Astérisque

GILLES LEBEAU

Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. nº 642, p. 209-222

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__209_0>

Séminaire BOURBAKI
37ème année, 1984/85, n°642 Février 1985

INTERACTION DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES [d'après J-M. Bony et al.]

Gilles LEBEAU

Introduction

Soit une équation semi-linéaire de la forme :

$$(1) \qquad P(x,D_x)u(x) = F(x,u(x),\dots,\partial^\beta u(x),\dots)_{|\beta|\le m-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

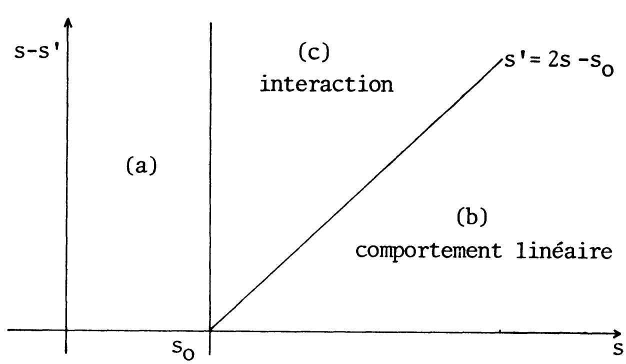
où $P(x,D_x)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre m , à coefficients réels C^∞ , qu'on supposera strictement hyperbolique par rapport à x_n , et où F est une fonction réelle C^∞ en ses arguments. Le problème auquel s'intéresse J-M Bony est :

(2) Problème : Soit u une solution de (1) appartenant à l'espace de Sobolev H^s dans $\mathbb{R}^n$ entier. On suppose connu les singularités de $u(x)$ dans $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}$. Pour $s' > s$ peut-on savoir si u appartient à $H^{s'}$ au voisinage d'un point x avec $x_n > 0$?

(On se pose aussi le problème analogue (de Cauchy) où on suppose connues les singularités des données $\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j u(x',0)$ pour $j = 0,\dots,m-1)$.

Pour résumer la situation, Bony utilise le schéma suivant :

(3)



La valeur de s_0 dépend en fait de l'équation ; pour (1) on pourra prendre $s_0 = n/2 + m - 1$.

- Dans la région (a), la régularité a priori de u est trop faible pour que le problème (2) soit bien posé : d'une part le deuxième membre de (1) ne sera pas défini en général ; d'autre part, même quand on sait le définir, il est possible que u soit C^∞ dans le passé et qu'une singularité de u apparaisse brusquement (Choc). Par contre, dès que $s > s_0$, cela ne peut pas se produire : on sait démontrer que si u est C^∞ dans $x_n < 0$, u est C^∞ partout (c'est une conséquence immédiate des résultats de [2], voir aussi [11]).

b) Pour $s > s_0$ et si on ne s'intéresse qu'à une régularité limitée de u ($s' \leq 2s - s_0$) le problème est résolu dans [2] : le comportement est le même que dans le cas linéaire ($F \equiv 0$) (et les résultats de Bony s'appliquent aux équations non linéaires les plus générales ; on renvoie à [2] (et à l'exposé de Y. Meyer au séminaire Bourbaki) pour les énoncés précis dans le cas général ; pour les équations semi-linéaires du type (1), voir le §1).

c) Enfin, pour $s' > 2s - s_0$, il apparaît un phénomène typiquement non-linéaire : l'interaction des singularités. Une description heuristique de ce phénomène consiste à remplacer l'équation (1) par un problème beaucoup plus simple, mais qui va donner dans les bons cas la description géométrique du résultat qu'on obtient. Soit le système

(i) $P(x,D_x)u(x) = 0$

(ii) $P(x,D_x)v(x) = f(x) = F(x,u(x),\ldots,\partial^\beta u(x),\ldots)_{|\beta|\leq m-1}$

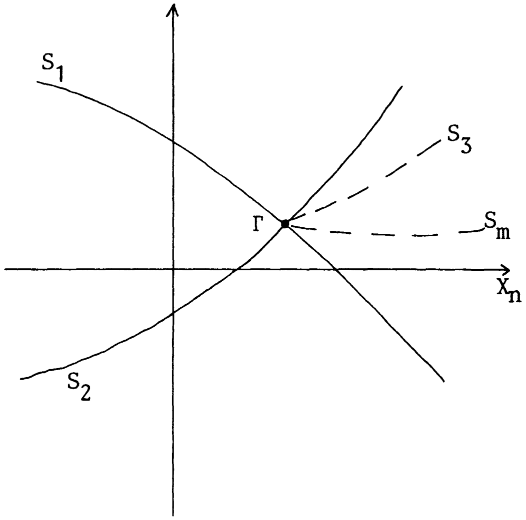
où on choisit par exemple une solution u de i), C^∞ en dehors de deux hypersurfaces caractéristiques S_1, S_2, et distribution de Fourier sur les conormaux $T^*_{S_1}$, $T^*_{S_2}$. On suppose que dans $x_n > 0$, S_1 et S_2 se coupent le long de Γ de codimension deux. Alors on aura en général (WF est le front d'onde de Hörmander)

$$WF(f) = T^*_{S_1} \cup T^*_{S_2} \cup T^*_\Gamma$$

et d'après les résultats généraux sur les équations linéaires en supposant $WF(v) \subset T^*_{S_1} \cup T^*_{S_2}$ dans $x_n < 0$, il y a toutes les chances pour que $WF(v)$ contienne dans l'avenir les conormaux des autres hypersurfaces caractéristiques issues de Γ, $S_3,\ldots,S_m$.

D'après le point b) les nouvelles singularités issues de l'interaction, sur $S_3,\ldots,S_m$, seront moins fortes $(2s - s_0)$ que les singularités sur S_1, S_2 (s)

(4)



[Bien sûr, si on veut être géométriquement complet, il faut modéliser par le système infini récurrent : $P(x,D_x)v_{i+1} = F(x,v_i(x),\dots,\partial^\beta v_i(x),\dots)\dots\quad.$]

1. Rappels

On sait bien que même dans le cas linéaire, la notion de singularités locales ne donne pas de réponse satisfaisante au problème (2) ; il faut microlocaliser : on dit que $u(x)$ appartient microlocalement à l'espace de Sobolev H^s au point $(x_o,\xi^o) \in T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$ (fibré cotangent à $\mathbb{R}^n$ privé de la section nulle) si pour toute fonction $\varphi(x) \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support assez proche de x_o on a :

$$\widehat{\varphi u}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\Gamma) \qquad (\wedge = \text{transformée de Fourier})$$

où Γ est un petit voisinage conique de ξ^o. On écrit $u \in H^s_{(x_o,\,\xi^o)}$.

Alors dans le cas linéaire, le problème est résolu par le résultat classique [7] .

THÉORÈME 1.- *Soit* $p_m(x,\xi)$ *le symbole principal de* $P(x,D_x)$.

1) *Si* $p_m(x_o,\xi^o) \neq 0$ *(i.e* (x_o,ξ^o) *non caractéristique) alors* $Pu \in H^s_{(x_o,\,\xi^o)}$ *entraine* $u \in H^{s+m}_{(x_o,\,\xi^o)}$.

2) *Si* $p_m(x_o,\xi^o) = 0$ *et si* γ *est la bicaractéristique nulle de* P *passant par* (x_o,ξ^o) *(i.e la courbe intégrale du champ hamiltonien de* $p_m(x,\xi)$*) on a :* $Pu \in H^{s-m+1}$ *microlocalement le long de* γ *et* $u \in H^s_{(x_o,\,\xi^o)}$ *entrainent* $u \in H^s$ *microlocalement le long de* γ .

L'extension de ce résultat au cadre non linéaire repose sur le calcul paradifférentiel de Bony (voir [2], et aussi [11]). Pour comprendre la limitation sur la régularité de u, on se souviendra du :

THÉORÈME 2.- [2], [8], [13]. *L'espace des* u *appartenant à* H^s *et appartenant microlocalement à* $H^{s'}$ *est une algèbre si* $s > n/2$, $s' \leq 2s - n/2$ (n = nombre de variables) .

Pour l'équation (1) on a alors :

THÉORÈME 3.- [2]. *Soit* u *solution de* (1), *et appartenant à* H^s

1) *Si* $p_m(x_0, \xi^0) \neq 0$, *on a* $u \in H^{2s-m+2-n/2}_{(x_0,\xi^0)}$

2) *Si* $p_m(x_0, \xi^0) = 0$, *et si* $u \in H^t_{(x_0,\xi^0)}$ *avec* $t \leq 2s - n/2 - m + 1$ *alors* $u \in H^t$ *microlocalement en tout point de la bicaractéristique nulle de* p_m *passant par* (x_0, ξ^0) .

Ce résultat s'améliore si le terme non linéaire F ne dépend que de $\partial^\beta u$ avec $|\beta| \leq \beta_0 < m-1$. Indépendamment, B. Lascar [8] et J. Rauch [13], avaient démontré des résultats analogues, mais moins généraux. On trouvera dans [12] les résultats concernant la réflexion des singularités pour les problèmes aux limites.

2. Interaction en dimension un d'espace

Dans [14], [15], [16], J. Rauch et M. Reed ont étudié les systèmes d'équations semi-linéaires strictement hyperboliques en dimension un d'espace :

$$X_i(u_i) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i(x,t)\,\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t,x,u_1,\dots,u_m) \tag{6}$$

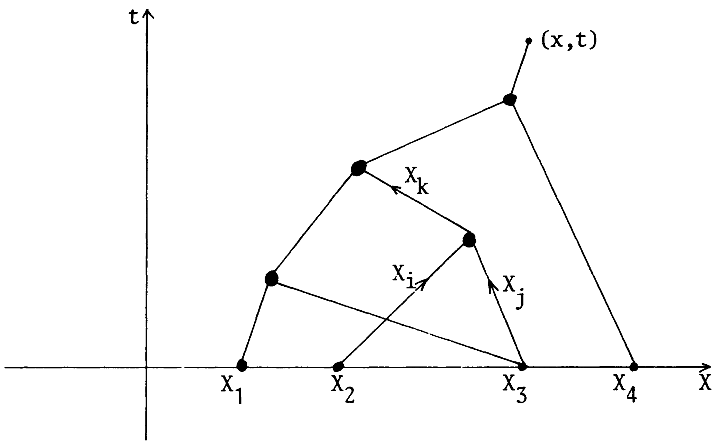
où les f_i , c_i sont des fonctions réelles C^∞ , et $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$. Une traduction de leur résultat principal sur l'interaction des singularités est :

THÉORÈME 4.- [16] . *Soit* $(u_1,\dots,u_m)$ *une solution bornée de* (6). *On suppose que les données de Cauchy* $u_{j,0} = u_j(x,0)$ *sont dans* H^s *avec* $s > 1/2$. *Soit* $s(x)$ *une fonction telle que pour tout* j , $u_{j,0} \in H^{s(x)}$ *au voisinage de* x . *Alors* $u_j(x,t)$ *appartient à* $H^{S(x,t)}$ *au voisinage de* (x,t) *avec*

$$S(x,t) = \inf_A \sum_{x_i \in A \cap t=0} s(x_i)$$

où l'inf est pris sur tous les graphes A *de la forme :*

(7)



[En chaque sommet du graphe, il arrive deux courbes intégrales de X_i et X_j $i \neq j$, et il repart une courbe intégrale de X_k , $k \neq i$, $k \neq j$] .

Un intérêt de plus de leur travail est de prouver que le phénomène d'interaction se produit en général : voir [15] avec des données de Cauchy C^∞ par morceaux, lorsque deux singularités portées par les courbes intégrales de X_i et X_j se croisent, il apparaît une singularité sur la courbe intégrale de X_k dès que $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x,t,u_1,\dots,u_m) \neq 0$.

3. Interaction de deux singularités (dimension quelconque)

En dimension supérieure à deux, et si on veut avoir un contrôle géométrique microlocal des singularités, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la nature des singularités incidentes. En effet, dans [1], M. Beals a construit une solution de l'équation des ondes non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \beta(x)u^3 \quad ; \quad \beta \in C^\infty \quad , \quad n \geq 3 \quad .$$

dont les données de Cauchy sur $x_n = 0$ sont C^∞ sauf à l'origine, et dont le support singulier remplit le cône d'onde $|x'| \leq |x_n|$. On a $u \in H^s$, $s > n/2$ et $u \in H^{3s-n+2-\varepsilon}$ à l'intérieur du cône.

L'hypothèse supplémentaire que fait Bony est que les singularités incidentes sont conormales :

DÉFINITION 5. *Soit* V *une sous-variété de codimension* d *de* $\mathbb{R}^n$ *; pour* $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *on note* $H_V^{s,k}$ *l'ensemble des* $u \in H^s$ *tels que* $X_1 \dots X_p u \in H^s$ *pour* X_i

champs de vecteurs tangents à V *et* $p \leq k$. (*Lorsque* $k = +\infty$, *ce sont les distributions de Fourier de Hörmander sur le conormal* T_V^*) .

Evidemment, $H_V^{s,k}$ est une algèbre pour $s > n/2$, et est stable par action des opérateurs pseudo-différentiels de degré 0. Pour étudier l'interaction de deux ondes, on complique la définition précédente :

DÉFINITION 6. *Soient* $S_1,\dots,S_m$, m *hypersurfaces se coupant transversalement sur* Γ *de codimension* 2 ; *on note* $H_S^{s,k}$ *l'espace des* u *dans* H^s *tels que* $M_1\dots M_p u \in H^s$, *pour* $p \leq k$, *les* M_i *étant des opérateurs pseudo différentiels de degré* 1 *dont le symbole principal s'annule sur les conormaux* $T_{S_i}^*$ *et* T_Γ^* .

Pour $s > n/2$, $H_S^{s,k}$ est aussi une algèbre, mais il faut le démontrer. En se plaçant dans la situation géométrique de l'introduction (4), on a alors :

THÉORÈME 7.- [3] . *Soit* u_o *solution de* (1) *appartenant à* H^s , $s > n/2 + m$, *telle que dans* $x_n < 0$, $u \in H^{s+k}$ *hors de* $S_1 \cup S_2$, $u \in H_{S_i}^{s,k}$ *près de* S_i $i = 1,2$. *Alors dans* $x_n > 0$, *près de* Γ , *on a* $u \in H_S^{s,k}$ *et de plus près de* $S_j \setminus \Gamma$ $j = 3,\dots,m$, *avec* $q = s + 1 - n/2 - m$ $u \in H_{S_j}^{s+q,[k-q]}$ *si* $k > q$, $u \in H_{S_j}^{s+k}$ *sinon.*

Idée de la preuve : Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des opérateurs pseudo différentiels d'ordre 1 dont le symbole principal s'annule sur $T_{S_i}^*$ et T_Γ^* . Si $M \in \mathcal{M}$, on a $[P,M] \in \mathcal{E}_{m-1}\mathcal{M} + \mathcal{E}_o P$ ($\mathcal{E}_k$ = {pseudo différentiels d'ordre k}). On choisit alors un système de générateurs de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}_o$ $M_1,\dots,M_L$ et on pose pour $\ell \leq k$

$$U_\ell = (u, M_i u, \dots, M_{i_1}, \dots, M_{i_\ell} u) \quad .$$

On démontre alors par récurrence sur ℓ que $U_\ell \in H^s$ en calculant PU_ℓ . Lorsque P est de degré deux, c'est très simple car dans la définition 6, on peut remplacer les M_i par les champs de vecteurs tangents à $S_1 \cup S_2$. Dans le cas général, on montre qu'on a : $PU_\ell = AU_\ell + R$ où A est une matrice d'opérateurs paradifférentiels dans $Op(\Sigma^{m-1}_{s-n/2-m})$ et $R \in H^{2s-2m-n/2}$ et on applique le théorème de propagation des singularités de [2] , qui fournit également le gain de régularité sur $S_3,\dots,S_m$.

4. Interaction de trois ondes pour l'équation de Klein-Gordon

4.1. Le résultat

Soit $\square = \delta_t^2 - \delta_X^2 - \delta_Y^2$ l'opérateur des ondes à deux variables d'espace, et Ω un voisinage de l'origine tel que $\Omega^+ = \Omega \cap t > 0$ soit dans le domaine d'influence de $\Omega^- = \Omega \cap \{t > 0\}$. Soient S_1, S_2, S_3 trois hypersurfaces lisses, caractéristiques pour $\square$, se coupant deux à deux transversalement dans Ω , vérifiant

$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (t=0\ ,\ x=0\ ,\ y=0)$.

THÉORÈME 8.- [4] . *Soit* $u \in H^s(\Omega)$, $s > 3/2$ *solution de*

(9) $$\square u = f(t,x,y,u) \quad (f \in C^\infty)$$

On suppose que dans Ω^- , on a $u \in H^{s,k}_{S_1 \cup S_2 \cup S_3}$ *(définition 6)* .

Alors, en désignant par Γ^+ *le cône d'avenir* $t = \sqrt{x^2+y^2}$, *on a pour tout* $s' < s$:

1) $u \in H^{s'+k}$ *hors de* $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \Gamma^+$

2) $u \in H^{s',k}_{S_i}$ *près de* $S_i \setminus (\bigcup_{j \neq i} S_j \cup \Gamma^+)$

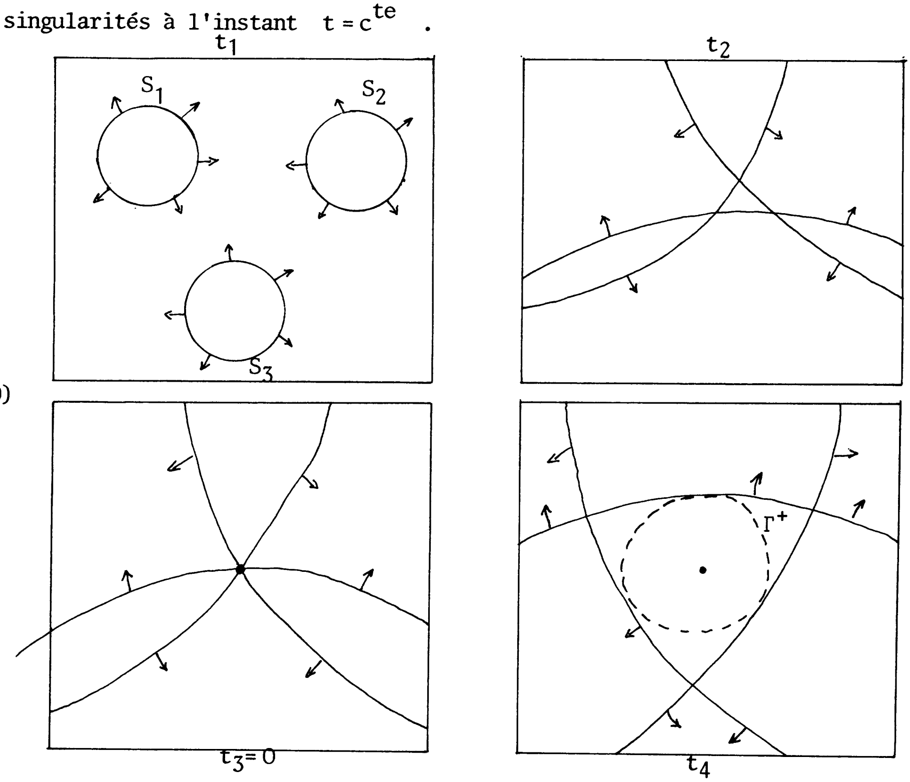
3) $u \in H^{s'+q,k-q}_{\Gamma^+}$ *près de* $\Gamma^+ \setminus (\cup S_j)$, $q = \min(k, [s - 3/2])$.

Près des points de contact de Γ^+ *avec une hypersurface* S_i , *hors de l'origine on a* $Z_1 \ldots Z_\ell u \in H^{s'}_{loc}$ *si* $\ell \leq k$, *les* Z_i *étant des champs de vecteurs tangents à* Γ^+ *et* S_i .

Un théorème analogue, mais un peu moins précis a été démontré par R. Melrose et N. Ritter [10] .

On a l'habitude de visualiser le résultat par le film suivant où on dessine les singularités à l'instant $t = c^{te}$.

(10)



Entre l'instant t_1 et t_2, les singularités n'interagissent que deux à deux, il ne se passe rien de visible d'après le théorème 7 ; à l'instant t_3, l'interaction des trois ondes va créer par les effets non linéaires tout le conormal à l'origine dans les singularités de u. Les nouvelles singularités qui sont dans les caractéristiques de $\square$ vont propager dans l'avenir : d'où les singularités sur Γ^+ à l'instant t_4.

Dans [17], J. Rauch et M. Reed ont donné un exemple explicite où la nouvelle singularité apparaît.

4.2. <u>Les méthodes</u>

A) <u>La deuxième microlocalisation de Bony sur une Lagrangienne</u>

L'originalité de la méthode de Bony est d'utiliser une théorie de la deuxième microlocalisation, théorie inventée par M. Kashiwara dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires et analytiques, il y a plus de dix ans [18]. Bien sûr, comme il travaille en théorie C^∞, avec régularité limitée, Bony a construit ses propres outils ; mais outre l'analogie conceptuelle, il y a une interaction non vide entre les deux théories : le calcul symbolique (en théorie analytique, le calcul symbolique 2.microlocal a été étudié par Y. Laurent [9]).

Soit Λ une Lagrangienne homogène lisse dans $T^*\mathbb{R}^n$, définie par des équations homogènes de degré 1, $q_1(x,\xi) = \dots = q_n(x,\xi) = 0$.

i) <u>les espaces</u> : On définit les espaces de Sobolev à deux indices $H^{s,k}_\Lambda$ par :

DÉFINITION 9. $H^{s,k} = \{u \in H^s \quad , \quad (E_\Lambda)^k u \subset H^s\}$

où E_Λ est l'ensemble des opérateurs pseudo différentiels de degré 1, dont le symbole principal est nul sur Λ. Lorsque Λ est le conormal à une sous-variété S, c'est la définition 5. On définit ensuite pour tout $s' \in \mathbb{R}$ les espaces $H^{s,s'}_\Lambda$ par dualité et interpolation. En dehors de Λ, on a microlocalement $H^{s,s'}_\Lambda = H^{s+s'}$; pour les indices s' entiers négatifs on a $H^{s,-k} = E_\Lambda H^{s,-k+1}$.

ii) <u>Les symboles</u> : Soit $d_o(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$, H^o l'espace des champs de vecteurs homogènes de degré zéro sur $T^*\mathbb{R}^n$ (engendré par $\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \frac{\partial}{\partial x_j}$), $d_\Lambda(x,\xi) = \sqrt{1 + \sum_j q_j(x,\xi)^2}$, et H_Λ le sous-espace de H^o formé des champs tangents à Λ.

DÉFINITION 10. *Une fonction C^∞ $a(x,\xi)$, définie pour $d_o \gg 1$, $d_\Lambda \gg 1$ est un symbole de bi-ordre (m,m') ssi pour tout produit de champs $Z = X_1 \dots X_q Y_1 \dots Y_p$, $X_i \in H^o$, $Y_j \in H_\Lambda$ on a une estimation :*

$$|Za| \leq C^{te} d_o^{m+q} d_\Lambda^{m'-q} \tag{11}$$

On note $a \in \Sigma^{m,m'}$.

Exemple. $\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2\right)^{\alpha}$ est un symbole de bi-ordre $(0,2\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Microlocalement en dehors de Λ les éléments de $\Sigma_{\Lambda}^{m,m'}$ sont des symboles pseudo différentiels usuels de degré $m+m'$.

iii) Les opérateurs : Un opérateur linéaire A est de bi-ordre (m,m') s'il envoie $H_{\Lambda}^{s,s'}$ dans $H_{\Lambda}^{s-m,s'-m'}$; on dit que A est un opérateur 2.micro différentiel de bi-ordre (m,m') et on écrit $A \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{m,m'})$, ssi pour tout $M_1,\dots,M_q$ opérateurs pseudo différentiels de degré 1, et tout $Q_1,\dots,Q_p$ dans E_{Λ} , le commutateur $\prod_j [ad(Q_j)]\ \prod_i [ad(M_i)]$. A est de bi-ordre $(m+q,m'-q)$.

Un opérateur pseudo différentiel usuel de degré m est toujours de bi-ordre (m,o). La théorie repose sur le théorème de calcul symbolique :

THÉORÈME 11.- [4,5]. 1) *Il existe un homomorphisme surjectif* σ : $Op(\Sigma_{\Lambda}^{m,m'}) \longrightarrow \Sigma_{\Lambda}^{m,m'}/\Sigma_{\Lambda}^{m,m'-1}$, *de noyau* $Op(\Sigma_{\Lambda}^{m,m'-1})$, *tel que* $\sigma(A_1\ A_2) = \sigma(A_1)\sigma(A_2)$, $A_i \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{m_i,m'_i})$.

2) (*Commutateur*). *Pour* $A_i \in Op(\Sigma^{m_i,m'_i})$ $i=1,2$, *on a* $[A_1\ A_2] \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{m_1+m_2,m'_1+m'_2-1})$ *et* $\sigma([A_1,\ A_2]) = \frac{1}{i}\{\sigma(A_1),\sigma(A_2)\}$.

3) (*Inverse*). *Si* $A \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{m,m'})$, *et si* $\sigma(A)$ *est inversible, il existe* $A' \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{-m,-m'})$ *tel que* $\sigma(A)\sigma(A') \equiv 1$ *et* $AA' = Id + R$, $A'A = Id + R'$, *où* $R,R' \in Op(\Sigma_{\Lambda}^{0,-\infty})$.

Les opérateurs régularisants de la théorie sont donc les éléments de $Op(\Sigma_{\Lambda}^{m,-\infty})$: ils envoient $H_{\Lambda}^{s,s'}$ dans $H_{\Lambda}^{s-m,+\infty}$; on notera que les éléments de $H^{s,+\infty}$ sont bien microlocalement C^{∞} en dehors de Λ , mais pas meilleurs que H^s au voisinage de Λ (exemple d'éléments de $H^{s,+\infty}$: les distributions de Fourier de Hörmander sur Λ) .

Lorsque Λ est le conormal à l'origine, on a une description très agréable des espaces $H^{s,s'}$: soit $u = u_{-1} + \sum_{0}^{\infty} u_q$ une décomposition de Littlewood-Paley de u [6] $(1 = \psi(\xi) + \sum_{0}^{\infty} \varphi(2^{-q}\xi)$, $\psi,\varphi \in C_0^{\infty}$, support$(\psi) \subset \{|\xi| \leq 2$, support$(\varphi) \subset \{0{,}9 \leq |\xi| \leq 2{,}1\}$ $u_{-1} = \psi(D)u$, $u_q = \varphi(2^{-q}D)u)$. Alors $u \in H^{s,s'}$ si $\|2^{qs}(1+2^q|X|)^{s'}u_q\|_{L^2} = c_q \in \ell^2$ et un symbole de bi-ordre (m,m') vérifie des estimations

$$|\partial_{\xi}^{\alpha}\ \partial_X^{\beta}a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+\xi^2)^{\frac{m-|\alpha|+|\beta|}{2}}(1+X^2\ \xi^2)^{\frac{m'-|\beta|}{2}} .$$

Soit $SP(s,s')$ l'espace de Sobolev à poids, sous-espace des distributions prolongeables sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$, défini par :

$u \in SP(s,s')$ ssi $\|\varphi(x)u(2^{-p}x)\|_{s+s'} \leq c_p 2^{-p(s-n/2)}$ avec $c_p \in \ell^2$. (Lorsque $s+s' \in \mathbb{N}$, on a $|x|^{-s+\lambda} D^\lambda u \in L^2$ pour $0 \leq \lambda \leq s+s'$) . On a alors des isomorphismes réciproques π (applatissement) et Pf (partie finie) (cf [4]) .

(12) $$H^{s,s'}/_{H^{s,+\infty}} \underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} Sp(s,s')/_{Sp(s,+\infty)}$$

définis par

$$\pi u = \sum_{0 \leq p \leq q} \varphi(2^p x)\varphi(2^{-q}D)u$$

(14) $$\mathrm{Pf}\, v = \sum_{0 \leq p \leq q} \varphi(2^{-q}D)[\varphi(2^p x)v(x)] \quad .$$

On commence alors par démontrer le théorème 11 dans le cas $\Lambda = T_0^*\mathbb{R}^n$, en faisant opérer les opérateurs 2 micro différentiels sur les Sobolev à poids Sp via π et Pf , et on vérifie dans ce cas que la construction symbole — opérateur est stable par transformation canonique laissant stable Λ .

B) <u>Idée de la preuve</u>

On prend $\Lambda = T_0^*\mathbb{R}^3$, et on travaille avec les espaces $H^{s,s'}$, $s > 3/2$, $s+s' > 3/2$; alors $H^{s,s'}$ est une algèbre. Si $\tilde{Z}$ est un champ de vecteur singulier à l'origine de la forme

(15) $$\tilde{Z} = \sum_{j=1}^{3} a_j(x,y,t)D_j$$

où les a_j sont dans $\Sigma^{-1,1}$ C^∞ en dehors de l'origine, on pose, pour u dans $H^{s,s'}$ (ici $Sp(s,s'-1)$ s'injecte dans $H^{s,s'-1}$) .

(16) $$Z.u = \tilde{Z}(\pi u) \quad .$$

On a $Z \in Op(\Sigma^{0,1})$ et $\sigma(Z) = \sum_{j=1}^{3} a_j \xi_j$.

On désigne par $\mathfrak{z}$ la sous-algèbre de Lie de $Op(\Sigma^{0,1})$ engendrée par $Op(\Sigma^{0,0})$ et les champs singuliers Z précédents qui sont tangents aux trois hypersurfaces S_1,S_2,S_3 <u>et</u> au cône d'onde Γ , et on pose

(17) $$H^{s,s'}(k,\mathfrak{z}) = \{u \in H^{s,s'},\quad \mathfrak{z}^k.u \subset H^{s,s'}\} \quad .$$

Le point non linéaire de la preuve consiste à prouver la :

PROPOSITION 12.- *$H^{s,s'}(k,\mathfrak{z})$ est une algèbre stable par fonction C^∞ ; Si u,v sont dans $H^{s,s'}$ et Z de la forme (16), on a*

$$Z(uv) = uZ(v) + vZ(u) + M_1 u + M_2 v$$
$$Z\,F(u) = F'(u)Zu + M_3.F'(u)$$

modulo $H^{s,+\infty}$, avec $M_i \in Op(\Sigma^{0,0})$.

(On écrit $u = \pi u + Eu$, et on utilise le fait que $\tilde{Z}$ est un vrai champ de vecteur; les restes Eu , sont dans $H^{s,+\infty}$ et rentrent dans les opérateurs M , qui dépendent de u et v).

Puis on montre par récurrence sur $\ell \leq k$ qu'on a

(18) $u \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}(\ell, \mathcal{Z})$, ce qui entraine le théorème 8 (à l'exception de 3) pour lequel on montre qu'on a $M_1 \ldots M_p\, \mathcal{Z}^q u \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}$ pour $p < [s-n/2]$, $p+q \leq k$, les M_i étant des pseudo différentiels de degré 1 dont le symbole s'annule sur les conormaux à S_i , $S_i \cap S_j$) .

La preuve du point (18) utilise toute la souplesse du calcul 2 micro différentiel :

Soit $N = T_\Lambda(T^*\mathbb{R}^n)\setminus\Lambda$ le fibré normal au conormal à l'origine privé de sa section nulle, dont on note les points $\nu = (\xi,\eta,\tau\ ;\ X,Y,t)$ $(\xi,\eta,\tau) \neq (0,0,0)$; $(\hat{X},\hat{Y},\hat{t}) \neq (0,0,0)$. Pour $u \in H^{s,-\infty}$, on dit que u appartient à $H^{s,s'}$ 2.microlocalement en $\nu_0 = (\xi_0,\ldots,\hat{X}_0,\ldots)$ s'il existe $A \in op(\Sigma^{0,0})$ $\sigma(A) = \chi_1(x,\ldots)\chi_2(\xi,\ldots)$ avec χ_1 [resp χ_2] C^∞ homogène de degré 0, égale à 1 près de $(X_0,\ldots)$ [resp$(\xi_0,\ldots)$] , tel que $Au \in H^{s,s'}$.

On commence par démontrer qu'il existe des champs singuliers $Z_1,\ldots Z_L$ qui engendrent $\mathcal{Z}$ sur $Op(\Sigma^{0,0})$, qui vérifient les relations de commutation

(19) $$[\Box, Z_i] = B_i\Box + \Sigma A_{ij}Z_j + A_{i,0}$$

avec $A_{ij} \in Op(\Sigma^{2,-1})$, $B_i \in Op(\Sigma^{0,0})$, et qu'on peut les choisir tels que :

(20) $A_{i,j} \in Op(\Sigma^{1,0})$ 2.microlocalement près de

$T^*_\Gamma = \{(\xi,\eta,\tau;\ \hat{X},\hat{Y},\hat{t}) \in N\ ,\ \tau^2 = \xi^2 + \eta^2\ ,\ (\hat{X},\hat{Y},\hat{t}) = s(\xi,\eta,-\tau),\ s \in \mathbb{R}\}$.

Le point (20) est emprunté à [10] ; il permet de construire une preuve qui n'utilise pas de 3ème microlocalisation sur Γ , comme c'était le cas dans [4]. Pour $0 \leq \ell \leq k$, soit U_ρ le vecteur de composantes

$$U_\rho = (u, Z_i u, \ldots, Z_{i_1}\ldots Z_{i_\rho} u) \quad .$$

Par hypothèse, on a $U_\rho \in H^s$ pour $t < 0$. On commence la récurrence en montrant :

THÉORÈME 13.- [4] . *Si* $\Box u = f \in H^{s-3/2,1/2}$ *près de l'origine, et* $u \in H^s$ *dans* $t < 0$, *alors* $u \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}$ *près de l'origine.*

En effet, comme $\Box$ est (2,0) elliptique aux points où $\xi = 0$, on a $u \in H^{s+1/2,1/2}$ en ces points, et on peut donc supposer que $WF(u)$ ne rencontre pas $\xi = 0$; on peut aussi se ramener à $u \equiv 0$ dans $t \ll 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$, $f \in H^{s-3/2-\varepsilon,1/2+\varepsilon} \subset L^1(\mathbb{R}_t, H^{s-1-\varepsilon})$ d'où $u \in L^\infty(\mathbb{R}_t, H^{s-\varepsilon})$ et comme $WF(u) \cap \tau = 0 = \phi$ on en déduit $u \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2-\varepsilon} \subset H^{s+1/2-2\varepsilon,-1/2}$.

Par l'équation on a $\square u = f(t,x,u) \in H^s \subset H^{s-3/2, 1/2}$, donc $U_0 = u \in H^{s+1/2-\varepsilon, -1/2}$ qui est une algèbre car $s + 1/2 - \varepsilon - 1/2 > 3/2$, $s + 1/2 - \varepsilon > 3/2$, d'où $f(t,x,u) \in H^{s+1/2-\varepsilon, -1/2}$.

En utilisant la proposition 12, (19) et (20), on obtient pour tout ℓ une équation

$$\square U_\ell + R_\ell U_\ell = F_\ell \tag{21}$$

où R_ℓ est une matrice d'opérateurs dans $Op(\Sigma^{2,-1})$ et $R_\ell \in Op(\Sigma^{1,0})$ près de T^*_Γ, et où F_ℓ est une expression non linéaire construite à partir des composantes de U_ℓ et d'opérateurs dans $Op(\Sigma^{0,0})$.

En se servant de Prop. 12, il ne reste plus qu'à prouver la généralisation du théorème 13 :

THÉORÈME 14.- [5]. *Si* $\square U + RU = F \in H^{s-3/2, 1/2}$, $U \in H^s$ *pour* $t < 0$ $U \in H^{s+1/2, -3/2}$, $R \in Op(\Sigma^{2,-1})$, $R \in Op(\Sigma^{1,0})$ *près de* T^*_Γ, *alors on a* $U \in H^{s+1/2-\varepsilon, -1/2}$.

Un tel résultat est deux microlocal, et facile aux points non caractéristiques $\tau^2 \neq \xi^2 + \eta^2$ car $\square + R$ y est (2,0) elliptique. Les points mauvaix sont ceux de T^*_Γ car les "bicaractéristiques" issues de ces points passent par la section nulle de N. La preuve se fait en trois temps :

1) on prouve le résultat près des points de T^*_Γ dans $t < 0$ (en ces points on peut éliminer R par conjugaison et on est ramené à une version 2.microlocale de 13)

2) on montre le théorème de propagation des singularités 2.microlocales pour $\square + R$ en dehors de T^*_Γ, ce qui, avec le point 1), donne le résultat partout sauf sur T^*_Γ $t > 0$

3) on conclut à la sortie en se ramenant à nouveau au cas $R \equiv 0$.

Ce sont les points 1) et 3) qui imposent le choix $s' = -1/2$ comme deuxième exposant dans la preuve.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BEALS, *Self spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations*, Ann. of Math. 118 (1983) 187-214.

[2] J-M BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série 14 (1981) p.p 209-246.

[3] J-M BONY, *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1981/82, n°2.

[4] J-M BONY, *Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires*, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84,n°10.

[5] J-M BONY, *Proceedings workshop and symposium on hyperbolic equations*, Kyoto (1984).

[6] R. COIFMAN et Y. MEYER, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque 57 (1978).

[7] L. HORMANDER, *On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo differential equations*, L'enseignement Math. 1971.

[8] B. LASCAR, *Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, C.R.A.S Paris 287 A (1978) p.p 521-529.

[9] Y. LAURENT, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe* (Thèse Université de Paris-Sud, 1982).

[10] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of non linear progressing waves*.

[11] Y. MEYER, *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires*. Sém. Bourbaki, 1979-1980, n°560.

[12] M. TOUGERON, *Thèse*, Rennes 1984.

[13] J. RAUCH, *Singularities of solutions of semi-linear wave equations*, J. Math. Pures et Appl. 58 (1979) pp 299-308.

[14] J. RAUCH et M. REED, *Propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations in one space variable*, Annals of Math. 111 (1980) pp. 531-552.

[15] J. RAUCH et M. REED, *Jump discontinuities of semi-linear strictly hyperbolic systems in two variables, creation and propagation*, Comm. Math. Phys. 81 (1981), pp 203-227.

[16] J. RAUCH et M. REED, *Non-linear microlocal analysis of semi-linear hyperbolic systems in one space dimension*, Duke Math Journal 49.2 (1982) pp. 397-475.

[17] J. RAUCH et M. REED, *Singularities produced by the non linear interaction of three progressing waves ; examples*, Comm PDE 7 (1982) pp. 1117-1133.

[18] M. KASHIWARA et T. KAWAI, *Deuxième microlocalisation*, Proc. of Les Houches, 1979, Lect. notes in Physics n°126 Springer.

Gilles LEBEAU
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm

75230 PARIS CEDEX 05