

# *Astérisque*

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

## **Bifurcations de points fixes elliptiques**

*Astérisque*, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 668, p. 313-334

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1985-1986\\_\\_28\\_\\_313\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__313_0)>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## BIFURCATIONS DE POINTS FIXES ELLIPTIQUES

[d'après A. Chenciner]

par Jean-Christophe Yoccoz

## 1. INTRODUCTION

Dans les nombreux travaux consacrés à l'étude de la dynamique des difféomorphismes des surfaces au voisinage d'un de leurs points fixes, on peut distinguer deux pôles d'intérêt.

1.1. Les points fixes elliptiques conservatifs ([1]) : pour comprendre la structure des orbites d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté au voisinage d'une orbite périodique elliptique, on a été amené, depuis Poincaré, à étudier la dynamique des difféomorphismes locaux de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  qui préservent les aires et admettent en 0 un point fixe elliptique. Cette dynamique est extrêmement complexe, et encore mal comprise. Ses principales caractéristiques génériques connues sont :

- les courbes invariantes entourant 0, formant transversalement un ensemble de Cantor de mesure positive ;
- les ensembles invariants d'Aubry-Mather, qui sont des versions "faibles" des courbes pour les nombres de rotation rationnels ou trop bien approchés par les rationnels ;
- les flots elliptiques et les connexions homoclines entre variétés stables et instables de certaines orbites périodiques hyperboliques, qui créent dans les zones d'instabilité entre les courbes une dynamique de type "chaotique".

1.2. La théorie des bifurcations : sans l'hypothèse de préservation des aires, la dynamique *générique* d'un difféomorphisme local de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  est élémentaire ; les phénomènes non triviaux apparaissent en codimension positive, lorsqu'on s'intéresse à des familles génériques  $(P_\mu)$  de difféomorphismes locaux et qu'on désire décrire les changements qualitatifs (bifurcations) de la dynamique dans un voisinage *uniforme* de 0. Le cas le plus connu est celui de la bifurcation de Hopf ; la naissance (ou la mort) d'une courbe invariante normalement hyperbolique lorsque les valeurs propres de  $DP_\mu(0)$  traversent le cercle unité ; c'est un phénomène de codimension 1.

Les résultats de Chenciner créent un lien inattendu entre ces deux situations. Le cadre est celui de la théorie des bifurcations : il étudie la bifurcation de Hopf en codimension 2, c'est-à-dire les bifurcations se produisant dans des familles génériques à deux paramètres  $(P_\mu)$  de difféomorphismes locaux de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , présentant pour  $\mu = 0$  une bifurcation de Hopf dégénérée. Le principal problème est de comprendre comment deux courbes invariantes créées par bifurcation de Hopf s'éliminent le long d'une courbe de non-hyperbolicité  $\Gamma$  (dans l'espace des paramètres). De façon surprenante, il retrouve, déployées le long de  $\Gamma$ , toutes les caractéristiques de la dynamique d'un point fixe elliptique conservatif (courbes invariantes non normalement hyperboliques, ensembles invariants d'Aubry-Mather, orbites homoclines) : tout se passe comme si, pour les phénomènes associés à un nombre de rotation fixé, la condition de préservation des aires était de codimension 1.

Je n'ai donné dans ce qui suit que peu de démonstrations, car celles-ci nécessitent le plus souvent de longs calculs ; ce n'est d'ailleurs pas le moins surprenant qu'on puisse, dans la situation concrète à laquelle Chenciner s'intéresse, "calculer" de façon si efficace.

## 2. RAPPELS

### 2.1. Formes normales

Un difféomorphisme formel  $N = (N_1, \dots, N_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , de partie linéaire diagonale :

$$N_i(z) = \lambda_i z_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} N_{i,\alpha} z^\alpha.$$

est une *forme normale* si on a :

$$\forall i, \forall \alpha, |\alpha| \geq 2, N_{i,\alpha} \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda^\alpha \text{ ("résonance")}.$$

Tout difféomorphisme formel dont la partie linéaire est diagonalisable est formellement conjugué à une forme normale.

Soit  $P : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  un difféomorphisme formel ayant en 0 un point fixe elliptique : les valeurs propres de  $DP(0)$  sont  $\lambda_\pm = e^{\pm 2\pi i \alpha}$ ,  $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}$ .

Si  $\alpha$  est irrationnel, les seules résonances sont  $\lambda_\pm = \lambda_\pm (\lambda_+ \lambda_-)^k$ ,  $k \geq 1$  ; une forme normale de  $P$  s'écrit donc, en coordonnées  $z, \bar{z}$  (resp. polaires) :

$$N(z) = e^{2\pi i \alpha} z (1 + \sum_{i \geq 1} a_i (z\bar{z})^i), \quad a_i \in \mathbb{C}$$

$$(\text{resp. } N(\vartheta, r) = (\vartheta + \alpha + \sum_{i \geq 1} b_i r^{2i}, r(1 + \sum_{i \geq 1} c_i r^{2i})), \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}).$$

DÉFINITION.- On dit que  $P$  est de codimension formelle  $k$  si on a  $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ ,  $c_k \neq 0$ .

Si  $P$  préserve (formellement) les aires, on a  $c_i = 0$  pour tout  $i$ , on peut choisir une conjugaison à la forme normale qui préserve les aires, et les  $b_i$  sont alors uniquement déterminés : ce sont les invariants de Birkhoff de  $P$ .

Soit  $\alpha = p/q$ , avec  $p \wedge q = 1$ ,  $q \geq 3$ ; de nouvelles résonances interviennent, celle de plus bas degré étant  $\lambda_{\pm} = \lambda_{\mp}^{q-1}$ . Une forme normale s'écrit alors :

$$N(z) = e^{2\pi i \alpha} z \left( 1 + \sum_{i < \frac{q-2}{2}} a_i (z\bar{z})^i \right) + a\bar{z}^{q-1} + 0(z^q).$$

Remarque.- i) On peut alors encore parler de codimension formelle pour  $k < \frac{q-3}{2}$ .

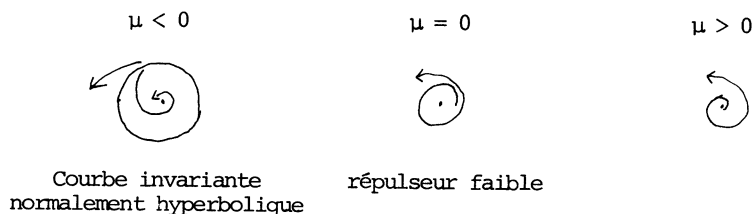
ii) Même si  $P$  converge au voisinage de  $0$ , ni les formes normales, ni les conjugaisons (*a fortiori*) ne convergent en général. On peut néanmoins s'en servir, en les tronquant à un ordre fini, pour étudier la dynamique de  $P$ .

## 2.2. Codimension formelle 1 : la bifurcation de Hopf

Soit  $(P_\mu)$  une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ ; supposons que  $P_0$  ait en  $0$  un point fixe elliptique, de valeurs propres  $\neq \pm 1, \pm i, j, j^2$ , qui soit de codimension formelle 1. Après un changement de variables dépendant différemment de  $\mu$  et un passage en coordonnées polaires, on a, pour  $\mu$  voisin de  $0$  :

$$P_\mu(\vartheta, r) = (\vartheta + \alpha(\mu) + a(\mu)r^2 + 0(r^3), r(1 + b(\mu) + c(\mu)r^2 + 0(r^3))) ,$$

avec par hypothèse  $b(0) = 0$ ,  $c(0) \neq 0$ . Supposons de plus que  $\frac{\partial b(0)}{\partial \mu} \neq 0$ . On peut alors, pour  $\mu$  voisin de  $0$ , décrire la dynamique de  $P_\mu$  dans un voisinage uniforme de  $0$ . Si par exemple on a  $c(0) > 0$ ,  $\frac{\partial b(0)}{\partial \mu} > 0$ , alors



On va voir qu'en codimension formelle 2 (dans une famille à 2 paramètres), la situation est considérablement plus complexe !

### 2.3. Points fixes elliptiques conservatifs

a) Soit  $P$  un difféomorphisme local de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , qui préserve les aires et admet en  $0$  un point fixe elliptique, de valeurs propres  $e^{\pm 2\pi i \alpha}$   $\neq \pm 1$ ,  $\pm i$ ,  $j$ ,  $j^2$ . Le premier invariant de Birkhoff  $b_1$  est alors bien défini, et on le suppose non nul (hypothèse de "twist").

D'après Birkhoff ([2],[3]) tout voisinage simplement connexe  $U$  de  $0$  qui est suffisamment petit, invariant par  $P$ , et l'intérieur de son adhérence, a pour bord une courbe d'équation (en coordonnées polaires)  $r = \psi(\vartheta)$ , où  $\psi$  est une fonction lipschitzienne dont la constante de Lipschitz tend vers  $0$  avec  $U$ .

Moser ([4],[5]) a montré que de telles courbes invariantes par  $P$  s'accumulent sur  $0$  (qui est donc topologiquement stable), et forment même une partie fermée (génériquement d'intérieur vide) dont  $0$  est point de densité.

b) Le bon cadre pour démontrer le résultat de Moser semble être celui du théorème de la courbe translatée de Rüssmann ([6],[3]).

Soit  $T(\vartheta, r) = (\vartheta + r, r)$  le *twist standard* du tore  $\mathbb{T}^2$ ; toute perturbation  $F = T + (\varphi_1, \varphi_2)$  de  $T$  s'écrit, moyennant le changement de variables  $\rho = r + \varphi_1(\vartheta, r)$ , sous la forme

$$F(\vartheta, \rho) = (\vartheta + \rho, \rho + \varphi(\vartheta, \rho)) \quad , \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2) .$$

Si  $\omega \in \mathbb{T}^1$  satisfait à une condition diophantienne :

$$\exists \beta \geq 0 \quad , \quad \gamma > 0 \quad , \quad \forall p/q \in \mathbb{Q} \quad , \quad |\omega - p/q| \geq \gamma q^{-2-\beta}$$

et si  $\varphi$  appartient à un voisinage  $U(\gamma, \beta)$  de  $0$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{T}^1$ ,  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ , proches de  $0$  tels que la courbe

$C = \{r = \vartheta + \omega + \psi(\vartheta)\}$  ait pour image par  $F$  sa translatée

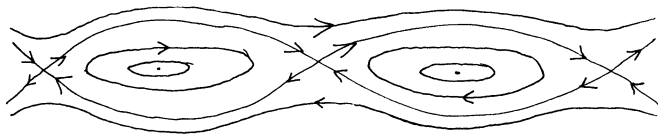
$R_\lambda(C) = \{r = \vartheta + \omega + \psi(\vartheta) + \lambda\}$ , le difféomorphisme  $f(\vartheta) = \vartheta + \omega + \psi(\vartheta)$  de  $C$  induit par  $R_{-\lambda} \circ F$  étant différentiablement conjugué à la rotation d'angle  $\omega$ .

Il n'y a pas ici d'hypothèse de préservation des aires sur  $F$ .

Pour appliquer ce résultat dans le cadre de a), il faut pouvoir laisser  $\gamma$  tendre vers  $0$ , et donc bien contrôler la dépendance en  $\gamma$  de  $U(\gamma, \beta)$ .

c) On se replace dans la situation de a). Génériquement (en  $P$ ), les courbes invariantes homotopes à  $r = C^{te}$  ne contiennent pas d'orbite périodique; elles sont alors disjointes et toute composante connexe du complémentaire de leur réunion est un anneau ouvert (une "zone d'instabilité" de Birkhoff). Soit  $A$  une telle zone, bordée par deux courbes  $C_1, C_2$  de nombres de rotation respectifs  $\omega_1, \omega_2$ ; pour tout  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ ,  $A$  contient au moins un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\omega$  (cf. 5.1 pour la définition, et l'exposé de Chenciner ([1])).

d) Zehnder ([8]) a analysé en détail les orbites périodiques dont le nombre de rotation  $p/q$  est une très bonne approximation de  $\alpha$  (dans le cas générique, il existe une infinité de telles approximations). A l'aide de formes normales résonantes, il montre que  $P^q$  est, dans la région concernée, très proche du temps 1 d'un flot hamiltonien du type représenté ci-dessous :



Le difféomorphisme  $P$  possède exactement une orbite périodique elliptique et une orbite périodique hyperbolique de nombre de rotation  $p/q$  ; les variétés stables et instables des points hyperboliques ont une intersection non vide, génériquement transverse ; au voisinage de l'orbite périodique elliptique (les "flots elliptiques"), on retrouve tous les phénomènes décrits dans ce numéro.

### 3. CODIMENSION FORMELLE 2 ; FAMILLES À DEUX PARAMÈTRES

3.1. On considère dorénavant une famille lisse  $(P_\mu)_{\mu \in (\mathbb{R}^2, 0)}$  de difféomorphismes locaux de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  ; on suppose que  $P$  admet en 0 un point fixe elliptique de codimension formelle 2, dont les valeurs propres  $\lambda = e^{2\pi i \omega_0}$ ,  $\bar{\lambda}$  vérifient  $\lambda^q \neq 1$  pour  $1 \leq q \leq 2n+3$  (où  $n$  est un entier, fixé dans la suite, au moins égal à 15).

On voudrait décrire la dynamique de  $P_\mu$  dans un voisinage uniforme de 0, lorsque  $\mu$  décrit un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^2$ .

Un changement de coordonnées (dépendant différemment de  $\mu$ ) et un passage en coordonnées polaires permettent de présenter  $(P_\mu)_{\mu \in U}$  sous la forme :

$$P_\mu(\vartheta, r) = (\Theta, R), \text{ avec } \begin{cases} \Theta = \vartheta + g(\mu, r^2) + r^{2n+2} \alpha(\mu, \vartheta, r) \\ R^2 = r^2(1 + f(\mu, r^2) + r^{2n+2} \beta(\mu, \vartheta, r)) \end{cases}$$

où  $f, g, \alpha, \beta$  sont de classe  $C^\infty$  et  $f, g$  sont des polynômes de degré  $r$  en leur seconde variable (notée  $X$ ).

Vu l'hypothèse sur  $P_0$ , on a :

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial X}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(0,0) \neq 0.$$

Quitte à changer d'échelle et à remplacer  $(P_\mu)$  par  $(P_\mu^{-1})$ , on peut supposer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(0,0) = -2$ . On fait aussi l'hypothèse générique suivante :

(H1) Les formes  $\frac{\partial}{\partial \mu} (f(0,0))$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial f}{\partial X} (0,0)$  sont linéairement indépendantes.

On peut alors écrire le paramètre  $\mu$  sous la forme  $\mu = (\mu, a)$  de façon à avoir :

$$f(\mu, X) = \mu + 2a X + \sum_{i=2}^n a_i(\mu) X^i,$$

avec  $a_2(0) = -1$ .

On notera  $N_\mu$  la forme normale associée à  $P_\mu$  définie par :

$$N_\mu(\vartheta, r) = (\vartheta + g(\mu, r^2), r(1 + f(\mu, r^2))^{1/2}).$$

### 3.2. La courbe de non-hyperbolicité et la dynamique de $N_\mu$

Le feuilletage par cercles centrés en 0 est invariant par  $N_\mu$  ; les racines réelles positives de  $f(\mu, X) = 0$  déterminent les cercles invariants de  $N_\mu$ , et une telle racine est simple si et seulement si le cercle correspondant est normalement hyperbolique.

L'élimination de  $X$  entre  $f(\mu, X) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial X} f(\mu, X) = 0$ ,  $X \geq 0$  produit la courbe de non-hyperbolicité  $\Gamma$ . La courbe  $\Gamma$  est paramétrée par  $a \geq 0$ , elle admet une équation du type  $\mu = \mu(a) = -a^2 + 0(a^3)$ , et le rayon  $r(a)$  du cercle invariant non normalement hyperbolique correspondant vérifie  $(r(a))^2 = a + 0(a^2)$ .

La droite  $\mu = 0$  (ligne de bifurcation de Hopf) et la courbe  $\Gamma$  délimitent les régions correspondant aux différents types de dynamique possibles de  $N_\mu$  ; ils sont symbolisés sur la figure 1.

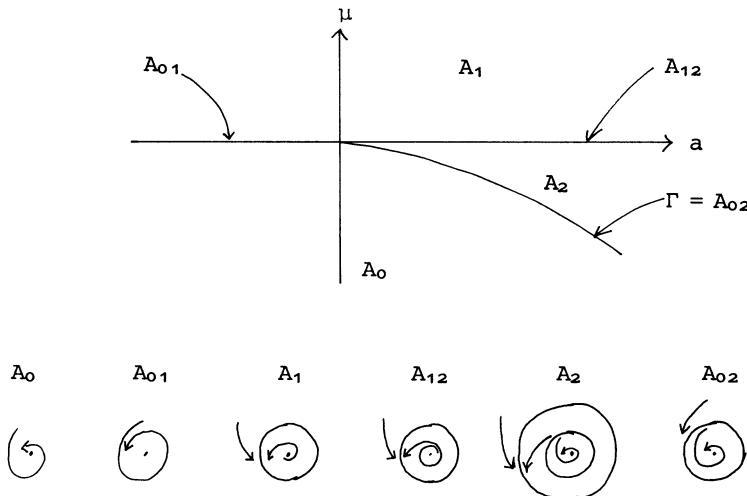


Figure 1

### 3.3. Le domaine d'hyperbolicité

C'est dans un voisinage effilé  $V$  de  $\Gamma$  qu'ont lieu les phénomènes qui nous intéressent ; en dehors de  $V$ , l'hyperbolicité radiale de  $N_\mu$  est suffisante pour assurer, par les méthodes classiques, que la dynamique de  $P_\mu$  soit semblable à celle de  $N_\mu$ .

Plus précisément, soient  $U_0, U_1, U_2$  les parties ouvertes de  $U$  constituées des  $\mu \in U$  pour lesquels la dynamique de  $P_\mu$  est décrite par les modèles  $A_0, A_1, A_2$  ci-dessus (pour  $A_1$  et  $A_2$ , on exige que l'hyperbolicité normale des courbes invariantes soit supérieure à leur éventuelle hyperbolicité tangentielle).

Posons, d'autre part :

$$f_+(\mu, X) = f(\mu, X) - X^{n-3},$$

$$f_-(\mu, X) = f(\mu, X) + X^n,$$

et notons  $\Gamma_\pm$  les courbes résultant de l'élimination de  $X$  entre  $f_\pm(\mu, X) = 0$ ,  $\frac{\partial f_\pm(\mu, X)}{\partial X} = 0$ ,  $X \geq 0$ . Elles ont pour équation

$$\mu = \mu_+(a) = \mu(a) + a^{n-3} + 0(a^{n-2}) \quad \text{pour } \Gamma^+$$

$$\mu = \mu_-(a) = \mu(a) - a^n + 0(a^{n+1}) \quad \text{pour } \Gamma^-$$

avec  $a \geq 0$ . Notons  $V$  le voisinage effilé de  $\Gamma$  bordé par  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$ . On montre que :

$$a) \quad U_1 = \{\mu \mid \mu > 0\}$$

$$b) \quad U_2 \supset \{\mu \mid a > 0, 0 > \mu > \mu_+(a)\}$$

$$c) \quad U_0 \supset \{\mu \mid a < 0, \mu < 0 \text{ ou } a \geq 0, \mu < \mu_-(a)\}$$

(la vérification de c) est immédiate ; celle de a) et b) repose sur la méthode des "transformées de graphes", qui remonte à Hadamard).

On se concentrera désormais sur ce qui se passe dans  $V$  : comment, sur un chemin reliant  $U_2$  à  $U_0$  (et, par exemple, transverse à  $\Gamma$ ), les deux courbes invariantes s'éliminent-elles ?

### 3.4. Nombres de rotation des courbes invariantes

a) Pour les formes normales

On fait des hypothèses génériques supplémentaires suivantes, qui jouent le rôle de l'hypothèse de twist du cas conservatif :

$$(H2) \quad \frac{\partial g}{\partial X}(0,0) \neq 0$$

$$(H3) \quad \frac{\partial g}{\partial X}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = \eta_0 \neq 0.$$

On a  $g(0,0) = \omega_0$ . D'après l'hypothèse (H3), les surfaces de niveau de  $g(\mu, X)$

au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^3$  coupent transversalement la surface  $f(\mu, X) = 0$  et la courbe  $\tilde{\Gamma} : \mu = \mu(a), r = r(a)$  ; en projetant dans l'espace des paramètres, on obtient des courbes  $C_\omega$ , pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$ , caractérisées comme suit :  $C_\omega$  est l'ensemble des  $\mu \in U$  pour lesquels  $N_\mu$  induit une rotation d'angle  $2\pi\omega$  sur un de ses cercles invariants.

On suppose dans la suite par exemple qu'on a  $\eta_0 > 0$ .

Pour  $\omega \geq \omega_0$ , voisin de  $\omega_0$ ,  $C_\omega$  coupe  $\Gamma$  en un unique point  $(\mu_\omega, a_\omega)$  en lequel les deux courbes ont un contact quadratique ; on a

$$\frac{\partial a_\omega}{\partial \omega} = \eta_0^{-1} + o(a_\omega),$$

de sorte que  $\omega$  peut servir à paramétrer  $\Gamma$ .

La figure 2 représente la configuration des courbes  $C_\omega$  lorsque  $\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) > 0$  ; pour les autres cas, voir [9].

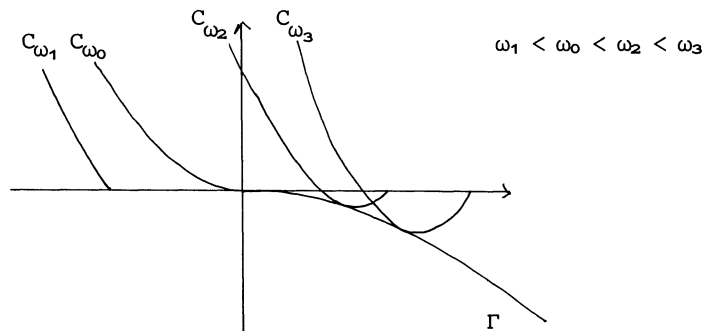


Figure 2

b) Pour  $\omega$  voisin de  $\omega_0$ , soit  $\tilde{C}_\omega$  l'ensemble des  $\mu \in U$  pour lesquels  $P_\mu$  possède une courbe invariante qui soit un graphe en coordonnées polaires et y induise un difféomorphisme de nombre de rotation  $\omega$ .

On peut sans grande difficulté décrire l'intersection de  $\tilde{C}_\omega$  et du domaine d'hyperbolicité  $H = U - V$  :

- lorsque  $\omega$  est irrationnel,  $\tilde{C}_\omega \cap H$  est une courbe ayant une ou deux composantes connexes suivant que  $\omega \leq \omega_0$  ou  $\omega > \omega_0$  ; chaque composante connexe a une équation de la forme  $\mu = \mu_\omega(a)$ , où la fonction  $\mu_\omega$  est lipschitzienne, et même de classe  $C^\infty$  si  $\omega$  satisfait à une condition diophantienne.

- lorsque  $\omega$  est rationnel, il faut "épaissir" la situation précédente, en remplaçant la courbe d'équation  $\mu = \mu_\omega(a)$  par une région de la forme  $\mu_\omega^-(a) \leq \mu \leq \mu_\omega^+(a)$ , où  $\mu_\omega^+$ ,  $\mu_\omega^-$  sont lipschitziennes ; génériquement, on a  $\mu_\omega^+ > \mu_\omega^-$ , sauf au point où la courbe invariante correspondante dégénère en l'origine ; c'est le phénomène des "langues d'Arnold" ([10],[11]).

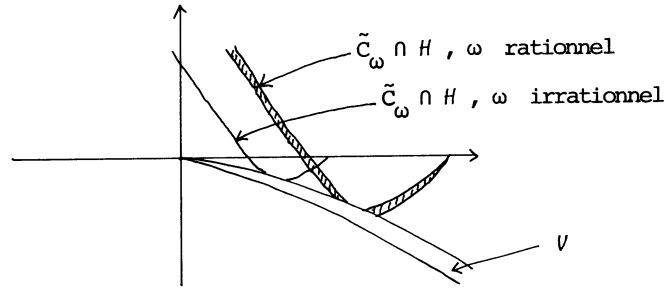


Figure 3

### 3.5. La deuxième localisation

Pour étudier ce qui se passe dans  $V$ , on va :

- recouvrir  $V$  par des cartes  $\mathcal{D}_\omega$ , centrées aux points  $(\mu_\omega, a_\omega) \in \Gamma$  ;
- se restreindre, lorsque  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$ , à un anneau entourant 0 qui contient toute la dynamique non triviale de  $P_\mu$ .

Posons  $\eta_1 = \frac{\partial g}{\partial X}(0,0) \neq 0$ ,  $\eta_2 = 2\eta_0 \eta_1^{-1} \neq 0$  ; fixons  $\omega > \omega_0$ , et soit  $\mu = (\mu, a)$  un point vérifiant :

$$\mu - \mu_\omega = 0(a_\omega^3) \quad , \quad a - a_\omega = 0(a_\omega^2) \quad .$$

Définissons  $r(\mu)$  par  $g(\mu, (r(\mu))^2) = \omega$  ; le changement de variables  $r^2 = (r(\mu))^2 (1 + \sigma)$  conduit pour  $N_\mu$  à l'expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \vartheta + \sum_0^n a_i(\mu) \sigma^i \\ \Sigma = \sigma + \sum_0^{n+1} b_i(\mu) \sigma^i \end{array} \right.$$

Sous les conditions précédentes, on a

$$\begin{aligned} a_0(\mu) &= \omega, \quad a_1(\mu) = \eta_1 a_\omega + 0(a_\omega^2), \\ a_i(\mu) &= 0(a_\omega^i), \quad i \geq 2, \\ b_0(\mu) &= (\mu - \mu_\omega)(1 + 0(a_\omega)) + 2a_\omega(a - a_\omega)(1 + 0(a_\omega)), \\ b_1(\mu) &= (\mu - \mu_\omega)(1 + 0(a_\omega)) + (2 + \eta_2)a_\omega(a - a_\omega)(1 + 0(a_\omega)), \\ b_2(\mu) &= -a_\omega^2(1 + 0(a_\omega)), \\ b_i(\mu) &= 0(a_\omega^{i-1}), \quad i \geq 3, \end{aligned}$$

Posons  $v = b_0(\mu)$ ,  $\varepsilon = b_1(\mu)$ , et définissons le domaine  $\mathcal{D}_\omega$  par les conditions  $|v| \leq a_\omega^3$ ,  $|\varepsilon| \leq a_\omega^3$ . On montre que  $(v, \varepsilon)$  est un système de coordonnées pour  $\mathcal{D}_\omega$ . La courbe  $C_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$  a pour équation  $v = 0$ , et la courbe  $\Gamma \cap \mathcal{D}_\omega$  a une équation de la forme :

$$v = -\frac{\varepsilon^2}{4a_\omega^2} (1 + o(a_\omega)) .$$

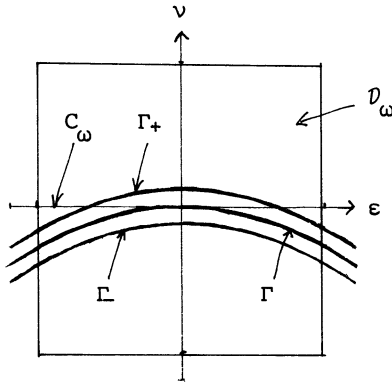


Figure 4

Dans les coordonnées  $(\vartheta, \sigma)$ , l'expression de  $P_\mu$  est :

$$\begin{cases} \Theta = \vartheta + \sum_0^n a_i(\mu) \sigma^i + a_\omega^{n+1} \alpha_1(\mu, \vartheta, \sigma) \\ \Sigma = \sigma + \sum_0^{n+1} b_i(\mu) \sigma^i + a_\omega^{n+1} \beta_1(\mu, \vartheta, \sigma) . \end{cases}$$

La partie non triviale de la dynamique de  $P_\mu$  est concentrée, lorsque  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$ , dans l'anneau  $|\sigma| \leq 2a_\omega^{1/2}$  : on a  $\Sigma > \sigma$  si  $\sigma \leq -2a_\omega^{1/2}$ , et  $\Sigma < \sigma$  si  $\sigma \geq 2a_\omega^{1/2}$ .

Le changement de variables :

$$\eta_1 a_\omega \tilde{\sigma} = \sum_1^n a_i(\mu) \sigma^i + a_\omega^{n+1} \alpha_1(\mu, \vartheta, \sigma)$$

est aussi souvent utile ; il permet d'écrire  $P_\mu$  sous la forme :

$$\begin{cases} \Theta = \vartheta + \omega + \eta_1 a_\omega \tilde{\sigma} , \\ \tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\mu) \tilde{\sigma}^i + a_\omega^n \beta_2(\mu, \vartheta, \sigma) , \end{cases}$$

où  $c_i(\mu)$ , pour  $0 \leq i \leq n-1$ , vérifie la même estimation que  $b_i(\mu)$ . Il est facile de voir que  $(c_0(\mu), c_1(\mu))$  est un système de coordonnées pour  $\mathcal{D}_\omega$ .

On définit  $\tilde{N}_\mu$  en faisant  $\beta_2 \equiv 0$  dans les formules précédentes. On notera dans la suite  $\tau_\omega = \eta_1 a_\omega$ .

## 4. EXISTENCE DE BONS CHEMINS D'ÉLIMINATION

## 4.1. Conditions diophantiennes

Soient  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ . On note  $K(\gamma, \beta)$  la partie fermée de  $\mathbb{R}$  constituée des  $\omega$  qui vérifient :

$$|\omega - p/q| \geq \frac{\gamma |\omega - \omega_0|}{q^{2+\beta}}, \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}$$

On notera, par rapport aux conditions diophantiennes qu'on rencontre le plus souvent dans les problèmes de petits dénominateurs, la présence du facteur  $|\omega - \omega_0|$ , nécessaire pour obtenir des résultats non triviaux ; la situation est analogue pour la stabilité des points fixes elliptiques conservatifs.

Lemme.- Soit  $\beta > 0$  ; il existe une constante  $C(\beta) > 0$  telle qu'on ait, pour tout  $t > 0$  :

$$m([\omega_0 + t, \omega_0 + 2t] \cap K(\gamma, \beta)) \geq t(1 - \gamma C(\beta)).$$

## 4.2. Courbes translatées

Pour  $\omega > \omega_0$  et  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$ , la courbe  $\tilde{\sigma} = 0$  est envoyée par  $\tilde{N}_\mu$  sur sa translatée  $\tilde{\sigma} = c_0(\mu)$  avec une rotation d'angle  $2\pi\omega$ . Le théorème ci-dessous montre que ce phénomène persiste pour  $P_\mu$ , si  $\omega$  satisfait à une condition diophantienne.

On se place dans les coordonnées spatiales  $(\vartheta, \tilde{\sigma})$ .

THÉORÈME 1.- Soient  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ . Il existe une constante  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \beta)$  telle qu'à tout  $\omega \in (\omega_0, \omega_0 + \varepsilon) \cap K(\gamma, \beta)$  soit associée une application différentiable :  $\mu \longrightarrow (\psi_\mu, h_\mu, \lambda_\mu)$  de  $\mathcal{D}_\omega$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1) \times \mathbb{R}$  possédant la propriété suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} P_\mu(\vartheta, \psi_\mu(\vartheta)) = (\vartheta, \psi_\mu(\vartheta) + \lambda_\mu) \\ \vartheta = h_\mu^{-1}(h_\mu(\vartheta) + \omega), \end{cases}$$

pour tout  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$ ,  $\vartheta \in \mathbb{T}^1$ .

On a de plus des majorations (essentiellles pour la suite) de  $|\lambda_\mu - c_0(\mu)|$ ,  $|h_\mu - \text{id}|$  et de leurs dérivées partielles par rapport à  $v, \varepsilon$  ; les expressions majorantes sont de la forme  $C a_\omega^{n-k} \|\beta_2\|_m$ , où  $C$  est une constante,  $k$  un entier  $\leq 14$ , et  $\|\beta_2\|_m$  le maximum des bornes supérieures d'un certain nombre (fini) de dérivées partielles de  $\beta_2(\mu, \vartheta, \tilde{\sigma})$ .

D'après le lemme, l'ensemble des  $\omega$  satisfaisant aux conclusions du théorème est de mesure positive, et sa mesure relative dans  $[\omega_0, \omega_0 + t]$  tend vers 1 lorsque  $t$  tend vers 0.

La méthode de démonstration du théorème est de transformer (1), pour  $\mu$  fixé, en une équation fonctionnelle :

$$F(h_\mu, \lambda_\mu, a_\omega^n \beta_2(\mu, \cdot, \cdot)) = 0,$$

où  $F$  vérifie  $F(\text{id}, c_0(\mu), 0) = 0$  (le cas de  $\tilde{N}_\mu$ ) ; on va appliquer le théorème des fonctions implicites de Hamilton ([12], [13], [14]) pour trouver  $h_\mu$  et  $\lambda_\mu$  ( $\psi_\mu$  s'en déduisant) lorsque  $a_\omega$  est assez petit ; la différentiabilité de l'application  $\mu \longrightarrow (h_\mu, \psi_\mu, \lambda_\mu)$  est alors immédiate. La vérification des hypothèses du théorème de Hamilton est (très) longue, et rendue délicate par la nécessité de contrôler les puissances de  $a_\omega$  apparaissant dans les estimations.

#### 4.3. L'ensemble $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}_\omega$

On fixe dans la fin du paragraphe un nombre de rotation  $\omega$  qui satisfait aux hypothèses du théorème.

Pour  $\mu \in \mathcal{V}_\omega$ , posons  $d_0(\mu) = \lambda_\mu$ . Les estimations du théorème permettent de montrer que les applications  $c_0$ ,  $d_0$  sont proches dans la  $C^1$ -topologie sur  $\mathcal{V}_\omega$ . Il en résulte que l'équation  $d_0(\mu) = 0$  définit dans  $\mathcal{V}_\omega$  une courbe  $\tilde{C}$  qui est  $C^1$ -proche de l'axe  $v = 0$ .

Lorsque  $\mu \in \tilde{C}$ , la courbe  $\{\tilde{\sigma} = \psi_\mu(\vartheta)\}$  est invariante par  $P_\mu$ , et l'action angulaire de  $P_\mu$  sur cette courbe est conjuguée (par  $h_\mu$ ) à la rotation d'angle  $2\pi\omega$ . On a donc  $\tilde{C} \subset \tilde{C}_\omega$ .

De plus,  $\tilde{C}$  connecte les deux composantes connexes de  $\tilde{C}_\omega \cap H$ . On peut même montrer (cf. 5.2) qu'on a  $\tilde{C} = \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}_\omega$ .

On peut donc conclure que  $\tilde{C}_\omega$  est une courbe connexe de classe  $C^\infty$ .

#### 4.4. Formes normales au voisinage des courbes traduites

Dans les coordonnées  $\xi = h_\mu(\vartheta)$ ,  $x = \tilde{\sigma} - \psi_\mu(\vartheta)$ ,  $P_\mu$  s'écrit  $T_\mu \circ Q_\mu$ , avec :

$$T_\mu(\xi, x) = (\xi, x + \lambda_\mu)$$

$$Q_\mu(\xi, x) = (\xi + \omega + x \alpha_3(\mu, x, \xi), x \beta_3(\mu, x, \xi)).$$

Le difféomorphisme  $Q_\mu$  laisse invariante la courbe  $x = 0$  et  $y$  induit la rotation d'angle  $2\pi\omega$ . Comme  $\omega$  satisfait à une condition diophantienne, on sait alors ([15]) trouver des coordonnées  $(\zeta, y)$  proches de  $(\xi, x)$  dans lesquelles  $Q_\mu$  s'écrit :

$$Q_\mu(\zeta, y) = (\zeta + \omega + \tau_\omega y, y + \sum_{i=1}^K d_i(\mu) y^i + a_\omega^K y^{K+1} \beta_4(\mu, \zeta, y)),$$

avec  $K \leq n$ .

**Z**

L'expression de  $T_\mu$  dans les coordonnées  $(\zeta, y)$  n'est plus aussi simple.

On vérifie que :

- l'application  $(c_0(\mu), c_1(\mu)) \longrightarrow (d_0(\mu), d_1(\mu))$  est, en  $C^1$ -norme, à une distance de l'identité moindre que  $O(a_\omega^{n-14})$  ;

- les estimations de 3.5 satisfaites par les  $b_i(\mu)$  le sont encore par les  $d_i(\mu)$ , pour  $2 \leq i \leq K$ .

On en déduit, lorsque  $\mu \in \tilde{C}$ , la dynamique normale des courbes invariantes correspondantes : la fonction  $d_1(\mu)$  a une dérivée non nulle le long de  $\tilde{C}$  et s'y annule en exactement un point  $\tilde{\mu}_\omega$ . C'est l'unique valeur de  $\mu$  telle que  $P_\mu$  possède une courbe invariante qui soit un graphe en coordonnées polaires, ait pour nombre de rotation  $\omega$ , et ne soit pas normalement hyperbolique.

#### 4.5. Bons chemins d'élimination

THÉOREME 2.- Soient  $\delta > 0$  et  $A_\omega$  (resp.  $B_\omega$ ) la partie de  $\mathcal{D}_\omega$  d'équation :

$$d_0(\mu) \leq -\frac{(d_1(\mu))^2}{(4-\delta)a_\omega^2}$$

$$\left( \text{resp. } d_0(\mu) \geq -\frac{(d_1(\mu))^2}{(4+\delta)a_\omega^2} \right).$$

Si  $\omega$  est assez voisin de  $\omega_0$ , on a :

$$A_\omega - \tilde{\mu}_\omega \subset U_0,$$

$$B_\omega - \tilde{\mu}_\omega \subset U_2,$$

et  $P_{\tilde{\mu}_\omega}$  est topologiquement conjugué à  $N_{(\mu_\omega, a_\omega)}$ . (On comparera les équations de  $A_\omega$ ,  $B_\omega$  à celle de  $\Gamma$ .)

A partir des formes normales du numéro précédent, la démonstration de ce théorème n'est pas très difficile ; le seul cas délicat est celui de  $B_\omega - \tilde{\mu}_\omega$  où on utilise les transformées de graphe pour trouver les courbes invariantes.

Ce théorème est remarquable ; citons-en seulement deux conséquences immédiates.

1) La seule présence d'une courbe invariante de nombre de rotation  $\omega$  force la dynamique de  $P_\mu$  à être "simple".

2) Considérons, pour  $a$  voisin de 0, la famille à un paramètre :  $\mu \longrightarrow P_{(\mu, a)}$  ; avec une probabilité positive sur  $a$ , qui tend vers 1 lorsque  $a$  tend vers 0, cette famille présente pour  $\mu < 0$  une seule bifurcation, de type selle-noeud, où les deux courbes invariantes s'éliminent.

La région où on ne sait encore rien dire de la dynamique de  $P_\mu$  est le complémentaire dans  $V$  de l'union des  $A_\omega$  et  $B_\omega$ , lorsque  $\omega$  décrit l'ensemble des réels vérifiant les hypothèses des théorèmes 1 et 2. Cette région possède une infinité de composantes connexes (les "bulles"). On verra en 6 que la dynamique de  $P_\mu$  peut y être très compliquée.

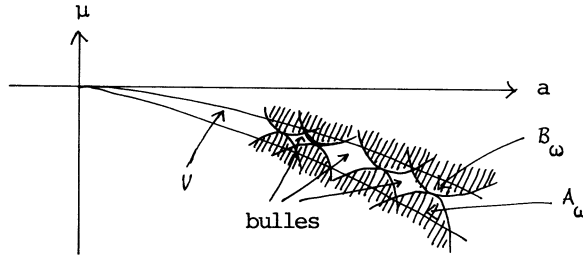


Figure 5

## 5. ENSEMBLES INVARIANTS D'AUBRY - MATHER

**DÉFINITION 5.1.** - Soit  $\mu \in U$ ; un ensemble invariant d'Aubry-Mather de  $P_\mu$  est une partie  $M$  du domaine de définition de  $P_\mu$  vérifiant :

- a)  $M$  est fermée, invariante par  $P_\mu$ , minimale et distincte de  $\{0\}$  ;
- b) la restriction à  $M$  de la coordonnée angulaire  $\vartheta$  est injective
- c) l'homéomorphisme de  $\vartheta(M)$  déduit de  $P_\mu$  préserve l'ordre cyclique du cercle.

Le nombre de rotation de cet homéomorphisme est alors aussi par définition celui de  $M$ .

On note  $\hat{C}_\omega$  l'ensemble des valeurs de  $\mu$  pour lesquelles  $P_\mu$  admet un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\omega$ . Il est clair qu'on a  $\tilde{C}_\omega \subset \hat{C}_\omega$ .

5.2. Lorsque  $\mu \in H$ , tout ensemble invariant d'Aubry-Mather de  $P_\mu$  est contenu dans une des courbes invariantes de  $P_\mu$  (et lui est égal si son nombre de rotation est irrationnel) ; on a donc

$$\hat{C}_\omega \cap H = \tilde{C}_\omega \cap H.$$

On montre facilement, d'autre part, que tout  $\mu \in \tilde{C}_\omega \cap V$  vérifie  $a = a_\omega + O\left(a_\omega^{\frac{n-3}{2}}\right)$  ; on a donc :

$$\hat{C}_\omega \cap V \subset \mathcal{D}_\omega.$$

Supposons que  $\omega$  vérifie les hypothèses du théorème 1. On a alors :

$$\hat{C}_\omega = \tilde{C}_\omega.$$

Soient en effet  $\mu \in \mathcal{D}_\omega \cap \hat{C}_\omega$ , et  $M$  un ensemble invariant d'Aubry-Mather de  $P_\mu$ , de nombre de rotation  $\omega$ ; notons  $C$  la courbe translatée de  $P_\mu$  (cf. 4.2) et  $f$  (resp.  $g$ ) l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  (resp.  $\mathfrak{S}(M)$ ) déduit de  $P_\mu|_C$  (resp.  $P_\mu|_M$ ); on a soit  $g < f|_{\mathfrak{S}(M)}$ , soit  $g > f|_{\mathfrak{S}(M)}$ , soit  $g = f|_{\mathfrak{S}(M)}$ , car  $M$  ne peut couper l'anneau fermé délimité par  $C$  et  $P_\mu(C)$  que si  $C = P_\mu(C)$ . Les nombres de rotation de  $f$  et  $g$  étant égaux à  $\omega$ , on doit avoir  $g = f|_{\mathfrak{S}(M)}$  et  $M = C = P_\mu(C)$ , d'où  $\mu \in \tilde{C}_\omega$ .

### 5.3. Estimations lipschitziennes

Soient  $\omega > \omega_0$ , proche de  $\omega_0$ ,  $\mu \in \hat{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$ , et  $M$  un ensemble invariant d'Aubry-Mather de  $P_\mu$ , de nombre de rotation  $\omega$ . Dans les coordonnées  $(\vartheta, \tilde{\sigma})$  définies en 3.5, soit  $\psi : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application dont  $M$  est le graphe.

Lemme.- L'application  $\psi$  est lipschitzienne, et sa constante de Lipschitz vérifie :

$$\text{Lip } \psi \leq \frac{2|c_1(\mu)|}{\tau_\omega} + \sqrt{\frac{4c_1^2(\mu)}{\tau_\omega^2} + 0\left(\tau_\omega^{n-1}\right)}.$$

COROLLAIRE (localisation de  $M$ ).-  $M$  est contenu dans l'anneau :

$$|\tilde{\sigma}| \leq \frac{|c_1(\mu)|}{\tau_\omega} + \sqrt{\frac{(c_1(\mu))^2}{\tau_\omega^2} + 0\left(\tau_\omega^{n-1}\right)}.$$

Le corollaire résulte du lemme et de ce que  $\sigma$  ne peut garder un signe constant sur  $M$ . Quant au lemme, il se démontre de façon analogue à la situation conservative ([3]), au raffinement près suivant : si  $\bar{\psi} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application déduite de  $\psi$  par interpolation linéaire, et si on note  $f = \text{id} + \tau_\omega \bar{\psi} + \omega$ , on compare les constantes de Lipschitz de  $\bar{\psi}$  et  $\frac{f + (1+c_1(\mu))f^{-1}}{2+c_1(\mu)}$  (dans le cas conservatif, on compare celles de  $\bar{\psi}$  et  $\frac{f+f^{-1}}{2}$ ).

Comme dans le cas conservatif, cette estimation lipschitzienne *a priori* joue un rôle fondamental. Elle implique le résultat suivant : l'ensemble des couples  $(\mu, \omega) \in \mathcal{U} \times \mathbb{T}^1$  tels que  $\mu \in \hat{C}_\omega$  (resp.  $\mu \in \tilde{C}_\omega$ ) est fermé ; en particulier,  $\hat{C}_\omega$  et  $\tilde{C}_\omega$  sont fermés pour tout  $\omega$ .

### 5.4. Existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather

THÉORÈME 3.- Pour tout  $\omega > \omega_0$  (suffisamment proche de  $\omega_0$ ) les deux composantes de  $\hat{C}_\omega \cap H$  sont connectées dans  $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$ .

Esquisse de démonstration :

a) Il suffit de démontrer que tout chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_\omega$  vérifiant  $v(\gamma(0)) = a_\omega^3$ ,  $v(\gamma(1)) = -a_\omega^3$ , coupe  $\hat{C}_\omega$ ; d'après les estimations lipschitziennes, il suffit de démontrer ce dernier résultat lorsque  $\omega$  est rationnel ; on va donc chercher des orbites périodiques bien ordonnées.

b) Soit  $\omega = p/q$ , avec  $p \wedge q = 1$ ,  $q \geq 1$ ; définissons  $\beta_3$  par :

$$P_{\mu}(\vartheta, \tilde{\sigma}) = (\vartheta + \tau_{\omega} \tilde{\sigma} + \omega, \tilde{\sigma} + c_0(\mu) + \beta_3(\mu, \vartheta, \tilde{\sigma})) ,$$

et posons, pour  $\mu \in \mathcal{D}_{\omega}$ ,  $t \in [0, 1]$  :

$$P_{\mu, t}(\vartheta, \tilde{\sigma}) = (\vartheta + \tau_{\omega} \tilde{\sigma} + \omega, \tilde{\sigma} + c_0(\mu) + t \beta_3(\mu, \vartheta, \tilde{\sigma})) .$$

Notons  $A_{\omega}$  l'espace des applications de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{T}^1$ , et  $M_{\omega}$  le sous-espace de  $A_{\omega}$  formé des applications  $\varphi$  qui respectent l'ordre cyclique (au sens faible) et vérifient :

$$|\varphi(i+p) - \varphi(i) - p/q| \leq \tau_{\omega}^2, \quad \forall i .$$

c) Soient  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu \in \mathcal{D}_{\omega}$  et  $\varphi \in M_{\omega}$ ; pour  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , posons

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\varphi(i+p) - \varphi(i) - p/q}{\tau_{\omega}}$$

et définissons  $\tilde{\Sigma}_{i+p}$  par :

$$P_{\mu, t}(\varphi(i), \tilde{\sigma}_i) = (\varphi(i+p), \tilde{\Sigma}_{i+p}) .$$

Notons  $\delta(\varphi, \mu, t)$  le point de  $\mathbb{R}^q$  dont les coordonnées sont  $\tilde{\Sigma}_i - \tilde{\sigma}_i$ ,  $0 \leq i < q$ . Par construction, on a  $\delta(\varphi, \mu, t) = 0$  si et seulement si il existe une orbite périodique bien ordonnée (au sens large) de  $P_{\mu, t}$  ayant pour coordonnées angulaires les  $\varphi(i)$ .

*Lemme.* - Soient  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu \in \mathcal{D}_{\omega}$ ,  $\varphi \in M_{\omega}$ ; si  $\delta(\varphi, \mu, t) = 0$ , alors  $\varphi$  appartient à l'intérieur de  $M_{\omega}$  dans  $A_{\omega}$ .

*Démonstration.* - Tout d'abord,  $\varphi$  est injective, car une égalité  $\varphi(i) = \varphi(i+1)$  impliquerait  $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1}$  (car  $\varphi(i-p) \leq \varphi(i-p+1)$ ,  $\varphi(i+p) \leq \varphi(i+p+1)$ ) et l'orbite périodique correspondante de  $P_{\mu, t}$  n'aurait pas la bonne période. Ceci étant, on a  $|\tilde{\sigma}_i| < 2\tau_{\omega}^2$  d'après les estimations lipschitziennes (corollaire), donc  $\varphi$  appartient à l'intérieur de  $M_{\omega}$ .

d) Pour  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , définissons :

$$M_{\omega}(\alpha) = \{\varphi \in M_{\omega} \mid \varphi(0) = \alpha\}$$

C'est un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^{q-1}$ . Le bord de  $M_{\omega}(\alpha) \times [0, 1]$  est donc homéomorphe à  $S^{q-1}$ .

Soient  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_{\omega}$  un chemin vérifiant  $v(\gamma(0)) = a_{\omega}^3$ ,  $v(\gamma(1)) = -a_{\omega}^3$ ,  $\gamma_0$  le chemin linéaire (dans les coordonnées  $v, \varepsilon$ ) de mêmes extrémités que  $\gamma$ , et  $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq 1}$  une homotopie à extrémités fixées entre  $\gamma_0$  et  $\gamma = \gamma_1$ .

Pour  $0 \leq t \leq 1$ , on définit une application  $\Delta_t$  de  $M_{\omega}(\alpha) \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^q$  par :

$$\Delta_t(\varphi, u) = \delta(\varphi, \gamma_t(u), t) .$$

L'image par  $\Delta_t$  du bord de  $M_\omega(\alpha) \times [0,1]$  ne contient pas 0 : c'est le lemme pour  $\partial M_\omega(\alpha) \times [0,1]$ , et une vérification immédiate pour  $M_\omega(\alpha) \times \{0\}$  et  $M_\omega(\alpha) \times \{1\}$ .

Les restrictions au bord de  $M_\omega(\alpha) \times [0,1]$  de  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$  sont donc à valeurs dans  $\mathbb{R}^q - \{0\}$ , et leur degré est le même ; celui de  $\Delta_0$  est de  $\pm 1$ , car on a  $\Delta_0^{-1}(0) = (\varphi_0, u_0)$  avec :

$$\begin{cases} \varphi_0(i) = \alpha + i p/q \\ c_1(\gamma_0(u_0)) = 0, \end{cases}$$

et la différentielle  $D\Delta_0(\varphi_0, u_0)$  est inversible.

On conclut que  $\Delta_1$  s'annule dans  $M_\omega(\alpha) \times [0,1]$ , ce qui fournit l'orbite périodique bien ordonnée recherchée.

5.5. Les ensembles invariants d'Aubry-Mather ne sont pas toujours des courbes, même lorsque leur nombre de rotation est irrationnel. En effet, l'ensemble des  $\omega$  tels que les deux composantes connexes de  $\tilde{C}_\omega \cap H$  ne sont pas connectées dans  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$  est ouvert (c'est une conséquence des estimations lipschitziennes). On verra en 6 que, pour une famille générique  $(P_\mu)$ , cet ensemble est non vide, car il contient une suite de bonnes approximations rationnelles de  $\omega_0$ .

## 6. BONS RATIONNELS ET ORBITES HOMOCLINES

### 6.1. Bons rationnels et rectification des orbites périodiques

Lemme.- Soient  $\gamma > 0$ ,  $k \geq 1$  ; il existe  $\varepsilon = \varepsilon(k, \gamma)$ ,  $C = C(k, \gamma)$ , tels que si  $\omega = p/q \in (\omega_0, \omega_0 + \inf(\varepsilon, \gamma q^{-1}))$ , alors on ait, pour tout  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$ , tout  $j \leq q$  :

$$\|\tilde{N}_\mu^j - P_\mu^j\|_k \leq C a_\omega^{n-1},$$

où  $\|\cdot\|_k$  désigne la  $C^k$ -norme dans un voisinage de 0.

On appelle bon rationnel un rationnel qui satisfait les hypothèses du lemme.

D'après le lemme, toute orbite périodique dont le nombre de rotation  $p/q = \omega$  est un bon rationnel, est bien ordonnée (au sens de 5.1).

Pour étudier la dynamique de  $P_\mu$  au voisinage d'une telle orbite, on pose :

$$H_\mu = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ \tilde{N}_\mu^j, \quad K_\mu = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ P_\mu^j,$$

$$L_\mu = H_\mu^{-1} \circ K_\mu.$$

Par construction, la courbe des points transformés radialement par  $P_\mu^q$  est envoyée par  $L_\mu$  sur le cercle des points transformés radialement par  $\tilde{N}_\mu^q$ . On a

$$\|L_\mu - \text{id}\|_k = O(a_\omega^{n-1}),$$

pour  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$  ; dans les coordonnées définies par  $L_\mu$  , on a :

$$P_\mu(\xi, y) = \tilde{N}_\mu(\varphi, y) + a_\omega^{n-1}(\alpha_4(\mu, \xi, y), \beta_4(\mu, \xi, y)) ,$$

et un changement de variables évident permet d'écrire :

$$P_\mu(\xi, x) = \tilde{N}_\mu(\xi, x) + a_\omega^{n-2}(0, \beta_5(\mu, \xi, x)) ,$$

où les points  $p/q$  périodiques sont déterminés par les équations :

$$\begin{cases} x = 0 \\ c_0(\mu) + a_\omega^{n-2} \beta_5(\mu, \xi, 0) = 0 . \end{cases}$$

6.2. On considère maintenant des familles  $P_\mu$  comme précédemment, qui sont *génériques* au sens de la catégorie de Baire (c'est-à-dire qu'elles satisfont à toutes les propriétés génériques considérées) ; pour une telle famille, le nombre  $\omega_0$  est irrationnel et possède une infinité de très bonnes approximations rationnelles  $p_n/q_n > \omega_0$  . Soit  $\omega = p/q$  une telle approximation ; c'est un bon rationnel au sens du numéro précédent. Pour étudier les bifurcations au voisinage de  $(\mu_\omega, a_\omega)$  , on peut supposer que dans la région (spatiale) où elles se produisent,  $P_\mu$  est très bien approché dans la  $C^k$ -topologie ( $k$  entier fixé) par son jet d'ordre (par exemple)  $4q$  , pour tout  $\mu \in \mathcal{D}_\omega$  .

On transforme ce jet en une forme normale  $p/q$  résonante (cf. 2.1) dont  $P_\mu$  est une perturbation, puis on applique la méthode de rectification des orbites  $p/q$  périodiques décrite au numéro précédent. Après un dernier changement d'échelle, on aboutit pour  $P_\mu$  à une expression de la forme :

$$P_\mu(\xi, x) = (\xi + p/q + \tau^{q/2-1} x, x + \tau^{q/2-1}(\alpha + \beta x - a\tau x^2 + b\tau\eta(q\xi) + o(\tau^{q/2}))) ,$$

où on a :

- .  $\tau = \tau_{p/q}$  ;
- .  $\alpha, \beta$  sont respectivement proportionnels à  $c_0(\mu)$  ,  $c_1(\mu)$  et peuvent donc être pris comme paramètres dans le domaine considéré ;
- .  $a, b$  sont des constantes strictement positives (plus précisément  $a, b$  dépendent de  $\alpha, \beta$  mais cette dépendance est négligeable) ;
- .  $\eta(\vartheta) = \cos 2\pi\vartheta + o(\tau)$  ;
- . les points  $p/q$  périodiques de  $P_\mu$  sont donnés par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \alpha + b\tau\eta(q\xi) = 0 . \end{cases}$$

Remarque.- L'assertion " $b > 0$ " et la formule pour  $\eta$  proviennent de la non-nullité (générique) du premier terme résonant en  $\bar{z}^{q-1}$  dans la forme normale.

6.3. L'expression précédente conduit à considérer  $p_{\mu}^q$  comme une perturbation du temps  $q\tau^{q/2-1}$  du flot  $\Phi_{\alpha,\beta,t}$  de l'équation différentielle  $E(\alpha,\beta)$  :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = x \\ \dot{x} = \alpha + \beta x - a\tau x^2 + b\tau\eta(q\xi) \end{cases},$$

dont les points singuliers sont précisément les points  $p/q$  périodiques de  $P_{\mu}$ .

Quelques caractéristiques dynamiques de la famille d'équations différentielles  $E(\alpha,\beta)$  sont représentées sur la figure 6 :

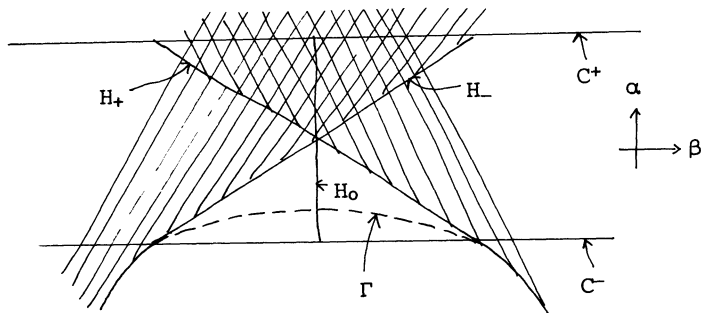


Figure 6

- Les courbes  $C^+$  et  $C^-$  délimitent la bande où  $E(\alpha,\beta)$  a des singularités.
- Les courbes  $H_+$ ,  $H_0$ ,  $H_-$  sont les lieux où  $E(\alpha,\beta)$  présente les différents types possibles de connexion entre singularités hyperboliques.
- Dans les régions hachurées (resp. doublement hachurées),  $E(\alpha,\beta)$  a une (resp. deux) orbites fermées homotopes à  $\{x = 0\}$ .

Les propriétés de la famille  $P_{\mu}$  qu'on déduit de celles de la famille  $E(\alpha,\beta)$  sont schématisées sur la figure 7 :

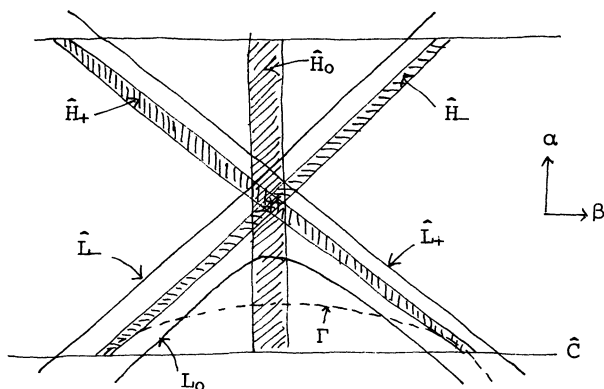


Figure 7

- Les courbes  $\hat{C}_+$  et  $\hat{C}_-$  délimitent  $\hat{C}_{p/q}$ , où  $P_\mu$  a exactement deux orbites  $p/q$  périodiques.

- Dans la région sous  $L_0$ ,  $P_\mu$  n'a pas de courbe invariante entourant 0 ; la dynamique non triviale est concentrée dans les "files" entourant les orbites  $p/q$  périodiques. En particulier, la région en-dessous de  $\hat{C}_-$  et  $L_0$  est contenue dans  $U_0$ .

- Dans la région au-dessus de  $L_+$  et  $L_-$ ,  $P_\mu$  a deux courbes invariantes normalement hyperboliques (dont les nombres de rotation encadrent  $p/q$ ) ; le reste de la dynamique est concentré dans les "files" entourant les orbites  $p/q$ -périodiques ; en particulier, la région au-dessus de  $\hat{C}_+$ ,  $L_+$  et  $L_-$  est contenue dans  $U_2$ .

- Dans les régions  $\hat{H}_0$ ,  $\hat{H}_+$ ,  $\hat{H}_-$ ,  $P_\mu$  présente les différents types possibles d'intersections entre les variétés stables et instables de son orbite  $p/q$  périodique hyperbolique. Ces intersections sont génériquement transverses et créent les orbites homoclines. Dans la région (d'intérieur non vide)  $\hat{H}_+ \cap \hat{H}_-$ , toutes les intersections possibles sont réalisées. Notons que  $\hat{H}_0$ ,  $\hat{H}_+$ ,  $\hat{H}_-$  traversent complètement  $\hat{C}_{p/q}$  ; on en déduit que les deux composantes connexes de  $\hat{C}_{p/q} \cap H$  ne sont pas connectées à travers  $\hat{C}_{p/q}$ .

- Finalement, Chenciner a vérifié qu'au point  $\mu_0$  tel que  $P_{\mu_0}$  admette une orbite  $p/q$ -périodique elliptique de codimension formelle 2, les hypothèses faites sur la famille  $P_\mu$  sont satisfaites. On retrouve ainsi à une échelle plus petite, au voisinage de  $\mu_0$ , toute la situation décrite (pour la famille  $P_\mu$ ) au voisinage de 0 ! Ce phénomène est l'analogue de celui des "filots elliptiques" pour les points fixes elliptiques conservatifs.

## 7. EN GUISE DE CONCLUSION

On peut dégager deux "morales" opposées des travaux de Chenciner :

- le grand pouvoir ordonnateur des nombres de rotation satisfaisant à une condition diophantienne : avec une forte probabilité, les deux courbes invariantes normalement hyperboliques créées par bifurcation de Hopf s'éliminent de la façon la plus simple possible, en passant par une courbe invariante semi-stable.

- de même que pour la dynamique du point fixe elliptique conservatif, il est *a priori* impossible d'analyser complètement les bifurcations en codimension 2 au voisinage d'un point fixe elliptique ; c'est sans doute l'exemple le plus simple en théorie locale des bifurcations où cela se produise.

Voici pour finir quelques questions laissées ouvertes par Chenciner sur la dynamique générique des familles  $P_\mu$  :

- Rencontre-t-on (dans la situation de 6, par exemple) des attracteurs du type que Birkhoff ([16]) a étudié pour les difféomorphismes "twist" qui contractent les aires (cf. également les travaux de Le Calvez [17]) ?

- Peut-on décrire les bords des ouverts  $U_0$ ,  $U_2$  définis en 3 ? On pourrait espérer (mais c'est peut-être trop optimiste) que ce sont des courbes qui sont graphes de fonctions lipschitziennes.

- En une valeur  $\mu$  du paramètre qui appartient à  $\bar{U}_0 \cap \bar{U}_2$ , la dynamique de  $P_\mu$  est-elle toujours simple ? En d'autres termes, si les courbes invariantes s'éliminent "instantanément", est-ce en passant par une courbe invariante semi-stable (comme c'est le cas pour les "bons" nombres de rotation irrationnels) ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CHENCINER - *La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, Sémin. Bourbaki, 1983/84, exposé n° 622, Astérisque 121-122(1985), 147-170.
- [2] G.D. BIRKHOFF - *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Mathematica 43(1920), ou *Collected Mathematical Papers*, Vol. II, Dover, New York (1968).
- [3] M.R. HERMAN - *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Vol. I, Astérisque 103-104(1983).
- [4] J. MOSER - *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nach. Akad. Wiss., Math. Phys. Kl. II (1962), 1-20.
- [5] J. MOSER - *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of math. studies 77, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [6] H. RÜSSMANN - *Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreistrings*, Nach. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl. II (1970), 67-105.
- [7] A. CHENCINER - *Bifurcations de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  au voisinage d'un point fixe elliptique*, Cours à l'École des Houches, Juillet 1981, North Holland, (1983).
- [8] E. ZEHNDER - *Homoclinic points near elliptic fixed points*, Comm. on Pure and Appl. Math., XXVI, (1973), 131-182.
- [9] A. CHENCINER - *Bifurcations de points fixes elliptiques, I. Courbes invariantes*, Publ. I.H.E.S. 61 (1985), 67-127.
- [10] V.I. ARNOLD - *Small denominators I ; on the mappings of a circle into itself*, Izvestia Akad. Nauk., serie Math., 25, 1 (1961), 21-86 ou Transl. Amer. Math. Soc., 2nd series, 46, 213-284.
- [11] G.R. HALL - *Bifurcation of an attracting invariant circle : a Denjoy attractor*, Preprint University of Minnesota.

- [12] R.S. HAMILTON - *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Preprint Cornell University, 1974.
- [13] M.R. HERMAN - *Démonstration du théorème de la courbe translatée et existence des tores invariants*, Cours à l'E.N.S., 1980.
- [14] J.-B. BOST - *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens*, Sémin. Bourbaki, 1984/85, exposé n° 639, Astérisque 133-134(1986), 113-157.
- [15] R. DOUADY - *Applications du théorème des tores invariants*, Thèse de 3e cycle, Université de Paris 7 (1982).
- [16] G.D. BIRKHOFF - *Sur certaines courbes fermées remarquables*, Bull. Soc. Math. de France, 60, 1932, 1-26.
- [17] P. LE CALVEZ - *Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff*, à paraître aux Commun. Math. Phys. (1986).
- [18] A. CHENCINER - *Bifurcations de points fixes elliptiques II. Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants*, Invent. Math. 80, 1985, 81-106.
- [19] A. CHENCINER - *Bifurcations de points fixes elliptiques III. Orbites périodiques de "petites" périodes et élimination résonante des couples de courbes invariantes*, à paraître.
- [20] A. CHENCINER - *Points homoclines au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$* , C.R.A.S. 294, Série I, 269-272, 1982.
- [21] A. CHENCINER - *Resonant elimination of a couple of invariant closed curves in the neighbourhood of a degenerate Hopf bifurcation of difféomorphisms of  $\mathbb{R}^2$* , IIASA Workshop on dynamic processes, Sopron, Sept. 1985, à paraître.
- [22] A. CHENCINER - *Hamiltonian-like phenomena in saddle-node bifurcations of invariant curves for plane difféomorphisms*, Proc. of the Conf. Sing. and Dyn. Syst., Heraklion 1983, North Holland (1984).
- [23] K. HOCKETT, P. HOLMES - *Josephson's junction, annulus maps, Birkhoff attractors, Horseshoes and rotation sets*, Preprint, 1985.
- [24] D.G. ARONSON, M.A. CHORY, G.R. HALL, R.P. McGEHEE - *Bifurcations from an invariant circle for 2-parameter families of maps of the plane : a computer assisted study*, Commun. Math. Phys. 83, 303-354 (1983).
- [25] J.R. JOHNSON - *Some properties of a 3-parameter family of difféomorphisms of the plane near a transcritical Hopf bifurcation*, Thesis, University of Minnesota, July 1985.
- [26] J. LOS - *Phénomènes de petits diviseurs dans les dédoublements de courbes invariantes*, Thèse, Université de Paris VII, Juin 1986

Jean-Christophe YOCCOZ  
 Ecole Polytechnique  
 Centre de Mathématiques  
 F-91128 PALAISEAU CEDEX