Astérisque

DIDIER ROBERT

# Analyse semi-classique de l'effet tunnel

*Astérisque*, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 665, p. 257-281
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__257_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n° 665

Juin 1986

# ANALYSE SEMI-CLASSIQUE DE L'EFFET TUNNEL

[d'après B. Helffer et J. Sjöstrand]

par Didier ROBERT

## §1. INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est de présenter des résultats récents obtenus par Helffer et Sjöstrand sur le spectre d'opérateurs de Schrödinger : $P(h) = -h^2 . \Delta + V$ où $h > 0$ est un petit paramètre ($h^2 = \hbar^2/2m$, $\hbar$ est la constante de Planck normalisée et m la masse),

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est la fonction d'énergie potentielle que nous supposerons toujours minorée sur $\mathbb{R}^n$. (Nous ne considérons ici que le cas de $\mathbb{R}^n$ mais les résultats de (He-Sj) valent aussi sur une variété riemannienne compacte, $\Delta$ étant l'opérateur de Laplace-Beltrami). Posons : $\Sigma = \lim_{|x|\to+\infty} \operatorname{Inf} V(x)$.

Il résulte d'un théorème de Kato (Ka) que P(h) est essentiellement autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ à partir de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ suffit). D'autre part un théorème de Persson ((Pe), (Ag)) dit que le spectre Sp P(h) de P(h) est purement discret dans $]-\infty,\Sigma[$ : il est constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie - (quantification des niveaux d'énergie). L'un des problèmes fondamentaux en théorie quantique est de calculer les valeurs propres (niveaux d'énergie) et les fonctions propres (ie les états stationnaires) de P(h).

En général on ne sait pas faire ces calculs explicitement (sauf pour l'atome d'hydrogène et l'oscillateur harmonique). On a donc recours à des méthodes d'approximation (théorie des perturbations, méthodes B.K.W, méthodes numériques...).

Dans ces méthodes on considère que h est un petit paramètre et faire tendre h vers 0 rend compte de la transition entre mécanique quantique et mécanique classique (principe de correspondance de Bohr (Hei)). On sait bien que cette transition se fait de manière subtile, ne serait-ce qu'à cause de la nature différente des équations de Schrödinger et de Newton :

(Sch) $\quad ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = P(h)\Psi$

(New) $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -2.\nabla_x V(x)$ $\quad$ (particule de masse 1/2)

où $\nabla_x = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

Il a fallu du temps aux mathématiciens pour justifier rigoureusement des propriétés et des approximations pour l'opérateur de Schrödinger connues des physiciens depuis les débuts de la théorie quantique (1925-30). Par exemple le théorème de Kato sous la forme générale ne date que de 1973 et la méthode B.K.W appliquée à l'étude du spectre ponctuel de P(h) n'a été vraiment justifiée que dans les années 1980 ((Cha), (He-Ro), ...) à la suite des travaux importants de Maslov (Mas) et Hörmander (Hö) sur la théorie des opérateurs intégraux de Fourier puis de Asada-Fujiwara (As-Fu) pour le cas specifique de l'équation de Schrödinger.

On a pu ainsi justifier les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld pour les niveaux d'énergie qui ne sont pas trop proches de $\min_{x \in \mathbb{R}^n} V(x)$ :

Supposons : $n=1$, $V_0 = \min V(x) = V(x)$ si et seulement si $x=0$ et $V''(0) > 0$. On a alors, d'après (He-Ro), (Ma) :

Il existe un entier $j_0 \geqslant 1$ tel que pour $j \geqslant j_0$, la jème valeur propre $\lambda_j(h)$ de P(h) est donnée par :

$$(B.S)_1 \qquad \frac{1}{2\Pi} \int_{\xi^2+V(x)\leqslant\lambda_j(h)} d\xi\, dx + \sum_{k \geqslant 2} h^k . f_k(\lambda_j(h)) = (j+1/2)h \quad \text{modulo } O(h^\infty)$$

où les $f_k$ sont $C^\infty$ au voisinage de $V_0$.

Donc $(B.S)_1$ détermine les valeurs propres de P(h) (sauf les $j_0$ premières ! ) à une puissance de h arbitrairement grande près.

Supposons maintenant V paire, $\min V(x) = V(x)$ si et seulement si $x = \pm a$, $a > 0$ et $V''(a) > 0$.

Dans ce cas il résulte également de (He-Ro) que $(B.S)_1$ devient :

$$(B.S)_2 \qquad \frac{1}{2.2\Pi} \int_{\xi^2+V(x)\leqslant\lambda_j^{\pm}(h)} d\xi\, dx + \sum_{k \geqslant 2} h^k f_k(\lambda_j^{\pm}(h)) = (j+1/2)h \quad \text{modulo } O(h^\infty)$$

où $\lambda_j^+(h)$ et $\lambda_j^-(h)$ sont des valeurs <u>propres distinctes</u> de P(h) qui ont donc <u>même développement asymptotique</u> lorsque $h \to 0$. Nous verrons plus loin comment ce phénomène est relié à l'effet tunnel.

L'une des motivations à la base du travail de Helffer et Sjöstrand (notés (He-Sj) dans la suite) a été de donner une estimation aussi précise que possible de l'écart : $\lambda_j^+(h) - \lambda_j^-(h)$. Auparavant Harrel ((Ha)-1978-80) a fait une étude de cet écart en utilisant des arguments spécifiques aux équations différentielles ordinaires (Théorème de Comparaison " à la Sturm " ). En 1983-84 apparurent les premiers résultats en dimension supérieure ou égale à 2 (penser par exemple à un potentiel symétrique par rapport à un hyperplan avec deux minima) par Simon (Si) d'une part et par (He-Sj) d'autre part, par des méthodes différentes.

Pour attaquer ce type de problème (He-Sj) ont mis au point une stratégie qui leur a permis <u>d'établir rigoureusement</u> des résultats qui à ce jour sont à la fois les plus précis et les plus généraux. Leur stratégie leur a permis de plus d'attaquer de nombreux problèmes voisins (voir §5). Par exemple ils viennent d'obtenir des résultats importants sur la théorie des résonances. Ici nous avons choisi d'expliquer une partie de leurs idées d'abord (§2) sur le cas le plus simple : celui du potentiel symétrique à deux minima

non dégénérés et à une variable spatiale. Nous mettons en évidence ensuite (§3) les difficultés techniques supplémentaires qu'ils ont surmontées dans le cas de plusieurs variables. Puis (§4) nous examinerons ce qui se passe lorsqu'on perturbe légèrement la symétrie. Cette situation met bien en évidence que l'effet tunnel est un phénomène très instable, lié à la géométrie du système. Enfin nous évoquerons d'autres résultats que leur méthode permet d'obtenir (potentiels périodiques, opérateurs de Dirac, Inégalités de Morse et autres résultats de nature géométrique suivant le schéma de Witten, minima dégénérés...).

Nous avons montré ci-dessus (cf$(B.S)_2$) comment on arrive naturellement à l'effet tunnel lorsqu'on veut étudier les conditions de quantification au voisinage d'énergies E proches de Min V lorsque V a deux minima. Il est peut-être utile de rappeler maintenant quelques éléments concernant l'effet tunnel (pour plus de détails voir : (La-Li ), (Lé. Ba). Ce phénomène a été découvert en 1928 par A. Gamov à propos de la radioactivité $\alpha$ : " les noyaux d'hélium émis par les noyaux radioactifs ont des énergies inférieures à la barrière de potentiel coulombienne qui devrait les retenir. Ils la traversent par effet tunnel " (Lé. Ba). Ce cas ne rentre pas dans la théorie exposée ici puisqu'il s'agit d'états de diffusion alors que les résultats présentés concernent les états liés ! (voir cependant §5 cas de cristaux). Depuis les physiciens ont repéré de nombreuses manifestations de l'effet tunnel, par exemple : l'ion $H_2^+$ , la molécule d'amoniac $NH_3$ , lorsqu'on regarde la position de l'atome d'azote par rapport au plan contenant les trois atomes d'hydrogène. Le modèle mathématique pour ces phénomènes est le potentiel symétrique à deux minima non dégénérés (double puits) :

Fig. 1

Par exemple : $V(x) = (x^2 - 3a^2)^2$, $a > 0$

Traditionnellement dans les ouvrages de Physique ((Lé-Ba), (La-Li )) on commence par analyser le phénomène pour les potentiels à fond plat (ie constants par morceaux) et on en tire ensuite des formules générales par des approximations qui sont probablement difficiles à justifier (cf (Lé-Ba) pour une présentation physique très agréable de l'effet tunnel). La fin de ce paragraphe a un caractère essentiellement heuristique.

Fig. 2

Le problème aux valeurs propres pour le potentiel représenté sur la figure 2 :

$$(*) \qquad \begin{cases} (-h^2 \dfrac{d^2}{dx^2} + V).\Psi = E\Psi \quad , \quad E \in ]V_0,0[ \\ \Psi \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

est assez facile à résoudre car on connait évidemment la forme des solutions sur chaque intervalle. On obtient alors que E doit être solution d'une équation transcendante en écrivant que $\Psi$ et $\Psi'$ doivent être continus aux points $\pm d$, $\pm c$.

On tire de ces considérations les informations suivantes : désignons par : $(\lambda_{2j}(h))_{j \geqslant 0}$ la suite croissante des valeurs propres associées aux fonctions propres paires normalisées $\Psi_{2j}(h)$ de P(h) ; $\lambda_{2j+1}(h)$, $\Psi_{2j+1}(h)$ les éléments associés aux fonctions propres impaires et par $(\mu_j(h))_{j \geqslant 0}$ la suite croissante des valeurs propres pour le problème de Sturm-Liouville :

$$(**) \qquad \begin{cases} (-h^2 \dfrac{d^2}{dx^2} + V_0)\Psi = E\Psi \\ \Psi(d) = \Psi(c) = 0, \ \Psi \in L^2[d,c] \end{cases}$$

On observe alors que :

$$\begin{cases} \lambda_{2j}(h) = \mu_j(h) - \delta_j(h) \\ \lambda_{2j+1}(h) = \mu_j(h) + \delta_j(h) \end{cases}$$

où $\delta_j(h)$ est de l'ordre de : $h^{\gamma_j} . e^{-2d\sqrt{-V_0} . h^{-1}}$ où $\gamma_j \in \mathbb{R}$

De plus, si l'on pose :

$$\begin{cases} \Psi_j^D = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{2j} + \Psi_{2j+1}) \\ \Psi_j^G = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{2j} - \Psi_{2j+1}) \end{cases}$$

alors, à une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{-h^{-1}.2d.\sqrt{-V_0}})$ près, $\Psi_j^D$ est localisée dans le puits [d,c] et $\Psi_j^G$ dans le puits [-c,-d].

Pour terminer cette introduction voyons comment ces constatations s'interprètent physiquement :

Soit $\Psi(t,x)$ l'état évoluant à partir de l'état initial $\Psi_j^G$ . Un calcul élémentaire donne :

(T) $$|\Psi(t,x)|^2 = |\cos(h^{-1}\delta_j(h).t)\ \Psi_j^G(x) + i\ \sin(h^{-1}\delta_j(h).t)\ \Psi_j^D(x)|^2$$

(T) montre donc que la densité de probabilité de présence de la particule oscille entre le puits droit et le puits gauche avec une période :

(T') $$T_j(h) = \frac{2\Pi.h}{\delta_j(h)} \approx h^{1-\gamma_j} . e^{2d\sqrt{-V_0}} . h^{-1}$$

Par des arguments d'homogénéité on voit facilement que $h \searrow 0$ est équivalent à $d \nearrow +\infty$ ou à $-V_0 \uparrow +\infty$ (deux des trois paramètres étant fixés). La symétrie du potentiel empêche la particule d'être localisée dans un seul puits (parité des fonctions propres). (T') montre alors que la période d'oscillation devient très grande lorsque la barrière de potentiel est soit très large, soit très haute. A la limite $-V_0 \to +\infty$ ou $d \to +\infty$ le problème (*) se scinde en deux problèmes indépendants ((**) et son symétrique sur [-c,-d]).

## §2. CAS DES SYSTÈMES A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Considérons l'hamiltonien quantique :

$$P(h) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

On fait sur le potentiel V les hypothèses suivantes :

(H1) $V \in C^\infty(\mathbb{R})$, $V \geqslant 0$, V est paire.

(H2) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x) > 0$ et $V(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm a$

avec $a > 0$. On suppose de plus que $V''(a) > 0$.

Posons : $\Sigma = \lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x)$

Il est alors classique que P(h) admet une unique extension autoadjointe comme opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ de domaine D(P(h)) et que pour tout $h > 0$ le spectre de P(h) dans $]0,\Sigma[$ est une suite croissante $\{\lambda_j(h)\}_{j \geqslant 0}$ de valeurs propres simples. Soit $\{\Psi_j(h)\}_{j \geqslant 0}$ un système de fonctions propres associé. Il résulte de $(H_1)$ que $\Psi_j(h)$ est soit paire soit impaire. On montre, alors (Re-Si) que $\Psi_j(h)$ a la parité de j. On retrouvera ce fait plus loin.

Les fonctions propres de P(h) sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et possèdent de plus la propriété de décroissance suivante :

soit : $d_V(x,y) = |\int_x^y \sqrt{V(t)}\ .\ dt|$ (distance sur $\mathbb{R}$)

et $\delta(x) = d_V(x,\{a,-a\})$ (distance aux puits)

Proposition (2.1) :

Soit $E(h) \geqslant 0$ une famille de valeurs propres de P(h), $h \in ]0,1]$, associée aux fonctions propres $\Psi(h)$, telle que $\lim\limits_{h \to 0} E(h) = 0$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\left\| \frac{d}{dx} (e^{\delta(x)/h}.\Psi(h)) \right\| + \left\| e^{\delta(x)/h}.\ \Psi(h) \right\|^2 \leqslant C(\varepsilon)\ e^{\varepsilon/h}$$

pour tout $h \in ]0,1]$

où $\|.\|$ désigne la norme usuelle sur $L^2(\mathbb{R})$.

Remarques (2.2) :

(i) $\delta$ étant lipchitzienne (localement) sa dérivée au sens des distributions est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$

(ii) La proposition (2.1) montre que la norme $L^2$ des fonctions propres d'énergie près de 0 est essentiellement concentrée près de $V^{-1}(0) = \{a,-a\}$.

(iii) Par un argument standard on déduit de la proposition (2.1) l'estimation uniforme suivante :
Pour tout intervalle borné $J \subset \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(J,k,\varepsilon)$ telle que :

$$\left| \frac{d^k\ \Psi(h,x)}{dx^k} \right| \leqslant C(J,k,\varepsilon)\ e^{\frac{\varepsilon-\delta(x)}{h}} \qquad \text{pour tout } h \in ]0,1] \text{ et tout } x \in J.$$

Donnons nous maintenant une famille d'intervalles $I(h) = [0,\gamma.h]$ où $\gamma$ n'est pas valeur propre de l'oscillateur harmonique :

$$P_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V''(a)}{2}\ x^2.$$

Rappelons que les valeurs propres de $P_0$ sont données par : $\gamma_j(\omega) = (2j+1).\omega$ où $\omega > 0$, $\omega^2 = \frac{V''(a)}{2}$.

Les fonctions propres associées sont données par :

$$\Phi_j^{(\omega)}(x) = p_j(\sqrt{\omega}.\ x)\ e^{-\omega.x^2/2}$$

où les $p_j$ sont des polynômes de degré j (polynômes d'Hermite).

Il résulte du §1 qu'il y a certainement un effet tunnel entre les puits (+a) et (-a) pour les états d'énergie appartenant à I(h).

La méthode de (He-Sj) pour étudier ce phénomène consiste à isoler chacun des puits l'un de l'autre et de l'infini par des barrières de potentiel infiniment hautes. Plus précisément pour ce cas particulier ils considèrent deux intervalles bornés : $J_+$ , $J_-$ tels que : $J_- = -J_+$ (pour conserver la symétrie du problème) $a \in \mathring{J}_+$ , $-a \notin J_+ = [b,c]$ et les problèmes de Sturm-Liouville pour P(h) avec Conditions de Dirichlet :

$$P_+(h) : \begin{cases} P(h).\Psi(h) = E_+(h).\Psi(h) & \text{sur } [b,c] \\ \Psi_+(h,b) = \Psi_+(h,c) = 0 \end{cases}$$

$$P_-(h) : \begin{cases} P(h)\Psi_-(h) = E_-(h).\Psi(h) & \text{sur } [-c,-b] \\ \Psi_-(h,-c) = \Psi_-(h,-b) = 0 \end{cases}$$

$P_+(h)$ (resp. $P_-(h)$) sont des opérateurs autoadjoints dans $L^2(J_+)$ (resp. $L^2(J_-)$) de domaine : $D(P_+(h)) = H^2(J_+) \cap H_0^1(J_+)$ (resp. $D(P_-(h)) = H^2(J_-) \cap H_0^1(J_-)$). Etant donné la symétrie par rapport à 0, $P_+(h)$ et $P_-(h)$ ont mêmes valeurs propres : $\mu_+(h) = \mu_-(h) = \mu(h)$ et les fonctions propres correspondantes sont reliées par :

$$\Psi_-(h,x) = \Psi_+(h,-x) \text{ pour } x \in [-c,-b].$$

Remarque (2.3) :

On peut montrer que $\Psi_\pm(h)$ vérifient la proposition (2.1) (ainsi que (iii)-Remarque (2.2)) en remplaçant $\delta$ par : $d_a(x) = \left| \int_a^x \sqrt{V(t)}\, dt \right|$.

Le principe de l'étude de l'interaction entre les puits (+a) et (-a) consiste essentiellement à comparer la somme directe des problèmes $P_+(h)$ et $P_-(h)$ avec le problème initial. Il y a pour cela un travail technique à faire car $P_+(h)$ et $P_-(h)$ ne sont pas définis sur les mêmes espaces. D'autre part il faut optimiser sur le choix de $J_+$ pour perdre le moins d'information possible. On procède de la manière suivante :

Choisissons : $b = -a+\eta$, $\eta > 0$ sera petit et $c > 0$, assez grand pour que l'on ait :

$d_V(a,c) > 2S_0$

où : $S_0 = d_V(a,-a)$.

On désigne alors par : $\{\mu_j(h)\}_{j \geqslant 0}$ la suite croissante de valeurs propres de $P_+(h)$ dans $I(h)$ et $\{\Psi_j^+(h)\}_{j \geqslant 0}$ un système orthonormal de fonctions propres associées.

Rappelons que par symétrie, $\Psi_j^-(h,x) = \Psi_j^+(h,-x)$ constituent un système orthonormal de fonctions propres pour $P_-(h)$ associé à la même suite de valeurs propres $\{\mu_j(h)\}_{j \geqslant 0}$.

Fig. 3

On considère une fonction de troncature : $\chi^+ \in C_0^\infty(]-a+\eta,c[)$
telle que $\chi^+(x) = 1$ sur $[-a+2\eta,c-\eta]$ $(c-\eta > 2S_0)$

Posons : $\begin{cases} \varphi_j^+(h,x) = \chi^+(x).\Psi_j^+(h,x) \\ \varphi_j^-(h,x) = \varphi_j^+(h,-x) \end{cases}$

On peut clairement considérer $\varphi_j^+(h)$ et $\varphi_j^-(h)$ comme des éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Maintenant, l'idée mise en oeuvre par (He-Sj) consiste à approcher les fonctions propres : $\Psi_j(h)$ où $\lambda_j(h) \in [0,\gamma.h]$ par des combinaisons linéaires de $\varphi_j^+(h)$, $\varphi_\ell^-(h)$ pour $\mu_k(h)$, $\mu_\ell(h) \in [0,\gamma.h]$. Cette méthode est utilisée formellement (ie sans contrôle d'erreur) par les chimistes sous le nom de méthode L.C.A.O. (Linear Combinations of Atomic Orbitals).

Pour contrôler les approximations (He-Sj) introduisent une pseudo-distance sur l'ensemble des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H :

$$d(E,F) = \|\Pi_E - \Pi_F.\Pi_E\| = \|\Pi_E - \Pi_E.\Pi_F\|$$

où $\Pi_E$ et $\Pi_F$ sont les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces fermés E et F de H.

Les propriétés de cette pseudodistance sont les suivantes :

$(P_1)$ $d(E,F) = 0 \Leftrightarrow E \subseteq F$

$(P_2)$ $d(E,G) \leqslant d(E,F) + d(F,G)$

$(P_3)$ Si $d(E,F) < 1$, $\Pi_F$ est injective sur E et admet un inverse à droite continu : $F \to E$

$(P_4)$ Si $d(E,F) < 1$ et $d(F,E) < 1$ alors $\Pi_F : E \to F$ et $\Pi_E : F \to E$ sont bijectives, d'inverses continus. On a de plus $d(E,F) = d(F,E)$.

On a alors un résultat d'approximation abstrait très utile :

Proposition (2.4)

On se donne : un opérateur autoadjoint A sur H, un intervalle borné fermé $I \subseteq \mathbb{R}$, des nombres $\mu_1,\dots,\mu_N \in I$, une famille : $\Psi_1,\dots,\Psi_N$ de vecteurs indépendants de H.

Soient E le sous-espace vectoriel engendré par $\{\Psi_1,\dots,\Psi_N\}$ et F le sous-espace spectral de A associé à I (ie engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres sont dans I si $Sp(A) \cap I$ est discret, Sp(A) désignant le spectre de A).

On suppose que $\|A\,\Psi_j - \mu_j\,\Psi_j\| \leqslant \varepsilon$ pour $j = 1,\dots,N$ et que de plus il existe $a > 0$ tel que :

$$Sp(A) \cap ((I \pm 2a) \setminus I) = \emptyset.$$

On a alors :

$$d(E,F) \leqslant \sqrt{\frac{N}{\gamma_0}} \cdot \frac{\varepsilon}{a}$$

où $\gamma_0$ est la plus petite valeur propre de la matrice :

$$((\Psi_j/\Psi_k))_{1 \leqslant j,k \leqslant N}.$$

Nous allons appliquer le résultat précédent avec :

F = sous-espace vectoriel engendré par $\{\Psi_j(h) : \lambda_j(h) \in I(h)\}$

E = sous-espace vectoriel engendré par $\{\varphi_j^+(h),\varphi_k^-(h) : \mu_j(h), \mu_k(h) \in I(h)\}$

Rappelons d'abord les propriétés suivantes ((Co-Du-Se),(Si)) des valeurs propres $\lambda_j(h)$ et $\mu_j(h)$ lorsque h tend vers 0 :

$(V_1)$ $\mu_k(h) = (2k+1)\,\omega h + O(h^2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$(V_2)\begin{cases}\lambda_{2k+1}(h) = (2k+1)\,\omega h + O(h^2)\\ \lambda_{2k}(h) = (2k+1)\,\omega h + O(h^2)\end{cases}$$

$(V_3)$ $\lambda_{2k+1}(h) - \lambda_{2k}(h) = O(h^N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$

Remarques (2.5)

(i) $(V_1)$ est le début d'un développement (B.K.W).
Il en est de même pour $(V_2)$. Ces résultats seront précisés à la fin de ce paragraphe.

(ii) Pour $k \geqslant k_0$, $k_0$ assez grand, $(V_2)$ et $(V_3)$ sont des cas particuliers d'un résultat de [He-Ro] (Cf §1).

(iii) $(V_1)$, $(V_2)$, $(V_3)$ entrainent que E et F sont des sous-espaces de dimensions finies de l'ordre de $N = O([\gamma])$ indépendant de h.

On déduit de ce qui précède :

Théorème (2.6) :

Pour tout réel $\sigma < S_0 - 2\eta$ on a :

$$d(E,F) = O(e^{-\sigma/h})$$

et $$d(F,E) = O(e^{-\sigma/h}) \quad \text{pour } h \downarrow 0.$$

De plus : $\lambda_{2k}(h) - \mu_k(h) = O(e^{-\sigma/h})$

et $\lambda_{2k+1}(h) - \mu_k(h) = O(e^{-\sigma/h})$

Pour voir apparaître l'effet tunnel entre les puits (+a) et (-a) il faut préciser ces résultats car il est précisément d'ordre $O(e^{-\sigma/h})$ (Cf. analogie avec le §1).

Dans la suite la notation suivante sera commode :

pour $\sigma > 0$ on dira qu'une fonction f dépendant de $\eta$ et de h est $\tilde{O}(e^{-\sigma/h})$ si pour tout $\varepsilon$ il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $f(\eta,h) = O(e^{(\varepsilon-\sigma)/h})$ pour tout $\eta \in ]0,\eta(\varepsilon)]$.

On désignera par $\alpha,\beta,\alpha',\beta',\ldots$ les indices $(\pm,j)$ des fonctions $\varphi_j^{\pm}(h)$ où $0 \leqslant j \leqslant N$ où $N + 1 = \#\{j \mid \mu_j(h) \in I(h)\}$ (N est indépendant de h).

D'autre part on désignera par $p(\alpha)$ la première composante de $\alpha$ et par $j(\alpha)$ la seconde.

Le système $\{\varphi_\alpha\}$ est presque orthonormal au sens suivant :

(1) $$(\varphi_\alpha|\varphi_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + \tilde{O}(e^{-S_0/h})$$

(2) $$(\varphi_\alpha|\varphi_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + \tilde{O}(e^{-2S_0/h}) \quad \text{si} \quad p(\alpha) = p(\beta)$$

(1) et (2) résultent facilement de la décroissance exponentielle des $\varphi_j^{\pm}(h)$.

Soit maintenant : $f_\alpha = \Pi_F\, \varphi_\alpha$

Il résulte du théorème (2.6) que l'on a :

(3) $$f_\alpha = \varphi_\alpha + \mathcal{O}(e^{-S_0/h})$$

D'où l'on tire :

(4) $$(f_\alpha | f_\beta) = (\varphi_\alpha | \varphi_\beta) + \mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$$

(car $(f_\alpha|f_\beta) = (\varphi_\alpha|\varphi_\beta) + (\varphi_\alpha - f_\alpha | f_\beta - \varphi_\beta)$)

D'où $(f_\alpha|f_\beta)$ vérifie également (1) et (2).

Soit alors $(e_\alpha)$ la base orthonormalisée standard de F obtenue à partir de $(f_\alpha)$ :

$$e_\alpha = \sum_\beta f_\beta \cdot (f^{-1/2})_{\beta,\alpha}$$

où : $f = ((f_\alpha|f_\beta))_{\alpha,\beta}$

Dans cette base la restriction de P(h) à F a une matrice agréable :

<u>Théorème (2.7) :</u>

Dans la base $(e_\alpha)$ la matrice de la restriction de P(h) à F s'écrit :

$$M(h) = \operatorname{diag} \mu_\alpha + (W_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$$

où : $$W_{\alpha\beta} = h^2 \cdot \int \chi_{p(\alpha)} (\Psi_\beta \cdot \Psi'_\alpha - \Psi'_\beta \cdot \Psi_\alpha)\, \chi'_{p(\beta)}\, dx$$

En particulier : $W_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(e^{-S_0/h})$

$W_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$ si $p(\alpha) = p(\beta)$

et : $W_{\alpha\beta} = h^2\, (\Psi_\beta \cdot \Psi'_\alpha - \Psi'_\beta \cdot \Psi_\alpha)(0)$ si $j(\alpha) = j(\beta)$.

Nous allons voir maintenant que l'effet tunnel est mesuré par les coëfficients de la <u>matrice d'interaction</u> $(W_{\alpha\beta})$ et plus précisément par les termes pour lesquels $p(\alpha) = p(\beta)$.

Il est clair maintenant que, modulo $\mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$, les valeurs propres de P(h) dans I(h) sont déterminées par les valeurs propres de la matrice symétrique :

$M_0(h) = \operatorname{diag} \mu_\alpha + (\hat{W}_{\alpha\beta})$

où $\hat{W}_{\alpha,\beta} = 1/2(W_{\alpha\beta} + W_{\beta\alpha})$.

Or la matrice $M_0(h)$ s'écrit par blocs $2 \times 2$ : $M_0(h) = (A_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant N}$

où $A_{jj} = \begin{pmatrix} \mu_j & W_j \\ W_j & \mu_j \end{pmatrix}$ ; $\|A_{jk}\| = \mathcal{O}(e^{-S_0/h})$ , pour $j \neq k$

et :

(5) $$W_j = -2 \cdot h^2 \cdot \Psi_j^-(h,0) \cdot \frac{d}{dx} \Psi_j^-(h,0)$$

Le lemme suivant permet de ne considérer que la matrice diagonale par blocs :

$(A_{jj})_{0 \leqslant j \leqslant N}$

Lemme (2.8) :

Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice réelle symétrique. Soit $M_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

Posons : $\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{Sp}\, A_1, \mathrm{Sp}\, A_2)$.

Alors si $\|B\| < \frac{\delta}{2}$

on a : $\sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, M} \mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{Sp}\, M_0) \leqslant \frac{2\|B\|^2}{\delta}$

Il résulte de la proposition (2.4) et du lemme (2.8) que l'on obtient le :

Théorème (2.9) :

i) Le spectre $(\lambda_j(h))$ de $P(h)$ dans $I(h)$ est déterminé modulo $\tilde{O}(e^{-2S_0/h})$ par les valeurs propres de la matrice : $\left(\begin{pmatrix} \mu_j & W_j \\ W_j & \mu_j \end{pmatrix}\right)_{0 \leqslant j \leqslant N} = M_0$

ii) Dans la base $(e_\alpha)$ les fonctions propres associées sont déterminées modulo $\tilde{O}(e^{-S_0/h})$ par les fonctions propres de la matrice $M_0$.

En particulier on a :

iii) $\lambda_{2j+1}(h) - \lambda_{2j}(h) = 4\, h^2 \cdot \Psi_j^+(h,0) \cdot \frac{d}{dx} \Psi_j^+(h,0) + \tilde{O}(e^{-2S_0/h})$

(iv) $\begin{cases} \Psi_{2j}(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_j^+(h) + \Psi_j^-(h)) + \tilde{O}(e^{-S_0/h}) \\ \Psi_{2j+1}(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_j^+(h) - \Psi_j^-(h)] + \tilde{O}(e^{-S_0/h}) \end{cases}$

Remarque (2.10)

Le (iv) théorème (2.9) entraine en particulier que $\Psi_j(h)$ a la parité de j.

On a vu dans le §1 que l'effet tunnel provenait de l'écart exponentiellement petit entre deux niveaux d'énergie consécutifs. Pour mesurer avec précision cet effet on est ramené par (iii) théorème (2.9) à trouver les termes dominants de $\Psi_j^+(h,0)$ et $\frac{d}{dx}\Psi_j^+(h,0)$ (qui sont à priori d'ordre $\tilde{O}(e^{-S_0/2h})$).

Soit donc $J = [b,c]$ un intervalle borné fermé, $a \in ]b,c[$ et considérons le problème de Sturm-Liouville :

$$P^J(h) : \begin{cases} P(h)\, \Psi(h) = \mu(h).\Psi(h) \\ \Psi(h,b) = \Psi(h,c) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer des asymptotiques très précises des valeurs propres de $P^J(h)$ qui sont dans $[0, \gamma.h]$ et des fonctions propres associées. On s'attend naturellement

à ce que les coefficients de ces développements soient voisins des coefficients relatifs à $P_0^J(h)$ où $P_0(h) = -h^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2$ (au moins les premiers termes). Il faut ensuite montrer que l'on a ainsi obtenu toutes les valeurs propres de P(h) dans $[0,\gamma.h]$ et toutes les fonctions propres correspondantes (il y a un problème éventuel de multiplicité, facile à résoudre pour n = 1 mais beaucoup plus délicat pour n > 1 (voir §3)).

$(He\text{-}Sj)_1$ utilisent d'abord une méthode (B.K.W) formelle et une transformation de Fourier-Bros-Iagoniltzer (F.B.I). Nous suivrons plutôt ici la présentation de (He) qui est plus directe (mais moins commode pour les calculs lorsque $j \geqslant 1$ !).

On considère donc un problème aux valeurs propres dans des espaces de séries formelles :

On cherche :

$$\begin{cases} s(x,h) = h^{-\nu} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} s_k(x).h^k \right) \\ \mu(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k.h^k \end{cases}$$

où $s_k \in C^\infty(J)$, J intervalle ouvert contenant a, et $\varphi \in C^\infty(J)$ une fonction réelle, tels que :

(6) $$e^{\varphi(x)/h}.(P(h)-\mu(h))(s(x,h).e^{-\varphi(x)/h}) = 0$$

(Dans l'espace des séries formelles à coefficients dans $C^\infty(J)$).

En partant de la $(j+1)^{\text{ième}}$ valeur propre $(2j+1)\omega.h$ de $P_0(h)$ et de la fonction propre normalisée correspondante on détermine des solutions formelles de (6) avec : $\nu_j = \frac{j}{2} + \frac{1}{4}$ et $s_0(x) = \gamma_j(x-a)^j + O(x-a)^{j+1}$ où $\gamma_j = \Pi^{-1/4} \left(\frac{2^j}{k!}\right)^{1/2}$.

Ces solutions sont déterminées en résolvant une équations eikonale, qui est ici :

(7) $$\begin{cases} \varphi'^2 = V(x) \\ \varphi(x) = (\omega/2).(x-a)^2 + 0(x-a)^3, \qquad x \to a \end{cases}$$

et des équations de transport. Par exemple $\alpha_1^0$ et $s_0^0$ sont déterminés par :

(8) $$(\varphi''-\alpha_1^0) \cdot s_0^0 + 2\,\varphi'.s_0^{0\prime} = 0.$$

Ensuite par des arguments de perturbation utilisant en particulier l'inégalité :

(9) $$d(\lambda, Sp\ P(h)).\|\Psi\| \leqslant \|(P^J(h)-\lambda).\Psi\|, \text{ pour tout } \Psi \in D(P^J(h))$$

et la proposition (2.4) on montre que la $(j+1)^{\text{ième}}$ valeur propre et la fonction propre normalisée associée de $P^J(h)$, admettent les développements asymptotiques :

(10) $$\mu_j(h) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^j.h^k \qquad (\alpha_1^j = (2j+1)\omega)$$

(11) $$\Psi_j(h,x) \exp[h^{-1}.|\int_a^x \sqrt{V(t)}\,dt|] \sim \gamma_j h^{-\nu_j} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^j(x)\, h^k \quad , \qquad s_0^j(a) = 1$$

(11) ayant lieu uniformément par rapport à x sur tout compact de ]b,c[ pour $\Psi_j$ et toutes ses dérivées.

Ce qui précède et le théorème (2.9) impliquent le :

Théorème (2.11) :

On suppose pour simplifier la formule que $V''(a) = 2$.

On a alors le développement asymptotique :

$$e^{S_0/h}.[\lambda_{2j+1}(h)-\lambda_{2j}(h)] \sim h^{1/2-j} . \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^j.h^k.$$

En particulier :

$$\alpha_0^j = (\sqrt{\Pi}.j\,!\,)^{-1}.2^{j+2}\sqrt{V'(0)} . \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{2j}.\exp(-2. \int_0^{a-\varepsilon} [\frac{(\sqrt{V})'-(2j+1)}{2\sqrt{V}}]\,dt)$$

(Rappelons que $S_0 = \int_{-a}^{a} \sqrt{V(t)}.dt$)

Remarques (2.12)

(i) On peut interpréter $S_0$ comme l'action d'un instanton (Cf(Co)) c'est-à-dire l'action d'une trajectoire $\gamma$ paramétrée sur $\mathbb{R}$, allant de $-a$ ($t=-\infty$) à $+a$ ($t=+\infty$) et minimisant le lagrangien : $\int_{-T/2}^{T/2} (\frac{\dot{x}(t)^2}{4}+V(x(t)))dt$ (système classique de potentiel $-V$)

Fig. 4

(ii) On trouvera des résultats sur l'effet tunnel à une variable également dans (Co-Du-Se).

(iii) Très récemment Gérard et Grigis (Gé-Gr) ont amélioré sensiblement le théorème (2.11) sous l'hypothèse complémentaire : V est analytique dans un voisinage de [-a,a]. Leur technique est spécifique au cas de la dimension un et utilise la méthode B.K.W complexe dans l'esprit des travaux de Ecalle, F. Pham et Voros (Cf (Ph) et sa bibliographie).

## §3 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DE HELFFER-SJOSTRAND DANS LE CAS GÉNÉRAL

Considérons l'hamiltonien d'un système quantique à n-degrés de liberté : $P(h) = -h^2.\Delta + V$, $\Delta$ étant l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, minoré et $E \in \mathbb{R}$ et tels que :

$V_0 = \operatorname{Min}_{\mathbb{R}^n} V \leqslant E < \underline{\lim}_{|x| \to +\infty} V$. On se propose d'étudier le spectre de P(h) au voisinage de E lorsque h devient très petit. Quitte à faire une translation on peut toujours supposer que $E = 0$. Soit alors : $V^{-1}[V_0,0] = K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_M$ la décomposition en

composantes connexes (on pourrait également considérer d'autres décompositions). Le paragraphe 2 suggère que chacun des puits de potentiel $K_j$ apporte une contribution au spectre et qu'ils interagissent par effet tunnel. Il s'agit de mesurer cet effet. Pour cela le permier instrument utilisé par (He-Sj) est le suivant :

(A) La métrique d'Agmon :

(He-Sj) entourent chaque puits $K_j$ d'une barrière infiniment haute, ce qui se traduit par M problèmes de Dirichlet sur les voisinages ouverts convenables des $K_j$. Ils comparent le spectre près de 0, ainsi que les sous-espaces propres, de la somme directe des problèmes de Dirichlet avec le problème initial. Le contrôle des erreurs dans les approximations utilise de manière essentielle la métrique riemannienne dégénérée : $V^+.dx^2$ où $V^+ = \mathrm{Max}(V,0)$ et $dx^2$ est la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$. Cette métrique a été introduite par Agmon (Ag) et utilisée également par Simon ((Ca-Si), (Si)). La distance entre deux points $x,y \in \mathbb{R}^n$ est donc donnée par :

(12) $$d_{V^+}(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\gamma} \{ \int_0^1 \sqrt{V_+(\gamma(s))}\, |\mathring{\gamma}(s)|\, ds,\ \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y\}$$

$\gamma$ étant un chemin de classe $C^1$ par morceaux.

On a également l'expression suivante ((Ca-Si)) :

(13) $$d_{V^+}(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\gamma,T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} (V_+(\gamma(s)) + |\mathring{\gamma}(s)|^2/4)\, ds,\ \gamma(-T/2) = x,\ \gamma(T/2) = y \right\}$$

qui montre que $d_{V^+}$ est la métrique de Jacobi associée au potentiel $-V_+$ (Ab-Ma). Cette distance est adaptée au contrôle des états d'énergie $\leqslant 0$ dans la zone classiquement interdite : $\{V > 0\}$ (elle est dégénérée dans la zone classique $\{V \leqslant 0\}$ .

La propriété suivante est souvent utilisée :

(14) $$\begin{cases} \text{Pour tout compact } L \text{ de } \mathbb{R}^n,\ x \to d_{V^+}(x,L) \text{ est localement lipchitzienne et} \\ \text{on a : } |\nabla_x d(x,L)|^2 \leqslant V_+(x), \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(He-Sj) ont trouvé une relation remarquable entre la métrique d'Agmon et une équation du type Hamilton-Jacobi :

Supposons que V admette en $a \in \mathbb{R}^n$ un minimum local (égal à zéro) non dégénéré ie : $V(a) = V'(a) = 0$, $D^2 V(a)$ est définie positive. On a alors :

Proposition (3.1) :

Il existe un voisinage ouvert $\omega$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} |\nabla\varphi|^2 = V \quad \text{dans } \omega \\ \varphi(x) = \langle 2^{-3/2}[D^2 V(a)]^{1/2} (x-a),(x-a)\rangle, \qquad x \to a \end{cases}$$

admet une unique solution $\varphi \in C^\infty(\omega)$.

On a de plus $\varphi(x) = d(x,a)$ pour tout $x \in \omega$ .

Principe de la preuve :
La méthode consiste à chercher $\varphi$ comme fonction génératrice d'une variété lagrangienne que l'on détermine à l'aide des théorèmes de linéarisation et de stabilité sur les variétés différentielles (Ab-Ma).

(B) Mise en place des barrières et décroissance des fonctions propres :

On suppose que chaque $K_j$ est de diamètre 0 pour la métrique d'Agmon. Soit $\Omega_j$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $K_j \subset \Omega_j$, à bord $\partial\Omega_j$ de classe $C^2$ et tel que $\overline{\Omega}_j \cap K_m = \emptyset$ si $j \neq m$.

On désigne par $P^{\Omega_j}(h) = P_j(h)$ la réalisation de Dirichlet de $P(h)$ sur $\Omega_j$ (c'est l'opérateur agissant comme $P(h)$ ; de domaine : $D(P_j(h)) = H_0^1(\Omega_j) \cap H^2(\Omega_j)$).

Posons : $S_0 = \underset{j \neq m}{\mathrm{Min}}\ d_{V^+}(K_j, K_m)$

$$\phi_j(x) = d(x, K_j),\ \phi(x) = \underset{j}{\mathrm{Min}}\ \phi_j(x)$$

Soit : $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)]$ une famille d'intervalles telle que $\lim\limits_{h \searrow 0} \alpha(h) = \lim\limits_{h \searrow 0} \beta(h) = 0$.

On désigne par : $(\mu_{j,k})_{1 \leqslant k \leqslant N_j(h)}$, $(\Psi_{j,k}(h))_{1 \leqslant k \leqslant N_j(h)}$ (resp. $(\lambda_k(h))$, $(\Psi_k(h))$, $_{1 \leqslant k \leqslant N(h)}$ les valeurs propres de $P_j(h)$ (resp. $P(h)$) situées dans $I(h)$ et un système orthonormal de fonctions propres associées (chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité).

On a alors les résultats de décroissance suivants :

Proposition (3.2)

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a, lorsque $h \searrow 0$ :

(i) $$\| \nabla (e^{h^{-1}\phi_j} \Psi_{jk}) \| + \| e^{h^{-1}\phi_j} \Psi_{jk} \| = O(e^{h^{-1}\varepsilon})$$

(ii) $$\| \nabla (e^{h^{-1}(1-\varepsilon)\phi} \Psi_k \| + \| e^{h^{-1}(1-\varepsilon)\phi} \Psi_k \| = O(e^{h^{-1}\varepsilon})$$

(iii) Pour tout compact $L \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $C(\varepsilon, \alpha, L)$ tel que :

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \Psi_k(x) \right| \leqslant C(\varepsilon, \alpha, L) \cdot e^{h^{-1}(\varepsilon - \phi(x))} \qquad \text{pour tout } x \in L$$

Indication sur la preuve : ((He-Sj)$_1$)

(i) et (ii) utilisent une formule de Green et (14), (iii) se démontre à partir de (ii) par des inégalités à priori classiques pour les opérateurs elliptiques.

(i) et (ii) de (3.2) montrent que les $\Psi_{j,k}$ sont essentiellement concentrés près de $K_j$ et les $\Psi_k$ près de $K$.

Voici maintenant comment on choisit les $\Omega_j$. Soit $\eta$ un réel $>0$ que l'on choisira arbitrairement petit. On commence par déterminer un voisinage $\Omega$ de $K$ :

$\Omega(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d_{V^+}(x,K) < 2S_0 - \eta\}$

Sont alors $\Omega_j(\eta) = \Omega(\eta) \setminus (\bigcup_{m \neq j} B(K_m,\eta))$

où : $B(K_m,\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d(x,K_m) \leqslant \eta\}$

Quitte à faire des petites déformations on supposera que les bords $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_j$ sont de classe $C^2$.

Ensuite à l'aide de fonctions de troncatures $C^\infty$ on remplace $\Psi_{j,k}$ par $\varphi_{j,k} \in C_0^\infty(\Omega_j(\eta))$ fonctions $C^\infty$ à supports compacts telles que

$$\varphi_{j,k} = \Psi_{j,k} \quad \text{sur} \quad \Omega_j(2\eta)$$

Il résulte de la proposition (3.2) que les $\varphi_{j,k}$ sont très proches des $\Psi_{j,k}$ (cf §2, (1), (2)).

On définit alors :

E(h) : De sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par $\{\varphi_{j,k} : 1 \leqslant j \leqslant M, \; 1 \leqslant k \leqslant N_j(h)\}$

F(h) : le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par $\{\Psi_k : 1 \leqslant k \leqslant N(h)\}$ .

Il résulte par exemple de (He-Ro) que l'on a :

(15) $$N(h) + N_1(h) + \dots + N_M(h) = O(h^{-n})$$

Le premier résultat important de la théorie de (He-Sj) est le suivant :

Théorème (3.3) :

Supposons que I(h) soit assez isolé dans Sp P(h) $\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant M}$ (Sp $P_j(h)$) au sens suivant : il existe une fonction : $h \to a(h)$, $a(h) > 0$ telle que $|\mathrm{Log}\, a(h)| = o(h^{-1})$ et :

$$\mathrm{Sp}\, P(h) \cap [(I(h) \pm a(h)) \setminus I(h)] = \phi$$

$$\mathrm{Sp}\, P_j(h) \cap [(I(h) \pm a(h)) \setminus I(h)] = \phi$$

Alors pour tout $\sigma < S_0 - 3\eta$ on a : $d(E,F) = O(e^{-\sigma/h})$ et $d(F,E) = O(e^{-\sigma/h})$.

De plus il existe une bijection b de Sp P(h) $\cap$ I(h) sur $\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant M}$ (Sp $P_j(h) \cap I(h)$) telle que $b(\lambda) = \lambda + O(e^{-\sigma/h})$.

(C) La matrice d'interaction :

On procède alors exactement comme dans le §2 avec les notations suivantes :

$\alpha = (j,k)$, $j = p(\alpha)$ est le numéro du puits, $k = k(\alpha)$ indique le numéro de la valeur propre.

Soient $v_\alpha = \Pi_F \varphi_\alpha$ , $(e_\alpha)$ la base orthonormale de F obtenue à partir des $v_\alpha$ comme dans le §2 (noter que $e_\alpha$ est localisée près de $K_{p(\alpha)}$ modulo $O(e^{-C.h^{-1}})$ pour un $C > 0$).

Le deuxième résultat fondamental de (He-Sj) est la mise en évidence de la matrice d'interaction :

Théorème (3.4) :

La matrice de P(h) restreint à F(h) dans la base $(e_\alpha(h))$ est de la forme :

$$M(h) = \mathrm{diag}\, \mu_\alpha(h) + \underbrace{(\hat{W}_{\alpha\beta}(h))}_{\text{matrice d'interaction}} + \tilde{O}(e^{-2S_0.h^{-1}})$$

où : $\hat{W}_{\alpha\beta}(h) = 1/2(W_{\alpha\beta}(h) + W_{\beta\alpha}(h))$

et : $W_{\alpha\beta}(h) = h^2 \int \chi_{p(\alpha)} (\Psi_\beta \cdot \nabla \Psi_\alpha - \Psi_\alpha \cdot \nabla \Psi_\beta) \cdot \nabla \chi_{p(\beta)}\, dx$

où : $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega_j(\eta))$, $\chi_j = 1$ sur $\Omega_j(2\eta)$

Commentaires (3.5)

(i) L'effet tunnel mis en évidence étant de l'ordre de grandeur de $e^{-h^{-1}.S_0}$ il suffit de travailler modulo $O(h^\infty.e^{-h^{-1}S_0})$. Or modulo cette erreur la matrice : $M_0(h) = \text{diag}\, \mu_\alpha + (\hat{W}_{\alpha\beta})$ est indépendante du choix de $\eta > 0$.

(ii) $p(\alpha) = p(\beta)$ entraine que $W_{\alpha\beta} = \tilde{O}(e^{-2S_0/h})$ donc seuls comptent les termes $W_{\alpha\beta}$ pour lesquels $p(\alpha) \neq p(\beta)$. Pour une estimation plus fine de $M(h)-M_0(h)$ voir $(He\text{-}Sj)_2$.

(iii) Les valeurs propres de $P(h)$ dans $I(h)$ sont déterminées par les valeurs propres de la matrice $M_0(h)$ (de taille $O(h^{-n})$) modulo $\tilde{O}(e^{-2S_0.h^{-1}})$.
En particulier dans le cas d'un seul puits ($M = 1$) $\text{Sp}\, P_1(h) \cap I(h)$ et $\text{Sp}\, P(h) \cap I(h)$ coïncident modulo $\tilde{O}(e^{-2S_0.h^{-1}})$.

Passons maintenant à la dernière étape (la plus difficile en dimension > 1).

(D) Calcul de la matrice d'interaction

Pour simplifier la présentation et éviter de nombreux problèmes techniques nous nous limiterons au cas du double puits non dégénéré symétrique par rapport à un hyperplan (nous renvoyons le lecteur à $(He\text{-}Sj)_2$ et $(He\text{-}Sj)_3$ pour des situations plus générales). On suppose donc maintenant :

$$(16)\quad \begin{cases} V(x',x_n) = V(x',-x_n) \text{ où } x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ \{0 = \text{Min } V = V(x)\} \Leftrightarrow \{x = a_1 \text{ ou } a_2\} \\ M = 2,\ K_j = \{a_j\},\ j = 1,2. \quad D^2 \cdot V(a_j) \text{ est définie positive.} \end{cases}$$

Naturellement on conserve la symétrie par rapport à l'hyperplan : $x_n = 0$ dans toutes les constructions précédentes.

En particulier les réalisations de Dirichlet $P_1(h)$ et $P_2(h)$ ont mêmes valeurs propres associées à des fonctions propres symétriques : $\Psi_{2,k}(x',x_n) = \Psi_{1,k}(x',-x_n)$.

($D_1$) Localisation du spectre de $P_1(h)$.

Cette étape utilise seulement que, dans $\Omega_1$, $V$ a un unique minimum (égal à zéro) en $a_1$ non dégénéré.

Désignons par $P_0$ l'oscillateur harmonique :

$$P_0 = -\Delta + \frac{1}{2} \cdot (D^2\, V(a_1)\, x|x)$$

Soit : $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ , où $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont les deux premières valeurs propres de $P_0$ ( $(\gamma_1 = \mathrm{Tr}[\frac{1}{2} D^2 V(a_1)]^{1/2}$ et $I(h) = [0,\gamma.h]$). On a alors :

Théorème (3.6) :

Il existe un voisinage ouvert $\omega_1$ de $a_1$ tel que dans $I(h)$, $P^{\omega_1}(h)$ a exactement une valeur propre : $\tilde{\mu}_1(h)$ ayant le développement asymptotique :

$$\tilde{\mu}_1(h) \sim \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k h^k \quad \text{où} \quad \alpha_1 = \gamma_1$$

De plus la fonction propre normalisée admet le développement asymptotique :

$$e^{h^{-1}.\varphi_1(x)} \Psi_{1,1}(h,x) \sim \sum_{k \geqslant 0} h^k f_k(x) \quad \text{dans } \omega_1 \quad \text{avec } f_0(a_1) = (2\pi)^{-n/4}$$

Enfin $P_1(h)$ admet dans $[0,\gamma.h]$ une unique valeur propre $\mu_1(h)$ vérifiant :

$$\mu_1(h) = \tilde{\mu}_1(h) + O(h^\infty)$$

Indication sur la preuve :

- La première partie est une construction B.K.W près du fond du puits d'où l'on part de l'oscillateur harmonique tangent à $P^{\omega_1}(h)$ en $a_1$.
- La deuxième partie résulte de (3.2) et (2.4).

  La difficulté supplémentaire par rapport au cas où $n = 1$ vient de ce que, à priori on ne sache pas prolonger les constructions B.K.W loin du fond du puits.

Dans la situation précédente la matrice d'interaction s'écrit :

$$(17) \qquad M_0(h) = \begin{pmatrix} \mu_1(h) & W(h) \\ W(h) & \mu_1(h) \end{pmatrix}$$

avec : $W(h) = h^2 . \int_{R^n} \chi_1(\Psi_{2,1}.\nabla \Psi_{1,1} - \Psi_{1,1}.\nabla \Psi_{2,1}) \nabla \chi_2 \, dx$

On transforme l'expression de $W(h)$, modulo $O(h^\infty.e^{-h^{-1}.S_0})$ de la manière suivante :

$L = \{ x \in \mathbb{R}^n, d(x,a_1) = d(x,a_2) = \frac{S_0}{2} \}$ est un compact de l'hyperplan $x_n = 0$. Soit $\Sigma$ un petit voisinage de L. Pour une formule de Green on obtient alors :

$$(18) \qquad W(h) = 2h^2 . \int_\Sigma \Psi_{1,1} . \frac{\partial \Psi_{1,1}}{\partial x_n} \, dx' + O(h^\infty.e^{-h^{-1}.S_0})$$

en supposant que $a_1 \in \{(x',x_n) : x_n < 0\}$ .

Pour avoir l'asymptotique de $W(h)$ il nous faut prolonger le développement B.K.W du théorème (3.6) sur $\Sigma$ . Or ici cela est possible en intégrant, le long des géodésiques minimales, les équations définissant la phase $\varphi_1$ et les amplitudes $f_k$ car on peut joindre tout point de $\Sigma$ à $a_1$ par une unique géodésique minimale.

Compte tenu de (17), (18), du théorème (3.4) et d'un peu de travail! on obtient pour les deux premières valeurs propres : $\lambda_1(h) < \lambda_2(h)$ de $P(h)$ le résultat suivant :

Théorème (3.7) :

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{C} h^{1/2}.e^{-S_0/h} \leqslant -2.W(h) \quad \lambda_2(h) - \lambda_1(h) \leqslant C.h^{1-n/2}.e^{-S_0/h} \ (\text{mod } O(h^{\infty}.e^{-S_0/h}))$$

pour tout $h \in ]0,h_0]$ pour un $h_0 > 0$.

En particulier on a :

(19) $$\lim_{h \searrow 0} h.\mathrm{Log}((\lambda_2(h)-\lambda_1(h))) = -S_0$$

Sous l'hypothèse géométrique complémentaire :

(G) Il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques de longueur $S_0$ joignant $a_1$ à $a_2$, non dégénérées.

Par un argument de phase stationnaire, $(\text{He-Sj})_1$ obtiennent le résultat plus précis suivant :

Théorème (3.8) :

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = -2W(h) \sim h^{1/2}.e^{-S_0/h}.(\sum_{k \geqslant 0} \beta_k.h^k) \quad (\text{modulo } O(h^{\infty}.e^{-S_0/h}))$$

avec $\beta_0 > 0$.

Remarques (3.9) :

(i) (19) a été obtenu également par Simon $(\text{Si})_2$, l'énoncé général donné par (He-Sj) étant plus précis.

(ii) Dans ce cas particulier du double puits symétrique Martinez (Ma) a obtenu des résultats du type (3.7) pour les états excités.

Dans le paragraphe suivant nous allons perturber légèrement la symétrie entre les puits : le résultat est spectaculaire, la particule bascule presque complètement dans l'un des puits selon le signe de la perturbation et aussi sa distance par rapport au fond de chaque puits. Ce phénomène d'instabilité de l'effet tunnel a été remarqué d'abord en dimension un par Jona-Lassinio-Martinelli-Scoppola (Jo-La-Ma) (voir aussi (Gr-Gr-Jo)) puis étendu est précisé en dimension supérieure par Helffer-Sjöstrand $(\text{He-Sj})_2$ (voir aussi $(\text{Si})_4$).

## §4 . INSTABILITÉ DE L'EFFET TUNNEL OU " LA PUCE ET L'ÉLÉPHANT " (dixit B. Simon $(\text{Si})_4$)

On conserve les hypothèses et les notations du §3 (D). Soit $\delta V \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, positive.

On fixe $\varepsilon_0 > 0$ et on considère le potentiel $V_t = V + t.\delta V$.

On suppose également que : $\mathrm{Supp}\ \delta V \cap \{a_1,a_2\} = \emptyset$

Fig. 5

On fait varier le paramètre t dans $[-e^{-\varepsilon_0/h},1]$. Il est clair alors que la métrique d'Agmon $d_{V^t}$ varie peu : $d_{V^t} \geqslant d_V$ modulo $O(h^\infty)$.

Désignons alors par $P_1^t(h)$ (resp. $P_2^t(h)$) la réalisation de Dirichlet de $P^t(h)$ dans $\Omega_1$ (resp. $\Omega_2$).

On peut toujours s'arranger pour que Supp $\delta V \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. Soient $\mu_1^t(h)$ (resp. $\mu_2^t(h)$) la valeur propre de $P_1^t(h)$ (resp. $P_2^t(h)$) dans $[0,\gamma.h]$ et $\Psi_{D,1}^t(h)$ (resp. $\Psi_{D,2}^t(h)$) la fonction propre normalisée associée.

Il résulte alors de la théorie générale (§3 (C)) que les deux valeurs propres : $\lambda_1^t(h) \leqslant \lambda_2^t(h)$ de $P^t(h)$ dans $[0,\gamma.h]$ sont déterminées, modulo $\mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$, par les valeurs propres de la matrice :

$$M_0^t(h) = \begin{pmatrix} \mu_1^t(h) & W^t(h) \\ W^t(h) & \mu_2^t(h) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

(20) $$|\lambda_2^t(h)-\lambda_1^t(h)| = \sqrt{4(W^t(h))^2+(\mu_1^t(h)-\mu_2^t(h))^2} + \mathcal{O}(e^{-2S_0/h})$$

Or on a : $\mu_1^0(h) = \mu_2^0(h) = \mu_1(h)$. Par conséquent,

notant que : $\mu_1^t(h) - \mu_2^t(h) = (\mu_1^t - \mu_1^0) + (\mu_2^0 - \mu_2^t)$

(20) ramène l'étude de $\lambda_2^t(h) - \lambda_1^t(h)$ à celle de l'effet de la perturbation dans chaque puits.

Cette étude se fait selon une méthode analogue à celle indiquée dans le §3 (B) (projeter $\Psi_{0,j}^t$ sur $\Psi_{j,1}$ pour j=1,2).

Pour simplifier les énoncés on suppose la condition (G) vérifiée. Posons $L_j = d_V(a_j,\delta V)$ et supposons $L_1 < L_2$. On a alors les résultats suivants (pour des énoncés plus précis nous renvoyons à $(He\text{-}Sj)_2$)

Théorème (4.1) :

Soit $\varepsilon_0 > 0$.

i) Si $2L_1 > S_0 - \varepsilon_0$ ($S_0 = d_V(a_1,a_2)$) alors il existe $C > 0$ tel que :

$$\frac{1}{C}.h^{1/2}.e^{-S_0/h} \leqslant |\lambda_1^t(h)-\lambda_2^t(h)| \leqslant C.h^{1-n/2}.e^{-S_0/h}$$

pour $|t| \leqslant e^{-\varepsilon_0/h}$ et les fonctions propres correspondantes $\Psi_1^t(h)$ et $\Psi_2^t(h)$ restent localisées sur les deux puits à la fois (Cf (4.2)).

ii) Supposons : $2\,L_1 < S_0 - \varepsilon_0$. Alors pour tout $\varepsilon \in ]\varepsilon_0, S_0 - 2.L_1[$ l'effet tunnel entre les états $\Psi^t_{1,1}(h)$ et $\Psi^t_{2,1}(h)$ a essentiellement disparu pour : $e^{-\varepsilon/h} \leqslant |t| \leqslant e^{-\varepsilon_0/h}$. Plus explicitement pour $t \in [-e^{-\varepsilon_0/h}, -e^{-\varepsilon/h}]$, $\Psi^t_1(h)$ est localisée sur $a_1$, $\Psi^t_2(h)$ sur $a_2$ et les localisations s'échangent pour $t \in [e^{-\varepsilon/h}, e^{-\varepsilon_0/h}]$. $t = t(h)$ ?

Indication sur la preuve :

La localisation des fonctions propres se fait en calculant les vecteurs propres de la matrice $M^t_0(h)$ et en comparant les ordres de grandeur de $\mu^t_1(h) - \mu^t_2(h)$ ($\approx |t|\, e^{-2\,L_1/h}$) et $W^t(h)$ ($\approx \sqrt{h}.e^{-S_0/h}$).

Il y a un résultat analogue pour $t = 1$ que nous énonçons brièvement :

- Si $2\,L_1 > S_0$ l'intéraction entre $\Psi_{1,1}$ $\Psi_{2,1}$ subsiste.
- Si $2\,L_1 < S_0$ l'intéraction disparaît : $\Psi_1$ est essentiellement localisé sur $a_2$ et $\Psi_2$ sur $a_2$.

Remarque (4.2)

On peut formaliser la notion de localisation de la manière suivante :

Soit $h \xrightarrow{h} \Psi(h)$ une application de $]0,1]$ dans la boule unité de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\Psi$ est localisée sur K si pour tout voisinage $\omega$ de K il existe $\delta(\omega) > 0$ tel que :

$$\int_\omega |\Psi(h,x)|^2\, dx \geqslant \delta(\omega) \qquad \text{pour tout } h \in ]0,1]$$

On dit que $\Psi$ est essentiellement localisée sur K si pour tout voisinage $\omega$ de K il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_\omega |\Psi(h,x)|^2\, dx \geqslant 1 - O(e^{-\varepsilon/h})$.

## §5 AUTRES RÉSULTATS

Nous avons présenté dans les §3 et 4 des cas particuliers des résultats de $(\text{He-Sj})_1$ et $(\text{He-Sj})_2$ : par exemple dans $(\text{He-Sj})_2$ on trouvera une analyse des interactions moléculaires en présence d'un groupe fini de symétries et d'autres exemples de perturbations d'effet tunnel. Dans $(\text{He-Sj})_3$ une étude très fine est menée sur les interactions à travers les puits non résonnants.

D'autre part Helffer-Sjöstrand ou leurs élèves ont appliqué et développé les idées précédemment exposées pour résoudre de nombreux problèmes liés à l'analyse semi-classique. Dans ce paragraphe nous passons en revue quelques-uns de ces problèmes :

(5.1) Etude des puits sous-variétés $(\text{He-Sj})_5$

Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $V \geqslant 0$. Soit $\Gamma = V^{-1}(0)$ une sous-variété compacte, connexe de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que V s'annule exactement à l'ordre 2 sur $\Gamma$. Sous des hypothèses convenables (He-Sj) mettent en évidence un effet tunnel entre puits à l'intérieur de

$\Gamma$ (minipuits).

(5.2) Cas de l'opérateur de Dirac (Wa)

Soit $D(h) = h \sum_{j=1}^{3} \alpha_j D_j + \alpha_4 + V.I_4$

les $\alpha_j$ étant des matrices complexes $4 \times 4$ vérifiant :

$$\alpha_j . \alpha_k + \alpha_k . \alpha_j = 2\, \delta_{jk} . I_4$$

On suppose que : $\liminf_{|x| \to +\infty} |V(x)| < 1$

ce qui entraine que le spectre de D(h) est discret près de O. On a alors deux types de puits :

$$\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant N_+} K_j^+ = \{V \geqslant 1\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant N_-} K_j^- = \{V \leqslant -1\} .$$

Il n'y a pas d'interaction entre $\{V \geqslant 1\}$ et $\{V \leqslant -1\}$ .

Wang a adapté la théorie de (He-Sj) pour étudier l'interaction des $K_j^+$ entre eux (resp. des $K_j^-$).

(5-3) Cas des potentiels périodiques ((Ou), (Si))

Soit $P(h) = -h^2 \Delta + V$, $V \in C^\infty$, périodique sur le réseau : $L = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \mathbb{Z}$ où $(a_1,\dots,a_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Le spectre de P(h) est absolument continu constitué de bandes. On suppose que V admet un seul minimum non dégénéré dans la cellule de base :

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j a_j,\ 0 \leqslant t_j \leqslant 1 \right\}$$

En utilisant la théorie de (He-Sj), Outassourt donne des estimations très précises de la largeur des premières bandes et étudie l'effet d'une petite perturbation (impureté dans un cristal). Il a fait un travail analogue pour l'opérateur de Dirac (Cf (5.2)).

(5.4) Cas de minima non quadratiques (Ma-Ro)

Dans un travail très récent Martinez-Rouleux ont obtenu d'intéressants résultats pour des potentiels à double puits : $\{a_1,a_2\}$ tels que :

$$\frac{1}{C} |x-a_j|^{2\sigma} \leqslant V(x) \leqslant C|x-a_j|^{2\sigma} , \quad j=1,2$$

où $C > 0$, $\sigma$ est un entier $\geqslant 2$.

(5.5) Preuves à la Witten de résultats géométriques ((He-Sj)$_4$ et (He-Sj)$_5$)

Il s'agit essentiellement des inégalités de Morse (voir l'exposé de Henniart (He), et aussi (El-Wa) pour le théorème de Poincaré-Hopf).

(5.6) Les résonances

Dans le prolongement de leurs travaux sur l'effet tunnel, Helffer-Sjöstrand ont construit une théorie générale rendant compte des phénomènes de résonances dans le spectre

continu des opérateurs de Schrödinger. Ils ont obtenu de très belles applications de leur théorie (He-Sj) en particulier à l'effet Zeeman (formule de Bender-Wu). D'autres applications sont en train de se développer ((Sj),(Gé-Sj),...).

En guise de conclusion, je voudrais remercier ici B. Helffer et J. Sjöstrand pour les fréquentes discussions que j'ai avec eux sur ces sujets et N. Bourbaki de m'avoir permis de rendre compte de leurs récentes et importantes contributions à l'analyse spectrale des opérateurs de Schrödinger.

BIBLIOGRAPHIE

(Ab-Ma) R. ABRAHAM - J. MARSDEN - *Foundations of Mechanics*, Benjamin, c.o. company, 1978.

(Ag) S. AGMON - *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations*, Mathematical Notes 29, Princeton University Press.

(As-Fu) K. ASADA - D. FUJIWARA - *On some oscillatory transformation in* $L^2(\mathbb{R}^n)$, Japan J. of Math. 4 (1978) 299-361.

(Ca-Si) R. CARMONA - B. SIMON - *Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in N.body quantum systems* V. Comm. Math. Phys. 80 (1981), 59-98.

(Ch) J. CHAZARAIN - *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. in PDE n° 6 (1980), 595-644.

(Co) S. COLEMAN - *The use of Instantons*, Proc. of the Erice Conference (1977).

(Co-Du-Se) J. M. COMBES - P. DUCLOS - R. SEILER - 1) *Krein's formula and one dimensional multiple wells*, J. of functional Analysis 52 (1983), 257-301.
2) *Convergent expansions for tunneling*, Comm. in Math. Physics 82 (1983), 229-245.

(El-Wa) A. EL SOUFI - S.P. WANG - *Quelques remarques sur la méthode de Witten : cas du théorème de Poincaré-Hopf et d'une formule d'Atiyah-Bott*, Prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble (1986).

(Gé-Sj) C. GÉRARD - J. SJÖSTRAND - *Semi-classical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type.*

(Gé-Gr) C. GÉRARD - A. GRIGIS - En préparation.

(Gi-Pa) E. GILDENER - A. PARASCIOIU - *Pseudoparticle contributions to the energy spectrum of a one-dimensional system*, Phys. Rev. D. Vol. 16, n° 2 (1977), 423-430.

(Gr-Gr-Jo) S. GRAFFI - V. GRECCHI - G. JONA-LASINIO - *Tunneling instability via perturbation theory*, J. Phys., to appear.

(Ha) E.M. HARRELL - 1) *On the rate of asymptotic eigenvalue degeneracy*, Comm. Math. Phys. 60 (1978), 73-95.
2) *Double wells*, Comm. Math. Phys. 75 (1980), 239-261.

(Hei) W. HEISENBERG - *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Gauthier Villars (1957).

(Hel) B. HELFFER - *Introduction to the semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, to appear in a Lecture Notes, Springer.

(He-Ro) B. HELFFER - D. ROBERT - *Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique*, Ann. I.H.P. Physique Théorique, Vol. 41, n° 3 (1984) 291-331.

2) *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Ann. Inst. Fourier 31, n° 3 (1981), 169-223.

3) *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, J. of Funct. Analysis 53, n° 3 (1983), 246-268.

(He-Sj) B. HELFFER - J. SJÖSTRAND - 1) *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in P.D.E. 9 (4)(1984), 337-408.

2) *Puits multiples en limite semi-classique II*, Ann. I.H.P. 42, n° 2 (1985), 127-212.

3) *Multiple wells in the semi-classical limit III non resonant wells*, Math. Nachrichten 124 (1985), 263-313.

4) *Puits multiples en mécanique semi-classique IV, Etude du complexe de Witten*, Comm. in D.P.E. 10 (3)(1985), 245-340.

5) *Puits multiples en mécanique semi-classique V et VI - Etude des minipuits* (à paraître) - *Cas uniformément dégénéré*.

6) *Résonance en limite semi-classique*, Prépublication à l'Université de Nantes, à paraître dans les Mémoires de la SMF.

On trouvera un résumé de ces travaux dans :

7) *Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger en limite semi-classique I*, St Jean de Monts, 1985, Editions de l'Ecole Polytechnique.

8) *Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger en limite semi-classique II*, Lectures in Castel Vecchio (1985), Nato Series, Advances in Microlocal Analysis, C Vol. 168, D. Reidel Publishing Company (1986), 291-323.

(Hen) G. HENNIART - *Les inégalités de Morse, d'après E. Witten*, Sém. Bourbaki, 1983/84, exposé n° 617, Astérisque 121-122(1985), 43-61.

(Hö) L. HÖRMANDER - *Fourier Integral Operators I*, Acta Math. 127 (1971), 79-183.

(Jo-Ma-Sc) G. JONA-LASINIO - F. MARTINELLI - E. SCOPOLLA - *New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics I*, Comm. in Math. Phys. 75 (1980), 238-261.

(Ka) T. KATO - *Schrödinger operators with singular potentials*, Israël J. of Math. 13 (1973), 135-148.

(La-Li) L. LANDAU - E. LIFCHITZ - *Mécanique quantique, théorie non relativiste*, Editions Mir, Moscou (1966).

(Lé-Ba) J.-M. LÉVY-LEBLOND - F. BALIBAR - *Quantique - Rudiments*, Interédition, 1984.

(Ma) A. MARTINEZ - *Estimations de l'effet tunnel pour le double puits*, à paraître dans le Journal de Maths Pures et Appl.

(Ma-Ro) A. MARTINEZ - ROULEUX - *Tunnel effect for the degenerate double wells*, En préparation.

(Mas) V.P. MASLOV - *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod.

(Ou) A. OUTASSOURT - *Comportement semi-classique pour les opérateurs de Schrödinger et de Dirac à potentiel périodique*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Juin 1986.

(Pe) A. PERSSON - *Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator*, Math. Scand. 8 (1960), 143-153.

(Ph) F. PHAM - *Introduction à la résurgence quantique, d'après Écalle et Voros*, Sém. Bourbaki, 1984/85, exposé n° 656.

(Re-Si) M. REED - B. SIMON - *Methods of modern mathematical Physics*, Academic Press, New York, 1978.

(Ro) D. ROBERT - *Autour de l'approximation semi-classique*, Publications de l'Université de Recife n° 21 (1983).

(Si) B. SIMON - 1) *Semi-classical analysis of low-lying eigenvalues I. Non degenerate minima. Asymptotic expansions*, Ann. I.H.P. Physique Théorique, 38, n° 3 (1983), 295-307.

2) *Semi-classical analysis of low-lying eigenvalues II. Tunneling*, Annals of Math. n° 120 (1984), 89-118.

3) *Semi-classical analysis of low-lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solid*, Annals of Physics 158 n° 2 (1984), 415-420.

4) *Semi-classical analysis of low-lying eigenvalues IV. The flea of the elephant*, J. of operator theory 63, n° 1 (1985), 84-98.

(Sj) J. SJÖSTRAND - *Semi-classical resonances generated by non degenerate critical points*, Preprint University of Lund.

(Wa) X.P. WANG - *Puits multiples pour l'opérateur de Dirac*, Ann. I.H.P. Physique Théorique 43, n° 3 (1985), 269-319.

Didier ROBERT

U.A. CNRS 758
Département de Mathématiques et d'Informatique
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière
F-44072 NANTES CEDEX