

Astérisque

LAURENT MORET-BAILLY

Variétés stablement rationnelles non rationnelles

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 643, p. 223-236

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__223_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS STABLEMENT RATIONNELLES NON RATIONNELLES

[d'après Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer]

par Laurent MORET-BAILLY

1. Rationalité

Soient k un corps, X une k -variété algébrique de dimension n (les variétés seront toujours, sauf mention contraire, irréductibles et réduites). On dit que X est k -rationnelle (resp. *stablement* k -rationnelle) si X est k -birationnellement équivalente à $\mathbb{P}_k^n$, en abrégé $X \sim_k \mathbb{P}_k^n$ (resp. s'il existe $m \geq 0$ tel que $X \times_k \mathbb{P}_k^m \sim_k \mathbb{P}_k^{m+n}$) ; ou, de façon équivalente, si son corps de fonctions rationnelles K est une extension transcendante pure de k (resp. s'il existe $m \geq 0$ tel que $K(T_1, \dots, T_m)$ soit k -isomorphe à $k(T_1, \dots, T_{m+n})$). L'objet de cet exposé est la question suivante, connue sous le nom de "problème de Zariski" :

(1.1). Toute variété stablement k -rationnelle est-elle k -rationnelle ?

Si X est stablement k -rationnelle, elle est évidemment k -unirationnelle, c'est-à-dire qu'il existe une application rationnelle dominante et séparable $f : \mathbb{P}_k^N \longrightarrow X$. Il convient donc de dire d'abord quelques mots de la question suivante ("problème de Lüroth") :

(1.2). Toute variété k -unirationnelle est-elle k -rationnelle ?

Notons que si l'on a $f : \mathbb{P}_k^N \longrightarrow X$ comme ci-dessus, on peut (du moins si k est infini) restreindre f à un sous-espace linéaire convenable et ainsi se ramener au cas où $N = n$, c'est-à-dire où f est génériquement finie.

Lorsque $n = 1$ la réponse à (1.2), et *a fortiori* à (1.1), est affirmative (même sans hypothèse de séparabilité pour f) et due à Lüroth ([21], 1876). Par voie géométrique la preuve est élémentaire : on peut supposer que X est projective non singulière et que $f : \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow X$ est un morphisme. On voit immédiatement que X est de genre 0 ; comme elle a des points rationnels, elle est isomorphe à $\mathbb{P}_k^1$.

Pour $n = 2$ et k algébriquement clos, la réponse à (1.2) et (1.1) est encore affirmative ; cela résulte, comme ci-dessus, d'un théorème de "classification des variétés" mais bien plus profond, dû à Castelnuovo ([6], 1894) et étendu à la caractéristique p par Zariski [29] (cf. [2], [27]) : une surface X projective et lisse sur k est rationnelle si et seulement si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et

$$H^0(X, (\Omega_X^2)^{\otimes 2}) = 0.$$

Pour $n = 2$ et k quelconque, il peut exister des surfaces k -unirationnelles non k -rationnelles, par exemple, pour $k = \mathbb{Q}$, la surface dans $\mathbb{P}^3$ d'équation $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 2X_3^3 = 0$, ou encore, si $\text{car}(k) \neq 2$, les "surfaces de Châtelet" d'équation affine $y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$, où les $e_i \in k$ sont deux à deux distincts et où a n'est pas un carré dans k (cf. [7], [22]). Ces surfaces ne sont pas stablement k -rationnelles.

Enfin des exemples de variétés de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, unirationnelles et non rationnelles, ont été trouvés indépendamment en 1970 par Clemens-Griffiths, Iskovskih-Manin et Artin-Mumford. Nous aurons à revenir sur la méthode de Clemens-Griffiths ; voir [1] pour un exposé de ces exemples et de l'histoire (mouvmentée) du problème.

Le problème de Zariski (1.1) restait en tout cas ouvert pour $n \geq 2$ et k quelconque, ainsi que pour $n \geq 3$ et k algébriquement clos, jusqu'à ce que les auteurs de [13,14] et de [5] exhibent respectivement, en toute caractéristique $\neq 2$:

- a) un corps k et une k -surface X non k -rationnelle telle que $X_{X_k} \mathbb{P}_k^3 \sim_k \mathbb{P}_k^5$;
- b) pour tout corps k_0 algébriquement clos, une variété Y de dimension 3 sur k_0 , non rationnelle, telle que $Y_{X_{k_0}} \mathbb{P}_{k_0}^3 \sim_{k_0} \mathbb{P}_{k_0}^6$.

De plus, on obtient l'exemple b) en appliquant a) sur le corps $k = k_0(T)$.

Ce résultat est "négatif" en ce qu'il laisse ouverts certains problèmes de rationalité : on sait par exemple [20] que, sur $\mathbb{C}$, l'espace de modules des courbes lisses de genre g est stablement rationnel pour $3 \leq g \leq 6$; c'est aussi le cas de certains espaces de fibrés stables sur les courbes [25]. On ignore si ces variétés sont rationnelles.

Terminons cette introduction en mentionnant le "problème de Noether" : soit G un groupe fini, opérant sur l'espace affine $A = k^G$ par sa représentation régulière ; le quotient A/G est-il une variété k -rationnelle ? En d'autres termes, le corps des G -invariants de l'extension $k(x_g)_{g \in G}$ est-il transcendant pur sur k ? On savait déjà (Swan, Voskresenskiĭ) que la réponse était négative pour $k = \mathbb{Q}$ et G cyclique, et Saltman [26] vient de trouver un contre-exemple pour $k = \mathbb{C}$.

2. Les exemples

2.1. Soient k un corps de caractéristique $\neq 2$, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , $P \in k[x]$ un polynôme séparable de degré 3, a un élément non nul de k . On considère la k -surface affine $X \subset \mathbb{A}_k^3$, d'équation

$$(2.1.1) \quad y^2 - az^2 = P(x).$$

PROPOSITION 2.2.- La surface X ci-dessus est k -rationnelle dans chacun des cas suivants :

- (i) a est un carré dans k ;
- (ii) a est le discriminant de P , et P a une racine dans k .

Le cas (i) est immédiat : posant $Y = y + z\sqrt{a}$, $Z = y - z\sqrt{a}$, on voit que le corps des fonctions de X est $k(x, Y)$. Le cas (ii) est un peu plus subtil : si θ est une racine de P , alors (2.1.1) s'écrit

$$(2.2.1) \quad y^2 - az^2 = c(x - \theta)(u(x)^2 - av^2)$$

où $u(x)$ est linéaire, c et $v \in k^\times$. Supposant a non carré, on définit de nouvelles variables Y et Z par

$$\begin{cases} Y + Z\sqrt{a} = \frac{y + z\sqrt{a}}{u(x) + v\sqrt{a}} \\ Y, Z \in k(x, y, z) \end{cases}$$

et l'équation (2.2.1) s'écrit alors

$$Y^2 - aZ^2 = c(x - \theta)$$

de sorte que le corps des fonctions de X est $k(Y, Z)$.

2.3. Nous supposons désormais que P est irréductible et que a est le discriminant de P et n'est pas un carré dans k . Par suite, le corps des racines de P est galoisien de groupe $\mathcal{S}_3$ sur k .

THÉORÈME 2.4 [13, 14, 5].- X est stablement k -rationnelle, et plus précisément

$$X_{x,k} \mathbb{P}_k^3 \tilde{\sim} \mathbb{P}_k^5.$$

THÉORÈME 2.5 [5, 13, 14, 15, 19].- X n'est pas k -rationnelle

Remarques 2.6.- La proposition 2.2 montre que X est "rationnelle" (selon la terminologie consacrée, cela signifie que $X \otimes_k \bar{k}$ est $\bar{k}$ -rationnelle). Plus précisément, X devient rationnelle sur chacune des extensions $k[x]/(P)$ et $k(\sqrt{a})$ de k . Il n'y a donc pas de "meilleure" extension K de k telle que $X \otimes_k K$ soit K -rationnelle.

Les théorèmes 2.4 et 2.5 fournissent une réponse négative au problème de Zariski pour les surfaces sur un corps non algébriquement clos. Par exemple, la surface sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine

$$(2.6.1) \quad y^2 + 3z^2 = x^3 - 2$$

est stablement $\mathbb{Q}$ -rationnelle mais non $\mathbb{Q}$ -rationnelle. Notons que pour tout nombre premier $p \geq 5$, l'équation (2.6.1) définit une surface X_p sur $\mathbb{F}_p$, qui est $\mathbb{F}_p$ -rationnelle en vertu de 2.2, puisque $\mathbb{F}_p$ n'a pas d'extension de groupe $\mathcal{S}_3$.

2.7. Le cas algébriquement clos

Prenons maintenant $k = k_0(t)$, où k_0 est algébriquement clos, et supposons que $P \in k_0[t, x]$ est un polynôme irréductible, de sorte que $a = a(t) \in k_0[t]$.

La k -surface X est la fibre générique de la projection naturelle

$X_0 \longrightarrow \text{Spec } k_0[t] = \mathbb{A}_{k_0}^1$, où X_0 est la sous-variété de $\mathbb{A}_{k_0}^4$ d'équation

$$(2.7.1) \quad y^2 - a(t)z^2 = P(t, x).$$

Il résulte de 2.4 que X_0 est stablement rationnelle :

$$X_0 \times_{k_0} \mathbb{P}_{k_0}^3 \sim \mathbb{P}_{k_0}^6$$

mais bien entendu, 2.5 n'implique pas *a priori* que X_0 ne soit pas rationnelle.

Pour le montrer, nous allons faire une hypothèse supplémentaire sur P : soit

$\eta = C \longrightarrow \mathbb{P}_{k_0}^1$ le revêtement ramifié de degré 3 de $\mathbb{P}_{k_0}^1$ correspondant à l'extension $k_0(t)[x]/(P)$ de $k_0(t)$. En d'autres termes, C est le modèle propre et lisse sur k_0 de la courbe plane d'équation $P(t, x) = 0$, et η est donné par la fonction coordonnée t . On suppose alors que :

(2.7.2) a) Le revêtement η est sans point de ramification d'indice 3 ;

b) C est de genre ≥ 3 .

THÉORÈME 2.8 [5].- *Sous les hypothèses ci-dessus, la variété X_0 n'est pas rationnelle.*

Bien entendu, 2.8 implique 2.5 dans ce cas particulier : le corps des fonctions de X_0 est non pur sur k_0 , et *a fortiori* non pur sur $k = k_0(t)$.

Exemple 2.9.- Sur $k = \mathbb{C}$, le théorème ci-dessus s'applique à la variété d'équation

$$y^2 + (t^4 + 1)(t^6 + t^4 + 1)z^2 = 2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1.$$

Remarque 2.10.- Les hypothèses a) et b) de (2.7.2) sont en fait trop restrictives, cf. [5], remarques 7 à 11 du § 3.

Les théorèmes 2.4, 2.5 et 2.8 sont démontrés dans [5] ; leurs démonstrations sont indépendantes et nous en donnerons les grandes lignes, en commençant par 2.8.

3. Un critère de non-rationalité : la méthode de Clemens-Griffiths

3.1. Plaçons-nous d'abord sur $k = \mathbb{C}$. Soit V une $\mathbb{C}$ -variété projective lisse de dimension 3. On a la décomposition de Hodge

$$\begin{aligned} H^3(V, \mathbb{C}) &= \underbrace{H^{3,0}(V) \oplus H^{2,1}(V)}_{\bar{F}} \oplus \underbrace{H^{1,2}(V) \oplus H^{0,3}(V)}_F \\ &= \bar{F} \oplus F. \end{aligned}$$

L'image de $H^3(V, \mathbb{Z})$ dans F identifiée à $H^3(V, \mathbb{C})/\bar{F}$ est un réseau dans F . On définit classiquement la jacobienne intermédiaire $JI(V)$ de V comme le tore

complexe

$$JI(V) := F/\text{im } H^3(V, \mathbb{Z}) \quad .$$

On va s'intéresser au cas où $H^{3,0} = H^{0,3} = 0$, de sorte que $JI(V) = H^{1,2}(V)/H^3(V, \mathbb{Z})$. Dans ce cas, $JI(V)$ est même une variété abélienne principalement polarisée (en abrégé VAPP) grâce à la forme hermitienne $\langle, \rangle$ sur F définie sur les formes de type (1,2) par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -2i \int_V \bar{\alpha} \wedge \beta \quad .$$

Cette condition est réalisée en particulier lorsque V est rationnelle, et de plus :

THÉORÈME 3.2 (Clemens-Griffiths [8]).- Si V est rationnelle, alors $JI(V)$ est isomorphe (comme VAPP) à un produit de jacobiniennes de courbes projectives lisses.

Principe de la démonstration : on vérifie que l'éclatement d'un point de V ne change pas $JI(V)$, et que si $\tilde{V} \rightarrow V$ est l'éclaté d'une courbe lisse $C \subset V$, alors $JI(\tilde{V})$ est le produit de $JI(V)$ par la jacobienne $J(C)$ de C . Si V est rationnelle, il existe, d'après Hironaka, un morphisme birationnel $V' \rightarrow V$ où V' est obtenue à partir de $\mathbb{P}^3$ par une suite d'éclatements de points et de courbes lisses. Comme $JI(\mathbb{P}^3) = 0$, $JI(V')$ est un produit de jacobiniennes, et $JI(V)$ est une sous-variété abélienne de $JI(V')$, principalement polarisée par la polarisation induite. On en déduit que $JI(V)$ est encore un produit de jacobiniennes : toute VAPP est de manière unique produit de VAPP irréductibles, et une jacobienne est irréductible.

3.3. Soit maintenant V une variété projective lisse de dimension 3 sur un corps k_0 algébriquement clos quelconque. Pour trouver un critère de non-rationalité analogue à 3.2, on peut, suivant une méthode inaugurée par Murre, utiliser, comme substitut de $JI(V)$, le "représentant algébrique" [3] du groupe $A^2(V)$ des classes d'équivalence rationnelle de cycles de codimension 2 algébriquement équivalents à zéro sur V ; le représentant algébrique en question est par définition une variété abélienne J sur k_0 , munie d'un homomorphisme

$$A^2(V) \rightarrow J(k_0)$$

qui est "algébrique" en un sens convenable, le tout assorti d'une propriété universelle vis-à-vis de tels homomorphismes. On arrive dans certains cas à établir l'existence de J (son unicité résultant bien sûr de la définition), et de plus à la munir d'une polarisation principale naturelle. Par abus, la VAPP ainsi obtenue sera alors sacrée "jacobienne intermédiaire" de V , et notée $JI(V)$. Son comportement par éclatement de points ou de courbes lisses est le même que celui de la jacobienne intermédiaire classique, et l'on a $JI(\mathbb{P}^3) = 0$, d'où l'on tire le

THÉOREME 3.4 ([3], Proposition 4.6).- Si V est rationnelle et admet une jacobienne intermédiaire, celle-ci est isomorphe à un produit de jacobiniennes de courbes projectives lisses sur k_0 .

C'est cette deuxième notion (3.3) de jacobienne intermédiaire qui sera utilisée dans la suite. Pour le lien entre les deux notions, voir [24].

4. Fibrés en coniques

DÉFINITION 4.1.- Un morphisme de schémas $f : Y \rightarrow S$ est un fibré en coniques s'il existe un $\mathcal{O}_S$ -module $\mathcal{E}$ localement libre de rang 3, un $\mathcal{O}_S$ -module inversible M et une section $q \in H^0(S, M \otimes \text{Sym}^2 \mathcal{E})$, partout non nulle, telle que Y soit S -isomorphe au schéma des zéros de q dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

En fait, pour que f soit un fibré en coniques, il faut et il suffit qu'il soit propre, plat et de présentation finie et que sa fibre en chaque point $s \in S$ soit isomorphe à une conique sur le corps résiduel de s : dans ce cas, en effet, on peut prendre $\mathcal{E} = f_* \omega_{Y/S}^{-1}$, où $\omega_{Y/S}$ désigne le dualisant relatif de f .

4.2. Nous désignerons désormais par S une surface projective lisse connexe sur un corps k_0 algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, et par $f : Y \rightarrow S$ un fibré en coniques sur S . Avec les notations de 4.1, le discriminant de q est un élément de $H^0(S, (\wedge^3 \mathcal{E})^{\otimes 2} \otimes M^{\otimes 3})$. Il définit un sous-schéma fermé D de S , le lieu discriminant de f .

PROPOSITION 4.3.- Pour que Y soit lisse sur k_0 , il faut et il suffit que f vérifie les conditions suivantes :

- (i) f est lisse au point générique de S , i.e. D est une courbe ;
- (ii) les points singuliers de D sont les points de S dont la fibre est une conique de rang 1 (i.e. une droite double), et ce sont des points doubles ordinaires.

Ceci résulte d'un calcul élémentaire de jacobien, cf. [3]. Si ces conditions sont réalisées, nous dirons que Y est un fibré en coniques non singulier ; c'est ce que nous supposons dorénavant.

4.4. Le revêtement double associé à f

Considérons, pour tout point s de S , l'ensemble des droites de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_s)$ contenues dans la conique Y_s . C'est un ensemble vide (resp. à deux éléments, resp. à un élément) si et seulement si Y_s est lisse (resp. de rang 2, resp. de rang 1). Ces droites forment un sous-schéma fermé $\tilde{D}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$, fini sur D , et la projection $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ est un revêtement double admissible ("pseudo-revêtement double" dans [3]), au sens suivant :

(i) $\tilde{D}$ est (comme D) une courbe dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires ;

(ii) D est quotient de $\tilde{D}$ par une involution σ dont les points fixes sont les points doubles de $\tilde{D}$, et qui respecte les deux branches d'un tel point double.

En particulier, π est étale de degré 2 au-dessus de l'ouvert de lissité de D (mais n'est pas plat aux points singuliers, donc n'est pas un revêtement au sens habituel).

4.5. La variété de Prym du revêtement π .

Supposons D et $\tilde{D}$ connexes, et considérons leurs jacobiniennes respectives $J(D)$ et $J(\tilde{D})$: chacune est un groupe algébrique lisse connexe sur k_0 , extension d'une variété abélienne par un tore. On a deux morphismes naturels

$$\begin{aligned}\pi^* : J(D) &\longrightarrow J(\tilde{D}) \\ N : J(\tilde{D}) &\longrightarrow J(D) \quad (\text{norme})\end{aligned}$$

de sorte que $N \circ \pi^*$ soit la multiplication par 2 dans $J(D)$.

DÉFINITION 4.6.— La variété de Prym du pseudo-revêtement $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ est le k -groupe algébrique $\Pi = (\text{Ker } N)^\circ \subset J(\tilde{D})$.

Cette notion, au moins lorsque D est lisse, remonte, semble-t-il, à Wirtinger et a été remise à l'honneur par Mumford [23]. La généralisation aux courbes singulières est due à Beauville [4].

Π est aussi l'image de $1 - \sigma : J(\tilde{D}) \rightarrow J(\tilde{D})$, où σ est induit par l'involution de $\tilde{D}$. On vérifie que Π est une variété abélienne, isogène à Coker π^* , et qu'elle est munie d'une polarisation principale naturelle, cf. [4]. On a $\dim \Pi = g - 1$, où g désigne le genre arithmétique de D .

Revenons au fibré en coniques non singulier $f : Y \rightarrow S$:

THÉOREME 4.7 ([3], théorème 3.6).— On suppose que la surface S est rationnelle, et que la courbe $\tilde{D} \subset Y$ est connexe. Alors la variété Y admet une jacobienne intermédiaire (3.3), isomorphe (comme VAPP) à la variété de Prym Π du pseudo-revêtement double $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$.

Esquissons seulement la construction de l'isomorphisme annoncé lorsque D est lisse. Dans ce cas, Π s'identifie à $J(\tilde{D})/\pi^*J(D)$. Pour tout point $t \in \tilde{D}(k_0)$, notons $\ell(t)$ la classe, dans le groupe de Chow $\text{CH}^2(Y)$, de la droite de $Y_{\pi(t)}$ correspondant à t . L'application $t \rightarrow \ell(t)$ se prolonge par linéarité aux 0-cycles sur $\tilde{D}$, et induit par passage au quotient un homomorphisme de $J(\tilde{D})(k_0)$ dans $A^2(Y)$. On constate que celui-ci est surjectif et que son noyau est $\pi^*J(D)(k_0)$, d'où par passage au quotient un isomorphisme

$$A^2(Y) \xrightarrow{\sim} \Pi(k_0)$$

dont on vérifie qu'il fait de Π la jacobienne intermédiaire cherchée.

Remarque 4.8.- Dans le cas où $k_0 = \mathbb{C}$, on trouvera également dans [3] une démonstration du théorème ci-dessus en termes de la définition transcendante de $JI(Y)$ (3.1), lorsque D est lisse.

5. Non-rationalité de X_0

5.1. Nous sommes maintenant en mesure de résumer la démonstration du théorème 2.8.

Rappelons (2.7.1) que $X_0 \subset \mathbb{A}_{k_0}^4$ est donnée par l'équation

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t, x) .$$

C'est manifestement un ouvert d'un fibré en coniques sur $\text{Spec } k_0[t, x]$ dont le lieu discriminant est la courbe d'équation $a(t)P(t, x) = 0$. En fait, on construit, par des manipulations élémentaires, un modèle projectif et lisse X_0^C de X_0 , fibré en coniques sur une surface rationnelle S . De plus, le revêtement double $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ associé à $X_0^C \rightarrow S$ se décrit tout à fait explicitement, en termes de la courbe trigonale $\eta : C \rightarrow L \simeq \mathbb{P}^1$ associée au polynôme P (2.7) : soient g son genre, $Q_i \in C$ ($i = 1, \dots, 2g + 4$) les points de ramification de η , $R_i = \eta(Q_i)$, P_i le second point de $\eta^{-1}(R_i)$. Alors D s'identifie à la réunion de :

- la courbe C ;
- la droite L , disjointe de C ;
- $(2g + 4)$ droites $F_1, \dots, F_{2g+4}$; la droite F_i rencontre C au point P_i et L au point R_i .

Posons alors $\tilde{C} = \pi^{-1}(C)$, $\tilde{L} = \pi^{-1}(L)$, $\tilde{F}_i = \pi^{-1}(F_i)$. Il est clair que $\tilde{L}$ (resp. $\tilde{F}_i$) est l'unique revêtement double de L (resp. F_i) ramifié en les R_i (resp. en P_i et R_i), de sorte que les $\tilde{F}_i$ sont rationnelles ; enfin on vérifie que $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{\eta} L$ est le revêtement galoisien de groupe $\mathfrak{S}_3$ associé à η .

Pour prouver que X_0^C n'est pas rationnelle, il suffit, en vertu des théorèmes 3.4 et 4.7, de voir que la variété de Prym Π associée à π n'est pas un produit de jacobienes. Soit $\Theta \subset \Pi$ le diviseur thêta (défini à translation près), associé à la polarisation de Π . Il suffit de montrer que le lieu singulier $\text{Sing } \Theta$ de Θ est de codimension ≥ 5 dans Π : en effet, cette codimension serait 3 ou 4 dans le cas d'une jacobienne, 2 pour le produit d'au moins deux jacobienes. Or il est prouvé dans [4], théorème 4.10, que le lieu singulier du diviseur thêta d'une variété de Prym est de codimension ≥ 5 , à l'exception d'un certain nombre de cas dont la liste est donnée dans *loc. cit.* (courbes hyperelliptiques, ou de petit genre, etc.) ; on vérifie alors facilement que notre π n'y figure pas.

(En réalité, le théorème cité s'applique au revêtement obtenu en contractant les $\tilde{F}_i$ dans $\tilde{D}$ et les F_i dans D ; ceci ne change pas la variété de Prym).

6. Rationalité stable

6.1. Soient k un corps, que pour simplifier nous supposons *parfait* et *infini*, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit V une surface projective lisse géométriquement connexe sur k . On note $\bar{V} = V \otimes_k \bar{k}$.

PROPOSITION 6.2.- Si V est stablement k -rationnelle, alors :

- (i) $V(k) \neq \emptyset$.
- (ii) V est rationnelle (i.e. $\bar{V}$ est $\bar{k}$ -rationnelle).
- (iii) $\text{Pic}(\bar{V})$ est un $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini, et un G -module stablement de permutation.

Rappelons qu'un G -module M est de permutation s'il admet une $\mathbb{Z}$ -base permu-tée par G , et stablement de permutation s'il existe un G -module de permu-tation P tel que $M \oplus P$ soit de permutation.

L'assertion (i) est triviale (en fait $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski) et (ii) résulte du théorème de Castelnuovo-Zariski (§ 1). Pour montrer (iii) il suffit d'établir que si Y (projective lisse de dimension N sur k) est k -rationnelle, alors $\text{Pic}(\bar{Y})$ est stablement de permutation. Or il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ Y & & \mathbb{P}_k^N \end{array}$$

où p et q sont des k -morphisms propres birationnels et Y' une k -variété normale. On vérifie que le G -module $\text{CH}_{N-1}(\bar{Y}')$ est somme directe de $\text{Pic}(\bar{Y})$ et du $\mathbb{Z}$ -module libre P engendré par les sous-variétés intègres T de dimension $N-1$ de $\bar{Y}'$ telles que $\dim p(T) < N-1$, de sorte que P est un G -module de permutation. Appliquant le même raisonnement à $q : Y' \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ on trouve que $\text{CH}_{N-1}(\bar{Y}')$ est de permutation (puisque $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^N) = \mathbb{Z}$), cqfd.

Remarques 6.3.- Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont des invariants k -bira-tionnels de V , et (iii) implique que $H^1(G, \text{Pic}(\bar{V})) = 0$ pour tout sous-groupe G' de G . D'autre part, (i) et (iii) sont valables en toute dimension (mais non (ii) !).

6.4. Si M est un G -module $\mathbb{Z}$ -libre de type fini, nous noterons $D(M)$ le k -tore S tel que le G -module des caractères de $\bar{S}$ soit isomorphe à M . Pour que M soit de permutation, il faut et il suffit que $D(M)$ soit *quasi-trivial*,

i.e. k -isomorphe à un produit de restrictions de Weil $R_{K_i/k}(\mathbb{G}_{m,K_i})$ où les K_i sont des extensions finies séparables de k ; pour que M soit stablement de permutation, il faut et il suffit que $D(M)$ soit *stablement quasi-trivial*, i.e. qu'il existe U quasi-trivial tel que $U \times_k D(M)$ soit quasi-trivial. Un tore S stablement quasi-trivial a les vertus suivantes :

(6.4.1) (i) $H^1(K, S \otimes_k K) = 0$ pour toute extension K de k .

(ii) S est une variété *stablement k -rationnelle*.

Le H^1 de (i) est étale ou fppf. L'assertion (i) résulte de ce que pour L/k finie séparable, $H^1(k, R_{L/k}(\mathbb{G}_{m,L}))$ s'identifie à $H^1(L, \mathbb{G}_{m,L}) = 0$; de même (ii) résulte de ce que la restriction de Weil d'une L -variété L -rationnelle (par exemple $\mathbb{G}_{m,L}$) est k -rationnelle.

Il résulte de (i) ci-dessus que si T est un S -torseur sur une k -variété V , alors $T \sim_k V \times_k S$. Appliquant (ii), on conclut :

Lemme 6.4.2.- Soient S un tore stablement quasi-trivial, T un S -torseur sur V . Pour que V soit stablement k -rationnelle, il faut et il suffit que T le soit.

6.5. Torseurs universels

Soit V une surface (projective et lisse) *rationnelle*. Nous désignerons par $S(V)$ le k -tore $D(\text{Pic}(\bar{V})) = \text{Hom}_{k\text{-groupes}}(\text{Pic}_{V/k}, \mathbb{G}_{m,k})$ (on sait en effet que $\text{Pic}(\bar{V})$ est $\mathbb{Z}$ -libre de type fini).

Un faisceau inversible L sur $\bar{V}$ peut donc être vu comme un caractère $\chi_L : \bar{S} \rightarrow \mathbb{G}_{m,\bar{k}}$. Si T est un $S(V)$ -torseur sur V on peut "pousser" $\bar{T}$ par le caractère χ_L pour obtenir un $\mathbb{G}_m$ -torseur, c'est-à-dire un faisceau inversible L' sur $\bar{V}$. On dit que T est un *torseur universel* ([9], [10], [11]) sur V si $L' \simeq L$ pour tout L .

L'obstruction à l'existence d'un torseur universel vit dans $\text{Ker}(H^2(k, S(V)) \rightarrow H^2(V, S(V)))$; deux torseurs universels diffèrent par un S -torseur constant, i.e. provenant de k . Si V a un *point rationnel* P , il existe sur V un unique torseur universel T ayant un point rationnel au-dessus de P , i.e. tel que T_P soit un torseur trivial.

La philosophie des torseurs universels est qu'ils doivent avoir une géométrie et une arithmétique plus simples que celles de V . Ainsi, on montre ([10], [12]) que si T^C est une compactification lisse d'un torseur universel T , le G -module $\text{Pic}(\bar{T}^C)$ est de permutation. Considérons l'hypothèse suivante sur la k -surface rationnelle V :

(H) Tout torseur universel T sur V tel que $T(k) \neq \emptyset$ est une variété k -rationnelle.

On ignore si (H) est toujours vérifiée ; elle n'a d'intérêt que si $V(k) \neq \emptyset$.

PROPOSITION 6.6.- Soit V une surface projective, lisse et rationnelle vérifiant (H). Pour que V soit stablement k -rationnelle, il faut et il suffit que $V(k) \neq \emptyset$ et que le G -module $\text{Pic}(\bar{V})$ soit stablement de permutation.

Autrement dit, en présence de (H), les conditions nécessaires de 6.2 sont aussi suffisantes. La preuve est immédiate : si $V(k) \neq \emptyset$, il existe un torseur universel T tel que $T(k) \neq \emptyset$; si de plus $\text{Pic}(\bar{V})$ est stablement de permutation, alors $S(V)$ est stablement quasi-trivial et le lemme 6.4.2 s'applique.

THÉOREME 6.7 ([13], [14]).- On suppose $\text{car}(k) \neq 2$. Soient $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ un polynôme non nul de degré ≤ 4 . Alors, la k -surface d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

admet un modèle projectif et lisse V vérifiant (H).

La preuve consiste à expliciter des équations d'un torseur universel. On aboutit à une intersection de deux quadriques d'un espace projectif, pour laquelle on dispose d'une condition suffisante de k -rationalité (existence de certains sous-espaces linéaires).

6.8. Nous abordons maintenant la preuve du théorème 2.4, affirmant la rationalité stable de la k -surface affine $X \subset \mathbb{A}_k^3$ d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

où P est irréductible séparable de degré 3, $\text{car}(k) \neq 2$, et le discriminant Δ de P n'est pas un carré dans k .

On construit sans difficulté un modèle projectif et lisse X^C de X , muni d'un morphisme $x : X^C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ prolongeant la fonction x sur X , et faisant de X^C un fibré en coniques (4.1) sur $\mathbb{P}_k^1$, avec de plus les propriétés suivantes ([5], démonstration du théorème 2) :

(6.8.1) (i) La fibration x est relativement minimale ; en fait, ses fibres sont irréductibles (mais non toutes géométriquement irréductibles).

(ii) Les points de $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ dont la fibre est singulière sont l'infini et les zéros de P , et le point singulier de la fibre à l'infini est rationnel sur k , de sorte que $X^C(k) \neq \emptyset$.

(iii) X^C est rationnelle (proposition 2.2).

(iv) $\text{Pic}(\bar{X}^C)$ est stablement de permutation.

On montre (iv) en donnant une présentation de $\text{Pic}(\bar{X}^C)$ en termes des composantes des fibres singulières de x , et d'une section de x . Le calcul utilise le fait que le groupe de Galois de P est $\mathfrak{S}_3$.

En particulier, les conditions (i) à (iii) de 6.2 sont satisfaites pour X^C ,

donc aussi pour tout modèle projectif et lisse de X , par exemple le modèle V du théorème 6.7. On peut donc appliquer à V la proposition 6.6, d'où la rationalité stable de X .

6.9. Reprise

Bien que le théorème 6.7 soit à l'origine de l'exemple, il n'est pas indispensable d'y faire appel. La méthode ci-dessus exposée conduit en effet à une démonstration explicite de la rationalité stable de X : on construit un k -tore S et un S -torseur T sur X (qui est facteur direct de la restriction à X d'un toreseur universel, mais peu importe) ; on montre d'abord facilement que

- (i) le toreseur T est trivial au-dessus d'un ouvert de X , donc $T \sim_k X \times_k S$;
- (ii) le tore S est une variété k -rationnelle.

Par des changements de coordonnées bien choisis, on identifie ensuite T à un ouvert de l'intersection Σ de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^n$; enfin, on constate que Σ tombe sous le coup de la proposition suivante :

PROPOSITION 6.10. - Soit $\Sigma \subset \mathbb{P}_k^n$ ($n \geq 4$) une intersection pure, géométriquement intègre, de deux quadriques. Soit $D \subset \Sigma$ une droite (k -rationnelle) non contenue dans $\text{Sing}(\Sigma)$ et qui n'est pas une génératrice de Σ (si Σ est un cône). Alors, la projection à partir de D

$$\Sigma - D \longrightarrow \mathbb{P}_k^{n-2}$$

est birationnelle.

Cette méthode directe donne $X \times_k \mathbb{A}_k^3 \sim_k \mathbb{A}_k^5$, alors que le théorème 6.7 conduit seulement à $X \times_k \mathbb{A}_k^9 \sim_k \mathbb{A}_k^{11}$.

7. Non k -rationalité de la surface X .

Reprenons les notations de 6.8. Il suffit d'appliquer au modèle X^C de X le théorème suivant, dû à Iskovskih ([17], [18], [19]) :

THÉORÈME 7.1. - Soit $\pi : Y \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ un fibré en coniques non singulier, relativement minimal sur k , ayant au moins 4 fibres géométriques singulières. Alors la surface Y n'est pas k -rationnelle.

Dans notre exemple, la fibration $X^C \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ a 4 fibres géométriques singulières.

La preuve de ce théorème est délicate ; on peut éviter d'y avoir recours en exhibant, suivant Coray et Tsfasman [15], un modèle V de X qui est une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}_k^3$; on décrit explicitement les 27 droites de $\bar{V}$ ainsi que l'action de Galois sur ces droites, et l'on invoque enfin le théorème suivant, dû à Swinnerton-Dyer [28] :

THÉOREME 7.2.- Soit $V \subset \mathbb{P}_K^3$ une surface cubique lisse. Pour que V soit k -rationnelle, il faut et il suffit que $V(k) \neq \emptyset$ et que $\bar{V}$ contienne la réunion, invariante par Galois, d'au moins deux droites deux à deux disjointes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE - Variétés rationnelles et unirationnelles, Algebraic Geometry : Open Problems, Springer Lect. Notes in Math. 997.
- [2] A. BEAUVILLE - Surfaces algébriques complexes, Astérisque n° 54.
- [3] A. BEAUVILLE - Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires, Ann. Sci. ENS 10(1977), 309-391.
- [4] A. BEAUVILLE - Prym varieties and the Schottky problem, Invent. Math. 41 (1977), 149-196.
- [5] A. BEAUVILLE, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - Variétés stablement rationnelles non rationnelles (à paraître aux Annals of Math.).
- [6] G. CASTELNUOVO - Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Annalen 44(1894).
- [7] F. CHÂTELET - Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques, Enseign. Math. 5(1959), 153-170.
- [8] C.H. CLEMENS, P.A. GRIFFITHS - The intermediate Jacobian of the Cubic Three-fold, Ann. of Math. 95(1972), 281-356.
- [9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - Torseurs sous des groupes de type multiplicatif ; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques, C.R. Acad. Sc. Paris 282(1976), 1113-1116.
- [10] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, C.R. Acad. Sc. Paris 284(1977), 967-970.
- [11] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - La descente sur les variétés rationnelles, Journées de géométrie algébrique (Angers 1979), 223-237. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - La descente sur les variétés rationnelles II (en préparation).
- [13] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet, C.R. Acad. Sc. Paris 289(1984), 377-380.
- [14] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet généralisées (en préparation).
- [15] D.F. CORAY, M.A. TSFASMAN - Arithmetic on singular del Pezzo surfaces (en préparation).

- [16] P. DELIGNE - *Variétés unirationnelles non rationnelles*, Séminaire Bourbaki 1971/72, Exposé 402.
- [17] V.A. ISKOVSKIĖ - *Rational surfaces with a pencil of rational curves*, Mat. Sb. 74(116) (1967) (= Math. USSR Sb. 3(1967), 563-587).
- [18] V.A. ISKOVSKIĖ - *Rational surfaces with a pencil of rational curves and with positive square of the canonical class*, Mat. Sb. 83 (125) (1970), 90-119 (= Math. USSR Sb. 12(1970), 91-117).
- [19] V.A. ISKOVSKIĖ - *Birational properties of a surface of degree 4 in $\mathbb{P}_k^4$* , Mat. Sb. 88 (130) (1972), 31-37 (= Math. USSR Sb. 17(1972), 30-36).
- [20] J. KOLLAR, F.O. SCHREYER - *The moduli of curves is stably rational for $g \leq 6$* , Duke Math. J. 51(1984) n° 1, 239-242.
- [21] J. LÜROTH - *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Annalen 9(1876), 163-165.
- [22] YU.I. MANIN - *Formes cubiques* (en russe), Nauka, Moscou 1972 (= Cubic Forms, North Holland, 1974).
- [23] D. MUMFORD - *Prym varieties I*, Contributions to Analysis (dédié à Lipman Bers), Academic Press, New York 1974, 325-350.
- [24] J.P. MURRE - *Un résultat en théorie des cycles algébriques de codimension deux*, C.R. Acad. Sc. Paris, 296(1983), 981-984.
- [25] P.E. NEWSTEAD - *Rationality of moduli spaces of stable bundles*, Math. Ann. 215(1975), 251-268 (Corrections : Math. Ann. 249(1980), 281-282).
- [26] D. SALTMAN - *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. 77(1984), 71-84.
- [27] J.-P. SERRE - *Critère de rationalité pour les surfaces algébriques* (d'après K. Kodaira), Séminaire Bourbaki 146(1957).
- [28] Sir P. SWINNERTON-DYER - *The birationality of cubic surfaces over a given field*, Michigan Math. J. 17(1970), 289-295.
- [29] O. ZARISKI - *On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface II*, J. Math. 2(1958), 303-315.

Laurent MORET-BAILLY
 Université de Paris-Sud
 Département de Mathématiques
 Bâtiment 425
 F-91405 ORSAY