

Astérisque

JEAN-LOUP WALDSPURGER

Représentation métaplectique et conjectures de Howe

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 674, p. 85-99

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__85_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION MÉTAPLECTIQUE ET CONJECTURES DE HOWE

par Jean-Loup WALDSPURGER

1. INTRODUCTION : LES FONCTIONS THÊTA

1.1. Soient n un entier pair ≥ 2 , $Q \in M(n, \mathbb{Z})$ une matrice symétrique à coefficients diagonaux pairs, telle que la forme quadratique ${}^t y Q y$ sur $\mathbb{R}^n$ (considéré comme espace de matrices colonnes) soit définie positive. Pour $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(z) > 0$, posons

$$(1) \quad \theta_Q(z) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i z {}^t y Q y).$$

Il existe un entier $N_Q > 0$ tel que θ_Q soit une forme modulaire de poids $n/2$ pour le groupe de congruence $\Gamma(N_Q)$ ($= \{\sigma \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) ; \sigma \equiv 1 \pmod{N_Q}\}$), cf. [5] p.789. La fonction θ_Q ne dépend que de la classe d'équivalence de Q pour l'équivalence définie par l'action de $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$.

1.2. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. On peut déduire de θ_Q une fonction $\theta_Q^{\mathbb{A}}$ sur $\text{SL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \text{SL}(2, \mathbb{A})$ de la façon suivante. Pour tout nombre premier p , soit K_p le complété p -adique de $\Gamma(N_Q)$. C'est un sous-groupe ouvert compact de $\text{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$. Soit $\sigma \in \text{SL}(2, \mathbb{A})$. D'après l'égalité :

$$\text{SL}(2, \mathbb{A}) = \text{SL}(2, \mathbb{Q}) . \text{SL}(2, \mathbb{R}) \amalg \prod_p K_p$$

(cf. [10]; le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{Q})$ est plongé "diagonalement" dans $\text{SL}(2, \mathbb{A})$), il existe $\sigma' \in \text{SL}(2, \mathbb{Q})$ tel que pour tout nombre premier p , la composante en p de $\sigma' \sigma$ appartienne à K_p . Choisissons un tel σ' , notons σ'' la composante réelle de $\sigma' \sigma$. Il existe un unique triplet (a, b, α) , avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$\sigma'' = \begin{bmatrix} a^{1/2} & ba^{-1/2} \\ 0 & a^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

On pose

$$\theta_Q^{\mathbb{A}}(\sigma) = a^{n/4} e^{in\alpha/2} \theta_Q(b+ia).$$

Ce terme ne dépend pas du choix de σ' .

1.3. Soit $O(Q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique définie par Q . Grâce à la théorie du genre ([19] p.347, [4] p.88), on peut "ajouter une variable" dans les fonctions thêta ci-dessus, plus précisément définir une fonction σ sur $(O(Q, \mathbb{Q}) \backslash O(Q, \mathbb{A})) \times (SL(2, \mathbb{Q}) \backslash SL(2, \mathbb{A}))$ de la façon suivante. Soient $g \in O(Q, \mathbb{A})$ et, pour tout nombre premier p , g_p sa composante en p . Il existe un réseau de $\mathbb{Q}^n$, noté $g\mathbb{Z}^n$, tel que pour tout p , son complété p -adique soit $g_p\mathbb{Z}_p^n$. Choisissons une base de $g\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}$ et notons gQ la matrice de la forme quadratique dans cette base. Elle vérifie les mêmes propriétés que Q , et sa classe d'équivalence est bien déterminée. On pose

$$\theta(g, \sigma) = \theta_{gQ}^A(\sigma).$$

La fonction θ ainsi définie est une forme automorphe ([2] §4.2) en chacune des variables.

1.4. Notons Θ_1 , resp. Θ_2 , resp. Θ_3 , l'espace engendré par les translatées par l'algèbre de Hecke, resp. par le groupe $SL(2, \mathbb{A})$, resp. par le groupe $O(Q, \mathbb{A}) \times SL(2, \mathbb{A})$, des fonctions θ_Q , resp. θ_Q^A , resp. θ . Le problème de la détermination des éléments de Θ_1 propres pour les opérateurs de Hecke, et des valeurs propres associées, se transforme en celui de la détermination des sous-représentations irréductibles de la représentation de $SL(2, \mathbb{A})$ dans Θ_2 . L'égalité entre les opérateurs de Hecke et ceux définis à l'aide des matrices de Eichler-Brandt ([4] p.109, 148) se transforme en une égalité entre deux endomorphismes de Θ_3 , l'un défini à l'aide de la représentation de $SL(2, \mathbb{A})$ dans Θ_3 , l'autre à l'aide de celle de $O(Q, \mathbb{A})$.

Remarque. - En fait cela n'est pas exact. Pour traduire les opérateurs de Hecke T_p ou les matrices de Eichler-Brandt associés en termes de groupes, il faudrait introduire les groupes $GL(2)$ et $GO(Q)$ (groupe des similitudes) au lieu de $SL(2)$ et $O(Q)$. Par contre les opérateurs T_{p^2} ou les matrices associées se traduisent bien comme on l'a dit. Les matrices de Eichler-Brandt auxquelles il sera fait allusion dans la suite seront supposées être associées à des opérateurs T_{p^2} .

1.5. Remarquons qu'on peut adéliser la formule (1) du §1.1 elle-même. Posons $Y = \mathbb{Q}^n$ (vu comme variété définie sur $\mathbb{Q}$). La matrice Q définit une forme quadratique q sur $Y(\mathbb{Q})$, puis par complétion sur $Y(\mathbb{R})$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(z) > 0$. Notons $zf_{\mathbb{R}}$ la fonction sur $Y(\mathbb{R})$: $zf_{\mathbb{R}}(y) = \exp(\pi izq(y))$. Pour un nombre premier p , soient L_p le complété p -adique de $\mathbb{Z}^n$, qui est un réseau dans $Y(\mathbb{Q}_p)$, et f_p la fonction caractéristique de L_p . Posons $zf = zf_{\mathbb{R}} \prod_p f_p$. C'est une fonction sur $Y(\mathbb{A})$ et (1) s'écrit

$$\theta_Q(s) = \sum_{y \in Y(Q)} z f(y) .$$

Sous cette forme, il est clair que la présence cachée d'une variable dans le groupe orthogonal provient de l'action naturelle de ce groupe dans l'espace des fonctions sur $Y(A)$. On va voir que la variable dans le groupe $SL(2, A)$ (i.e. z) provient elle aussi d'une action de ce groupe dans cet espace de fonctions. C'est l'un des résultats essentiels de l'article [21] de A. Weil.

2. LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE, LA REPRÉSENTATION MÉTAPLECTIQUE ([21]).

2.1. Soient k un corps infini de caractéristique différente de 2, W un espace vectoriel sur k de dimension finie, muni d'une forme symplectique $\langle, \rangle$. Le groupe d'Heisenberg $H(W, k)$ est l'ensemble $W \times k$ muni du produit

$$(w, t)(w', t') = (w + w', t + t' + \langle w, w' \rangle / 2) .$$

Si k est muni d'une topologie, donc aussi W , on munit $H(W, k)$ de la topologie produit. Dans la suite, on pourra considérer W et $H(W)$ comme des groupes algébriques définis sur k .

2.2. Supposons d'abord k local non archimédien. Soit ψ un caractère de k (i.e. un homomorphisme continu de k dans $\mathbb{C}^\times$), non trivial.

Notation. Soit G un groupe. L'expression " (ρ, S) " est une représentation de G " signifie que S est un espace vectoriel complexe et ρ un homomorphisme de G dans $GL(S)$.

THÉORÈME (Stone, Von Neumann).- *Il existe une représentation lisse irréductible (ρ_ψ, S) de $H(W, k)$ telle que $\rho_\psi((0, t)) = \psi(t) \text{id}_S$ pour tout $t \in k$. Elle est unique à équivalence près. ([14], [20], voir aussi [12] §1.3, [3] ch.V, [13]).*

("lisse" signifie que pour tout $s \in S$, le stabilisateur de s dans $H(W, k)$ est un sous-groupe ouvert).

2.3. Le groupe symplectique $Sp(W, k)$ agit dans $H(W, k)$ de façon naturelle.

Soit (ρ_ψ, S) une représentation de $H(W, k)$ comme ci-dessus. Pour $\sigma \in Sp(W, k)$ on peut définir une représentation ρ_ψ^σ de $H(W, k)$ dans S par $\rho_\psi^\sigma(h) = \rho_\psi(\sigma h)$. Elle vérifie les mêmes propriétés que ρ_ψ . Il existe donc $M_\sigma \in GL(S)$ tel que

$$(1) \quad \rho_\psi^\sigma(h) = M_\sigma \rho_\psi(h) M_\sigma^{-1}, \text{ pour tout } h \in H(W, k) .$$

Cet opérateur M_σ est unique à un scalaire près, et $\sigma \mapsto M_\sigma$ est une représentation projective de $Sp(W, k)$. Soit $\hat{Sp}(W, k)$ l'unique revêtement à deux feuillets (non trivial) de $Sp(W, k)$. Alors il existe une unique représentation lisse ω_ψ de $\hat{Sp}(W, k)$ dans S qui relève cette représentation projective.

Remarque 1. Par commodité, nous notons $\hat{Sp}(W, k)$ comme s'il s'agissait d'un groupe algébrique. Ce n'en est pas un.

Remarque 2. L'extension $\hat{\mathrm{Sp}}(W, k)$ se décrit concrètement au moyen d'un cocycle appartenant à $H^2(\mathrm{Sp}(W, k), \{\pm 1\})$ ([15], th.2.2, [18]).

2.4. Variante. Notons $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k)$ le sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W, k) \times \mathrm{GL}(S)$ formé des couples (σ, M_σ) vérifiant la relation (1) du §2.3. Le groupe $\mathbb{C}^\times$ agit sur $\mathrm{GL}(S)$ par homothéties, et sur $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k)$ via cette action sur $\mathrm{GL}(S)$. Il existe une unique représentation $\mathbb{C}^\times$ -équivariante de $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k)$ dans S qui relève la représentation projective de $\mathrm{Sp}(W, k)$; à savoir $(\sigma, M_\sigma) \mapsto M_\sigma$. On la note encore ω_ψ .

Identifions $\{\pm 1\}$ au noyau de la projection $\hat{\mathrm{Sp}}(W, k) \rightarrow \mathrm{Sp}(W, k)$. On a un isomorphisme

$$\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k) \simeq \hat{\mathrm{Sp}}(W, k) \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{C}^\times.$$

Selon les auteurs, l'un ou l'autre des groupes $\hat{\mathrm{Sp}}(W, k)$ ou $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k)$ est appelé *groupe métaplectique*. La représentation ω_ψ est appelée *représentation métaplectique*, ou "de Weil".

2.5. Soient G un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W, k)$, $\hat{G}$, resp. $\tilde{G}$, son image réciproque dans $\hat{\mathrm{Sp}}(W, k)$, resp. $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, k)$. Dans la suite, on étudie exclusivement les représentations (π, V) de $\hat{G}$, resp. $\tilde{G}$, telles que $\pi(\pm 1) = \pm \mathrm{id}_V$ ($\{\pm 1\}$ désignant ici le noyau de la projection $\hat{\mathrm{Sp}}(W, k) \rightarrow \mathrm{Sp}(W, k)$), resp. $\pi(z) = z \mathrm{id}_V$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. Elles sont dites "*spécifiques*". Il y a équivalence entre ces deux catégories de représentations, ce qui permet de transporter sur l'une les notions définies pour l'autre (par exemple la lissité). Une fonction f sur G telle que $f(zg) = zf(g)$, resp. $f(zg) = z^{-1}f(g)$, pour tous $g \in G$, $z \in \mathbb{C}^\times$, est dite *spécifique*, resp. *anti-spécifique*.

2.6. Il y a différents modèles possibles pour les représentations ρ_ψ et ω_ψ , en particulier les modèles de Schrödinger. Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète (i.e. X et Y sont deux sous-espaces totalement isotropes supplémentaires). Soit $S(Y)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur Y , à valeurs complexes. On peut réaliser ρ_ψ dans $S(Y)$ par :

$$\rho_\psi((x+y, t))f(y') = \psi(t + \langle y', x \rangle + \langle y, x \rangle / 2) f(y+y')$$

pour $f \in S(Y)$, $x \in X$, $y, y' \in Y$, $t \in k$. On peut écrire explicitement la représentation ω_ψ de $\mathrm{Sp}(W, k)$ ([15] th.2.2, [21] §1.13).

2.7. Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a des constructions analogues. On doit utiliser des représentations unitaires au lieu de représentations lisses ([12], [21]). Quand $k = \mathbb{C}$, il n'y a pas de revêtement non trivial de $\mathrm{Sp}(W, \mathbb{C})$ et ω_ψ est une représentation de ce groupe lui-même. On pose dans la suite $\hat{\mathrm{Sp}}(W, \mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(W, \mathbb{C})$.

2.8. Conservons la situation du §2.1, en supposant maintenant k global. On note k_v le complété de k en une place v , $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers quand v

est finie, A l'anneau des adèles de k . Soit ψ un caractère non trivial de A/k . Pour toute place v de k , fixons un modèle (ρ_{ψ_v}, S_v) de la représentation de $H(W, k_v)$ associée à ψ_v .

Notons a l'ensemble des places archimédiennes de k . Pour $v \in a$, S_v est un espace de Hilbert. Posons $S_a = \bigotimes_{v \in a} S_v$ (complété du produit tensoriel). Le groupe $\prod_{v \in a} H(W, k_v)$ agit dans S_a . On note S_a^∞ le sous-espace des vecteurs $\mathbb{C}^\infty$ de cette représentation.

Fixons un réseau L de $W(k)$. Soit v une place finie de k , notons L_v le complété de L dans $W(k_v)$. Supposons v impaire, ψ_v non ramifié, et L_v autodual, i.e. $L_v = \{w \in W(k_v); \forall \ell \in L_v, \langle \ell, w \rangle \in \mathcal{O}_v\}$ (remarquons que ces hypothèses sont satisfaites pour presque toute place v). Le sous-espace des vecteurs de S_v fixés par $L_v \times \mathcal{O}_v$ ($\subset H(W, k_v)$) est de dimension 1. Fixons un tel vecteur non nul s_v° , notons K_v le fixateur de s_v° dans $\hat{Sp}(W, k_v)$. C'est un sous-groupe ouvert compact qui relève le stabilisateur de L_v dans $Sp(W, k_v)$.

On peut définir le produit restreint $\prod_v \hat{Sp}(W, k_v)$ sur toutes les places de k , relativement aux sous-groupes K_v . C'est une extension de $Sp(W, A)$ par $\bigoplus_v \{\pm 1\}$, sommé sur les places non complexes. Ce dernier groupe s'envoie par produit sur $\{\pm 1\}$, notons N le noyau de cette application. On pose

$$\hat{Sp}(W, A) = (\prod_v \hat{Sp}(W, k_v)) / N.$$

Notons S^a le produit restreint $\bigotimes_v S_v$, sur les places non-archimédiennes de k , relativement aux vecteurs s_v° , et $S^\infty = S^a \otimes S_a^\infty$. Le produit tensoriel des ω_{ψ_v} définit une représentation ω_ψ de $\hat{Sp}(W, A)$ dans S^∞ .

2.9. Variante. Essentiellement comme §2.4, on peut définir un sous-groupe $\tilde{Sp}(W, A)$ de $Sp(W, A) \times GL(S^\infty)$, et une représentation ω_ψ de $\tilde{Sp}(W, A)$ dans S^∞ . On a un isomorphisme

$$\tilde{Sp}(W, A) \simeq \tilde{Sp}(W, A) \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{C}^\times.$$

2.10. Les groupes $H(W, A)$ et $H(W, k)$ agissent dans S^∞ et dans son dual (algébrique).

THÉORÈME. L'espace des formes linéaires sur S^∞ fixées par $H(W, k)$ est de dimension 1 ([6] th. 4.1).

Le théorème est un analogue adélique du lemme ci-dessous. Pour $f \in S(\mathbb{R})$ (espace des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$), définissons $f_1, f^1 \in S(\mathbb{R})$ par

$$f_1(t) = f(t+1), f^1(t) = e^{2\pi i t} f(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on reconnaît l'action de certains éléments de $H(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$).

Lemme. - Soit ℓ une forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$ telle que $\ell(f) = \ell(f_1) = \ell(f^1)$ pour toute $f \in S(\mathbb{R})$. Alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\ell(f) = c \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$$

pour toute $f \in S(\mathbb{R})$.

Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète (définie sur k). Pour toute place v finie, resp. archimédienne, réalisons ρ_{ψ_v} dans $S(Y(k_v))$, resp. $L^2(Y(k_v))$, grâce au modèle de Schrödinger. Alors $S^\infty = S(Y(\mathbb{A}))$, et la forme linéaire θ définie sur S^∞ par

$$\theta(f) = \sum_{y \in Y(k)} f(y)$$

engendre la droite des formes linéaires fixées par $H(W, k)$ ([21] §16 à 20).

On peut déduire du théorème que l'extension $\hat{Sp}(W, \mathbb{A})$ (et a fortiori $\tilde{Sp}(W, \mathbb{A})$) est scindée au-dessus de $Sp(W, k)$, i.e. il existe un sous-groupe de $\hat{Sp}(W, \mathbb{A})$, d'ailleurs unique, qui se projette bijectivement sur $Sp(W, k)$. On identifie $Sp(W, k)$ et ce sous-groupe.

Soit θ une forme linéaire sur S^∞ fixée par $H(W, k)$, non nulle. Pour $s \in S^\infty$ et $\sigma \in \tilde{Sp}(W, \mathbb{A})$, on pose $\theta_s(\sigma) = \theta \circ \omega_\psi(\sigma)s$. Cela définit une fonction spécifique (cf. §2.5) sur $Sp(W, k) \backslash \tilde{Sp}(W, \mathbb{A})$. Pour toute place v archimédienne, fixons un sous-groupe compact maximal K_v de $\tilde{Sp}(W, k_v)$. Soit S° le sous-espace des éléments de S^∞ qui sont K_v -finis pour toute place v archimédienne. Si $s \in S^\circ$, alors θ_s est une forme automorphe sur $Sp(W, k) \backslash \tilde{Sp}(W, \mathbb{A})$.

3. PAIRES RÉDUCTIVES DUALES ([6] §5).

3.1. Conservons la situation du §2.1. Soient U_1, U_2 deux sous-groupes de $Sp(W, k)$. On dit qu'ils forment une paire réductive duale si

- (i) U_1 et U_2 agissent dans W de façon absolument semi-simple ;
- (ii) U_1 est le commutant de U_2 dans $Sp(W, k)$ et vice-versa.

3.2. Soient I un ensemble fini et pour $i \in I$, $W^{(i)}$ un espace symplectique sur k et $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ une paire réductive duale dans $Sp(W^{(i)}, k)$. Supposons que W est la somme directe orthogonale des $W^{(i)}$. Alors $(\prod_{i \in I} U_1^{(i)}, \prod_{i \in I} U_2^{(i)})$ est une paire réductive duale dans $Sp(W, k)$. Réciproquement toute paire réductive duale dans $Sp(W, k)$ est un tel produit de paires $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ irréductibles, i.e. pour lesquelles il n'existe pas de telle décomposition (non triviale).

3.3. Nous allons décrire la classification des paires réductives duales irréductibles ([6] §5, [22] §18,27; on utilise [1] ch.10). Soit (U_1, U_2) une paire réductive duale dans $Sp(W, k)$, irréductible. Deux cas se présentent.

Type I. Il existe une algèbre à division D de centre une extension finie séparable de k , munie d'une "involution" (i.e. d'un antiautomorphisme involutif) τ ; pour $i=1,2$, un D -module W_i muni d'une forme $\langle, \rangle_i$ D -sesquilineaire ε_i -hermitienne, où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$, de telle sorte que

$$W \simeq W_1 \otimes_D W_2, \langle, \rangle \simeq \text{tr}_{D/k}(\langle, \rangle_1 \otimes \langle, \rangle_2)$$

$$U_1 \simeq U(W_1, k), U_2 \simeq U(W_2, k),$$

où pour $i=1,2$, $U(W_i)$ est le groupe d'isométries de $\langle, \rangle_i$, et $\text{tr}_{D/k}$ est la trace réduite habituelle.

Type II. Il existe une algèbre à division D de centre une extension finie séparable de k , deux D -modules X_1 et X_2 , tels que en notant $X = X_1 \otimes_D X_2$, et X^* son dual, on ait $W \simeq X \oplus X^*$ muni de la forme symplectique naturelle, et $U_1 \simeq \text{GL}(X_1, D)$, $U_2 \simeq \text{GL}(X_2, D)$.

3.4. Réciproquement de telles données définissent une paire réductive duale dans $\text{Sp}(W, k)$, aux deux exceptions suivantes près, toutes deux du type I :

(a) D est commutative, $D \neq k$, $\tau = \text{id}_D$, $W_1 = D$ muni d'une forme quadratique, W_2 est symplectique : dans ce cas le commutant de $O(W_1, D)$ est $\text{Sp}(W, k)$ tout entier et non pas $\text{Sp}(W_2, D)$.

(b) D est une algèbre de quaternions munie de l'involution usuelle, $W_1 = D$ muni d'une forme antihermitienne; le commutant de $U(W_1, k)$ est plus gros que $U(W_2, k)$.

3.5. Variante. Soient U_1, U_2 deux sous-groupes algébriques de $\text{Sp}(W)$ définis sur k . On dit qu'ils forment une paire réductive duale algébrique (sur k) si pour toute extension k' de k , $(U_1(k'), U_2(k'))$ est une paire réductive duale dans $\text{Sp}(W, k')$. Il résulte de la classification ci-dessus que l'application $(U_1, U_2) \mapsto (U_1(k), U_2(k))$ est une bijection entre l'ensemble des paires réductives duales algébriques sur k et celui des paires réductives duales dans $\text{Sp}(W, k)$.

3.6. Plaçons-nous dans la situation du §2.2 ou 2.6 (i.e. k est local). Soit (U_1, U_2) une paire réductive duale irréductible dans $\text{Sp}(W, k)$ et considérons le groupe U_1 . Sauf dans le cas ci-dessous, l'extension $\tilde{\text{Sp}}(W, k)$ est scindée au-dessus de U_1 . Notons que ce ne serait pas vrai pour l'extension $\tilde{\text{Sp}}(W, k)$.

L'exception est le cas de type I où D est commutative, $\tau = \text{id}_D$, W_1 est symplectique et W_2 quadratique. Alors $\tilde{\text{Sp}}(W, k)$ est scindée au-dessus de $U_1 (= \text{Sp}(W_1, D))$ si et seulement si la dimension sur D de W_2 est paire.

3.7. Conservons la situation du §2.2 ou 2.6. Soit (U_1, U_2) une paire réductive duale dans $\text{Sp}(W, k)$, notons $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ les images réciproques de U_1 et U_2 dans

$\tilde{\text{Sp}}(W, k)$. Ces deux groupes commutent grâce au :

Lemme.- Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ deux éléments de $\tilde{\text{Sp}}(W, k)$, σ_1, σ_2 leurs images dans $\text{Sp}(W, k)$. Si σ_1 et σ_2 commutent, alors $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ commutent.

On peut alors se demander s'il existe un lien entre les décompositions des restrictions à $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ de la représentation métaplectique ω_ψ . Un problème analogue se pose globalement.

3.8. *Exemple.-* Plaçons-nous dans la situation du §1.1. Posons $k = \mathbb{Q}$, $W_1 = \mathbb{Q}^n$ muni de la forme quadratique définie par Q , $W_2 = \mathbb{Q}^2$ muni d'une forme symplectique, $W = W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} W_2$. Alors $U(W_1) = O(\mathbb{Q})$, $U(W_2) = \text{SL}(2)$. Ces deux groupes forment une paire réductive duale algébrique dans $\text{Sp}(W)$. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base symplectique de W_2 , posons $X = W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} e_1$, $Y = W_1 \otimes_{\mathbb{Q}} e_2 \simeq W_1$. Alors $W = X \oplus Y$ est une polarisation complète. Le modèle de Schrödinger réalise la représentation métaplectique de $\tilde{\text{Sp}}(W, \mathbb{A})$ dans $S(Y(\mathbb{A})) \simeq S(W_1(\mathbb{A}))$. Ici l'extension $\tilde{\text{Sp}}(W, \mathbb{A})$ est scindée au-dessus de $O(\mathbb{Q}, \mathbb{A})$ et $\text{SL}(2, \mathbb{A})$, qu'on peut donc identifier à des sous-groupes de $\tilde{\text{Sp}}(W, \mathbb{A})$. Pour $s \in S(W_1(\mathbb{A}))$, la fonction θ_s (cf. §2.9) définit par restriction une fonction sur $O(\mathbb{Q}, \mathbb{A}) \times \text{SL}(2, \mathbb{A})$. Soit Θ l'espace des fonctions ainsi obtenues. Il contient l'espace Θ_3 (cf. §1.4). Les matrices de Eichler-Brandt établissent un lien entre la décomposition de Θ en composantes irréductibles pour l'action du groupe $\text{SL}(2, \mathbb{A})$ et son analogue pour le groupe $O(\mathbb{Q}, \mathbb{A})$.

4. LES CONJECTURES DE HOWE.

4.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2 (k est local non archimédien). Soient (ω_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de $\tilde{\text{Sp}}(W, k)$, (U_1, U_2) une paire réductive duale dans $\text{Sp}(W, k)$, (π_1, V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1$ (cf. §2.5). Supposons $\text{Hom}_{\tilde{U}_1}(S, V_1) \neq \{0\}$. On dit alors que π_1 intervient dans ω_ψ . Posons $S(\pi_1) = \cap \text{Ker}(f)$, où f parcourt $\text{Hom}_{\tilde{U}_1}(S, V_1)$, et $S[\pi_1] = S/S(\pi_1)$. Grâce au §3.7, cet espace est muni d'une action de $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$. On montre qu'il existe une représentation lisse de $\tilde{U}_2$, notée $(\theta(\pi_1), \theta(V_1))$, unique à isomorphisme près, telle que $S[\pi_1] \simeq V_1 \otimes \theta(V_1)$, muni de l'action produit de $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$.

Conjecture.- Il existe un unique sous-espace $\theta(V_1)'$ de $\theta(V_1)$, invariant par $\tilde{U}_2$, tel que la représentation de $\tilde{U}_2$ dans $\theta(V_1)/\theta(V_1)'$ soit irréductible ([6] §6).

Admettons que cette conjecture est vraie, notons π_2 la représentation de $\tilde{U}_2$ dans $\theta(V_1)/\theta(V_1)'$. On dit alors que π_2 correspond à π_1 .

4.2. Quand k est archimédien, la conjecture analogue a été énoncée et démontrée par Howe ([7] ; voir aussi [9]). Quand k est fini, une telle conjecture serait

fausse ([8]).

4.3. Plaçons-nous dans la situation du §2.7 (k est global), dont on utilise les constructions. Soit (U_1, U_2) une paire réductive duale algébrique (sur k) dans $\mathrm{Sp}(W)$. Soient $i \in \{1, 2\}$ et π_i une représentation admissible irréductible spécifique (cf. §2.5) de $\tilde{U}_i(\mathbf{A})$. D'après Howe, on dit que π_i est automorphe si elle intervient comme sous-représentation de la représentation de $\tilde{U}_i(\mathbf{A})$ dans l'espace des formes automorphes spécifiques sur $U_i(k) \backslash \tilde{U}_i(\mathbf{A})$ (cette définition diffère un peu de la définition habituelle).

Soit π_1 une représentation admissible irréductible spécifique de $\tilde{U}_1(\mathbf{A})$. Pour toute place v de k , il existe une représentation lisse irréductible $\pi_{1,v}$ de $\tilde{U}_1(k_v)$, unique à isomorphisme près, telle que π_1 soit isomorphe à un produit tensoriel restreint $\otimes_v \pi_{1,v}$. Supposons que pour toute place v , $\pi_{1,v}$ intervienne dans la représentation métaplectique ω_{ψ_v} , et admettons que la conjecture 4.1 est vraie. Soit $\pi_{2,v}$ la représentation de $\tilde{U}_2(k_v)$ correspondant à $\pi_{1,v}$. D'après le §6.3 ci-dessous, $\pi_{2,v}$ est non ramifiée pour presque toute place v , et on peut former un produit restreint $\pi_2 = \otimes_v \pi_{2,v}$ qui est une représentation admissible irréductible de $\tilde{U}_2(\mathbf{A})$.

Conjecture. - Sous ces hypothèses, si π_1 est automorphe, π_2 l'est aussi ([6]§8).

4.4. Soient (ω_{ψ}, S) un modèle de la représentation métaplectique de $\tilde{\mathrm{Sp}}(W, \mathbf{A})$, V_1 un sous-espace irréductible de l'espace des formes automorphes cuspidales ([2] §4.4) spécifiques sur $U_1(k) \backslash \tilde{U}_1(\mathbf{A})$, π_1 la représentation de $\tilde{U}_1(\mathbf{A})$ dans V_1 . Soit $v_1 \in V_1$, non nul. Alors v_1 est à décroissance rapide. Pour $s \in S^\circ$ (cf. §2.10), on peut définir une fonction $v_2(s, \cdot)$ sur $\tilde{U}_2(\mathbf{A})$ par

$$v_2(s, \sigma_2) = \int_{U_1(k) \backslash \hat{U}_1(\mathbf{A})} \theta_s(\sigma_1 \sigma_2) \overline{v_1(\sigma_1)} \, d\sigma_1.$$

Cette fonction est automorphe. Notons $\theta(V_1)$ le sous-espace engendré par ces fonctions quand s parcourt S° (il est indépendant du choix de v_1). Il est stable par $\tilde{U}_2(\mathbf{A})$. Supposons :

- (i) la conjecture 4.1 est vraie ;
- (ii) $\theta(V_1)$ est contenu dans l'espace des formes cuspidales sur $U_2(k) \backslash \tilde{U}_2(\mathbf{A})$;
- (iii) $\theta(V_1) \neq \{0\}$.

On montre alors ([16] th.I.2.2) que $\theta(V_1)$ est irréductible et réalise la représentation π_2 . La conjecture 4.3 est donc vraie dans ce cas.

La condition la plus difficile à lever semble être (iii), qui paraît liée à la non-nullité de la valeur en un certain point d'une fonction L associée à π_1 ([17]).

5. LES RÉSULTATS DE KUDLA ([11]).

5.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2, soient $D, W_1^{(0)}, W_2^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ comme au §3.3 type I (à ceci près qu'on note $W_1^{(0)}, W_2^{(0)}$ les espaces notés W_1, W_2 au §3.3). Par convention on accepte que $W_1^{(0)}$ ou $W_2^{(0)}$ soit nul. Supposons $W_1^{(0)}$ et $W_2^{(0)}$ anisotropes. Pour $i=1,2$, soit $H_i = D^2$ muni de la forme ε_i -hermitienne :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \tau(x)y' + \varepsilon_i \tau(y)x'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $W_i^{(n)}$ la somme orthogonale de $W_i^{(0)}$ et de n copies de H_i . C'est un espace du même type que $W_i^{(0)}$. Notons $U_i^{(n)}$ son groupe d'isométries.

Soit $E^{(n)}$ l'ensemble des termes $(n_1, \dots, n_r, n')$ tels que $r \geq 0, n_j \in \mathbb{N}, n_j \geq 1$ pour $j=1, \dots, r, n' \in \mathbb{N}, n_1 + \dots + n_r + n' = n$. Les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de $U_i^{(n)}$ sont en bijection avec $E^{(n)}$. Pour

$e = (n_1, \dots, n_r, n') \in E^{(n)}$, un sous-groupe de Lévi L_e d'un parabolique P_e correspondant à e est isomorphe à $GL(n_1, D) \times \dots \times GL(n_r, D) \times U_1^{(n')}$.

Remarque. - Ceci n'est vraiment correct que si $U_1^{(n)}$ est connexe (algébriquement). Mais même dans le cas contraire, on peut définir de façon ad hoc la notion de sous-groupe parabolique pour que la description ci-dessus soit valable.

Soient maintenant n, m deux entiers, posons $W^{(n, m)} = W_1^{(n)} \otimes_D W_2^{(m)}$, muni de sa forme symplectique (cf. §3.3). Alors $(U_1^{(n)}, U_2^{(m)})$ est une paire réductible duale dans $\tilde{Sp}(W^{(n, m)}, k)$. L'image réciproque $\tilde{U}_1^{(n)}$ de $U_1^{(n)}$, resp. $\tilde{U}_2^{(m)}$ de $U_2^{(m)}$, dans $\tilde{Sp}(W^{(n, m)}, k)$ ne dépend pas de m , resp. n , à isomorphisme près (cela ne serait pas vrai dans $\hat{Sp}(W^{(n, m)}, k)$). C'est cette extension qu'on considère ci-dessous.

Soient de nouveau $n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\}$. Notons $C_i^{(n)}$ l'ensemble des termes

$$c = (e = (n_1, \dots, n_r, n'), \delta_1, \dots, \delta_r, \pi^c)$$

tels que $e \in E^{(n)}$, pour tout $j=1, \dots, r, \delta_j$ est une représentation lisse irréductible cuspidale de $GL(n_j, D)$, π^c est une telle représentation spécifique de $\tilde{U}_1^{(n')}$. Si δ est une représentation de $GL(t, D)$, notons δ^* la représentation de $GL(t, D)$ définie par $\delta^*(g) = \delta(\tau({}^t g^{-1}))$. Soient c comme ci-dessus, $\bar{c} = ((\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_r, n'), \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_r, \bar{\pi}^c) \in C_i^{(n)}$. On dit que c et $\bar{c}$ sont équivalents si $r = \bar{r}, \pi^c = \bar{\pi}^c$ et s'il existe un sous-ensemble $R \subset \{1, \dots, r\}$ et une permutation s de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ tels que pour $j \in \{1, \dots, r\}, \bar{n}_j = n_{s(j)}, \bar{\delta}_j = \delta_{s(j)}$ si $j \in R, \bar{\delta}_j = \delta_{s(j)}^*$ si $j \notin R$. Notons $cl(c)$ la classe d'équivalence de c .

Pour c comme ci-dessus, on construit la représentation $\delta_1 \otimes \dots \otimes \delta_r \otimes \pi^c$ de $\tilde{L}_e$, qu'on prolonge en une représentation de P_e en faisant agir trivialement le radical unipotent de P_e (sur lequel l'extension métaplectique est scindée). Par induction (normalisée de telle sorte que l'induite d'une représentation unitaire soit unitaire) on obtient une représentation lisse de $\tilde{U}_1^{(n)}$, notée $I(c)$. L'ensemble des sous-quotients irréductibles de $I(c)$ ne dépend que de la classe de c . Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1^{(n)}$. Alors il existe $c \in C_1^{(n)}$ tel que π soit un sous-quotient de $I(c)$. La classe de c est bien déterminée, on la note $\text{Supp}(\pi)$.

5.2. Soient $n \in \mathbb{N}$, (π_1, V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1^{(n)}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, $(U_1^{(n)}, U_2^{(m)})$ formant une paire réductive duale dans $\text{Sp}(W^{(n,m)}, k)$ (on suppose $W^{(n,m)} \neq \{0\}$), on peut associer à π_1 une représentation lisse $(\theta_m(\pi_1), \theta_m(V_1))$ de $\tilde{U}_2^{(m)}$ (cf. §4.1; éventuellement $\theta_m(V_1) = \{0\}$).

PROPOSITION.- Il existe un entier m tel que $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$.

Notons $m(\pi_1)$ le plus petit entier m tel que $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$.

THÉORÈME.- Supposons π_1 cuspidale. Alors :

- (i) $\theta_{m(\pi_1)}(\pi_1)$ est irréductible et cuspidale ;
- (ii) si $m > m(\pi_1)$, $\theta_m(V_1)$ est non nul, $\theta_m(\pi_1)$ est irréductible et n'est pas cuspidale ([11] th.2.1; la démonstration utilise [16]).

5.3. Pour π_1 lisse et irréductible non nécessairement cuspidale, on a le résultat suivant. On note $| \cdot |$ le caractère valeur absolue de $\text{GL}(1, D)$.

THÉORÈME.- (1) Pour tout m , $\theta_m(\pi_1)$ est de longueur finie.

(2) Soient $c = ((n_1, \dots, n_r, n'), \delta_1, \dots, \delta_r, \pi^c) \in C_1^{(n)}$ tel que $\text{Supp}(\pi_1) = \text{cl}(c)$, m tel que $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$ et π_2 un sous-quotient irréductible de $\theta_m(\pi_1)$.

Posons

$$a = n' - m(\pi^c) + \frac{1}{2}(\dim_D W_1 - \dim_D W_2),$$

$$b = n_1 + \dots + n_r + m(\pi^c) - m.$$

Alors

- (i) si $b \leq 0$, $\text{Supp}(\pi_2) = \text{cl}(d)$, où $d \in C_2^{(m)}$ est donné par $d = ((n_1, \dots, n_r, 1, \dots, 1, m(\pi^c)), \delta_1, \dots, \delta_r, | \cdot |^{a+b}, \dots, | \cdot |^{a-2}, | \cdot |^{a-1}, \theta_m(\pi^c)(\pi^c))$;
- (ii) si $b > 0$, alors on peut remplacer c par élément équivalent, de telle sorte que $n_1 = \dots = n_b = 1$, $\delta_1 = | \cdot |^{a+b-1}, \dots, \delta_b = | \cdot |^a$, et $\text{Supp}(\pi_2) = \text{cl}(d)$, où

$$d = ((n_{b+1}, \dots, n_r, m(\pi^C)), \delta_{b+1}, \dots, \delta_r, m(\pi^C)(\pi^C)). \quad ([11] \text{ th. 2.5}).$$

6. LES RÉSULTATS DE HOWE

6.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2, soient D , W_1 , U_2 , U_2 comme au §3.3, type I. Notons $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D . Supposons :

- (i) la caractéristique résiduelle de k est $\neq 2$;
- (ii) ψ est non ramifiée;
- (iii) $D=k$ ou D est l'extension quadratique non ramifiée de k (et τ est l'élément non trivial de $\text{Gal}(D/k)$);
- (iv) pour $i=1,2$, il existe un réseau autodual L_i dans W_i (i.e. L_i est un $\mathcal{O}_D$ -module de type fini, engendrant W_i sur D , et $L_i = \{w \in W_i; \forall \ell \ L_i, \langle w, \ell \rangle_i \in \mathcal{O}_D\}$).

On fixe deux tels réseaux L_1, L_2 .

THÉOREME (Howe). - *Sous ces hypothèses, la conjecture 4.1 est vraie pour la paire réductrice duale (U_1, U_2) .*

6.2. Pour $i=1,2$, notons K_i le stabilisateur de L_i dans U_i . C'est un sous-groupe compact maximal de U_i et l'extension $\tilde{U}_i$ est scindée sur K_i . On peut identifier canoniquement K_i à un sous-groupe de $\tilde{U}_i$.

Soient (ω_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de $\tilde{\text{Sp}}(W)$, (π_1, V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1$ intervenant dans ω_ψ (cf. §4.1), (π_2, V_2) la représentation lisse irréductible de $\tilde{U}_2$ qui lui correspond grâce au théorème 6.1.

THÉOREME. - *Si $V_1^{K_1} \neq \{0\}$, alors $V_2^{K_2} \neq \{0\}$ ([6] th.7.1.b).*

$(V_1^{K_1}, \text{etc...})$, désigne le sous-espace des éléments de V_1 fixés par K_1 .

Pour $i=1,2$, notons $H(\tilde{U}_i/K_i)$ l'algèbre des fonctions f sur $\tilde{U}_i$ à valeurs complexes, antisymétriques (cf. §2.5), à support compact modulo $\mathbb{C}^\times$, et biinvariantes par K_i . Cette algèbre agit dans $S^{K_1 K_2}$ grâce à ω_ψ . Notons H_i son image dans $\text{End}(S^{K_1 K_2})$.

PROPOSITION. - *On a l'égalité $H_1 = H_2$ ([6] th.7.1.c).*

6.3. *Exemple.* Pour $k = \mathbb{Q}_p$, et pour la paire $(O(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p), \text{SL}(2, \mathbb{Q}_p))$ de l'exemple 3.8, H_2 est l'algèbre engendrée par l'opérateur de Hecke T_2^p . La proposition implique qu'il existe $h \in H_1$ tel que h agisse comme T_2^p dans $S^{K_1 K_2}$. Essentially, c'est le rôle des matrices de Eichler-Brandt d'exprimer la valeur exacte de h .

6.4. Donnons une idée générale des démonstrations des théorèmes 6.1 et 6.2. Posons $L = L_1 \otimes_{\mathcal{O}_D} L_2 \subset W$. C'est un réseau autodual de W . Notons $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k , posons $A = L \oplus \mathcal{O}_k \subset H(W, k)$. C'est un sous-groupe de $H(W, k)$. Rappelons que $H(W, k)$ agit dans S . Le sous-espace S^A des invariants par A est de dimension 1. Fixons $s_0 \in S^A$, $s_0 \neq 0$. On a $s_0 \in S^{K_1 K_2}$. Pour $i = 1, 2$, notons $H(\tilde{U}_i)$ l'algèbre des fonctions sur $\tilde{U}_i$ antisécifiques, à support compact modulo $\mathbb{C}^\times$, biinvariantes par un sous-groupe ouvert de $\hat{U}_i$. Cette algèbre agit dans S grâce à ω_ψ . Un point central de la démonstration est le

THÉOREME.- On a l'égalité $S^{K_1} = H(\tilde{U}_2) s_0$.

La démonstration est technique (!), utilisant le "modèle-réseaux" de la représentation métaplectique, qui est bien adapté à l'étude de l'action des sous-groupes compacts.

Soient (π_1, V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1$ intervenant dans ω_ψ , $(\theta(\pi_1), \theta(V_1))$ la représentation lisse de $\tilde{U}_2$ qui lui est associée (cf. §4.1). On suppose $V_1^{K_1} \neq \{0\}$.

6.5. Soit V_2 un quotient irréductible de $\theta(V_1)$. On a une surjection $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ -équivariante $S \longrightarrow V_1 \otimes V_2$. Comme K_1 est compact, on en déduit une surjection $\tilde{U}_2$ -équivariante $S^{K_1} \longrightarrow V_1^{K_1} \otimes V_2$. D'après le théorème 6.4, $S^{K_1} = H(\tilde{U}_2) s_0$. D'où $V_1^{K_1} \otimes V_2 = H(\tilde{U}_2) p(s_0)$. En particulier $p(s_0) \neq 0$. Mais $s_0 \in S^{K_1 K_2}$, donc $p(s_0) \in V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$, et $V_2^{K_2} \neq \{0\}$.

6.6. Supposons la conjecture 4.1 fautive pour π_1 . Alors $\theta(V_1)$ a un quotient de la forme $V_2 \oplus V_2'$, avec V_2 et V_2' irréductibles. On a une surjection $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ -équivariante $S \longrightarrow V_1 \otimes (V_2 \oplus V_2')$. Posons $X = V_1^{K_1} \otimes (V_2^{K_2} \oplus V_2'^{K_2})$. On a de même une surjection $p: S^{K_1 K_2} \longrightarrow X$, qui est $H(\tilde{U}_1 // K_1) \times H(\tilde{U}_2 // K_2)$ -équivariante. D'après le théorème 6.4, $S^{K_1} = H(\tilde{U}_2) s_0$, d'où $S^{K_1 K_2} = H(\tilde{U}_2 // K_2) s_0$. De même $S^{K_1 K_2} = H(\tilde{U}_1 // K_1) s_0$. On en déduit :

$$X = H(\tilde{U}_1 // K_1) p(s_0) = H(\tilde{U}_2 // K_2) p(s_0).$$

Lemme.- Soient Y un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, A, B deux sous-algèbres de $\text{End}(Y)$, $y \in Y$. Supposons

- (i) $Y = Ay = By$;
- (ii) A et B commutent.

Alors A est le commutant de B dans $\text{End}(Y)$ et vice-versa.

Donc $H(\tilde{U}_1 // K_1)$ est le commutant de $H(\tilde{U}_2 // K_2)$ dans $\text{End}(X)$. Mais la projection

de X sur le facteur $V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$ appartient à ce commutant et n'appartient pas à $H(\tilde{U}_1//K_1)$. Contradiction qui démontre la conjecture pour (π_1, V_1) .

Maintenant le §6.5 démontre le théorème 6.2.

6.7. Pour démontrer 6.1 quand $V_1^{K_1}$ est nul, on doit généraliser le théorème 6.4 et les raisonnements ci-dessus en remplaçant K_1 et K_2 par des groupes de congruence convenables.

Notons que la démonstration de la conjecture pour $k = \mathbb{R}$ suit essentiellement les mêmes chemins. Par contre la démonstration de l'analogue réel du théorème 6.4. est très différente.

BIBLIOGRAPHIE

Les deux références fondamentales sont les articles [21] de A. Weil et [6] de R. Howe. Le présent exposé doit beaucoup à un séminaire qui a eu lieu l'an dernier à Paris 7, dont des comptes-rendus seront publiés. Le lecteur y trouvera (en particulier sous la signature de M.-F. Vignéras) les démonstrations de certaines assertions de l'exposé (par exemple 3.4, 3.6 et 3.7). Les résultats de Howe (§6) ne sont pas encore publiés.

- [1] A. ALBERT - *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXIV, Providence 1961.
- [2] A. BOREL, H. JACQUET, *Automorphic forms and automorphic representations*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, p. 189-202, Proc. of Symp. in Pure Math. XXXIII, Part 1, AMS, Providence 1979.
- [3] F. BRUHAT, *Représentations des groupes localement compacts 2*, cours à Paris 7, multigraphié ENS 1971.
- [4] M. EICHLER, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer, Berlin Heidelberg New-York 1974.
- [5] E. HECKE, *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, in *Mathematische Werke*, Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen 1970.
- [6] R. HOWE, *θ -series and invariant theory*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, p.275-286, Proc. of Symp. in Pure Math. XXXIII, Part 1, AMS, Providence 1979.
- [7] R. HOWE, *Transcending classical invariant theory*, preprint.
- [8] R. HOWE, *Invariant theory and duality for classical groups over finite fields, with applications to their singular representation theory*, preprint.
- [9] M. KASHIWARA, M. VERGNE, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*, Inv. Math. 44 (1978), 1-47.

- [10] M. KNESER, *Approximation in algebraischen Gruppen*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles 1962.
- [11] S. KUDLA, *On the local theta correspondence*, Inv. Math. 83 (1986), 229-255.
- [12] G. LION, M. VERGNE, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in Math. 6, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart 1980.
- [13] G. MACKEY, *A theorem of Stone and Von Neumann*, Duke Math. J. 16 (1949) 313-326.
- [14] J. Von NEUMANN, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann. 104 (1931), 570-578.
- [15] P. PERRIN, *Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique*, in *Non commutative harmonic analysis and Lie groups*, Proc. Marseille-Luminy 1980, Springer LN 880, Berlin Heidelberg New-York.
- [16] S. RALLIS, *On the Howe duality conjecture*, Comp. Math. 51 (1984), 333-399.
- [17] S. RALLIS, *Injectivity properties of liftings associated to Weil representations*, Comp. Math. 52 (1984), 139-169.
- [18] R. RAO, *On some explicit formulas in the theory of Weil representations*, preprint.
- [19] C. SIEGEL, *Gesammelte Abhandlungen I*, Springer 1966.
- [20] M. STONE, *Linear transformations in Hilbert space III, operational methods and group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 16 (1930), 172-175.
- [21] A. WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111, (1964), 143-211.
- [22] A. WEIL, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. 113 (1965), 1-87.

Jean-Loup WALDSPURGER

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et
d'Informatique
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05