

Astérisque

PIERRE ARNOUX

Ergodicité générique des billards polygonaux

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 696, p. 203-221

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__203_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__203_0)

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Ergodicité générique des billards polygonaux
[d'après Kerckhoff, Masur, Smillie]

PAR PIERRE ARNOUX

§0. INTRODUCTION

HISTORIQUE DU PROBLÈME, ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Soit ϕ_t un flot sur un espace X , et μ une mesure de probabilité sur X , invariante par le flot; on dit que le système (X, ϕ_t, μ) est ergodique si, pour tout ensemble mesurable E invariant par le flot, on a $\mu(E) = 0$ ou $\mu(X - E) = 0$. Une caractérisation équivalente de l'ergodicité est que, pour toute fonction intégrable f sur X , et μ -presque tout $z \in X$, la limite de $1/T \int_0^T f(\phi_t(z)) dt$ existe et vaille $\int_X f d\mu$ (la moyenne temporelle est égale à la moyenne spatiale).

Soit P un domaine de $\mathbb{R}^2$, délimité par une courbe de classe C^1 par morceaux. Le flot du billard sur P est donné par le mouvement d'un point qui suit un mouvement rectiligne uniforme en se réfléchissant de façon élastique sur la courbe qui borne le domaine; de façon plus précise, on peut le définir comme le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent, en identifiant sur le bord les vecteurs tangents symétriques par rapport au bord. Ce flot possède une mesure invariante naturelle, produit de la mesure de Lebesgue sur le domaine P par la mesure angulaire sur le cercle des directions.

Ce système intervient dans plusieurs problèmes classiques, et on a beaucoup étudié ses propriétés ergodiques. Celles-ci dépendent de façon essentielle des propriétés du bord; on sait en particulier que, si le bord est fortement convexe (c'est-à-dire de courbure partout strictement positive) et de classe C^k , $k > 6$, le système n'est pas ergodique, à cause de l'existence de nombreuses caustiques, que l'on démontre par des techniques analytiques de petits dénominateurs (cf. [L], et [D, chap. IV] pour un exposé général sur les billards convexes). La convexité simple n'est pas suffisante: on connaît un exemple de billard convexe, mais non fortement convexe, (en forme de stade), qui est ergodique, et même un K -système (cf. [Bu]). Par contre, si le bord est concave, ou plus exactement s'il est formé d'un nombre fini de courbes de classe C^3 , à courbure strictement négative et se recoupant transversalement, on montre en utilisant des techniques de théorie ergodique que c'est un K -système, d'entropie positive (cf. [Si1], [KS]).

Le cas intermédiaire, où le bord est de courbure nulle, c'est-à-dire celui du billard polygonal, est moins bien connu; en particulier, on ne connaît pas d'exemple explicite de billard polygonal ergodique, et le résultat que nous allons démontrer est le premier qui permette d'affirmer qu'il en existe. Jusqu'à présent, le seul résultat général affirmait que, pour tout point z du polygone P , et pour presque toute direction, l'orbite issue du point dans cette direction est adhérente à l'un des sommets du polygone, ce qui permet de montrer qu'une trajectoire est déterminée presque sûrement par la suite des côtés qu'elle rencontre pour des temps positifs, et donc que

l'entropie du flot est nulle (cf. [ZK],[BKM], [Si2]). Les techniques utilisées dans la preuve qu'on va voir relèvent de la théorie des surfaces de Riemann; les trois types de billards amènent donc à des théories tout-à-fait différentes.

Pour le billard polygonal, un rôle important est joué par le sous-groupe Γ de $O(2)$ engendré par les symétries par rapport aux directions des côtés du polygone; en effet, les directions des segments successifs d'une trajectoire sont par définition dans l'orbite de la direction initiale sous l'action de Γ ; en particulier, si Γ est fini, le flot ne peut être ergodique, puisque toute trajectoire ne peut prendre qu'un nombre fini de directions; c'est évident si on regarde un billard rectangulaire ordinaire, sur lequel une trajectoire n'a que 4 directions. On dit que le polygone est *rationnel* si le groupe Γ est fini; si le polygone est simplement connexe, c'est équivalent à dire que tous les angles sont commensurables à π .

Dans le cas du billard rationnel, le fibré unitaire tangent se décompose de façon naturelle en surfaces invariantes par le flot, correspondant aux orbites des directions sous l'action de Γ ; il est assez facile de montrer que, pour toutes les orbites sauf un nombre dénombrable, le flot est minimal sur la surface associée (car sinon elle devrait contenir une trajectoire reliant 2 sommets; mais il est facile de voir qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de telles trajectoires, cf. [BKM]). Si le billard est rectangulaire, ou en général si les réflexions par rapports aux côtés du polygone P engendrent un pavage du plan, on peut montrer que pour presque toute direction le flot associé est uniquement ergodique, c'est-à-dire qu'il admet une seule mesure invariante non triviale (sans atomes aux singularités), qui est alors évidemment ergodique; dans le cas général, c'est encore vrai mais beaucoup plus difficile; nous le démontrerons dans la suite, et nous en déduirons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe dans l'ensemble des polygones convexes à n côtés (considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2n}$) un G_δ dense de polygones sur lesquels le flot du billard est ergodique.*

La condition de convexité simplifie l'énoncé mais n'est pas nécessaire: il suffit d'une part d'éviter d'avoir des polygones non connexes, pour lesquels on aurait des composantes invariantes non triviales, et d'autre part d'assurer que, pour tout entier n , l'ensemble des polygones rationnels dont le groupe Γ est d'ordre au moins n est dense dans l'ensemble de polygones considérés.

Le théorème ainsi généralisé s'applique, par exemple, au système formé de deux masses ponctuelles m_1, m_2 se déplaçant sans frottement sur le segment $[0, 1]$, avec des chocs élastiques sur les extrémités et entre elles-mêmes. Il est facile de montrer qu'il correspond à un billard sur un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueurs respectives $\sqrt{m_1}$ et $\sqrt{m_2}$ (cf. [CFS, p.154]). Ce billard est rationnel si les angles sont multiple rationnels de π , et l'ordre de Γ dépend alors du dénominateur. On déduit donc du théorème qu'il existe un G_δ dense de valeurs m_1, m_2 pour lesquelles ce système est ergodique.

Le théorème a été démontré dans [KMS], en utilisant des travaux antérieurs, en particulier [M]; le but de cet exposé est de donner une preuve complète et autonome. Les lemmes utilisés ont d'ailleurs un intérêt intrinsèque: ils permettent par exemple de donner une preuve du résultat de Veech et Masur sur l'unique ergodicité de presque tout échange d'intervalle.

§1. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION

Rappelons qu'un flot est dit uniquement ergodique s'il admet une seule mesure de probabilité invariante; il est clair que, muni de cette mesure, le système est ergodique (sinon on obtient une autre mesure invariante en prenant la restriction de la mesure donnée à un ensemble invariant non trivial). La démonstration repose sur le théorème suivant:

THÉOREME 2. *Sur un billard rationnel, pour presque toute direction initiale, le flot induit sur la surface de niveau correspondante est uniquement ergodique (c'est-à-dire qu'il existe une seule mesure invariante par le flot).*

Réduction au théorème 2. En notant $U(P)$ le fibré unitaire tangent à P , ϕ_t le flot géodésique associé, et μ_P la mesure naturelle sur le fibré, on veut comparer, pour une fonction continue f sur $U(P)$, les intégrales $1/T \int_0^T f(\phi_t(z)) dt$ et $\int_{U(P)} f(t) d\mu_P$. L'idée est d'approcher P par un polygone rationnel P' , et la fonction f par une fonction f' sur $U(P')$; l'intégrale $1/T \int_0^T f(\phi_t(z)) dt$ est alors proche de $1/T \int_0^T f'(\phi'_t(z)) dt$, pour "la plupart" des points z de P ; mais ici nous pouvons utiliser le lemme: puisque P' est rationnel, pour presque toute direction initiale la seconde intégrale tend vers l'intégrale sur la surface de niveau $\int_{M_\theta} f'(t) dA$ (On n'utilise en fait que l'ergodicité de la mesure invariante naturelle, et non l'unique ergodicité; mais je ne connais pas de manière plus simple d'avoir le résultat). Si le groupe Γ est assez grand, la surface M_θ passe près de tout point de $U(P')$, et le résultat obtenu sur M_θ est proche de l'intégrale sur l'espace entier $\int_{U(P')} f'(t) d\mu_{P'}$, elle-même proche de $\int_{U(P)} f(t) d\mu_P$. La section 2 élabore le détail de ce raisonnement, et démontre que, sur un G_δ dense, l'intégrale temporelle tend vers l'intégrale spatiale pour presque tout point de départ et pour toute fonction continue.

Démonstration du théorème 2. On considère un polygone rationnel P , de côtés $A_1 \dots A_n$, et on note S_i la symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite passant par l'origine et parallèle au côté A_i ; on note Γ le groupe engendré par les S_i . Le fibré unitaire tangent est formé des points (x, θ) , $x \in P$, $\theta \in S^1$, avec identification de (x, θ) et $(x, S_i(\theta))$ si $x \in A_i$. Comme on l'a vu ci-dessus, on a des ensembles invariants naturels, $M_\theta = \{(x, \gamma(\theta)); x \in P, \gamma \in \Gamma\}$, qui sont tous isométriques à la surface M égale au produit $P \times \Gamma$ quotienté par l'identification des points (x, γ) et $(x, S_i \cdot \gamma)$ si $x \in A_i$. Cette surface est munie d'une structure euclidienne avec singularité, qui provient de la structure euclidienne sur P ; la restriction à M_θ du flot géodésique est un flot à pente constante θ pour cette structure euclidienne—remarquons que la courbure en chaque singularité est multiple de 2π : c'est nécessaire pour pouvoir définir partout un flot à pente constante.

On gagne donc une dimension, puisque le fibré unitaire tangent est de dimension 3 et la surface M_θ de dimension 2, et on veut prouver que, sur une telle surface, un flot à pente constante est uniquement ergodique pour presque toute pente. Il y a un cas où c'est facile: quand la structure plate n'est pas singulière, c'est-à-dire quand les réflexions par rapport aux côtés de P engendrent un pavage du plan, et donc que la variété M est un tore. On se ramène alors à l'étude des flots à pente constante sur le tore, dont on sait qu'ils sont périodiques si la pente est rationnelle, et uniquement ergodique sinon, ce qui donne le résultat. C'est le cas du rectangle, où le groupe Γ est d'ordre 4, du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier; ces exemples sont élucidés depuis longtemps (cf. [FK]).

Quand la surface M est de genre 2 ou plus, l'étude devient plus difficile; on utilise la théorie de Teichmüller. La structure euclidienne sur M définit une structure conforme sur M privé des singularités, qui s'étend à M tout entier, et détermine un point de l'espace modulaire de M ; le flot dans une direction θ donnée détermine un feuilletage mesuré, et aussi, puisque M est munie d'une structure conforme, le feuilletage mesuré orthogonal, c'est-à-dire une forme différentielle quadratique, élément du fibré tangent à l'espace modulaire (sauf sur les points de ramification; voir le §3 pour les définitions). On peut supposer que la forme définit une structure euclidienne d'aire totale 1, c'est-à-dire se restreindre au fibré unitaire tangent. Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ agit

de façon naturelle sur ce fibré; en particulier, les trois sous-groupes à 1 paramètre suivants:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

induisent trois flots, notés respectivement g_t , h_t , et R_θ , et appelés flots géodésiques, horocycliques et circulaire. On vérifie facilement que, si q est la forme différentielle quadratique induite par la restriction du flot du billard à une composante, les formes différentielles quadratiques induites sur les autres composantes sont toutes les formes du type $R_\theta q$. Il s'agit donc de montrer l'unique ergodicité, pour presque tout θ , du feuilletage vertical de $R_\theta q$, ce qui sera fait dans les trois dernières sections en étudiant l'orbite de $R_\theta q$ par le flot géodésique. Il est important de bien voir qu'il y a deux niveaux de systèmes: le flot g_t sur l'espace QD des formes quadratiques à difféomorphisme près, et pour chaque forme le feuilletage vertical sur la surface M ; les propriétés dynamiques de ce feuilletage sont reliées aux propriétés de son orbite par le flot géodésique, de même que les propriétés d'une rotation sont liées aux propriétés du développement en fraction continue de son angle.

§2. RÉDUCTION AU CAS DU BILLARD RATIONNEL

Soit X un ensemble de polygones (considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, avec n assez grand: il suffit de repérer chaque sommet); on suppose que cet ensemble est compact—ce qui n'est pas très restrictif, car on peut toujours faire l'intersection avec un ensemble compact—et que, pour tout entier n , le sous-ensemble des polygones rationnels dont le groupe Γ est d'ordre plus grand que n y est dense. Comme la situation n'est pas modifiée par une homothétie, on peut supposer que tous les polygones sont d'aire 1. On va montrer qu'il existe dans X un G_δ dense de billards ergodiques, ce qui généralise le théorème donné dans l'introduction.

On appelle U le fibré au dessus de X dont la fibre au-dessus du polygone $P \in X$ est le fibré unitaire tangent à P , $U(P)$, isomorphe à $P \times S^1$, avec identification au-dessus du bord des directions symétriques par rapport au bord. On notera comme ci-dessus ϕ_t le flot du billard, qui préserve chaque fibre, et μ_P la mesure invariante sur $U(P)$, produit de la mesure de Lebesgue sur P par la mesure de Haar sur S^1 ; μ_P est de masse totale 1, puisque P est d'aire 1. On veut étudier les moyennes $1/T \int_0^T f(\phi_t(z)) dt$ pour toute fonction f continue sur $U(P)$.

Il suffit d'étudier une seule fonction. On peut trouver une suite dénombrable $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur U telles que leur restriction à chaque $U(P)$ soit dense dans $L^1(U(P))$. Si l'on montre que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un G_δ dense $E_i \subset X$ tel que, pour tout polygone $P \in E_i$, et presque tout $z \in U(P)$, on ait:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(\phi_t(z)) dt = \int_{U(P)} f_i d\mu_P$$

on obtient le résultat cherché, en prenant l'intersection E des E_i , qui forme encore un G_δ dense par théorème de Baire. En effet, tout billard ergodique est contenu dans E , puisqu'alors la convergence a lieu pour toutes les fonctions intégrables; si par contre P n'est pas ergodique, il existe une fonction f intégrable, invariante par ϕ_t et non constante; on vérifie facilement que, pour T fixé, la fonction $1/T \int_0^T g(\phi_t(z)) dt$ est au moins aussi proche de f dans $L^1(U(P))$ que g . Mais si P était dans E , on pourrait extraire des f_i une suite tendant vers f , et les moyennes sur les orbites $1/T \int_0^T f_i(\phi_t(z)) dt$ devraient chacune converger vers une constante quand T tend vers l'infini, en restant proche de f , ce qui est contradictoire.

On peut donc se restreindre à étudier le cas d'une seule fonction définie sur U , que j'appellerai f . On notera $f_P(z)$ sa valeur en un point $(z, P) \in U$; si z , considéré comme un élément du fibré tangent de $\mathbb{R}^2$ appartient à la fois à $U(P)$ et à $U(Q)$, les valeurs $f_P(z)$ et $f_Q(z)$ sont distinctes; cependant, par continuité de f , ces valeurs sont peu différentes si P et Q sont proches dans X .

On peut supposer cette fonction d'intégrale nulle sur toute fibre. Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_{U(P)} f d\mu_P$ dépend continûment de P ; en effet, U est compact, donc $|f|$ est bornée par une constante M ; on peut trouver un voisinage V de P tel que l'intersection I de tous les polygones $Q \in V$ soit de mesure $> 1 - \epsilon/3M$; l'intégrale sur l'un des $U(Q)$ est alors approximée à $\epsilon/3$ par l'intégrale restreinte à $U(I)$. Enfin, par uniforme continuité de f , on peut supposer le voisinage choisi de telle manière que, pour tout polygone Q dans V et tout point z du fibré au dessus de l'intersection, les valeurs $f_P(z)$ et $f_Q(z)$ soient distantes de moins de $\epsilon/3$. On en déduit que les intégrales de f sur $U(P)$ et $U(Q)$ diffèrent de moins de ϵ , d'où le résultat.

On peut donc remplacer f par $f - \bar{f}$, avec $\bar{f}_P(z) = \int_{U(P)} f d\mu_P$ pour $z \in U(P)$, ce qui donne une fonction continue d'intégrale nulle sur toute fibre, et chercher les polygones P pour lesquels on a presque sûrement $\lim_{T \rightarrow \infty} F_P(z, T) = 0$, où on a posé:

$$F_P(z, T) = \frac{1}{T} \int_0^T f_P(\phi_t(z)) dt.$$

Une autre façon d'écrire le critère d'ergodicité. La fonction $F_P(z, T)$, pour T fixé, est définie sauf sur l'ensemble des z qui vont vers un sommet du polygone en un temps inférieur à T , qui est de codimension 1 et donc de mesure nulle. Cette fonction est continue là où elle est définie, par continuité de f sur U et de ϕ_t sur son ensemble de définition, elle est bornée en valeur absolue par la borne M de $|f|$, et, d'après le théorème ergodique, la limite $\lim_{T \rightarrow \infty} F_P(z, T)$ existe pour presque tout z et est intégrable. Par convergence dominée, il est donc équivalent de chercher si $\lim_{T \rightarrow \infty} F_P(z, T) = 0$ presque partout ou si $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P = 0$; de plus, on a la relation évidente: $F_P(z, T+S) = \frac{T}{T+S} F_P(z, T) + \frac{S}{T+S} F_P(\phi_T(z), S)$, ce qui entraîne facilement que si $\int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P < \epsilon$ pour un certain T , alors $\int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P < 2\epsilon$ pour tout T assez grand.

On cherche donc l'ensemble E des polygones satisfaisant à:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists T \in \mathbb{N} \quad \int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P < \frac{1}{n}$$

Définition de $E(n)$ et de $E(n, T)$. On pose:

$$E(n, T) = \{P \in X \mid \int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P < \frac{1}{n}\} \quad E(n) = \bigcup_T E(n, T)$$

on a évidemment $E = \bigcap_n E(n)$, et il suffit de prouver que $E(n, T)$ est ouvert, parce que l'intégrale $\int_{U(P)} |F_P(z, T)| d\mu_P$ dépend continûment de P , et que $E(n)$ est dense, en montrant qu'il contient les polygones rationnels dont le groupe Γ est d'ordre assez grand.

L'ensemble $E(n, T)$ est ouvert. On procède comme pour démontrer la continuité de l'intégrale: on choisit un voisinage V , on considère l'intersection I de tous les polygones de ce voisinage; on peut supposer le voisinage assez petit pour qu'il y ait, dans le fibré tangent à I , un ensemble de mesure $1 - \epsilon/M$ de points dont les orbites ne vont vers un sommet avant le temps T dans aucun des polygones. Par continuité de f et ϕ_t sur cet ensemble, on a la continuité de $F_P(z, T)$, donc celle de $\int_{U(I)} |F_P(z, T)| d\mu_P$, qui approxime à ϵ près l'intégrale cherchée.

L'ensemble $E(n)$ est dense. Par uniforme continuité de f , on peut trouver δ tel que, si $|z_1 - z_2| < \delta$, alors $|f_P(z_1) - f_P(z_2)| < 1/2n$. Montrons qu'un polygone P dont le groupe de réflexions Γ est d'ordre $|\Gamma| > 2/\delta$ appartient à $E(n)$.

Le fibré tangent à P se décompose en sous-espaces invariants M_θ , qui sont tous de mesure de Lebesgue $|\Gamma|$, puisqu'ils sont formés comme on l'a vu de $|\Gamma|$ copies de P qui est de mesure 1. Posons, en notant A la mesure sur M_θ , $I_\theta = 1/|\Gamma| \int_{M_\theta} f dA$.

Le théorème 2 nous dit que pour presque tout θ le flot induit sur M_θ est uniquement ergodique, donc ergodique pour la mesure A , c'est-à-dire qu'on a pour presque tout $z \in M_\theta$: $\lim_{T \rightarrow \infty} F_P(z, T) = I_\theta$ si $z \in M_\theta$. L'intégrale cherchée tend donc vers $\int_{U(P)} |I_\theta| d\mu_P$.

L'application $(x, \theta) \mapsto (x, \theta + \theta_2 - \theta_1)$ envoie M_{θ_1} sur M_{θ_2} , et l'hypothèse faite sur Γ nous dit qu'on peut toujours supposer: $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$, puisque deux points consécutifs d'une orbite de Γ dans S^1 sont distants de moins de δ . L'uniforme continuité de f entraîne alors $|I_{\theta_1} - I_{\theta_2}| < 1/2n$. Mais les surfaces M_θ forment une partition de P , et on a en intégrant sur cette partition: $\int_{S^1} I_\theta d\theta = \int_{U(P)} f d\mu_P = 0$, donc pour tout θ $|I_\theta| < 1/2n$, et, *a fortiori*, $\int_{U(P)} |I_\theta| d\mu_P < 1/2n$; il suffit donc de prendre T assez grand pour que cette intégrale approche à $1/2n$ près l'intégrale cherchée.

§3. LE BILLARD RATIONNEL ET LES FORMES DIFFÉRENTIELLES QUADRATIQUES ASSOCIÉES

Revenons à la surface $M = \{(x, \gamma) | x \in P, \gamma \in \Gamma\}$ définie au §1; cette surface est naturellement munie d'une structure plate (ou euclidienne), sauf aux points qui correspondent aux sommets de P , puisqu'elle est formée de copies de P . Elle est orientable: il suffit de munir $P \times \{\gamma\}$ de l'orientation de P si γ préserve l'orientation, et de l'orientation inverse sinon; ces orientations sont compatibles, puisqu'on passe d'un morceau à l'autre par une symétrie. Si P est rationnel, M est compacte, par finitude de Γ , et l'angle au sommet en chaque singularité est multiple de 2π .

On appelle feuilletage mesuré singulier sur M la donnée, sur M privée d'un nombre fini de points, de cartes locales $\phi \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec des changements de cartes du type $x, y \mapsto x', c \pm y$; les ensembles $\phi^{-1}(y = \text{constante})$ sont les feuilles du feuilletage (cf. [FLP]). Le feuilletage peut être considéré localement comme donné par une 1-forme différentielle fermée, bien définie au signe près, et par intégration de cette forme on obtient, sur chaque transversale aux feuilles, une mesure dont la masse totale ne varie pas quand on bouge la transversale en gardant les extrémités sur la même feuille. On demande de plus qu'au voisinage de chaque point singulier, le feuilletage soit donné par une forme du type $\text{Im}\sqrt{z^k dz^2}$, qui est bien définie au signe près (Fig. 1).

La mesure transverse est dite ergodique si, pour tout ensemble mesurable qui est union de feuilles, l'intersection avec un intervalle transverse est de mesure nulle ou pleine. Le feuilletage est uniquement ergodique s'il admet une seule mesure transverse invariante, qui est alors automatiquement ergodique. Un flot préservant une mesure m définit un feuilletage mesuré, dont les feuilles sont les orbites du flot, la mesure sur un intervalle transverse γ étant définie comme la limite $\lim_{T \rightarrow 0} 1/T m\{\phi_t(x); x \in \gamma, 0 \leq t \leq T\}$; l'ergodicité et l'unique ergodicité du flot sont alors équivalentes à celles du feuilletage, c'est le cas du flot défini sur $M_\theta \simeq M$.

Généralités sur les formes différentielles quadratiques. On appelle forme différentielle quadratique, ou par abus de langage forme, un couple de feuilletages singuliers mesurés transverses sur une surface M , qui sera toujours supposée orientable, compacte et connexe (cf. [HM] pour une autre présentation). Un tel couple de feuilletages détermine un système de cartes sur

$\mathbb{R}^2$ en tout point régulier, en envoyant le premier feuilletage sur le feuilletage de $\mathbb{R}^2$ par les verticales, et le second sur les horizontales—on appellera donc le premier feuilletage vertical, et le second horizontal. Réciproquement, on peut définir une forme différentielle quadratique par la donnée, en tout point régulier, d'un système de cartes sur $\mathbb{R}^2$ avec changements de cartes de la forme $z + c$ ou $-z + c$, avec singularités du type $z^k dz^2$: les deux feuilletages ont $k + 2$ branches aux singularités.

Une forme différentielle quadratique induit sur M une structure plate avec un nombre fini de points singuliers, qui sont du type conique avec un angle au sommet multiple de π : cela revient à élargir le groupe de changements de cartes des translations aux isométries. Cette structure permet de calculer des aires; l'aire totale est donc bien définie, c'est la norme de la forme quadratique. On se restreindra toujours aux formes de norme 1.

Une structure plate induit, en admettant comme changements de cartes les applications conformes, une structure conforme sur M privée d'un nombre fini de points, qu'on peut étendre à M tout entier. On retrouve ici le lien avec la terminologie classique de la théorie des surfaces de Riemann: dans la structure conforme qu'elle détermine, une forme différentielle quadratique peut s'écrire sous la forme $f(z) dz^2$; la différence est que nous n'avons pas fixé a priori la structure conforme.

La structure plate est facile à visualiser localement, en prenant les deux feuilletages comme axes de coordonnées; un segment géodésique se repère à isotopie près par la longueur de ses projections sur les axes horizontal et vertical. Une géodésique est simplement, localement, une droite à pente constante, ce peut être plus compliqué du point de vue global car la géodésique peut passer par une singularité et y changer de pente (Fig. 1). On appellera liaison géodésique un segment à pente constante dont les deux extrémités sont des singularités; cette notion sera utilisée au §4.

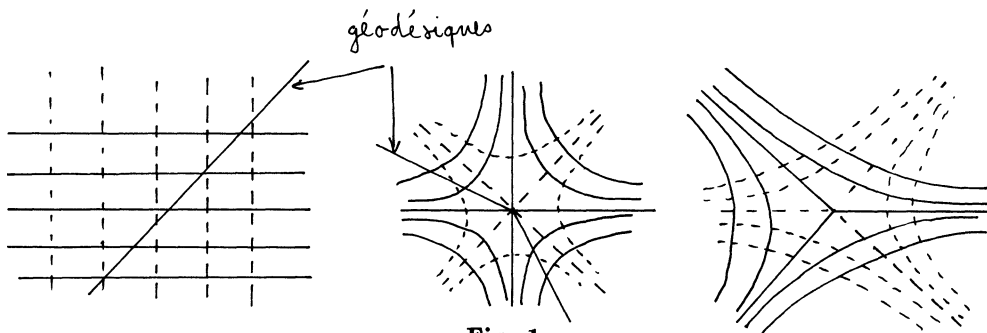
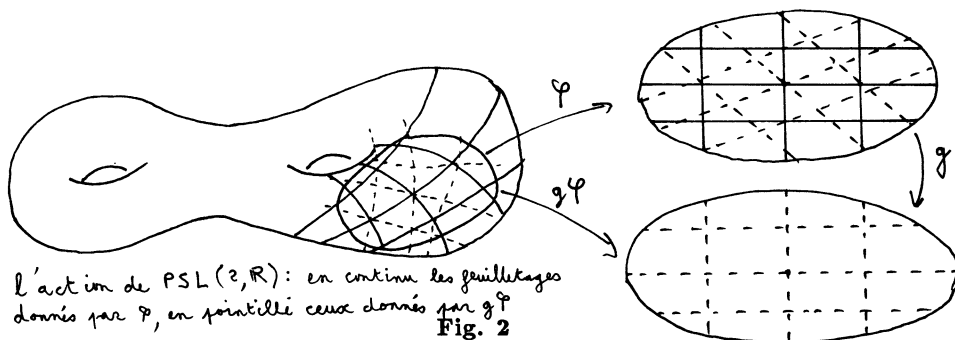


Fig. 1

Réciproquement, une structure plate avec singularités coniques vient d'une forme différentielle quadratique si tous les angles au sommet sont multiples de π . Dans une telle structure, un seul feuilletage à pente constante suffit à définir une forme différentielle quadratique: en effet, c'est un feuilletage mesuré, et il possède un feuilletage transverse bien déterminé, le feuilletage orthogonal pour la structure plate donnée.

Si les feuilletages sont orientables, c'est-à-dire s'ils proviennent de flots, on vérifie facilement que l'angle en chaque singularité est multiple de 2π —ces deux conditions sont en fait équivalentes. Il revient au même de dire que la forme différentielle quadratique peut être définie par des cartes avec changements de cartes de la forme $z + c$ uniquement. Les formes



différentielles quadratiques que nous rencontrerons ici sont orientables, puisqu'elles proviennent d'un flot; mais nous n'utiliserons nulle part ce fait.

L'action de $PSL(2, \mathbb{R})$. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit naturellement sur $\mathbb{R}^2$, donc il agit sur l'espace des formes différentielles quadratiques, considérées comme systèmes de cartes sur $\mathbb{R}^2$: à une carte ϕ , un élément $g \in SL(2, \mathbb{R})$ fait correspondre la carte $g\phi$. Comme on admet $z \mapsto -z$ comme changement de carte, l'action de $-I$ est triviale, et on a en fait une action de $PSL(2, \mathbb{R})$. En terme de feuilletages, l'action de g fait correspondre à un couple de feuilletages leur image par g^{-1} . Comme cette action préserve les aires, on peut se restreindre à l'ensemble des formes de norme 1.

Si γ est un segment géodésique de coordonnées (h, v) pour la forme q , c'est encore un segment géodésique pour gq , $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, dont on calcule simplement les coordonnées en appliquant g aux coordonnées initiales.

Nous serons particulièrement intéressés dans la suite par l'action de 3 sous-groupes à un paramètre de $PSL(2, \mathbb{R})$:

—le sous-groupe $g_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$

L'action de ce sous-groupe est appelé flot de Teichmüller, ou flot géodésique pour une raison que nous verrons ci-dessous; l'orbite d'une forme pour ce flot permet d'étudier l'ergodicité du feuilletage vertical. Si l'on considère la forme quadratique comme un couple de feuilletages mesurés transverse, l'effet du flot est de diviser par $e^{\frac{t}{2}}$ la mesure du feuilletage vertical et de multiplier par $e^{\frac{t}{2}}$ celle du feuilletage horizontal, ce qui écrase les verticales et dilate les horizontales tout en préservant la mesure totale.

—le sous-groupe $h_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ce flot est appelé flot horocyclique.

—le sous-groupe $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Ce flot est appelé flot circulaire; ses orbites sont évidemment compactes, et c'est le seul des trois qui préserve les structures conforme et métrique sous-jacentes; il consiste à faire tourner les deux feuilletages d'un angle $-\theta$.

Le flot donné par le billard sur la composante M_0 définit sur M un feuilletage à pente constante, et donc une forme quadratique q dont il est le feuilletage vertical; on vérifie que le feuilletage vertical de la forme $R_\theta q$ est le feuilletage donné sur la composante M_θ . Le théorème 2 est donc un cas particulier du théorème plus général suivant:

THÉORÈME 2'. *Soit q une forme différentielle quadratique; pour presque tout θ , le feuilletage vertical de $R_\theta q$ est uniquement ergodique.*

Nous avons besoin de plusieurs résultats géométrique pour la démonstration de ce théorème, qui sera faite dans les deux sections 4 et 5.

La théorie de Teichmüller. Nous sommes intéressés par des propriétés dynamique du feuilletage, qui ne changent pas si l'on conjugue par un difféomorphisme, il est donc naturel de considérer l'espace des structures conformes à conjugaison près par une isotopie (difféomorphisme isotope à l'identité): c'est ce qu'on appelle l'espace de Teichmüller de M . Par le théorème d'uniformisation, c'est aussi l'espace des structures riemanniennes sur M de courbure constante (1, 0 ou -1, suivant la nature topologique de M) à isotopie près.

Le théorème de Teichmüller affirme que, étant données 2 structures conformes C_1, C_2 , en remplaçant au besoin C_2 par une structure isotope, on peut trouver une application quasi-conforme ϕ de rapport de dilatation constant e^{2d} qui envoie C_1 sur C_2 ; d est appelé distance de Teichmüller de C_1 à C_2 (cf. [A], [BK, chap. 5]). L'application ϕ est de rapport de dilatation minimal parmi toutes les applications qui envoient C_1 sur C_2 , et se réalise de la façon suivante: on peut trouver deux formes différentielles quadratiques q_1, q_2 telles que $q_2 = g_d q_1$, et que C_1 (resp. C_2) soit la structure conforme sous-jacente à q_1 (resp. q_2). Ce théorème munit l'espace de Teichmüller d'une distance, et fait apparaître l'ensemble des formes différentielles quadratique de norme 1 à isotopie près comme le fibré unitaire tangent de cet espace et le flot g_d comme le flot géodésique pour cette distance.

On sait que l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule ouverte, et le flot g_t emmène tout point à l'infini; il n'y a donc aucune récurrence, et l'orbite d'une forme par le flot ne nous apporte pas d'information; pour y remédier, on va travailler à difféomorphisme près, et non plus à isotopie près. On appelle groupe modulaire de M le groupe des difféomorphismes de M modulo les difféomorphismes isotopes à l'identité; il agit sur l'espace de Teichmüller, et le quotient s'appelle l'espace modulaire de M . L'ensemble des formes différentielles quadratiques de norme 1 à équivalence près par un difféomorphisme s'identifie au quotient par l'action du groupe modulaire du fibré unitaire tangent de l'espace de Teichmüller: on appellera QD cet espace.

L'intérêt de l'opération est de munir l'ensemble des formes à équivalence près d'une distance; si une suite q_i tend vers q_∞ pour cette distance, alors, quitte à remplacer les q_i par des formes équivalentes, on peut supposer que les cartes qui définissent q_i tendent vers celles qui définissent q ; en particulier, étant donné une suite x_i de points de M qui converge vers un point x_∞ , si on note x_i^T le point à distance T de x_i sur la feuille du feuilletage vertical de q_i passant par x_i , les points x_i^T tendent vers x_∞^T , si celui-ci est bien défini (c'est-à-dire que la feuille issue de x_∞ ne va pas à une singularité avant le temps T). De plus, l'ensemble des formes quadratiques de norme 1 qui n'ont pas de liaison géodésique de longueur inférieure à ϵ est compact; en effet il est fermé, et il se projette sur des structures plates qui n'ont pas de géodésiques fermées de longueur inférieure à ϵ (si une structure plate admet une géodésique de longueur α , elle admet un anneau maximal de telles géodésiques fermées, et cet anneau contient dans son bord par un liaison géodésique de longueur $\leq \alpha$). Or on montre que l'espace modulaire peut être compactifié en rajoutant des surfaces où on a "pincé" des courbes, en les remplaçant par une singularité conique (cf. [Be]); l'ensemble des structures plates sans petites géodésiques est donc compact.

On dira qu'une forme différentielle q est *récurrente* si son orbite positive dans QD par le flot géodésique admet des points d'accumulation pour cette distance, *divergente* sinon; la remarque précédente nous donne un critère de divergence. On peut montrer que le flot géodésique sur

QD admet une mesure finie invariante et absolument continue, ce qui entraîne que presque toute forme est récurrente.

Le cas du tore. à une structure conforme sur le tore à isotopie près correspond une unique métrique plate sur le tore, qui correspond elle-même à un réseau du plan complexe; on peut supposer que le premier vecteur de ce réseau est 1, et que le deuxième est dans le demi-plan supérieur. (ceci correspond à fixer un méridien et un parallèle, à normaliser la métrique pour que la longueur du méridien soit 1, et à repérer la métrique par la longueur du parallèle et l'angle qu'il fait avec le méridien). On a donc montré que l'espace de Teichmüller du tore est en bijection avec le demi-plan supérieur; on peut vérifier que la distance de Teichmüller correspond à la distance hyperbolique $(dx^2 + dy^2)/y^2$.

Le groupe modulaire du tore correspond aux automorphismes du réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est donc $SL(2, \mathbb{Z})$, et l'espace modulaire du tore est le quotient du plan hyperbolique par $SL(2, \mathbb{Z})$, une variété hyperbolique non compacte avec un cusp et deux points singuliers. L'espace des formes différentielles quadratiques est un fibré en cercles sur cet espace, et le flot géodésique est facile à analyser: soit une trajectoire est récurrente, soit elle tend vers le cusp, et dans ce cas il y a une courbe dont la longueur tend vers 0, ce qui entraîne que le feuilletage vertical admet une feuille fermée, donc il est de pente rationnelle.

On retrouve le résultat classique: un feuilletage mesuré du tore est soit périodique, soit uniquement ergodique—ceci permet d'étudier les billards sur un rectangle ou un triangle équilatéral, mais ne suffit pas pour obtenir le théorème, car on reste limité à des groupes Γ d'ordre petit.

Pour alléger les notations, on supposera dans toute la suite qu'on s'est donné une forme différentielle quadratique q de norme 1, et on notera q_θ la forme $R_\theta q$; puisqu'on a une action de $PSL(2, \mathbb{R})$, on peut se restreindre à $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sauf mention expresse, on se placera toujours dans l'espace QD : la forme est définie à difféomorphisme près.

§4. FORMES DIVERGENTES

Ce paragraphe est consacré à prouver:

PROPOSITION. *L'ensemble $\{\theta \in S^1 | q_\theta \text{ est divergente}\}$ est négligeable.*

Comme on vient de le voir, si une forme q_θ est divergente, $g_t q_\theta$ admet une liaison géodésique aussi petite que l'on veut pour t assez grand. Il n'y a pas d'obstruction évidente à avoir une liaison géodésique petite, mais il y en a pour une liaison géodésique petite qui n'est pas coupée par une autre liaison géodésique petite; on dira qu'une liaison est ϵ -petite si elle est géodésique et de longueur inférieure à ϵ , et qu'elle est ϵ, C -isolée si elle est ϵ -petite et n'est pas coupée en son intérieur par une liaison C -petite. On va d'abord montrer que, s'il existe un ensemble de mesure positive de formes divergentes, il existe dans leurs orbites géodésiques beaucoup de formes ayant des liaisons ϵ, C -isolées; on va montrer ensuite que, parce qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de liaisons géodésiques disjointes, les formes ayant des liaisons ϵ, C -isolées doivent être rares.

Le premier énoncé dit précisément:

LEMME. *Si l'ensemble $\{\theta \in S^1 | q_\theta \text{ est divergente}\}$ est de mesure positive, on peut trouver des constantes positives C, δ , des suites ϵ_i tendant vers 0 et T_i tendant vers l'infini, et des ensembles $S_i \subset S^1$, de mesure supérieure à δ , tels que, si $\theta \in S_i$, la forme $g_{T_i} q_\theta$ possède une liaison géodésique ϵ_i, C -isolée.*

DÉMONSTRATION: si l'on remplace ϵ , C -isolée par ϵ -petite, la proposition est une conséquence immédiate de la définition des formes divergentes.

Appelons ϵ -complexe un complexe de M dont les sommets sont des singularités de q , les arêtes des liaisons ϵ -petites, et les faces les triangles bordés par ces arêtes et ne contenant aucune singularité en leur intérieur. Une arête du ϵ -complexe sera appelée un *bord* si elle ne borde pas deux faces. Nous avons besoin du lemme géométrique suivant:

SOUS-LEMME. Sur une surface M de genre χ à k singularités, un ϵ -complexe n'a pas plus de $3(k - \chi)$ arêtes et $2(k - \chi)$ faces, il a un bord si ϵ est assez petit, et si le bord d'un ϵ -complexe est coupé en son intérieur par une liaison C -petite, alors il existe un $2\epsilon + C$ -complexe qui possède plus de *simplices*.

DÉMONSTRATION: Un ϵ -complexe de M peut être complété en une triangulation maximale de M à k sommets; si l'on note s, a, f le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de cette triangulation, le fait que chaque triangle soit bordé par trois arêtes et que chaque arête borde deux triangles entraîne que $3f = 2a$, et par définition de χ on a $s - a + f = \chi$, connaissant $s = k$, ce système donne $a = 3(k - \chi)$, $f = 2(k - \chi)$, d'où la borne pour le nombre de faces et d'arêtes.

Un triangle dont tous les côtés sont de longueur inférieure à ϵ est de surface inférieure à $\epsilon^2\sqrt{3}/4$; donc l'aire totale d'un ϵ -complexe est bornée par $(k - \chi)\epsilon^2\sqrt{3}/2$; cette aire est plus petite que 1 pour ϵ assez petit, et dans ce cas le ϵ -complexe doit avoir un bord, puisqu'il ne remplit pas toute la surface.

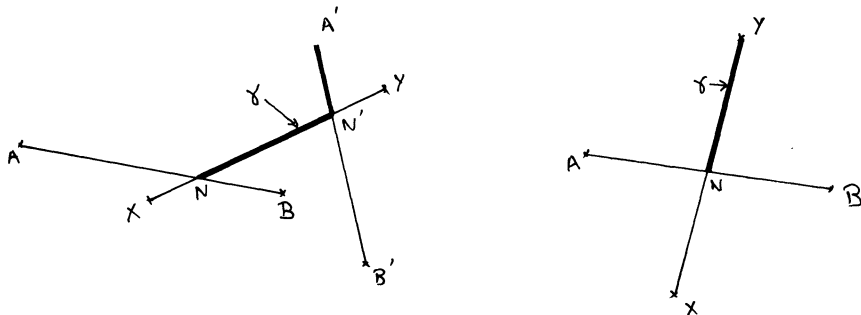


Fig. 3

Enfin, supposons que AB soit un bord coupé au point intérieur N par la liaison géodésique C -petite XY . Puisque AB est un bord, on peut supposer que le début du segment NY n'appartient pas au complexe. Si ce segment n'est pas disjoint du complexe, il rencontre un autre bord $A'B'$ en un point N' tel que NN' soit disjoint du complexe. on appellera γ le chemin formé du segment NN' , et du segment $N'B'$ si la somme des angles BNN' et $NN'B'$ est supérieure à π , ou du segment $N'A'$ sinon. Si NY est disjoint du complexe, on pose $\gamma = NY$ (Fig. 3). On note N_t un paramétrage de γ , avec $N_0 = N$, N_1 l'autre extrémité. Pour t petit, on peut construire le triangle ABN_t . S'il n'y a pas d'obstruction à relever ce triangle jusqu'à N_1 , on peut rajouter le triangle ABN_1 au complexe: tous ses bords sont de longueur inférieure à $2\epsilon + C$, et le triangle lui-même n'est pas contenu dans le complexe de départ, puisqu'il contient le début de NY (la condition sur les angles implique que AN_1 et BN_1 sont du même côté de AB que NY). La seule obstruction possible est que l'un des bords du triangle, par exemple

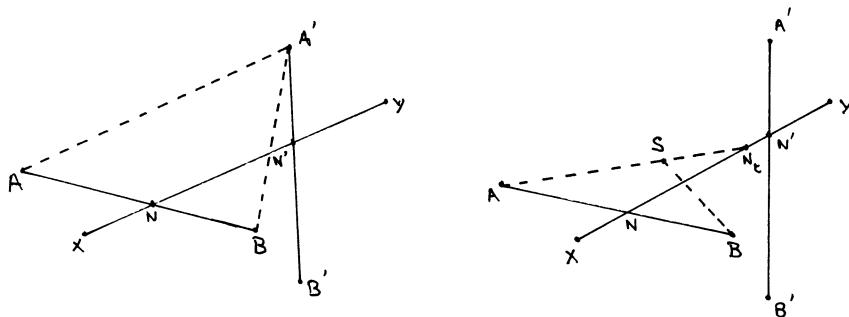


Fig. 4

AN_t , contienne une singularité S ; mais alors la liaison BS est de longueur inférieure à $C + 2\epsilon$, et on peut donc rajouter le triangle ABS (Fig. 4). $\square$

FIN DE LA PREUVE DU LEMME: Notons $n(\epsilon, T, \theta)$ le nombre maximal de simplexes d'un ϵ -complexe de $g_T q_\theta$; d'après le lemme, ce nombre est majoré par $k + 5(k - \chi)$. On a vu ci-dessus qu'on peut trouver des suites ϵ_i, T_i, S_i telles que la mesure des S_i soit minorée par une constante, et que $g_{T_i} q_\theta$ possède une liaison ϵ_i -petite si θ appartient à S_i . On prend une telle suite qui maximise $\inf_{i \in \mathbb{N}} \theta \in S_i, n(\epsilon_i, T_i, \theta)$ (il en existe, puisque ce nombre est majoré). On note $C(i, \theta)$ la longueur de la plus petite liaison géodésique qui coupe le bord d'un ϵ_i -complexe maximal de $g_{T_i} q_\theta$, et m_i la valeur médiane de $C(i, \theta)$ (c'est-à-dire le nombre tel que $\mu(\{\theta \in S_i | C(i, \theta) < m_i\}) = \mu(\{\theta \in S_i | C(i, \theta) > m_i\})$).

La suite m_i est minorée par une constante C ; en effet, dans le cas contraire on peut en extraire une sous-suite tendant vers 0. D'après le lemme, si $C(i, \theta)$ est inférieur à m_i , on peut construire un $2\epsilon_i + m_i$ complexe avec plus de simplexes. En posant $\epsilon'_i = 2\epsilon_i + C$, $T'_i = T_i$, $S'_i = \{\theta \in S_i | C(i, \theta) < m_i\}$, on obtient des suites qui satisfont aux mêmes hypothèses avec un $n(\epsilon'_i, T'_i, S'_i)$ plus grand, d'où une contradiction.

Il est clair que $S'_i = \{\theta \in S_i | C(i, \theta) > m_i\}$ vérifie bien les conditions de la proposition, car la mesure de S'_i est la moitié de celle de S_i , qui est minorée par une constante, et pour tout θ de S'_i , $g_{T_i} q_\theta$ possède une liaison ϵ_i, C -isolée — Il suffit de prendre le bord (non vide pour ϵ_i assez petit) d'un ϵ_i -complexe maximal et d'utiliser la définition de C . $\square$

Nous allons maintenant montrer:

LEMME. Soit $C > 0$ constant et $t > 2 \log(C/m)$, où m est la longueur de la plus petite liaison géodésique de q . Pour $\epsilon < C/2$ la mesure de l'ensemble des θ tels que $g_t q_\theta$ possède une liaison ϵ, C -isolée est inférieure à $K\epsilon$, où K est une constante ne dépendant que de C .

DÉMONSTRATION: Soit α une liaison géodésique; on peut supposer α verticale pour q_0 , de longueur l . La longueur de α dans la structure métrique associée à $g_t q_\theta$ est:

$$l(t, \theta) = l \sqrt{(e^t \sin^2 \theta + e^{-t} \cos^2 \theta)}$$

Posons $I_\alpha = \{\theta \in [-\pi/2, \pi/2] | l(t, \theta) < \epsilon\}$, $J_\alpha = \{\theta \in [-\pi/2, \pi/2] | l(t, \theta) < C\}$. La définition de $l(t, \theta)$ implique que I_α et J_α sont des intervalles, l'hypothèse faite sur ϵ montre que $I_\alpha \subset J_\alpha$, et enfin t a été choisi assez grand pour que $l(t, \pi/2)$ soit plus grand que C , donc J_α est un sous segment strict de $[-\pi/2, \pi/2]$. Un calcul élémentaire montre que $\mu(I_\alpha)$ est borné par une fonction linéaire de ϵ ; plus précisément:

De $|\sin \theta| \geq |\theta/2|$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ on tire:

$$l(t, \theta) \geq le^{\frac{\epsilon}{2}} |\sin \theta| \geq \frac{le^{\frac{\epsilon}{2}} |\theta|}{2} \geq \epsilon \quad \text{si } |\theta| \geq \frac{2\epsilon}{le^{\frac{\epsilon}{2}}}$$

donc $\mu(I_\alpha) < 4\epsilon/le^{\frac{\epsilon}{2}}$.

Si I_α est non vide, $l(t, 0)$, qui vaut $le^{-\frac{\epsilon}{2}}$, est inférieur à ϵ , donc, en majorant ϵ par $\frac{C}{2}$ et $|\sin \theta|$ par $|\theta|$, on obtient:

$$l(t, \theta) \leq le^{\frac{\epsilon}{2}} |\theta| + \frac{C}{2} < C \quad \text{si } |\theta| < \frac{C}{2le^{\frac{\epsilon}{2}}}$$

donc $\mu(J_\alpha) > C/le^{\frac{\epsilon}{2}}$.

On en déduit: $\mu(I_\alpha)/\mu(J_\alpha) < 4\epsilon/C$.

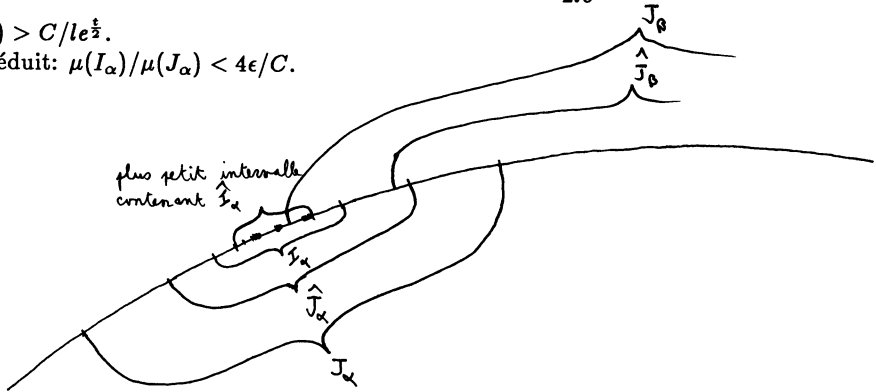


Fig. 5

On se restreint maintenant aux liaisons géodésiques α qui sont ϵ, C -isolées pour au moins un θ . Notons $\hat{I}_\alpha$ le sous-ensemble de I_α formé des θ tels que α soit ϵ, C -isolée pour $g_t q_\theta$, et $\hat{J}_\alpha$ le sous-intervalle de J_α dont l'extrémité droite est la moyenne de l'extrémité droite de J_α et de la borne supérieure de $\hat{I}_\alpha$, et dont l'extrémité gauche est la moyenne de l'extrémité gauche de J_α et de la borne inférieure de $\hat{I}_\alpha$ (Fig. 5). Par définition, si $\hat{J}_\alpha$ recoupe $\hat{J}_\beta$, alors $\hat{I}_\alpha$ recoupe J_β ou $\hat{I}_\beta$ recoupe J_β ; pour une valeur θ dans l'intersection, l'une des deux liaisons α, β est ϵ, C -isolée pour $g_t q_\theta$, et l'autre de longueur inférieure à C , donc elles sont disjointes. Ce raisonnement se généralise immédiatement: si θ appartient à l'intersection de n intervalles $\hat{J}_\alpha$, on a n liaisons géodésiques disjointes.

Or, comme on l'a vu plus haut, il ne peut exister plus de $3(k - \chi)$ liaisons géodésiques disjointes, donc aucun point ne peut appartenir à plus de $3(k - \chi)$ segments $\hat{J}_\alpha$; la somme des mesures de ces segments est donc bornée par $3(k - \chi)\pi$, et, puisque $\hat{J}_\alpha$ est par définition au moins aussi long que la moitié de J_α , la somme des mesures des J_α est bornée par $6(k - \chi)\pi$; compte tenu du résultat donné ci-dessus, la somme des mesures des intervalles I_α , qui contiennent tous les θ tels que $g_t q_\theta$ possède une liaison ϵ, C -isolée, est bornée par $24(k - \chi)\pi\epsilon/C$, ce qui est bien la majoration cherchée, avec $K = 24(k - \chi)\pi/C$. $\square$

PREUVE DE LA PROPOSITION: S'il existe un ensemble de mesure positive de formes divergentes, en choisissant ϵ assez petit pour que $K\epsilon$ soit plus petit que δ , et i assez grand pour que ϵ_i soit inférieur à ϵ , on obtient une contradiction entre les deux propositions, ce qui montre que l'ensemble des formes divergentes est négligeable. $\square$

§5. FORMES RÉCURRENTES

Dans ce qui suit, on appellera forme uniquement ergodique une forme différentielle quadratique dont le feuilletage vertical est uniquement ergodique. Cette section est consacrée à prouver:

PROPOSITION. *L'ensemble des θ tels que q_θ soit récurrente et non uniquement ergodique est de mesure nulle.*

DÉMONSTRATION: Elle utilise les propriétés des trois flots: géodésique, horocyclique et circulaire; l'orbite géodésique de q caractérise les formes non uniquement ergodiques, le flot horocyclique modifie linéairement les coordonnées ce qui permet des calculs difficiles avec les autres flots, et il est tangent au flot circulaire dont on étudie une orbite, donc on peut ramener localement une orbite circulaire à une orbite horocyclique.

Nous allons d'abord montrer que les points d'accumulation de l'orbite géodésique d'une forme récurrente non uniquement ergodique sont contenus dans un ensemble B , fermé, dont tous les points sont des formes possédant une liaison géodésique verticale. Nous montrerons ensuite que, sur un segment d'une orbite du flot horocyclique, la plupart des points sont loin de B . S'il existe un ensemble de mesure positive de θ tels que q_θ soit récurrente et non uniquement ergodique, on peut supposer qu'il existe t assez grand et un intervalle $I = [e^{-t}, e^t]$ autour de 0 tel que, pour la plupart des $\theta \in I$, $g_t q_\theta$ est proche de B . Mais il est facile de prouver que l'orbite horocyclique de $g_t q_0$ est une bonne approximation, autour de $g_t q_0$, de l'image par g_t de l'orbite circulaire de q_0 , d'où la contradiction cherchée. Le point délicat est que toutes les convergences utilisées doivent être uniformes, donc il faut se ramener à des ensembles compacts.

LEMME. *Il existe un ensemble B , fermé, de formes qui ont toutes une liaison verticale, tel que tout point d'accumulation de l'orbite géodésique d'une forme non uniquement ergodique soit contenu dans B .*

DÉMONSTRATION: Soit q une forme récurrente, et t_n une suite tendant vers l'infini telle que $g_{t_n} q$ tende vers une forme q_∞ (cette convergence étant prise dans QD). Il revient au même de fournir une suite ϕ_n de difféomorphismes de M tels que $\phi_n \circ g_{t_n} q$ tende vers q_∞ au-dessus de l'espace de Teichmüller; en choisissant bien les représentants, cela veut dire en particulier que, en tout point régulier pour q_∞ , le segment de feuille de longueur L issu du point x dans le feuilletage vertical (resp. horizontal) de $g_{t_n} q$ tend vers le segment de longueur L pour le feuilletage vertical (resp. horizontal) de q_∞ .

Si q n'est pas uniquement ergodique, on peut trouver deux mesures ergodiques distinctes (non proportionnelles) μ_1, μ_2 pour le feuilletage vertical. Soit J un segment transverse à ce feuilletage, et x_1, x_2 deux points de J génériques pour ces mesures ergodiques. Notons L_x^t la feuille de longueur t issue de x , et $L_x^{s,t}$, avec $s < t$, la différence entre L_x^t et L_x^s ; il est classique que, pour $a < b$ fixés, quand t tend vers l'infini, les points d'intersection entre J et $L_{x_i}^{at,bt}$ se répartissent asymptotiquement suivant la mesure μ_i , c'est-à-dire que le rapport $\#(L_{x_i}^{at,bt} \cap J) / \#(L_{x_i}^{at,bt} \cap J)$ tend vers $\mu_i(I) / \mu_i(J)$ quand t tend vers l'infini. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\phi_n(x_i)$ converge dans M vers un point y_i .

Il ne peut y avoir, pour q_∞ , de feuille du feuilletage horizontal qui coupe à la fois la feuille verticale issue de y_1 et celle issue de y_2 . en effet, sinon on peut trouver une bande de feuilles horizontales de largeur a qui coupe ces deux feuilles; on note b_i la distance de y_i à cette bande de feuilles. D'après la remarque faite au début de la démonstration, pour n assez grand, on peut trouver une bande de feuilles du feuilletage horizontal de $\phi_n g_{t_n} q$, de largeur a_n , qui recoupe

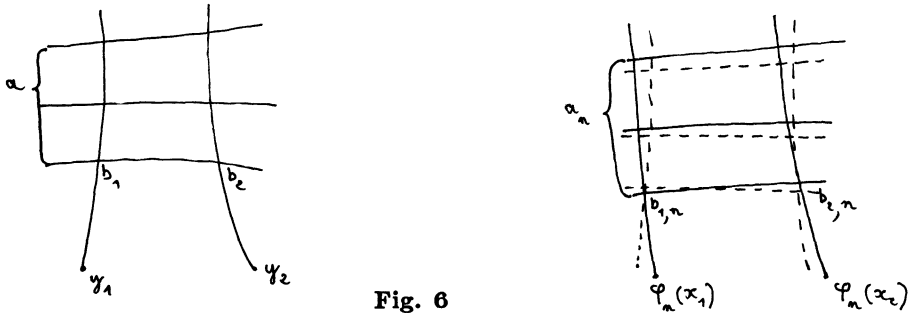


Fig. 6

les feuilles verticales issues de $\phi_n(x_1)$ et de $\phi_n(x_2)$ à des distances $b_{i,n}$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{i,n} = b_i$ (Fig. 6).

On a donc pour $g_{t_n}q$ un rectangle régulier, s'appuyant sur les feuilles du feuilletage vertical de $g_{t_n}q$ issues de x_1 et x_2 , et de hauteur a_n . En se ramenant à q par le flot géodésique, cela veut dire que les segments de feuilles $L_{x_i}^{b_{i,n}e^t, (b_{i,n}+a_n)e^t} = L_i^t$ forment les côtés d'un rectangle de feuilles régulières très long et très étroit (Fig. 7); mais il est clair que la différence entre le nombre de points d'intersection de L_1^t et de L_2^t avec J est au plus de 1, puisqu'alors J devrait couper un des segments de feuille sans couper l'autre, ce qui veut dire que J s'arrête au milieu de la bande: ceci ne peut arriver qu'une fois. Comme ce nombre de points d'intersection doit, lui, tendre vers l'infini, on en déduit que, pour tout sous-intervalle I , le rapport $\#(L_i^t \cap I) / \#(L_i^t \cap J)$ tend vers une limite indépendante de i ; mais cette limite est $\mu_i(I) / \mu_i(J)$, ce qui est impossible puisque μ_1 et μ_2 sont deux mesures distinctes.

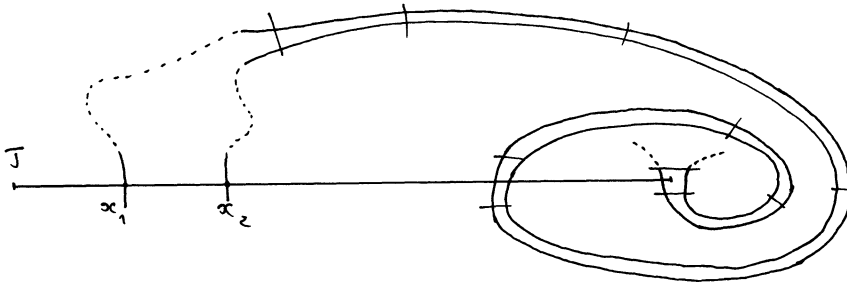


Fig. 7

Puisqu'il n'y a pas de feuille du feuilletage horizontal de q_∞ qui coupe à la fois L_{x_1} et L_{x_2} , ce feuilletage n'est pas minimal; mais on sait qu'un feuilletage mesuré se décompose en un nombre fini de composantes minimales, où toute feuille est dense, et de composantes périodiques formées d'un anneau de feuilles fermées isotopes; ces composantes sont bornées par des courbes fermées formées de liaisons entre singularités qui séparent la surface en deux domaines. Donc le feuilletage horizontal de q_∞ admet une telle courbe γ . On peut supposer que γ ne recoupe pas L_{x_1} ; donc le feuilletage vertical lui non plus n'est pas minimal, et la composante de L_{x_1} est bornée par une courbe fermée séparante α disjointe de γ .

Appelons B l'ensemble des formes quadratiques qui ont une trajectoire verticale fermée et une trajectoire horizontale fermée disjointes. On vient de prouver que B contient tous les points

d'accumulation des orbites géodésiques de formes non uniquement ergodiques. Reste à prouver que B est fermé. Soit $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers q . Chaque forme q_n possède deux trajectoires disjointes α_n verticale et γ_n horizontale; on peut supposer que α_n converge vers une courbe α , et de même pour γ . Si γ et α ne sont pas disjointes, il en est de même pour γ_n et α_n quand n est assez grand, par continuité, ce qui est absurde, donc les composantes respectives de γ et α sont bornées par des courbes fermées disjointes. $\square$

REMARQUE: B est de mesure nulle, car les formes qui admettent une liaison verticale donnée forment une variété de codimension 1, donc B est contenu dans une union dénombrable de variétés de codimension 1, ce qui est de mesure nulle.

On notera désormais B_ϵ l'ensemble des formes qui sont à distance inférieure ou égale à ϵ de B .

LEMME. Soit K un compact de l'ensemble des formes différentielles quadratiques; pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout q dans K , on ait: $\mu(\{s \in [-1, 1] | h_s q \in B_\epsilon\}) < \delta$.

DÉMONSTRATION: Remarquons d'abord que si un liaison géodésique a des coordonnées a et b dans la structure définie par une forme q , il a par définition pour coordonnées $a + bs$ et b dans la structure définie par $h_s q$; donc il existe au plus un point de l'orbite pour lequel ce liaison est vertical. Mais il n'existe qu'un nombre dénombrable de liaisons géodésiques; on a vu ci-dessus qu'un point de B possède toujours une liaison géodésique verticale; donc l'intersection entre une orbite du flot horocyclique et l'ensemble B est dénombrable, et en particulier de mesure nulle.

Notons $\mu_{q,n}$ le nombre $\mu(\{s \in [-1, 1] | h_s q \in B_{\frac{1}{n}}\})$. Il est clair que, pour q fixé, cette suite décroît vers 0, d'après la remarque ci-dessus. De plus, si $\mu_{q,n} < \delta$, il existe un voisinage $U(q)$ tel que $\mu_{q',n} < \delta$ pour tout élément q' de ce voisinage — en effet, on peut trouver un compact $C \subset [-1, 1]$, de mesure $2 - \delta$, tel que, pour tout s de C , $h_s q$ soit à une distance supérieure à $\frac{1}{n}$ de B ; par continuité de h_s en s et en q , on peut trouver des voisinages $V(s), U_s(q)$ tels que $h_t q'$ soit encore à une distance supérieure à $\frac{1}{n}$ de B pour t dans $V(s)$ et q' dans $U_s(q)$; le reste est standard en utilisant la compacité de C .

Pour δ et q fixés, on peut donc toujours trouver un entier n_q tel que $\mu_{q,n_q} < \delta$, et cette inégalité est encore vraie sur un voisinage de q ; on en déduit immédiatement le lemme en se restreignant à un compact K de formes. $\square$

SUITE DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION: Supposons que l'ensemble des θ tels que q_θ soit une forme récurrente et non uniquement ergodique est de mesure positive; ces formes ont tous leurs points d'accumulation (pour le flot géodésique) dans B ; en recouvrant B par un nombre dénombrable de compacts, on peut trouver un compact K tel que l'ensemble $V = \{\theta | q_\theta \text{ a un point d'accumulation dans } B \cap K\}$ soit de mesure positive. On appellera K_1 l'union des ensembles $h_s(K)$, pour $s \in [-1, 1]$, et K_2 l'union des boules fermées de rayon 1 et de centre contenu dans K_1 ; K_1 et K_2 sont des compacts.

Choisissons ϵ , donné par le lemme, avec: $\mu(\{s \in [-1, 1] | h_s q \in B_\epsilon\}) < 1$ pour tout q dans K . Par définition, pour tout θ dans V on peut trouver T tel que, si $t > T$ et si $g_t q_\theta$ est dans K_2 , alors $g_t q_\theta$ est dans $B_{\frac{\epsilon}{2}}$; si V est de mesure positive, on peut trouver V' et T_0 tels que la propriété soit satisfaite pour tout q de V' et tout $t > T_0$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que 0 est un point de densité de V' .

Soit $t_n \rightarrow \infty$ une suite de réels supérieurs à T_0 , pour lesquels $g_{t_n} q$ appartient à K ; il découle des définitions que moins de la moitié de l'orbite $h_s g_{t_n} q$, avec $s \in [-1, 1]$, appartient à B_ϵ ; on veut comparer cette orbite avec $g_{t_n} q_\theta$, pour $\theta \in [e^{-t_n}, e^{t_n}]$.

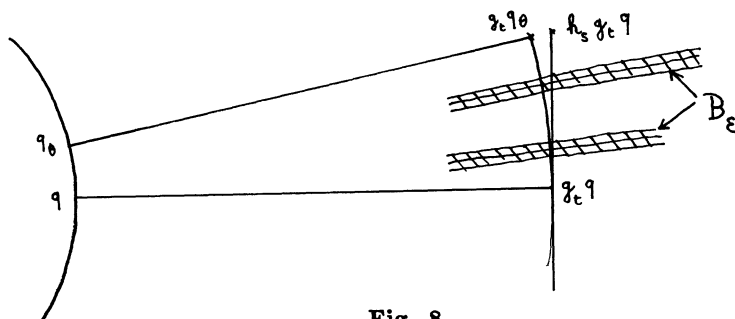


Fig. 8

LEMME. On a $\lim_{t \rightarrow \infty} g_t r_{se^{-t}} g_{-t} q = h_s q$, et cette convergence est uniforme en s sur tout compact.

DÉMONSTRATION: Par définition, l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ est continue; un calcul élémentaire dans $SL(2, \mathbb{R})$ montre que:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(se^{-t}) & \sin(se^{-t}) \\ -\sin(se^{-t}) & \cos(se^{-t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que cette convergence est continue en s sur tout compact de $\mathbb{R}$. $\square$

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION: Le lemme montre que, pour $t > T_1$ avec T_1 assez grand, la distance entre $h_s g_t q$ et $g_t q_{se^{-t}}$ est inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$; choisissons N tel que $t_n > T_1$ si $n > N$; on sait que $g_{t_n} q$ appartient à K par définition de t_n , donc $h_s g_{t_n} q$ appartient à K_1 pour $s \in [-1, 1]$, par définition de K_1 , et, pour $n > N$, $g_{t_n} q_{se^{-t_n}}$ appartient à K_2 ; on en déduit la contradiction cherchée puisque, d'un côté, 0 étant point de densité de V' , on a une grande proportion de l'image géodésique de l'orbite circulaire dans $B_{\frac{\epsilon}{2}}$, d'autre part on a au plus la moitié de l'orbite horocyclique de $g_t q$ dans B_{ϵ} , et ces deux orbites sont proches de $\frac{\epsilon}{2}$. $\square$

On a donc bien montré que presque toute forme dans une orbite circulaire est récurrente, et presque toute forme récurrente est uniquement ergodique, ce qui prouve le théorème 2'.

§6. REMARQUES ET QUESTIONS OUVERTES

Les propriétés que nous avons démontrées ont d'autres applications; par exemple, l'ensemble des formes différentielles quadratiques admet une partition en orbites de R_θ . En appliquant le théorème de Fubini, on en déduit immédiatement que presque toute forme est uniquement ergodique. On peut aussi se restreindre aux formes dont le feuilletage vertical est orientable, puisque cette propriété est invariante par l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$; on peut ainsi retrouver le résultat de Veech [V1] et Masur [M] sur l'unique ergodicité de presque tout échange d'intervalles et de presque tout feuilletage.

On peut d'ailleurs démontrer ces résultats de façon plus simples, comme cela est fait dans les articles cités: on montre d'abord qu'il existe sur QD une mesure finie invariante par le flot géodésique, ce qui entraîne, par le théorème de Poincaré, que presque toute forme est récurrente (La démonstration plus complexe qui a été donnée au §4 est nécessaire, car on raisonne ici sur une partie négligeable de QD , ce qui interdit d'appliquer directement le théorème de Poincaré). On prouve ensuite le lemme du §5, ce qui entraîne que l'ensemble des formes non uniquement ergodique est de mesure nulle; sinon, on peut trouver un ensemble de formes non uniquement

ergodiques, de mesure positive, dont la fermeture est disjointe de l'ensemble B ; presque toutes ces formes sont récurrentes, mais les points d'accumulation de leur orbite sont dans B , ce qui est absurde.

L'analyse du flot g_t a été poussée plus loin, en particulier dans [V2]; on peut montrer que, sur chaque sous-espace invariant naturel (formes quadratiques de type de singularités fixé) le flot géodésique possède une seule mesure invariante absolument continue, que c'est un système de Bernoulli, et on peut calculer son entropie (elle est égale à $3g - 3$ dans le cas de formes quadratiques avec des selles à trois branches sur une surface de genre g).

En ce qui concerne les billards, on sait prouver que leur entropie est nulle, on sait aussi (Masur) que tout billard rationnel contient une géodésique fermée; on connaît des estimations (cf. [K2]) pour le nombre de géodésiques fermées et de liaisons géodésique. On sait aussi montrer que les billards rationnels ne sont jamais mélangeants sur les surfaces de niveau (cf. [K1]), mais que certains billards rationnels sont faiblement mélangeants sur une surface invariante M_θ (cf. [GK]).

Il reste encore beaucoup de questions ouvertes: on ne sait pas si tous les billards admettent une trajectoire périodique (c'est facile à vérifier pour un billard proche d'un triangle équilatéral, par un argument de minimisation de longueur qui ne s'applique pas à un triangle quelconque), ni s'il existe un billard irrationnel faiblement mélangeant.

On ne sait pas non plus si le résultat prouvé ici est vrai pour *presque tout* billard: les raisonnements utilisés ici, passant par les billards rationnels et les surfaces de Riemann, ne permettent d'obtenir de résultats généraux qu'au sens de la catégorie de Baire, et pas au sens de la mesure.

Enfin, il est tentant de se poser les mêmes questions pour des billards polyédraux en dimension 3; mais on ne peut appliquer les mêmes méthodes, parce que les polyèdres rationnels ne sont pas dense, et qu'il n'y a pas d'analogue en dimension 3 à la théorie de Teichmüller.

RÉFÉRENCES

- [A] L.V. Ahlfors, "Lectures on quasiconformal mappings," Van Nostrand, New York, 1966.
- [Be] L. Bers, *Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations*, Bull. AMS 5 (1981), 131–172.
- [BK] L. Bers, I. Kra (eds.), "A crash course on Kleinian groups," Springer Verlag, Lect. notes in Math. 400, 1974.
- [BKM] C. Boldrighini, M. Keane, F. Marchetti, *Billiards in polygons*, The annals of probability 6 (1978), 532–540.
- [Bu] Bunimovitch, *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Commun. Math. Phys. 65 (1979), 295–312.
- [CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai, "Ergodic Theory," Springer-Verlag, 1982.
- [D] R. Douady, *Applications du théorème des tores invariants*, Université Paris VII, Thèse de 3ème cycle (1982).
- [FK] R.H. Fox, R.B. Kershner, *Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron*, Duke Math. J. 2 (1936), 147–150.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, "Travaux de Thurston sur les surfaces," Astérisque 66–67, 1979.
- [GK] E. Gutkin, A.B. Katok, *Weakly mixing billiards*, prépublication.
- [HM] J. Hubbard, H. Masur, *Quadratic differential and foliations*, Acta Mathematica 142 (1979), 221–274.

- [K1] A.B. Katok, *Interval exchange and some special flows are not mixing*, Israel Journal of Math. **35** (1980), 301–310.
- [K2] A.B. Katok, *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Commun. Math. phys. **111** (1987), 151–160.
- [KMS] S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Ann. of Math. **124** (1986), 293–311.
- [KS] A. Katok, J.M. Strelcyn, “Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities,” Springer Verlag, Lect. Notes in Math. **1222**, 1986.
- [L] V.F. Lazutkin, *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*, Math. USSR Izvestija **7** (1973), 185–214.
- [M] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math. **115** (1982), 169–200.
- [Si1] Ya.G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russian Math. surveys **25:2** (1970), 137–189.
- [Si2] Ya.G. Sinai, “Introduction to ergodic theory,” Princeton University Press, 1977.
- [V1] W.A. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. of Math. **115** (1982), 201–242.
- [V2] W.A. Veech, *The Teichmüller geodesic flow*, Ann. of Math. **124** (1986), 441–530.
- [ZK] A.N. Zemlyakov, A.B. Katok, *topological transitivity of billiards in polygons*, Math. Notes **18:2** (1976), 760–764.

Pierre ARNOUX
U.A. 1169 du C.N.R.S.
Université Paris Sud
Bâtiment 425
91405 ORSAY cedex