U(\gamma) \otimes U(\gamma)$, qui signifie que la série $\log U(\gamma)$ appartient à l'algèbre de Lie $\hat{L}_p$ (pour ceci, voir Ree dans [C 4]).

3. INTERLUDE : LA THÉORIE DE HODGE

3.1. Quelques notations pour commencer. On note X une variété algébrique complexe lisse (sans point singulier), d sa dimension complexe, et l'on introduit divers espaces de formes différentielles

- $\alpha^n(X)$ formes différentielles de degré n et de classe C^∞ ;
- $\Omega^n(X)$ formes différentielles de degré n holomorphes ;
- $F^p \alpha^n(X)$ formes qui sont localement décomposables en somme finie de formes $\alpha \wedge \beta$ avec α holomorphe de degré p et β de degré $n-p$ et de classe C^∞ ;
- $\alpha^{p,q}(X)$ formes localement décomposables en somme de termes $f \alpha \wedge \bar{\beta}$ avec une fonction f de classe C^∞ , α holomorphe de degré p et β holomorphe de degré q ⁽¹⁾.

On peut naturellement remplacer X par n'importe quel ouvert de X , d'où la définition des faisceaux α^n , Ω^n , $F^p \alpha^n$, $\alpha^{p,q}$. Si F est l'un de ces faisceaux, à l'exception de Ω^n , on a $H^i(X, F) = 0$ pour tout entier $i > 0$.

3.2. Pour un espace tel que X , il y a identité entre cohomologies singulière, de Čech et de de Rham. On peut donc considérer que $H_{\mathbb{C}}^n = H^n(X, \mathbb{C})$ est le n -ième groupe de cohomologie du complexe de de Rham $\alpha^*(X)$. On a une suite décroissante de sous-complexes

⁽¹⁾ Si u est un nombre (ou une fonction, une forme, ...) complexe, on note $\bar{u}$ le complexe conjugué de u .

$$\alpha^*(X) = F^0 \alpha^*(X) \supset F^1 \alpha^*(X) \supset \dots \supset F^p \alpha^*(X) \supset F^{p+1} \alpha^*(X) \supset \dots$$

On note $F^p H_{\mathbb{C}}^n$ l'image dans $H_{\mathbb{C}}^n$ du n-ième groupe de cohomologie du sous-complexe $F^p \alpha^*(X)$ de $\alpha^*(X)$; on a donc une suite décroissante de sous-espaces

$$H_{\mathbb{C}}^n = F^0 H_{\mathbb{C}}^n \supset F^1 H_{\mathbb{C}}^n \supset \dots \supset F^p H_{\mathbb{C}}^n \supset F^{p+1} H_{\mathbb{C}}^n \supset \dots \supset F^n H_{\mathbb{C}}^n \supset F^{n+1} H_{\mathbb{C}}^n = 0,$$

qu'on appelle la *filtration de Hodge* de la cohomologie de X .

Il résulte aussitôt du lemme de Dolbeault que le q-ième groupe de cohomologie du complexe $F^p \alpha^*(X) / F^{p+1} \alpha^*(X)$ s'identifie à $H^q(X, \Omega^p)$ (cohomologie du faisceau Ω^p). De la filtration du complexe $\alpha^*(X)$ par les sous-complexes $F^p \alpha^*(X)$, on déduit une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \implies H^{p+q}(X; \mathbb{C}).$$

3.3. Supposons que X soit une variété projective, donc compacte. Il résulte de la théorie de Hodge des formes harmoniques que la suite spectrale précédente dégénère au niveau E_1 . Autrement dit, notons $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ (ou simplement $H^{p,q}$) le sous-espace de $H_{\mathbb{C}}^{p+q}$ formé des classes de cohomologie ayant un représentant dans $\alpha^{p,q}(X)$. On peut identifier $H^{p,q}$ à $H^q(X, \Omega^p)$. De plus, on a

$$(40) \quad H_{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

$$(41) \quad F^p H_{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{r \geq p} H^{r, n-r}$$

$$(42) \quad H^{p,q} = \overline{H}^{p,q} \quad \text{pour } p+q=n.$$

Deligne exprime ces propriétés en disant que la filtration de Hodge définit une *structure de Hodge de poids n* sur $H_{\mathbb{C}}^n$. Des formules précédentes, on déduit

$$(43) \quad H^{p, n-p} = F^p H_{\mathbb{C}}^n \cap \overline{F^{n-p} H_{\mathbb{C}}^n}$$

et la décomposition en les sous-espaces $H^{p,q}$ de $H_{\mathbb{C}}^n$ est donc déterminée de manière univoque par la filtration de Hodge.

3.4. La grande innovation de Deligne [E 2] concerne le cas des variétés algébriques non compactes.

Supposons donc que X soit le complémentaire dans une variété projective lisse $\bar{X}$ d'un diviseur D à croisements normaux. Dans un certain nombre d'exemples intéressants, $\bar{X}$ est naturellement donnée ; son existence pour X arbitraire est un corollaire du théorème de Hironaka sur la désingularisation.

Explicitons l'hypothèse de *croisements normaux* : il existe une suite décroissante $\bar{X}_0 \supset \bar{X}_1 \supset \dots \supset \bar{X}_d$ de sous-variétés algébriques de $\bar{X}$ avec $\bar{X}_0 = \bar{X}$, $\bar{X}_1 = D$, $\bar{X}_j$ de dimension complexe $d-j$, et de plus en tout point x de $\bar{X}_r \setminus \bar{X}_{r+1} = X_r$, on peut trouver un système de coordonnées locales holomorphes $z_1, \dots, z_d$ sur $\bar{X}$ telles que D soit décrit au voisinage de x par l'équation $z_1 \dots z_r = 0$.

Pour calculer la cohomologie de X , on utilise la suite spectrale de Leray pour l'inclusion j de X dans $\bar{X}$. Ceci nécessite la considération des faisceaux $R^q j_* \mathbb{C}$ sur $\bar{X}$: la fibre en un point x de $\bar{X}$ de $R^q j_* \mathbb{C}$ est la limite inductive des groupes $H^q(X \cap U, \mathbb{C})$ où U parcourt les voisinages ouverts de x dans $\bar{X}$. Ces faisceaux sont déterminés au moyen de l'hypothèse de croisements normaux qui assure qu'en un point de X_r la paire $\bar{X}, X$ se comporte comme la paire $\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^{*r} \times \mathbb{C}^{d-r}$ à l'origine de $\mathbb{C}^d$.

Deligne introduit la filtration des formes différentielles par le poids. Pour tout entier s tel que $0 \leq s \leq n$, on définit le sous-espace $W_{s+n} a^n(X)$ de $a^n(X)$ comme suit: les formes différentielles de degré n sur X qui localement en un point x de X_r s'écrivent

$$(44) \quad \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_s} \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_s}}{z_{i_s}}$$

avec des formes $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_s}$ de degré $n-s$ et de classe C^∞ au voisinage de x dans $\bar{X}$, et un système de coordonnées $z_1, \dots, z_d$ comme plus haut.

On note ensuite $W_{s+n} H_{\mathbb{C}}^n$ le sous-espace de $H_{\mathbb{C}}^n$ formé des classes de cohomologie qui ont un représentant dans $W_{s+n} a^n(X)$. La filtration par le poids de $H_{\mathbb{C}}^n$ est la suite croissante de sous-espaces

$$(45) \quad 0 \subset W_n H_{\mathbb{C}}^n \subset W_{n+1} H_{\mathbb{C}}^n \subset \dots \subset W_{2n-1} H_{\mathbb{C}}^n \subset W_{2n} H_{\mathbb{C}}^n = H_{\mathbb{C}}^n.$$

On convient de poser $W_t H_{\mathbb{C}}^n = 0$ si $t < n$ et $W_t H_{\mathbb{C}}^n = H_{\mathbb{C}}^n$ si $t > 2n$. Le point capital est que ces espaces $W_t H_{\mathbb{C}}^n$ de $H_{\mathbb{C}}^n$ ne dépendent que de X et non du plongement de X dans une variété $\bar{X}$ compacte et lisse.

3.5. Résumons la situation. On écrit $H_{\mathbb{Z}}^n$ pour $H^n(X, \mathbb{Z})$ et l'on définit de même $H_{\mathbb{Q}}^n$.

a) $H_{\mathbb{Z}}^n$ est un groupe commutatif de type fini;

b) on peut identifier $H_{\mathbb{Q}}^n$ à $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\mathbb{Z}}^n$ et $H_{\mathbb{C}}^n$ à $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\mathbb{Z}}^n$.

Par ailleurs, sur $H_{\mathbb{C}}^n$, on dispose d'une filtration de Hodge, c'est-à-dire une suite décroissante de sous-espaces $F^p H_{\mathbb{C}}^n$ (pour p dans $\mathbb{Z}$) et d'une filtration par le poids, c'est-à-dire une suite croissante de sous-espaces $W_r H_{\mathbb{C}}^n$ (pour r dans $\mathbb{Z}$). Les propriétés suivantes sont valables:

c) il existe des sous-espaces $W_r H_{\mathbb{Q}}^n$ de l'espace vectoriel $H_{\mathbb{Q}}^n$ sur $\mathbb{Q}$, tels que $W_r H_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_r H_{\mathbb{Q}}^n$ (la filtration par le poids est définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels);

d) on pose $Gr_r^W H_{\mathbb{C}}^n = W_r H_{\mathbb{C}}^n / W_{r-1} H_{\mathbb{C}}^n$ et on le munit de la filtration définie par les images des sous-espaces $F^p H_{\mathbb{C}}^n \cap W_r H_{\mathbb{C}}^n$; avec cette filtration, $Gr_r^W H_{\mathbb{C}}^n$ est une structure de Hodge de poids r au sens du n° 3.3.

Ce sont ces propriétés que Deligne prend pour axiomes des structures de Hodge mixtes.

3.6. D'après la propriété d) précédente, l'espace $\text{Gr}_r^W H_{\mathbb{C}}^n$ se décompose en somme directe de sous-espaces $H_{p,q}^n$ (pour $p+q=r$). La dimension h^n de $H_{\mathbb{C}}^n$ est donc égale à $\sum_{p,q} h_{p,q}^n$, où $h_{p,q}^n$ est la dimension de $H_{p,q}^n$. Dans le cas qui nous intéresse ici, on a $h_{p,q}^n = 0$, sauf éventuellement si $p \leq n$, $q \leq n$ et $p+q \geq n$. Si le groupe $\text{Gr}_r^W H_{\mathbb{C}}^n$ n'est pas nul, on dira que le poids r intervient dans le groupe de cohomologie $H_{\mathbb{C}}^n = H^n(X; \mathbb{C})$; seuls les poids $n, n+1, \dots, 2n$ peuvent intervenir. Le poids n correspond à l'image $W_n H_{\mathbb{C}}^n$ de l'homomorphisme de restriction de $H^n(\bar{X}, \mathbb{C})$ dans $H^n(X, \mathbb{C})$.

Supposons qu'on ait $\bar{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $D = \{0, \infty\}$, d'où $X = \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Z}(-1)$ la structure de Hodge mixte sur $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$. On identifie cet espace à $\mathbb{C}$ en prenant pour base la classe de cohomologie de dz/z , d'où $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$. Les classes de cohomologie entières sont les multiples entiers de $dz/2\pi iz$, d'où $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^{-1} \mathbb{Z}$. Enfin seul le poids 2 intervient, $W_1 \mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = 0$, $W_2 \mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, et l'on a $H_{1,1}^1 = \mathbb{C}$. Autrement dit, $\mathbb{Z}(-1)$ est pur de poids 2, de type $(1,1)$.

4. JACOBIENNES GÉNÉRALISÉES

4.1. Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g . Choisissons un point-base a de X et une base $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ de l'espace $\Omega^1(X)$ des 1-formes holomorphes sur X . Enfin, soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X basé en a . On définit l'application $\tilde{\varphi}_a$ de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{C}^g$ par $\tilde{\varphi}_a(z) = (\int_a^z \alpha_1, \dots, \int_a^z \alpha_g)$; soit Λ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{C}^g$ de la forme $(\int_{\gamma} \alpha_1, \dots, \int_{\gamma} \alpha_g)$ où γ est un lacet au point a . Il est bien connu que Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^g$ isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. La jacobienne $J(X)$ est le tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda$, et l'on peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_a} & \mathbb{C}^g \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{\varphi_a} & J(X) \end{array}$$

analogue à celui du n° 1.8.

4.2. On peut procéder de manière plus générale et plus invariante pour définir la variété d'Albanese $\text{Alb}(X)$ d'une variété algébrique projective et lisse X .

Tout d'abord, si un espace vectoriel V est muni d'une filtration par une suite décroissante de sous-espaces $F^p V$, on note $F^p V^*$ le sous-espace du dual V^* de V orthogonal à $F^{1-p} V$; on obtient ainsi une filtration décroissante sur V^* et l'espace $\text{Gr}_F^p V^* = F^p V^* / F^{p+1} V^*$ est le dual de l'espace

$\text{Gr}_F^{-p} V = F^{-p} V / F^{-p+1} V$. On utilise des conventions analogues pour une filtration croissante $(W_n V)_{n \in \mathbb{Z}}$. On peut ainsi définir le dual d'une structure de Hodge mixte.

Sur l'espace $H^1(X, \mathbb{C})$ la filtration de Hodge se décrit ainsi

$$F^0 H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{C}), \quad F^1 H^1(X, \mathbb{C}) = \Omega^1(X), \quad F^2 H^1(X, \mathbb{C}) = 0.$$

Sur le groupe d'homologie $H_1 = H_1(X, \mathbb{C})$ dual de $H^1(X, \mathbb{C})$, on a donc la filtration de Hodge

$$H_1 = F^{-1} H_1 \supset F^0 H_1 \supset F^1 H_1 = 0.$$

La variété d'Albanese est alors définie par

$$\text{Alb}(X) = H_1(X, \mathbb{Z}) \backslash H_1(X, \mathbb{C}) / F^0 H_1(X, \mathbb{C});$$

l'espace $H_1(X, \mathbb{C}) / F^0 H_1(X, \mathbb{C})$ s'identifie au dual $\Omega^1(X)^*$ de $\Omega^1(X)$. Choisissons un point-base a dans X , et notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de X .

On définit une application $\tilde{\varphi}_a$ de $\tilde{X}$ dans $\Omega^1(X)^*$ par $\langle \tilde{\varphi}_a(z), \omega \rangle = \int_a^z \omega$ pour ω dans $\Omega^1(X)$; cette intégrale est bien définie car on a $d\omega = 0$. Par passage au quotient, on définit l'application φ_a de X dans $\text{Alb}(X) = H_1(X, \mathbb{Z}) \backslash \Omega^1(X)^*$.

4.3. Nous rappelons maintenant quelques points de la *théorie de Malcev des groupes nilpotents* ⁽¹⁾. Pour l'instant, X est une variété différentielle; on choisit un point-base a et l'on pose $\pi = \pi_1(X; a)$. On supposera que π est engendré par un nombre fini d'éléments, ce qui est le cas si X est une variété algébrique complexe.

Soit $\mathbb{C}\pi$ l'algèbre du groupe π à coefficients complexes, formée des sommes finies $\sum g_g$. On identifie le dual de $\mathbb{C}\pi$ à l'espace vectoriel $F(\pi)$ des fonctions complexes sur π . On note J l'idéal bilatère de $\mathbb{C}\pi$ défini par la relation $\sum g_g = 0$, d'où $\mathbb{C}\pi/J = \mathbb{C}$, et $J^0 = \mathbb{C}\pi$, $J^1 = J$, $J^2 = J \cdot J, \dots$ les puissances de J . On désigne, pour tout entier $s \geq 0$, par $F_s(\pi)$ l'orthogonal de J^{s+1} dans $F(\pi)$; c'est donc l'ensemble des applications f de π dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\langle f, (1 - g_0) \dots (1 - g_s) \rangle = 0$$

pour $g_0, \dots, g_s$ dans π . On a défini une suite croissante $F_s(\pi)$ de sous-espaces de $F(\pi)$, et l'on note $F_\infty(\pi)$ leur réunion.

Si π est le groupe $\mathbb{Z}^n$, $F_s(\pi)$ se compose des fonctions qui sont restriction à $\mathbb{Z}^n$ d'une fonction polynomiale de degré $\leq s$ sur $\mathbb{R}^n$, et $F_\infty(\pi)$ est l'espace des fonctions polynomiales sur π .

Dans le cas général, disons qu'une représentation linéaire $\sigma : \pi \longrightarrow \text{GL}(V)$,

⁽¹⁾ Voir Quillen dans [D 3].

où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, est unipotente⁽¹⁾ si l'opérateur $L_V - \sigma(g)$ est nilpotent pour tout $g \in \pi$. Alors $F_\infty(\pi)$ se compose des coefficients des représentations unipotentes de π . Comme d'habitude, on identifie $F(\pi) \otimes F(\pi)$ à un sous-espace de $F(\pi \times \pi)$, de sorte que $f_1 \otimes f_2$ soit la fonction $(g_1, g_2) \mapsto f_1(g_1) f_2(g_2)$. On vérifie alors que $F_\infty(\pi)$ est une sous-algèbre de $F(\pi)$ (pour la multiplication $(f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$) et qu'il existe un homomorphisme d'algèbres c de $F_\infty(\pi)$ dans $F_\infty(\pi) \otimes F_\infty(\pi)$ tel que $(cf)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$ pour $f \in F_\infty(\pi)$ et g_1, g_2 dans π .

Autrement dit, $F_\infty(\pi)$ est une *bigèbre* au sens de Bourbaki (d'aucuns disent algèbre de Hopf). Notons $G_\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de $F_\infty(\pi)$ dans $\mathbb{C}$; grâce au coproduit c , on définit sur $G_\infty(\mathbb{C})$ une multiplication qui en fait un groupe. Il s'agit de l'ensemble des points complexes d'un schéma affine en groupes G_∞ défini sur $\mathbb{Q}$; on peut donc aussi considérer le sous-groupe $G_\infty(\mathbb{Q})$ des points rationnels.

Pour tout entier $s \geq 0$, $F_s(\pi)$ est un espace vectoriel de dimension finie formé de fonctions sur G , et son dual s'identifie à $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Si g est un point de $G_\infty(\mathbb{C})$, l'application $f \mapsto f(g)$ de $F_s(\pi)$ dans $\mathbb{C}$ définit donc un élément $\gamma_s(g)$ de $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. L'application $g \mapsto \gamma_s(g)$ est un homomorphisme de $G_\infty(\mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}\pi/J^{s+1})^\times$ d'une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{C}$; l'image de γ_s est un groupe algébrique affine unipotent $G_s(\mathbb{C})$. Comme tout élément de $G_s(\mathbb{C})$ est de la forme $1+u$ avec u dans J/J^{s+1} (donc nilpotent), l'exponentielle et le logarithme fonctionnent bien. Il existe donc une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$ de $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$ (pour le crochet $[u, v] = uv - vu$) telle que l'exponentielle soit une bijection de $\mathfrak{g}_s$ sur $G_s(\mathbb{C})$; il est clair que $\mathfrak{g}_s$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie complexe $G_s(\mathbb{C})$. En fait, on peut considérer G_s comme un schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$, d'où une forme rationnelle $\mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$ avec $\mathfrak{g}_s = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$.

Le groupe $G_\infty(\mathbb{C})$ est la limite projective des groupes $G_s(\mathbb{C})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty$ celle des $\mathfrak{g}_s$. Notons $\Gamma^1\pi \supset \Gamma^2\pi \supset \dots$ la suite centrale descendante du groupe π , et $\Gamma^1 G_\infty \supset \Gamma^2 G_\infty \supset \dots$ celle du groupe $G_\infty = G_\infty(\mathbb{C})$; notons aussi $\Gamma^1 \mathfrak{g}_\infty \supset \Gamma^2 \mathfrak{g}_\infty \supset \dots$ la suite centrale descendante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty$. On a alors des isomorphismes

$$G_s(\mathbb{C}) = G_\infty / \Gamma^{s+1} G_\infty, \quad \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_\infty / \Gamma^{s+1} \mathfrak{g}_\infty$$

$$\Gamma^S G_\infty / \Gamma^{S+1} G_\infty = (\Gamma^S \pi / \Gamma^{S+1} \pi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \Gamma^S \mathfrak{g}_\infty / \Gamma^{S+1} \mathfrak{g}_\infty.$$

On pose $G_s(\mathbb{Z}) = \pi / \Gamma^{s+1} \pi$. On a un homomorphisme naturel de $G_s(\mathbb{Z})$ dans $G_s(\mathbb{C})$,

⁽¹⁾ Voici l'apparition de la "monodromie unipotente" du titre de l'exposé

dont le noyau est un sous-groupe fini de $G_S(\mathbb{Z})$ et l'image un sous-groupe discret de $G_S(\mathbb{C})$. En particulier, on a $G_1(\mathbb{Z}) = H_1(X; \mathbb{Z})$ et $G_1(\mathbb{C}) = H_1(X; \mathbb{C})$.

4.4. Explicitons le lien entre ces groupes G_S et les intégrales itérées, en décrivant un résultat dû à Chen et Stallings.

On a fixé un point-base a dans X . On définit comme suit une variante du complexe de Chen Γ^* . Pour tout entier $n \geq 0$, on note $M_a^n(X)$ la sous-variété $a \times X^n \times a$ de $M^n(X) = X^{n+2}$, d'où une variété cosimpliciale $M_a^*(X)$. Le complexe Γ_a^* est un quotient de Γ^* ; pour tout entier $p \geq 0$, un élément de Γ_a^p est une suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ où μ_n est une forme différentielle de degré $n+p$ sur $a \times X^n \times a$. La différentielle $d + \Delta$ de Γ_a^p dans Γ_a^{p+1} est encore décrite par la formule (31) du n° 2.2.

Pour tout entier $s \geq 0$, on note $B_s \Gamma_a^p$ le sous-espace de Γ_a^p formé des suites $(\mu_n)_{n \geq 0}$ avec $\mu_n = 0$ pour $n > s$. On obtient ainsi un sous-complexe $B_s \Gamma_a^*$ de Γ_a^* . L'espace $H^0(\Gamma_a^*)$ est ainsi filtré par les images $B_s H^0(\Gamma_a^*)$ des groupes de cohomologie $H^0(B_s \Gamma_a^*)$.

L'intégrale itérée définit alors, pour tout $s \geq 0$, un isomorphisme de $B_s H^0(\Gamma_a^*)$ sur $F_s(\pi)$.

4.5. On revient maintenant au cas d'une variété algébrique lisse X ; on la suppose donnée sous la forme $\bar{X} \setminus D$ comme au n° 3.4, avec un diviseur D à croisements normaux. On dit qu'une forme différentielle de degré n est à singularités logarithmiques si elle appartient à $W_{2n} a^n(X)$. Avec les notations précédentes, on dit qu'un élément $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ de Γ_a^p est à singularités logarithmiques si chaque μ_n est somme finie de formes du type $1 \times \omega_1 \times \dots \times \omega_n \times 1$, où $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont à singularités logarithmiques. On obtient ainsi un sous-complexe $\Gamma_{a, \log}^*$ de Γ_a^* . On peut encore filtrer ce complexe par les sous-complexes $B_s \Gamma_a^* \cap \Gamma_{a, \log}^* = B_s \Gamma_{a, \log}^*$. En passant à la cohomologie, on obtient l'espace $H^0(\Gamma_{a, \log}^*)$ filtré par les images des cohomologies $H^0(B_s \Gamma_{a, \log}^*)$, notées $B_s H^0(\Gamma_{a, \log}^*)$.

La démonstration de Chen et Stallings s'adapte : l'intégrale itérée définit un isomorphisme de $B_s H^0(\Gamma_{a, \log}^*)$ sur $F_s(\pi)$.

4.6. Le résultat précédent est la clé pour la définition d'une structure de Hodge mixte sur $\pi = \pi_1(X, a)$. Celle-ci a d'abord été construite par Morgan [D 2] par utilisation des méthodes d'homotopie rationnelle développées par lui-même et Sullivan; la méthode des intégrales itérées est due à Hain [F 3].

Pour tout entier $n \geq 0$, la variété X^n est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans $\bar{X}^n$. Pour les formes différentielles de classe C^∞ sur X^n , on peut donc définir la filtration de Hodge et la filtration par le poids. On en déduit successivement des filtrations F et W sur $\Gamma_{a, \log}^*$, sur

$B_S \Gamma_{a, \log}^*$, sur $H^0(\Gamma_{a, \log}^*)$ et sur $B_S H^0(\Gamma_{a, \log}^*)$. Compte tenu de l'isomorphisme du n° précédent, on aboutit à la définition d'une structure de Hodge mixte sur $F_S(\pi)$.

On transfère ensuite par dualité, comme au n° 4.2, ces filtrations F et W au dual $\mathbb{C}\pi/J^{S+1}$ de $F_S(\pi)$, puis on induit sur le sous-espace $\mathfrak{g}_S$ de $\mathbb{C}\pi/J^{S+1}$. La conclusion est qu'on a construit une structure de Hodge mixte sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_S$ du groupe de Lie complexe nilpotent $G_S(\mathbb{C})$.

4.7. Les filtrations F et W sur $\mathfrak{g}_S$ sont compatibles avec le crochet de Lie en un sens évident. On peut donc repasser des algèbres de Lie aux groupes. Résumons la situation acquise :

a) pour tout entier $s \geq 0$, on a construit un schéma en groupes G_s , affine, de corps de base $\mathbb{Q}$;

b) on a construit une suite croissante $(W_n G_s)_{n \leq 0}$ de sous-schémas en groupes de G_s ;

c) le groupe $G_S(\mathbb{C})$ des points complexes de G_s est un groupe de Lie complexe simplement connexe et nilpotent, donc l'application exponentielle est un isomorphisme de variétés analytiques complexes de $\mathfrak{g}_S$ sur $G_S(\mathbb{C})$;

d) le quotient $G_s(\mathbb{Z})$ de $\pi_1(X; a)$ par le sous-groupe $\Gamma^{S+1} \pi_1(X; a)$ est un groupe nilpotent à un nombre fini de générateurs ; il s'envoie dans $G_S(\mathbb{C})$ par un homomorphisme à noyau fini, et dont l'image est un sous-groupe discret ;

e) on a construit une suite décroissante $(F^p G_s)_{p \geq 0}$ de sous-groupes de Lie complexes de $G_S(\mathbb{C})$.

C'est en ce sens qu'on a muni $\pi_1(X; a)$ d'une structure de Hodge mixte. On peut aussi le faire pour les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_i(X; a)$ avec la simplification que ce sont des groupes commutatifs de type fini, et qu'on peut se rapporter aux définitions de Deligne données en 3.5 ; Morgan [D 2] et Hain [F 2] l'ont fait, chacun par ses méthodes.

Signalons aussi que Hain et Zucker [F 5] ont donné une caractérisation de la structure de Hodge mixte sur $\pi_1(X; a)$ en termes des "variations de structure de Hodge mixte", un sujet important pour l'étude des "modules".

4.8. La définition générale de la variété d'Albanese a été donnée par Hain et Zucker dans [F 5]. On pose

$$\text{Alb}_S(X) = G_S(\mathbb{Z}) \setminus G_S(\mathbb{C}) / F^0 G_S(\mathbb{C}).$$

On remarquera que la variété analytique complexe $G_S(\mathbb{C}) / F^0 G_S(\mathbb{C})$ est simplement connexe, et que le quotient de $G_s(\mathbb{Z}) = \pi / \Gamma^{S+1} \pi$ par son groupe (fini) de torsion opère librement et proprement sur $G_S(\mathbb{C}) / F^0 G_S(\mathbb{C})$. Lorsque X est projective et lisse, on retrouve la variété $\text{Alb}(X)$ définie au n° 4.2 comme le cas particulier $s = 1$.

La situation se simplifie beaucoup lorsque toute 1-forme différentielle holomorphe

sur $\bar{X}$ est nulle ($\Omega^1(\bar{X}) = 0$) ; ceci se produit en particulier si X est le complémentaire d'une hypersurface à croisements normaux dans l'espace projectif $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ (cas étudié abondamment par Aomoto et Kohno [G 1, G 4, G 6]).

Supposons donc qu'on ait $\Omega^1(\bar{X}) = 0$. On a alors $F^0 G_S = 0$, d'où

$$\text{Alb}_S(X) = G_S(\mathbb{Z}) \setminus G_S(\mathbb{C}).$$

Il s'agit de décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_S$. Notons $\Omega^p(X \log D)$ l'espace $\Omega^p(X) \cap W_{2p} a^p(X)$ des formes différentielles holomorphes de degré p sur X , à singularités logarithmiques le long de D . Ces formes différentielles sont fermées, d'où un homomorphisme

$$c_p : \Omega^p(X \log D) \longrightarrow H^p(X; \mathbb{C})$$

qui est bijectif pour $p = 1$, injectif pour $p = 2$. Le produit extérieur des formes définit une application linéaire δ_2 de $\Lambda^2 \Omega^1(X \log D)$ dans $\Omega^2(X \log D)$; identifiant le dual de $\Omega^1(X \log D)$ à $H_1 = H_1(X; \mathbb{C})$, la transposée de δ_2 est une application linéaire de $\Omega^2(X \log D)^*$ dans $\Lambda^2 H_1$, dont on note R^2 l'image. Introduisons l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(H_1)$ construite sur l'espace vectoriel H_1 , et graduée de manière naturelle par des sous-espaces $\mathcal{L}_p(H_1)$: on a

$$\mathcal{L}_0(H_1) = 0, \mathcal{L}_1(H_1) = H_1, \mathcal{L}_2(H_1) = \Lambda^2 H_1.$$

Alors $\mathfrak{g}_S$ s'identifie au quotient de $\mathcal{L}(H_1)$ par l'idéal engendré par $R_2 + \mathcal{L}_{s+1}(H_1)$.

Comme H_1 et $\Omega^1(X \log D)$ sont en dualité, on dispose d'une forme différentielle canonique ω_S dans $\Omega^1(X \log D) \otimes H_1$. On l'interprète comme une forme différentielle holomorphe à coefficients dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_S$, et l'on plonge $\mathfrak{g}_S$ dans l'algèbre associative $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Alors ω_S satisfait à la condition d'intégrabilité $d\omega_S + \omega_S \wedge \omega_S = 0$ en vertu de la définition de R_2 . On peut alors jouer le jeu habituel :

- introduire le revêtement universel $\tilde{X}$ de X basé en a ;
- si γ est un chemin dans X , d'origine a et d'extrémité b , calculer le transport parallèle par la série $U_S(\gamma) = \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} \omega_S \dots \omega_S$;
- la condition d'intégrabilité $d\omega_S + \omega_S \wedge \omega_S = 0$ assure que $U_S(\gamma)$ ne dépend que du point de $\tilde{X}$ correspondant, d'où une application holomorphe U_S de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$;
- l'application U_S prend ses valeurs dans $G_S(\mathbb{C})$ et définit par passage aux quotients une application holomorphe u_S de X dans sa variété d'Albanese $\text{Alb}_S(X) = G_S(\mathbb{Z}) \setminus G_S(\mathbb{C})$.

On renvoie à Hain et Zucker [F 5] pour les constructions à faire dans le cas général où $\Omega^1(\bar{X}) \neq 0$.

4.9. A titre d'illustration, le lecteur est invité à étudier le cas $\bar{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et à retrouver par spécialisation les constructions du n° 1.8.

Kohno a beaucoup étudié le cas où X est le complémentaire d'une famille finie d'hyperplans dans $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$. En particulier, supposons que X soit l'ensemble des vecteurs dans $\mathbb{C}^d$ à coordonnées toutes distinctes ; par définition $\pi_1(X)$ est le groupe de tresses. L'étude des représentations linéaires liées à la monodromie de X permet de retrouver et généraliser certains des résultats de Jones (voir [G 4], [G 5] et [G 7]). Faute de place, nous abandonnons le lecteur à sa curiosité ...

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Traités généraux

- [1] J. BIRMAN - *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math. Studies, vol. 82 (1974), Princeton Univ. Press.
- [2] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 2-3, Hermann, Paris, 1972.
- [3] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4-6, Masson, Paris, 1981.
- [4] E. CATTANI et al. (éditeurs) - *Hodge theory*, Proc. Conf. Sant. Cugat, Lect. Notes in Math. vol. 1246, Springer, Berlin, 1987.
- [5] P.A. GRIFFITHS, J.W. MORGAN - *Rational homotopy theory and differential forms*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [6] J.A. LAPPO-DANILEVSKY - *Théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Chelsea, New York, 1953.
- [7] W. MAGNUS, A. KARASS et D. SOLITAR - *Combinatorial group theory*, Dover, New York, 1976.

B. Exposés au Séminaire Bourbaki sur des sujets connexes

- [1] E. BRIESKORN - *Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold)*, n° 401, 1971/2.
- [2] P. CARTIER - *Arrangements d'hyperplans ; un chapitre de géométrie combinatoire*, n° 561, 1980/1.
- [3] P. CARTIER - *Décomposition des polyèdres, le point sur le 3e problème de Hilbert*, n° 646, 1984/5.
- [4] A. CONNES - *Index des sous-facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds (d'après Vaughan Jones)*, n° 647, 1984/5.
- [5] J.-L. VERDIER - *Groupes quantiques (d'après Drinfel'd)*, n° 685, 1986/7.

C. Intégrales itérées

- [1] K.T. CHEN - *Iterated integrals of differential forms and loop space homology*, Ann. of Maths, 97 (1973), p. 217-246.
- [2] K.T. CHEN - *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), p. 831-879.
- [3] A.N. PARSHIN - *A generalization of Jacobian variety*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 84 (1969), p. 187-196.
- [4] R. REE - *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Maths, 68 (1958), p. 210-220.

D. Homotopie rationnelle et applications

- [1] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN, D. SULLIVAN - *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. 29 (1975), p. 245-274.
- [2] J. MORGAN - *The algebraic topology on smooth algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., 48 (1978), p. 157-204.
- [3] D. QUILLEN - *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths, 90 (1969), p. 205-295.
- [4] D. SULLIVAN - *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. I.H.E.S., 47 (1977), p. 269-331.

E. Théorie de Hodge (articles classiques)

- [1] P. DELIGNE - *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer, Berlin, 1970.
- [2] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge I* : Congrès Int. Math. Nice 1970, vol. 1, p. 425-430 ; *II* : Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), p. 5-58 ; *III* : *ibid.*, 44 (1974), p. 5-77.
- [3] P. DELIGNE - *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968), p. 107-126.
- [4] A. GROTHENDIECK - *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., 29 (1966), p. 351-359.
- [5] P. GRIFFITHS, W. SCHMIDT - *Recent developments in Hodge theory : a discussion of techniques and results*, p. 31-127, *in* Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Bombay Colloquium 1973), Oxford Univ. Press, 1975.

F. Théorie de Hodge (résultats récents)

- [1] A.A. BEILINSON - *Notes on absolute Hodge cohomology*, Contemporary Maths, vol. 55, p. 35-68, Amer. Math. Soc., 1986.
- [2] R. HAIN - *The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties I, II*, à paraître.

- [3] R. HAIN - *The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, Algebraic geometry, Bowdoin College 1985, à paraître dans Proc. Symp. Pure Math.*
- [4] R. HAIN - *On a generalization of Hilbert's 21st problem, Ann. Scient. E.N.S.* 19 (1986), p. 609-627.
- [5] R. HAIN, S. ZUCKER - *Unipotent variations of mixed Hodge structure, Invent. Math.* 88 (1987), p. 83-124.
- [6] V. NAVARRO-AZNAR - *Sur la théorie de Hodge - Deligne I : Invent. Math.* 90 (1987), p. 11-76 ; II : à paraître.

Voir aussi les articles de Hain, Zucker et Navarro-Aznar dans [A 4].

G. Monodromie, systèmes d'hyperplans, groupes de tresses

- [1] K. AOMOTO - *Fonctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotents, J. Fac. Sci. Tokyo*, 25 (1978), p. 149-156.
- [2] M. FALK et R. RANDELL - *The lower central series of a fiber-type arrangement, Invent. Math.* 82 (1985), p. 77-88.
- [3] V. JONES - *Index of subfactors, Invent. Math.* 72 (1983), p. 1-25.
- [4] T. KOHNO - *Série de Poincaré - Koszul associée aux groupes de tresses pures, Invent. Math.* 82 (1985) p. 57-75.
- [5] T. KOHNO - *Poincaré series of the Malcev completion of generalized pure braid groups, à paraître.*
- [6] T. KOHNO - *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces, Nagoya Math. J.* 92 (1983), p. 21-37.
- [7] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and Yang - Baxter equations, Annales Inst. Fourier*, 37 (fascicule 4) (1987), p. 139-160, Colloque en l'honneur de J.-L. Koszul.
- [8] T. KOHNO et T. ODA - *The lower central series of the pure braid group of an algebraic curve, à paraître.*

H. Ouvertures

- [1] J.-L. DUPONT - *On polygarithms, Aarhus, prépublication, 1987.*
- [2] Y. IHARA - *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Maths*, 123 (1986), p. 43-106.

Pierre CARTIER
 École Polytechnique
 Centre de Mathématiques
 F-91128 PALAISEAU CEDEX